Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Elektromagnetismoa I
Edukiak 2017/18

0. **Sarrera**
Karga elektrikoa. Ekarrekintza elektromagnetikoa. Lorentzen indarra. **E** eta **B** eremuak. Hutseango Maxwellen ekuazioak. Gainezarmenaren printzipioa. Ingurune makroskopikoak. Analisi bektorialaren berrikuspena.

1. **Hutseango Eremu Elektrostatikoa**
Coulomben legea. Eremu eta potentzial elektrostatikoak. Karga-banaketa sinpleek sorturiko eremu elektrostatikoa. Gaußen teorema eta bere aplikazioak. Eroaleak. Poissonen eta Laplaceren ekuazioak. Laplaceren ekuazioaren ebazpenak dimentsio bakar batean. Karga multzo baten energia elektrostatikoa. Dipolo elektrikoa.

2. **Elektrostatika Ingurune Dielektrikoetan**
Polarizazioa. Polaritaturiko dielektrikoek sorturiko eremu elektrikoa, polarizazio-kargak. Gaußen legea dielektrikoetan, desplazamendu elektriko bektorea. Materialen erlazio osagarriak, suszeptibilitate eta permitibitate elektrikoak. **E** eta **D** bektore elektrikoen muga-baldintzak. Eremu elektrikoaren energi dentsitatea.

3. **Korronte Elektrikoa**
Korronte elektrikoaren definizioa eta jatorria. Jarraitutasunaren ekuazioa. Ohmen legea. Eroankortasun elektrikoa. Jouleren legea. Indar elektroeragilea. Muga-baldintzak. Oreka elektrostatikoranzko joera.

4. **Korronte Geldikorren Eremu Magnetikoa**
Karga higikorren eta korronteen gaineko indarra: **B** eremu magnetikoa. Bioten eta Savarten legea. Korronte-banaketa sinpleek sorturiko eremu magnetikoa. Ampèreren eta Gaußen legeak eremu magnetikorako. Adibideak. Potentzial bektorea. Urrun kokaturiko korronte-zirkuituak sorturiko eremu magnetikoa: momentu magnetikoa.

5. **Eremu Magnetikoa Ingurune Materialetan**
Momentu magnetiko atomikoak: orbitala eta espinekoa. Magnetizazioa. Magnetizaturiko inguruneak sorturiko eremu magnetikoa, magnetizazio korronteak. Gaußen eta Ampèreren legeak ingurune materialetan. **H** bektorea. Suszeptibilitate eta iragazkortasun magnetikoak. Histeresia. Muga baldintzak. Zirkuitu magnetikoak.

6. **Indukzioa eta Energia Magnetikoa**
Indukzio elektromagnetikoa. Faraday-Henry legea. Akoplamendu magnetikoa: autoindukzioa eta zirkuituen arteko elkar-induktantzia. Akoplaturiko zirkuituen energia magnetikoa. Energi dentsitatea eremu magnetikoan.

7. **Maxwellen Ekuazioak eta Uhin Elektromagnetikoak**
Ampèreren legearen orokorpena. Desplazamendu-korrontea. Maxwellen ekuazioak. Eremu elektromagnetikoaren energia. Poyntingen bektorea. Uhin-ekuazioa. Uhin lau eta monokromatikoak ingurune ez-eroale perfektuetan. Espektro elektromagnetikoa.

Bibliografia

- *Foundations of electromagnetic theory*, John R. Reitz, Frederic J. Milford, Robert W. Christy, 4th ed. Pearson/Addison-Wesley, 2008.
- *Introduction to Electrodynamics*, David Griffiths, Pearson 2013. (Laugarren edizioa 2017ko ekainan agertu da Cambridge University Press argitaletxearen eskutik!)
- *Fundamental University Physics VOLUME II*, Marcelo Alonso and Edward J. Finn, Addison-Wesley 1967.
- *Berkeley Physics Course: Electricity and Magnetism v. 2* , Edward M. Purcell, McGraw-Hill, 1986.
- *Fisika zientzialari eta ingeniarientzat. 2. bolumena*, Paul M. Fishbane, Stephen Gasiorowicz and Stephen T. Thornton, UPV/EHU Argitalpen Zerbitzua, 2014. (Ikus 22.etik - 46.era gaiak).
- *Classical Electromagnetism in a Nutshell*, Anumpam Garg, Princeton University Press 2012.

Ebaluazioa

Azaroan (eguna zehazteke) azterketatxo bat egingo dugu, eta azterketa finala urtarrilan. Azaroko azterketa ikasleon laguntzarako egiten dugu, baina ez dugu nota finalean kontuan hartuko. Azterketa horren helburua ikasleok euren prestakuntza maila momentu hartan hobeto jakitea. Nota finaleko zalantzazko kasuetan hobetzeko kontuan har daiteke, besterik ez.

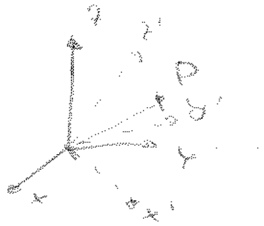
Azterketen arauak

Azterketetan ezin duzue inolako kanpo materialik erabili. Irakasleok prestatuko dugu formula orri bat eta eskuragai izango duzue. Berriro ere: irakasleok azterketan bertan emandako formula orria. Ezin duzue besterik erabili. Hori bai, nahiz gero, kalkulagailua. Azterketetan ezin duzue poltsiko telefonua eskuragai izan; hori zure ohiko erlojua bada, lortu beste bat azterketan izateko.

SARRERA

• BEKTORE ANALISIA

- **BEKTOREA:** Biraketa batekin aldatzen dena.
- **ESKALARRA:** Biraketarekin aldatzen ez dena.
- **BIRAKETA:** · Ardatza: $\vec{R}$
  · Angelua: α



$x, y, z \Rightarrow x', y', z'$

$x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2 \Rightarrow$ zentroarekiko distantzia bera.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{non } R = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \qquad \boxed{R^t \cdot R = I}$$

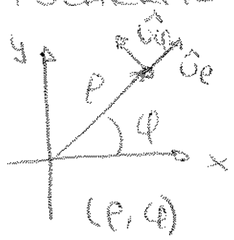
$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad x^2+y^2+z^2 = \underset{\sim}{x}^t \cdot \underset{\sim}{x} \qquad \boxed{\underset{\sim}{x}' = R\,\underset{\sim}{x}} \Rightarrow \boxed{x_i' = R_{ij} \cdot x_j}$$

Hortaz, R biraketa matrize bat da.

EINSTEINen HITZARMENA: $x_i' = R_{ij} \cdot x_j$; $\quad x_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} \cdot x_j$

- **KOORDENATU EZ-KARTESIARRAK:**

→ POLARRAK:



$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

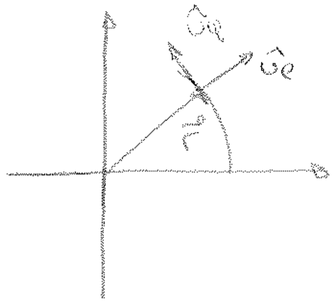
$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

$\hat{u}_\rho \Rightarrow \rho$ handiagotzen den norabidean

$\hat{u}_\varphi \Rightarrow \varphi$ handiagotzen den norabidean

$\hat{e}_\rho(\vec{r}) \cdot \hat{e}_\varphi(\vec{r}) = 0$

$\hat{e}_\rho(\vec{r}) \cdot \hat{e}_\varphi(\vec{s}) = ??$



$$\vec{r} = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \hat{e}_x + \rho \cdot \sin\varphi \, \hat{e}_y$$

$$\rightarrow \hat{e}_\rho(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\rho} = \cos\varphi \cdot \hat{e}_x + \sin\varphi \cdot \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_\varphi(\rho \cdot \hat{e}_x) = \hat{e}_y$$

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow R(\varphi) \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\varphi \\ \rho \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Hortaz, edozein $\vec{r}$-ren $\vec{u}_\varphi$ lortzeko, soilik $\hat{e}_y$-ri $R(\varphi)$ aplikatu behar diogu:

$$R(\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \hat{e}_\varphi(\vec{r}) = -\sin\varphi \, \hat{e}_x + \cos\varphi \, \hat{e}_y$$

- koordenatu kartesiarretan:

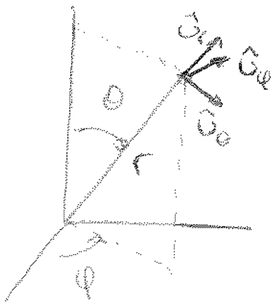
$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(\vec{r}) \, \hat{e}_x + A_y(\vec{r}) \, \hat{e}_y \quad \text{non} \quad A_j(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) \, \hat{e}_j$$

- koordenatu polarretan:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_\rho(\vec{r}) \cdot \hat{e}_\rho(\vec{r}) + A_\varphi(\vec{r}) \cdot \hat{e}_\varphi(\vec{r})$$

$$\text{non} \quad A_i(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{e}_i(\vec{r})$$

→ ESFERIKOAK:



$$x = r \cdot \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$\hat{u}_r(\vec{r}) = (\sin\theta \cdot \cos\varphi) \cdot \hat{e}_x + (\sin\theta \cdot \sin\varphi) \, \hat{e}_y + \cos\theta \, \hat{e}_z$$

$$\hat{u}_\theta(\vec{r}) = (\cos\theta \cos\varphi) \, \hat{e}_x + (\cos\theta \cdot \sin\varphi) \, \hat{e}_y - \sin\theta \, \hat{e}_z$$

$$\hat{u}_\varphi(\vec{r}) = -\sin\varphi \, \hat{e}_x + \cos\varphi \, \hat{e}_y$$

Polarren era berean, $\vec{A}(\vec{r})$ $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ eta $\hat{u}_\varphi$-ren menpe adieraz dezakegu

- ERAGILE DIFERENTZIALAK eta KOORDENATU ORTOGONALAK

→ GRADIENTEA:

2D $\nabla f = \hat{e}_x \cdot (\partial_x f) + \hat{e}_y (\partial_y f)$

$\nabla = \hat{e}_x \partial x + \hat{e}_y \partial y + \hat{e}_z \partial z$

→ DIBERGENTZIA: $\nabla \cdot \vec{A}$

Demagun $\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y$

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y$ → kartesiarretan.

Polarretara pasatzeko? Bi era:

e) kateairen erregela:

$$\partial_x \cdot A_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_x}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_x}{\partial \varphi} = \circledast$$

$$\left.\begin{aligned} A_x &= A_\rho \cdot \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi \\ A_y &= A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

Hau lortzeko:

$A_x = \hat{e}_x \cdot \vec{A}$ → polarretan

$A_y = \hat{e}_y \cdot \vec{A}$ ✓

$$\circledast = \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial A_\rho}{\partial x} - \sin\varphi \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\cos\varphi \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \sin\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \sin\varphi A_\rho - \cos\varphi \cdot A_y\right) = \circledast$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\frac{y}{x} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$\circledast =$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \partial_\rho \cdot A_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \partial_\varphi \cdot A_\varphi$$

ii) $\hat{e}_\rho(\rho,\varphi) = \cos\varphi \cdot \hat{e}_x + \sin\varphi \cdot \hat{e}_y$

$\hookrightarrow \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho} = 0$

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\, \hat{e}_x + \cos\varphi\, \hat{e}_y = \hat{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \cancel{\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho}}^{0} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}\ \hat{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \cdot \hat{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{\rho}\ \hat{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \cdot \hat{e}_\rho$$

$$\hat{e}_x \cdot [\partial_x (A_\rho\ \hat{e}_\rho + A_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi)] + \hat{e}_y [\partial_y (A_\rho \cdot \hat{e}_\rho + A_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi)]$$

iii) $\partial_x = \cos\varphi \cdot \partial_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho} \partial_\varphi$

$\partial_y = \sin\varphi\ \partial_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho} \partial_\varphi$

$\hat{e}_x = \cos\varphi\ \hat{e}_\rho - \sin\varphi \cdot \hat{e}_\varphi$

$\hat{e}_y = \sin\varphi\ \hat{e}_\rho + \cos\varphi \cdot \hat{e}_\varphi$

$$\hat{e}_x \partial_x + \hat{e}_y \partial_y = (c \cdot \hat{e}_\rho - s \cdot \hat{e}_\varphi)(c\,\partial_\rho - \frac{s}{\rho} \partial_\varphi) + (s \cdot \hat{e}_\rho + c\, \hat{e}_\varphi)(s\,\partial_\rho + \frac{c}{\rho} \partial_\varphi) =$$

$$= \hat{e}_\rho \cdot \partial_\rho + \frac{\hat{e}_\varphi}{\rho} \cdot \partial_\varphi$$

Zilindrikoetan → $\vec{\nabla} = \hat{e}_\rho \partial_\rho + \frac{\hat{e}_\varphi}{\rho} \partial_\varphi + \hat{e}_z \partial_z$

Esferikoetan → $\hat{e}_r \partial_r + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{\hat{e}_\varphi}{r \sin\theta} \partial_\varphi$

ERROTAZIONALA → $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{D} T_{kk} \delta_{ij}\right)}_{\text{zati simetrikoa}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)}_{\text{zati antisimetrikoa}} + \underbrace{\frac{1}{D} T_{kk} \delta_{ij}}_{\text{aztarna}}$$

Aztarna → Tr(A) = Aren diagonaleko balioen batura.

$\underline{3D}$ $\quad \nabla \wedge \vec{A} \rightarrow \begin{cases} \vec{A} \text{ pseudobektorea} \rightarrow \nabla \wedge \vec{A} \text{ benetako bekt.} \\ \vec{A} \text{ benetako bekt} \rightarrow \nabla \wedge \vec{A} \text{ pseudobektorea} \end{cases}$

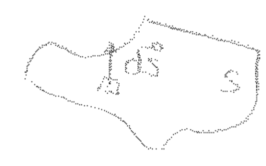
⇒ ∇^2 Laplaceana = $\nabla \cdot (\nabla \phi)$ = div(grad ϕ)

- INTEGRAZIOA

<u>3Dn</u> - Lerro integralak

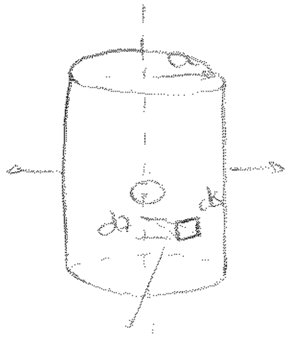
- Gainazal integralak
- Bolumeneko integralak

↳ Gainazal integralak



S: $F(x,y,z) = C$

$d\vec{S} = dS\, \hat{n} \qquad \hat{n} \parallel \nabla F$



$S \Rightarrow F(x,y,z)?$

$$x^2+y^2=a^2$$

$$\nabla(x^2+y^2) = 2(x\,\hat{u}_x + y\,\hat{u}_y) = 2a(\cos\varphi\,\hat{u}_x + \sin\varphi\,\hat{u}_y) =$$
$$= 2a\,\hat{u}_\rho$$

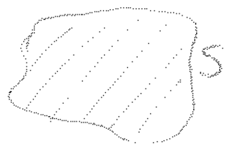
$$\Rightarrow d\vec{S} = dS\cdot\hat{n} = a\cdot d\varphi\cdot dz\,\hat{u}_\rho$$

- **INTEGRAZIO-TEOREMAK:**

- DIBERGENTZIAREN TEOREMA:

$$S = \partial V \quad \Rightarrow \int_V d^3\vec{r}\ \nabla A = \int_{\partial S} d\vec{S}\cdot\vec{A}$$

- STOKES-en TEOREMA:



$$\int_S d\vec{S}\cdot(\nabla\wedge\vec{A}) = \int_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

$\partial S = C$

Elektromagnetismoa I — Kalkulua

1. Froga ezazu ondokoa:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2$$

2. Biz $\Phi(x,y,z)=x^2yz+y^3-z^2$ eremua. Kalkula ezazu $2\mathbf{u}_x-2\mathbf{u}_y+\mathbf{u}_z$ bektorean zeharko bere deribatua, (2,1,3) puntuan.

3. Biz $\mathbf{a}=-y\mathbf{u}_x+x\mathbf{u}_y+k\mathbf{u}_z$ bektore eremua, non k konstante den. Lor itzazu eremu-lerroak. Idatz ezazu bektore eremua koordenatu zilindrikoekin, eta froga ezazu solenoidala dela.

4. Lor itzazu $x^2-y^2-z^2=11$ eta $xy+yz-xz=18$ gainazalekiko unitate bektore normalak (6,4,3) puntuan. Hori erabiliz, kalkula ezazu bi gainazalek osatutako angelua.

5. Biz $\mathbf{a}=f(r)\mathbf{r}$. Kalkula ezazu bere dibergentzia.

6. Biz $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ non $\boldsymbol{\omega}$ bektore konstantea den. Froga ezazu ondokoa:

$$\nabla\times\mathbf{v}=2\,\boldsymbol{\omega}$$

7. Froga ezazu ondokoa:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})-\nabla^2\mathbf{a}$$

8. Froga ezazu ondokoa: $\nabla^2(r^{-1})=0\ (r>0)$.

9. Demagun $\mathbf{a}=(2x+y-2z)\mathbf{u}_x+(2x-4y+z^2)\mathbf{u}_y+(x-2y-z^2)\mathbf{u}_z$; kalkula ezazu

$$\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}\,,$$

non C 5 erradioko zirkunferentzia den, $(0,0,3)$ puntuan zentraturik, $z=3$ planoan murgildua, eta erlojuaren kontrako noranzkoan zeharkatua.

10. Biz $\Phi=x^2y^2z^2$, eta demagun S $x^2+y^2=9$ zilindroaren alboa, $z=0$ eta $z=2$ planoen artean, lehenengo koadrantean ($x\geq 0$, $y\geq 0$). Kalkula ezazu

$$\int_S \Phi\, d\mathbf{S}\,.$$

11. Demagun $\mathbf{a}=x\mathbf{u}_x+xy\mathbf{u}_y+xyz\mathbf{u}_z$. Kalkula ezazu $\int_S\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S}$ non S $x^2+y^2+z^2=4$ esferaren gainazala den.

12. Biz $\mathbf{a}=xy\mathbf{u}_x+(x^2+y^2+z^2)\mathbf{u}_y-z^2\mathbf{u}_z$. Kalkula ezazu $\int_V\mathbf{a}\,dV$, non V jatorrian kokatutako 2 erradioko esfera den.

13. Egiazta ezazu dibergentziaren teorema $\mathbf{a}=x\mathbf{u}_x+xy\mathbf{u}_y+xyz\mathbf{u}_z$ kasurako, non S $x^2+y^2+z^2=4$ esferaren gainazala den.

14. Biz $\mathbf{a}=(2x+y-2z)\mathbf{u}_x+(2x-4y+z^2)\mathbf{u}_y+(x-2y-z^2)\mathbf{u}_z$. Erabil ezazu Stokesen teorema $\oint_C\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$ kalkulatzeko, C zirkunferentzia izanda, $(0,0,3)$ puntuan zentratuta, 5 erradiokoa, $z=3$ planoan murgilduta.

1. ΑΣΚΗΣΗ

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\overset{①}{[}(\vec{b}\wedge\vec{c})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a})] = [\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})]^2$$

1) Levi - Civita $\Rightarrow \varepsilon_{ijk}$
- $\to (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2) \quad = 1$
- $\to (1,3,2)\ \ldots \quad = -1$
- $\to i=j,\ i=k,\ j=k \quad = 0$

$(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \varepsilon_{ijk}\cdot a_j\, b_k$

$\varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{ilmn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

① τ. [illegible]

$$\varepsilon_{ijk}\ a_j\cdot b_k\cdot\varepsilon_{ilm}[\varepsilon_{lrs}\cdot b_r\cdot c_s\,\varepsilon_{mtu}\cdot c_t\cdot a_u] =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{ilm}\cdot\varepsilon_{lrs}\cdot\varepsilon_{mtu}\ a_j\cdot a_u\cdot b_k\cdot b_r\, c_s\, c_t =$$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\,\varepsilon_{lrs}\,\varepsilon_{mtu}\ a_j\cdot a_u\cdot b_k\cdot b_r\cdot c_s\cdot c_t =$$

$$= (\varepsilon_{jrs}\cdot\varepsilon_{ktu} - \varepsilon_{krs}\,\varepsilon_{jtu})\ a_j\, a_u\, b_k\, b_r\, c_s\, c_t =$$

$$= [\vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c})][\vec{b}(\vec{c}\wedge\vec{a})] - [\vec{b}\cdot\cancelto{0}{(\vec{b}\wedge\vec{c})}]\cdot[\vec{a}(\vec{c}\wedge\vec{a})] =$$

$$= [\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})]^2$$

2) $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\underbrace{(\vec{b}\wedge\vec{c})}_{\vec{A}}\wedge(\overset{\vec{B}}{\vec{c}}\wedge\overset{\vec{C}}{\vec{a}}) = [\vec{a}$

2. ARIKETA

$\phi(x,y,z) = x^2yz + y^3 - z^2$

$\vec{a} = 2\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + \vec{u}_z$

$P = (2,1,3)$

$\frac{d}{d\vec{a}} \phi(P)$?

$\frac{d}{d\vec{a}} \phi(P) = \hat{n}_a \cdot \nabla\phi(P)$

$\hat{n} = \frac{\vec{a}}{a}$

$a = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \Rightarrow \hat{n} = \frac{1}{3}(2\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + \vec{u}_z)$

$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z =$

$= 2xyz\,\vec{u}_x + (x^2z + 3y^2)\vec{u}_y + (x^2y - 2z)\vec{u}_z$

$\nabla\phi(P) = 12\vec{u}_x + 15\vec{u}_y - 2\vec{u}_z$

$\hat{n}_a \cdot \nabla\phi(P) = -8/3$

4. ARIKETA

$S_1 \equiv x^2 - y^2 - z^2 = 11$

$S_2 \equiv xy + y \cdot z - xz = 18$

a) kalkulatu $\hat{n}_{S_1}$ eta $\hat{n}_{S_2}$ $P = (6,4,3)$ puntuan.

konprobatuko dugu $P \in S_1$ eta $P \in S_2$

$S_1(P) = 6^2 - 4^2 - 3^2 = 11$ ✓

$S_2(P) = 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 18$ ✓

$\hat{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}$

$S_1 = x^2 - y^2 - z^2 \Rightarrow \nabla S_1 = 2x\vec{u}_x - 2y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z = 2(x\vec{u}_x - y\vec{u}_y - z\vec{u}_z)$

$|\nabla S_1| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\hat{n}_{S_1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x\cdot\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\cdot\vec{u}_z) = \frac{1}{\sqrt{61}} (6\vec{u}_x - 4\vec{u}_y - 3\vec{u}_z)$$

$$\hat{n}_{S_2} = \frac{1}{\sqrt{86}} (\vec{u}_x + 9\vec{u}_y - 2\vec{u}_z)$$

b) kalkulatu bi angeluek osatzen duten angelua.

$$\hat{n}_{S_1}\cdot\hat{n}_{S_2} = n_{S_1}\cdot n_{S_2}\cdot\cos\theta$$

7. ARIKETA

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{a}) = \nabla(\nabla\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$$

a) $(\nabla\wedge\vec{a}) = \varepsilon_{ijk}\cdot\partial_j\, a_k$

$$[\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{a})]_i = \varepsilon_{ijk}\cdot\partial_j\cdot \varepsilon_{klm}\cdot\partial_l a_m = \varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{klm}\cdot\partial_j\partial_l\, a_m =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\cdot\partial_j\cdot\partial_l\cdot a_m = \partial_i\cdot\partial_m\cdot a_m - \partial_l\cdot\partial_l\cdot a_i =$$

$$= [\nabla(\nabla\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}]_i$$

b)

$$\nabla\wedge\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\vec{u}_x + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\vec{u}_y + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\vec{u}_z$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{a}) = \begin{vmatrix} \\ \\ \end{vmatrix} = [\partial_y(\partial_x a_y - \partial_y a_x) - \partial_z(\partial_z a_x - \partial_x a_z)]\vec{u}_x + \ldots =$$

$$= (\partial_y \partial_x a_y - \partial_y \partial_y a_x - \partial_z \partial_z a_x + \partial_z \partial_x a_z)\hat{u}_x + \dots =$$

$$= (\partial_y \partial_x a_y - \partial_y^2 a_x - \partial_z^2 a_x + \partial_z \partial_x a_z)\hat{u}_x + \dots =$$

$$= (\partial_x (\partial_y a_y + \partial_z a_z) - \partial_y^2 a_x - \partial_z^2 a_x + \partial_x^2 a_x - \partial_x^2 a_x)\hat{u}_x + \dots =$$

$$= [\partial_x (\partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z) - (\partial_x^2 a_x + \partial_y^2 a_x + \partial_z^2 a_x)\hat{u}_x + \dots =$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

9. ARIKETA

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{a} = (2x + y - 2z)\hat{u}_x + (2x - 4y + z^2)\hat{u}_y + (x - 2y - z^2)\hat{u}_z$$

C: $R = 5$ $P = (0,0,3)$ $z = 3$ planoan. $\Rightarrow x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

$$\vec{r}(t) = 5\cos t\,\hat{u}_x + 5\sin t\,\hat{u}_y + 3\,\hat{u}_z$$

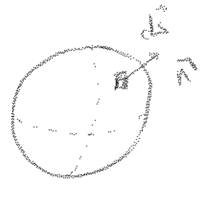
$$d\vec{r} = (-5\sin t\,\hat{u}_x + 5\cos t\,\hat{u}_y)\,dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = (-25\sin^2 t + 50\cos^2 t - 150\sin t \cos t + 30\sin t + 45\cos t)\,dt$$

$$\oint_C \vec{a}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\qquad)\,dt = 25\pi$$

11. ARIKETA

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{s}, \quad \vec{a} = x\,\hat{u}_x + xy\,\hat{u}_y + xyz\,\hat{u}_z \qquad S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$$



$$d\vec{s} = \hat{n} \cdot ds$$

$$\hat{n}(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{u}_y + \cos\theta\,\hat{u}_z \qquad \begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$\int_S \vec{a}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, R^2 \left[R\sin^2\theta\cos^2\theta + R^2\sin^3\theta\,\sin^2\varphi\cos\varphi + R^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi \right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

Karga adierazteko karga-dentsitatea erabili daiteke.

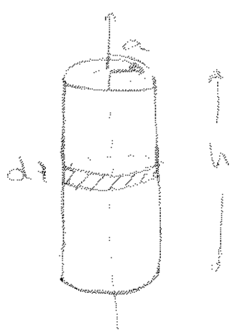
↳ Nahiz eta karga KUANTIZATUA egon, geure eskalaraean karga-dentsitatea jarraitutzat har dezakegu

- $\rho(\vec{r})$ BOLUMENEKO KARGA DENTSITATEA $\Rightarrow Q(V) = \int_V d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})$

- $\sigma(\vec{r})$ GAINAZALEKO KARGA DENTSITATEA $\Rightarrow Q(S) = \int_S d^2\vec{r}\, \sigma(\vec{r})$

- $\lambda(\vec{r})$ KARGA-DENTSITATE LINEALA $\Rightarrow Q(\Gamma) = \int_\Gamma d\vec{r}\cdot \lambda(\vec{r})$

Batzuetan erlazioak egin daitezke:



$h \gg a$

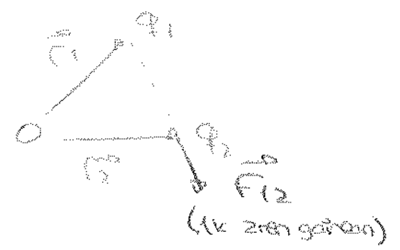
$$\Rightarrow dQ = \begin{cases} \lambda(z)\cdot dz \\ \int_0^a dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho(r,\varphi,z)\cdot dz \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda(z) = \int_0^a dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho(r,\varphi,z)}$$

→ ELKARREKINTZAK:

Badakigu geldirik dauden kargen artean elkarrekintza dagoela.

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \text{alderantziko modua: } \vec{F} = q \cdot \vec{E}$$



$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

q_2-k ez du $\vec{E}$-rik sortzen $\vec{r}_2$-n

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8'98 \cdot 10^9 \, kg \, m^3 \, s^{-2} \, C^{-2}$$

$$\varepsilon_0 = 8'854 \cdot 10^{-12} \, C^2 \, m^{-2} \, N^{-1}$$

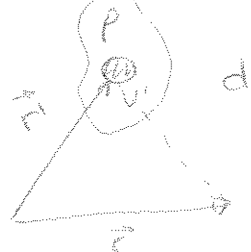
$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Orain E-ren karga sortzailea jatorrian kokatzen dugula:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r} = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}\right)$$

Karga asko badaude, GAINEZARMEN PRINTZIPIOA aplikatzen da.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

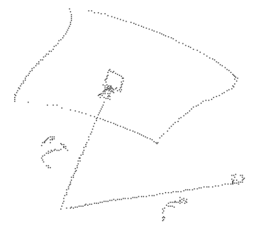


$$dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \cdot dV' \Rightarrow d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V d^3r' \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

σ:

$$dq(\vec{r}\,') = \sigma(\vec{r}\,')\, ds'$$



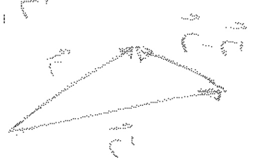
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} d^2r' \, \frac{\sigma(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

- POTENTZIALA:

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\partial_x\left(\frac{1}{r}\right) = \partial_x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3}$$

- $\vec{r}, \vec{r}\,'$



$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) &= -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \\ \nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) &= \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \end{aligned}\right\} \text{Diferentzio zeinuan}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{d^3\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Ekuazio honek bolumeneko karga banaketa jarraituaren kasurako ere, kasu guztiak adierazten ditu, $\rho(\vec{r}\,')$ ere egokiro aukeratuz.

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

δ: DIRAC-en DELTA $\Rightarrow$ $\langle \delta, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\,\delta(x) = f(0)$

$$[\delta] = \frac{1}{[x]} \qquad\qquad \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0)$$

δ DISTRIBUZIOA da, ez FUNTZIOA

$f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) \rightarrow$ funtzioa

$f(x) \cdot \delta(x) = f(0) \cdot \delta(x) \rightarrow$ distribuzioa

$$\int_{\mathbb{R}} dx \cdot g(x) [f(x) \cdot \delta(x)] = g(0)\, f(0) = \int_{\mathbb{R}} dx \cdot g(x) \cdot [f(0)\, \delta(x)]$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r_i}) = \delta(x - x_i)\, \delta(y - y_i)\, \delta(z - z_i)$$ $\rightarrow$ Ez da biderkadura, integral hirukoitzean dauden notazioa da honela.

$$\int d^3\vec{r}\; f(\vec{r})\, \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r_i}) = f(\vec{r_i})$$

$$E(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{d^3 r'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,') \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \; ; \quad \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}$$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r_i})$$

$$E(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{d^3 \vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,') \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\int_{V'} \frac{d^3 r'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \rho(\vec{r}\,')\, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} =$$

$$= -\nabla \int_{V'} \frac{d^3 \vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\nabla \phi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3 \vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Hortik ondorioztatu dezakegu indar elektrostatikoa indar KONTSERBAKORRA dela

↳ Egindako lana ez dago ibilbidearekiko menpe.

Hori esateko beste modu bat:

$\nabla \wedge \vec{E} = 0$ Elektrostatikan

$$\nabla \wedge (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} = (\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f)\hat{u}_x + \ldots = 0$$

Ondorioz, $\nabla \wedge \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \nabla F$
(baldintza)

- GAUSS

→ Gauss-en teorema:

$$\int_{\partial V} d\vec{S}\, \vec{A} = \int_V d^3\vec{r}\, \nabla \vec{A}$$

↳ Bolumenaren mugia (gainazala)

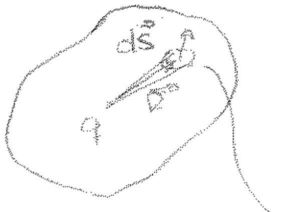
- Elektrostatikan:

$$\int_{\partial V} d\vec{S}\, \vec{E} = \int_V d^3\vec{r}\, \nabla \vec{E} = \int_V d^3\vec{r}\,(-\nabla(\nabla\phi)) = -\int_V d^3\vec{r}\, \nabla^2\phi =$$

$$\left[\nabla^2\phi(\vec{r}) = \nabla^2 \int \frac{d^3\vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \frac{d^3\vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0} \rho(\vec{r}')\, \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r}) = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}$$

→ Gauß II

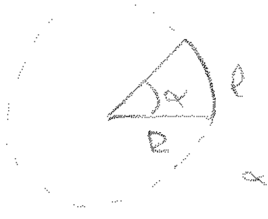


Φ fluxua ($\neq \phi$ potentziala)

$$\Phi(S) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

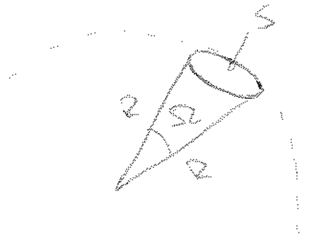
$d\Phi = d\vec{S}\, \vec{E}$

$$\boxed{d\Phi = d\vec{S}\cdot\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dS\cdot\cos\theta}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dS'}{R^2} = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot d\Omega}}$$



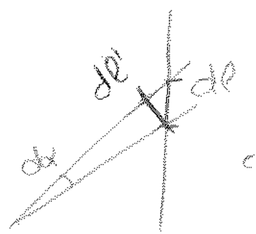
$\alpha = \frac{l}{R}$

↳ ANGELU LAUA

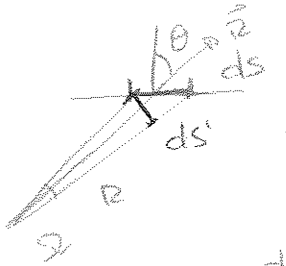


$\Omega = \frac{S}{R^2}$

ANGELU SOLIDOA

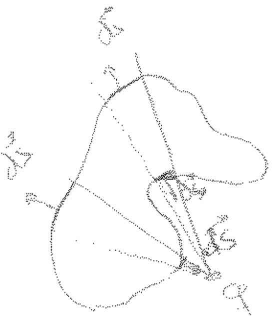


$d\alpha = \frac{dl'}{R}$



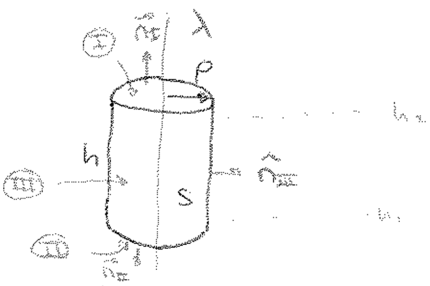
$d\Omega = \frac{dS'}{R^2}$

$dS' = \frac{dS}{\cos\theta}$



karga gainazaletik kanpo dagoenean, gainazalean zeharreko fluxu totala nulua da. Hala ere, horrek ez du esan nahi $d\vec{S}$ bakoitzean fluxurik ez dagoenik.

→ Hari infinitua:



Gainazal Gaussiarra

* Ohartu haria [illegible] denez, ezin dugu bereizi h_1 eta h_2 ezberdinak. $\partial_z\Phi = 0$
↳ $\partial_\varphi\Phi = 0$

Hortaz, koordenatu zilindrikoak erabiliko ditugu.

$$\left.\begin{aligned} &\text{I}\quad \hat{n}_I = \hat{u}_z \perp \vec{E} \\ &\text{II}\quad \hat{n}_{II} = -\hat{u}_z \perp \vec{E} \end{aligned}\right\}\quad \text{Hor } \Phi = 0$$

$\boxed{III}$ $\hat n_{III} = \hat u_\rho$

$$\Phi_{III} = \int_{S_{III}} d\vec s \cdot \vec E(\rho) = \int_{S_{III}} ds \cdot E(\rho) = 2\pi\rho h E(\rho)$$

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_{II} + \Phi_{III} \overset{Gauss}{=} \frac{Q(\omega)}{\varepsilon_0}$$

$$Q(\omega) = \lambda \cdot h$$

$$2\pi\rho h E(\rho) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\vec E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\hat u_\rho$$

Potentziala: $\phi(\rho) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\rho/\rho_0\right)$

- EROALEAK

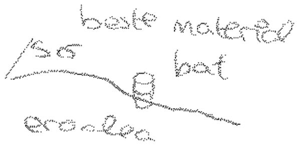
Ez dago egoera elektrostatikorik non eroale perfektu batean $\vec E$ bat dagoen.

↳ Potentziala konstantea da.

*Eroale perfektuan ez dago kargarik barruan.

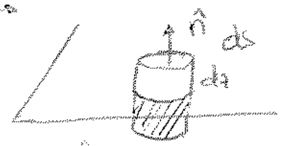
$\Phi = kte \to \nabla^2\Phi = 0 \Leftrightarrow$ Poisson: $\rho = 0$

Hala ere, gerta daiteke gainazalean (mugan) karga egotea.



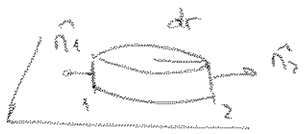
$\vec E$ mugan?

↳



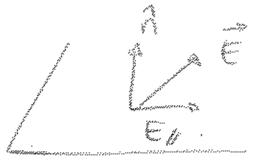
↳ Hemen ez dago $\vec E$-rik eroalean gaudelako!

$\Phi(\text{⊖}) = ?$ →



$dr\,d\varphi\,dz(\vec E_1 \cdot \hat n_1 + \vec E_2 \cdot \hat n_2) \sim \hat n_1 (\vec E_1 - \vec E_2)\,dr\,d\varphi\,dz$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = ds \cdot \vec{E} \cdot \hat{n} \\ Q = \sigma \, ds\end{array}\right\} \quad \boxed{\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

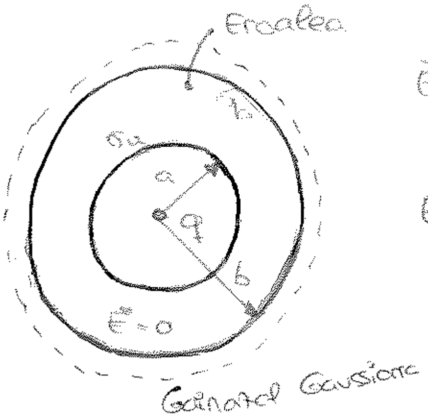


$\vec{E}$ $\hat{n}$-rekiko paraleloa ez balitz, bere osagai batek kargak gainazalean zehar mugiaraziko lituzke.

Hortaz, ELEKTROSTATIKAN $\vec{E} \parallel \hat{n}$

$$\boxed{\vec{E}\big|_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{n}}$$

↳ Adibidea:



$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \begin{cases} 1, & r<a \\ 0, & a<r<b \\ ?, & r<b \end{cases}$$

↳ ×1

$$\underbrace{\hat{u}_r}_{\hat{n}} \cdot \underbrace{E(r)\,\hat{u}_r}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\sigma_a \, 4\pi a^2 = -q \Rightarrow \sigma_a = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b \, 4\pi b^2 = q \Rightarrow \sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2}$$

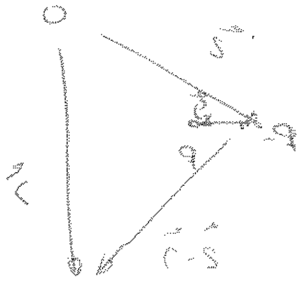
σ-k ateratzeko beste modu bat:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_a = \varepsilon_0 \, \vec{E}_a \cdot \hat{n}_a \overset{\hat{n}_a = -\hat{u}_r}{=} -\varepsilon_0 \, E(a) = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b = \varepsilon_0 \, \vec{E}_b \cdot \hat{n}_b = \varepsilon_0 \, E(b^+) = \frac{q}{4\pi b^2}$$

$$\hat{n}_b = \hat{u}_r$$

- GARAPEN MULTIPOLARRA



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{s}-\vec{l}|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{s}|}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{l}\cdot(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} + \dots$$

$$|\vec{r}-\vec{s}| >> |\vec{l}|$$

$$r = |\vec{r}| >> |\vec{s}| = s$$

$$\varepsilon = \frac{s}{r} << 1$$

$$|\vec{r}-\vec{s}|^{-1} = \left[(\vec{r}-\vec{s})^2\right]^{-1/2} = \left[\vec{r}^2 - 2\vec{r}\vec{s} + \vec{s}^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{2s\cos\theta}{r} + \frac{s^2}{r^2}\right]^{-1/2} = (*)$$

Taylor: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots$

Batza hori erabili bakarrik garapen ezagunak erabiltzen ditugu:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

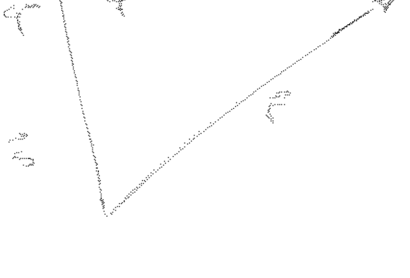
$$f = O(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f}{g}\right| < \infty$$

$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f}{g}\right| = 0$$

$$(*) = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2s}{r}\cos\theta + \frac{s^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\dots\right.\right.$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{s}{r}\cos\theta - \frac{s^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{s^2}{r^2}\cos^2\theta + O\left(s^3/r^3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{s}{r^2}\cos\theta + \frac{s^2}{2r^3}(3\cos^2\theta - 1) + O\left(s^3/r^4\right)$$



$$\phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{R}-\vec{l}|} - \frac{q}{|\vec{R}|}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left[\cancel{1} + \frac{l}{R}\cos\theta + \frac{l^2}{2R^2}(3\cos^2\theta - 1) + O\left(\frac{l^3}{R^3}\right) - \cancel{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{q\,l\cos\theta}{R^2}}_{\text{gai dipolarra}} + \underbrace{\frac{q l^2}{2R^3}(3\cos^2\theta - 1)}_{\text{gai kuadrupolarra}} + \underbrace{\dots}_{\text{Gai oktopolarra}}\right]$$

$$\vec{p} = q\cdot\vec{l}$$

$\vec{p} \cdot \vec{R} = q \cdot \vec{\ell}\, \vec{R} = q \ell R \cos\theta$

$$\phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3} + \dots$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}$$ $\Rightarrow$ dipolo ideale hotel sarebbe POTENZIALE elettrostatico

Dunque $\boxed{q \to \infty \quad q \cdot \ell \text{ finito mantenuto} \quad \ell \to 0}$ Questo già rappresenta a parte, già quello ovunque?

↳ DIPOLO IDEALE

(Ma se vogliamo da dipolo sarebbe CAMPO elettrostatico)

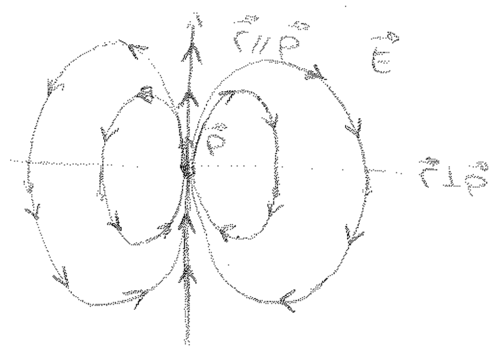
$\vec{E} = -\nabla(\phi) = -\nabla(\phi_1 + \phi_2) = -\nabla\phi_1 - \nabla\phi_2 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$\vec{E}_{dipolo} = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}\right)$ $\Rightarrow$ Non scritto $\nabla(g(\vec{r})\, f(\vec{r})) = g \cdot \nabla f + \nabla g\, f$

$\nabla(1/R^3) = -\frac{3}{R^4} \nabla R = -\frac{3\vec{R}}{R^5}$

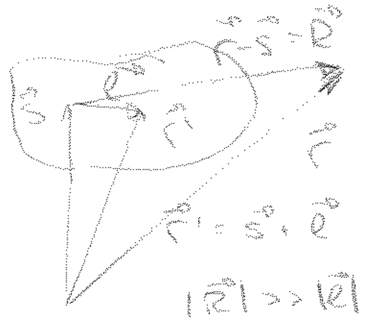
$\nabla(\vec{p}\cdot\vec{R}) = \vec{p}$

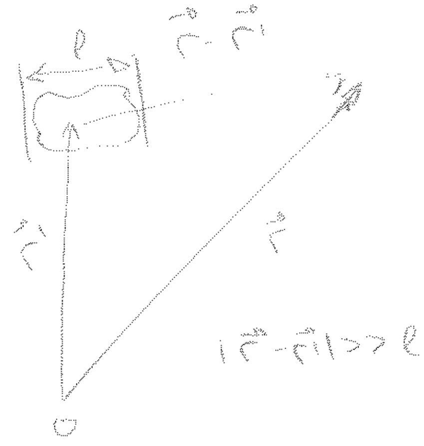
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right]$$



– KARGA BANAKETAREN GARAPEN MULTIPOLARRA

$$\phi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec r'\,\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$





$$\phi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec\ell\,\frac{\rho(\vec s+\vec\ell)}{|\vec r-\vec s-\vec \ell|}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec\ell\,\frac{\rho(\vec s+\vec\ell)}{R}\left[1+\frac{\vec\ell\cdot\vec R}{R^2}+\frac{1}{2R^2}\left[\frac{3(\vec\ell\cdot\vec R)^2}{R^2}-\ell^2\right]+\dots\right]$$

$$\int d^3\vec\ell\cdot\rho(\vec s+\vec\ell)=Q$$

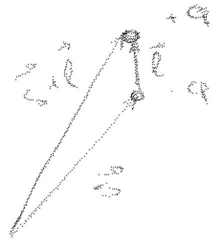
$\int d^3\vec\ell\,\rho(\vec s+\vec\ell)\vec\ell=\vec P_s \Rightarrow$ s puntuarekiko momentu dipolarra

$$\phi(\vec r)=\underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}}_{\text{Gai monopolarra}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec P\cdot\vec R}{R^3}}_{\text{Gai dipolarra}}+\dots$$

Normalean kar puntu bezala karga-zentroa hartzen dugu:

$$Q\vec r_{kz}=\int d^3\vec\ell\cdot\rho(\vec s+\vec\ell)$$

- ENERGIA



$\vec{E}(\vec{r})$

ENERGIA POTENTZIALA:

$$\hookrightarrow U(\vec{s}) = -q\cdot\phi(\vec{s}) + q\,\phi(\vec{s}+\vec{l}) =$$

$$= -q\cdot\phi(\vec{s}) + q\left[\phi(\vec{s}) + \vec{l}\,\nabla\phi(\vec{s}) + \frac{1}{2} l_i l_j \partial_i \partial_j \phi(\vec{s}) + \dots\right] =$$

$$= \vec{p}\,\nabla\phi + \frac{q}{2} l_i l_j \partial_i \partial_j \phi + \dots$$

$U(\vec{s}) = -\vec{p}\,\vec{E}$ → Energia potentziala

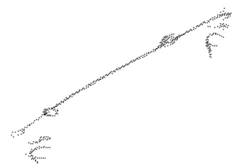
$\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}}\, U(\vec{r}) =$

$\Rightarrow F_i = -\partial_i U = -\partial_i (p_j E_j(\vec{r})) = -p_j \partial_i E_j(\vec{r}) = (\vec{p}\vec{\nabla}) E_i$

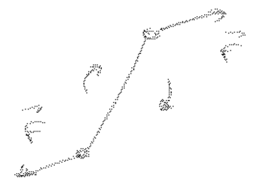
$\vec{F} = -\nabla U$

$\vec{F} = -q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{E}(\vec{r}+\vec{l}) = q\cdot l_i \partial_i \vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p}\,\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r})$

Indar bikoteak momentua sortuko du, eta dipoloak biraketa egingo du



Oreka egonkorra



Egoera ez-egonkorra

$\vec{N} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

- EKUAZIOAK:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{LAPLACE-POISSON}$$

$$\rho = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi \quad \text{LAPLACE}$$

$\nabla^2\phi = 0$ $\quad \phi|_S$ Diirchlet

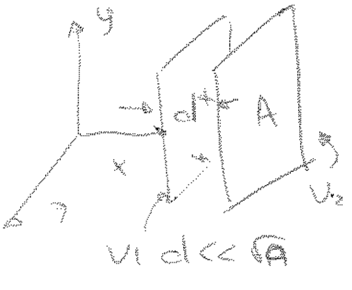
$\nabla^2\phi = 0$ $\quad \partial_n\phi|_S$ Neumann

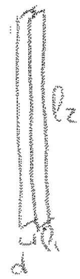
$\nabla^2\phi = 0$, V, $\phi|_S = f_1$, $S = \partial V$, ϕ_1

$\nabla^2\phi = 0$, V, $\phi|_S = f_2$, ϕ_2

$\nabla^2\phi = 0$, V, $\phi|_S = f_1 + f_2$, $\phi_1 + \phi_2$

- Kondentsadore baten kasuan:





$d \ll l_1, l_2$

Bi baldintza hauetako bat bete behar da ondorengoa onargarria izateko.

Ohartu egera hauetan, oso antzekoa da edozein z-etan egotea. Hortaz, SIMETRIA HURBILDUA dugu. Beraz, potentziala ez da y eta z-ren menpe egongo. $\partial_y\phi = 0$, $\partial_z\phi = 0$

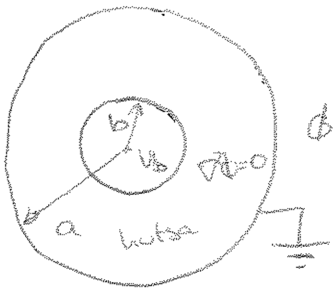
$\nabla^2 \phi = 0$ Barruan.

Aurrekoagatik, $\phi''(x) = 0$

$\hookrightarrow \phi(x) = ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(0) = V_1 \\ \phi(d) = V_2 \end{array}\right\} \quad \phi(x) = V_1 + (V_2 - V_1)\frac{x}{d}$$

- Beste kasu bat:



$\phi(r=a) = 0$

Esferak direnez (zentrokideak) ez dago angeluarekiko menpe:

$\phi(r)$

$\nabla^2 \phi \qquad \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r \phi) = 0$

Badakigu $\frac{1}{r}$ erantzun bat dela.

$\alpha + \frac{\beta}{r}$

r · $\nabla^2\phi = 0$
o
$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ $\hookrightarrow$ Hor betetzen denez, $\frac{1}{r}$ erantzuna

$$V = \frac{V_b(1 - a/r)}{1 - a/b} \qquad \vec{E} = \frac{-V_b \cdot a}{1 - a/b} \cdot \frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

2 gerutatik kanpoko $\phi = 0$ (lurrera dagoenez konektatuta, ez dugu lanik egin behar karga bat hara eramateko). ondorioz $\vec{E} = 0$

Zeintzuk dira kargak?

Non daude kokatuta?

Fluxua

$$\Phi(r) = \frac{V_b \cdot b \cdot a}{a-b} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi V_b \cdot ba}{a-b} = \frac{Q(b)}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi b\, \sigma(b)}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma(b) = \frac{\varepsilon_0 V_b \cdot a/b}{a-b}$$

$$\vec{E} \cdot \hat{n}\Big|_b = \frac{a \cdot V_0}{a-b} \cdot \frac{1}{b} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{n} = \hat{u}_r$$

Oharti kanpoko gertzan karga dagoela nahiz eta lurrera konektatuta egon. Beraz, $\Phi = 0$ izateak ez du esan nahi karga nulua izango denik.

$$\sigma(a) \cdot a^2 = -\sigma(b)\, b^2$$

$$\hookrightarrow \sigma(a) = -\sigma(b) \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

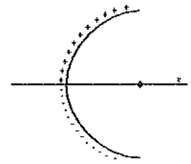
Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Elektromagnetismoa I — Hutseango eremu elektrostatikoa

1. Kalkula ezazu eremu elektrikoa ondoko bolumeneko karga-banaketa lauaren edozein lekutarako:

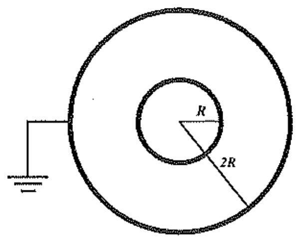
$$\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{d}\theta(d-|x|) = \begin{cases} \rho_0 x/d & -d \le x \le d\,, \\ 0 & \text{bestela.} \end{cases}$$

2. Q eta $-Q$ kargak uniformeki banatuta daude R erradiko zirkulerdi baten goialdean eta behealdean, hurrenez hurren (ikus ezazu irudia). Kalkula ezazu zirkuluerdiaren zentroko eremu elektrikoa.



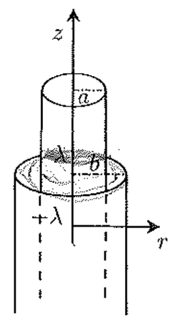
3. Lurraren gainazalean, atmosferaren eremu elektrikoa beheranzkoa eta 200 V/m-koa da. Lurraren gainazaletik 1.4 m gorago, 20 V/m-koa baino ez da (noranzkoa berdina izanik). Zenbat balio du atmosferaren batezbesteko karga-dentsitateak 1.4 m sakoneran? Zerez eginda dago nagusiki, ioi positiboz ala negatiboz?

4. Kontsidera itzazu irudiko R eta $2R$ erradioko bi geruza eroale eta zentrokideak. Barnekoaren karga q da, kanpokoa, berriz, lurrera lotuta dago. a) Zer potentzial elektriko dago barneko geruzan? b) Eman dezagun barneko geruza R erradioko beste geruza esferiko batez lotzen dela elektrikoki, eta beste geruza hura konexioa gertatu baino lehenago deskargatuta zegoela. Eman dezagun ere, geruza biak elkarrengandik oso urrun mantentzen direla (beraz, haien arteko eragina baztergarria da). c) Zer karga izango du esfera bakoitzak oreka elektrostatikora iritsitakoan?

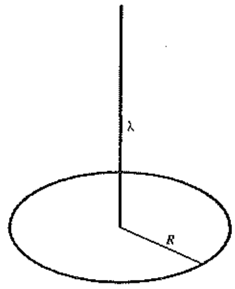


5. Eman dezagun eremu elektrostatikoaren norabidea x-ardatzekoa dela espazioaren esparru baten edozein puntutan. a) Froga ezazu, eremu elektrostatikoa esparru horretako y eta z koordenatuen independentea dela. b) Froga ezazu, gainera, kargarik ez egotekotan, eremua x koordenatuaren independentea izango dela.

6. Kontsidera ezazu a eta b erradioko bi zilindro ardazkidez osatutako hari infinitu neutroa, $b > a$ izanik (ikus ezazu irudia). Barneko zilindroan (hau da, $0 < r < a$ esparruan) karga positiboa dago uniformeki banatuta, λ lerroko karga-dentsitatea sortuz. Kanpoko zilindroan, berriz (hau da, $0 < r < b$ esparruan), karga negatiboa dago uniformeki banatuta, $-\lambda$ lerroko karga-dentsitatea sortuz. a) a) Zer da bolumeneko karga-denstsitatea espazioko edozein puntutan? b) Kalkula ezazu eremu elektrikoa eta potentziala espazioko puntu guztietarako. c) Egin ezazu eremuaren adierazpen grafikoa ardatzerainoko r distantzia erradialaren menpe.

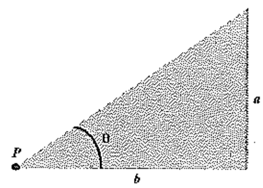


7. Kontsidera ezazu alde batetik R erradioko eraztun argal bat, q karga uniformeki banatuta duena, eta beste aldetik λ luzera-unitateko karga duen hari oso luze bat. Eraztunaren planoa hariaren perpendikularra da, eta hariaren muturretako bat eraztunaren zentroan kokatuta dago (ikus ezazu irudia). Kalkula ezazu haria eta eraztunaren arteko elkarrekintza indarra.



8. Irudiko triangeluak σ gainazaleko karga-dentsitate konstantea du. Froga ezazu P puntuko potentzialaren adierazpena ondokoa dela:

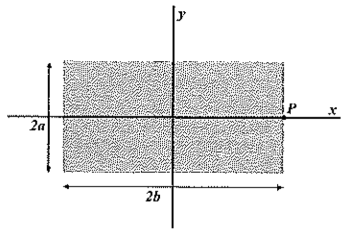
$$\Phi = \frac{\sigma b}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} \, .$$



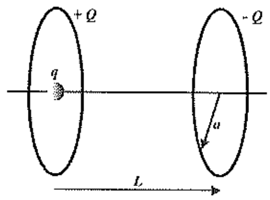
9. Kontsidera ezazu alde batetik s aldeko lauki bat, σ karga-dentsitatea duena, eta beste aldetik karga-dentsitate berdina duen d diametroko diska bat. Bi pieza horien zentroan potentzialak balio berdina duela joz, zer da s/d-ren balioa? Arrazoizkoa da emaitza?

10. Plastikozko s aldeko lauki-formako xafla baten zentroan, a erradioko zuloa dago. Plastikoaren gainean σ karga-dentsitate uniformea dago. Zer balio du potentzialak zuloaren zentroan?

11. Irudiko errektangeluan $\sigma = \sigma_0 xy$ gainazaleko karga-dentsitatea dago. Kalkula ezazu potentzialaren P puntuko balioa.

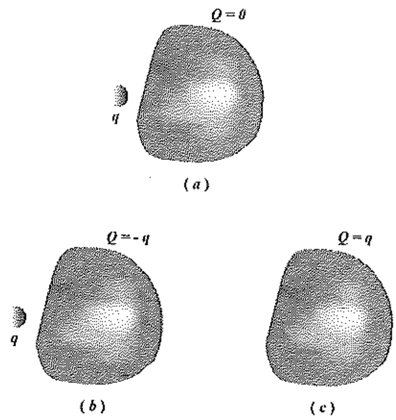


12. $+q$ balioko eta m masako puntu-karga bat pausagunean dago, $+Q$ karga uniformeki banatuta duen a erradioko eraztun baten zentroan. Zer abiaduraz iritsiko da puntu-karga beste eraztun berdin eta paralelo baten zentrora, $-Q$ karga uniformeki banatuta badu eta aurrekoaren L distantziaz aldenduta badago?



13. Kontsidera ezazu barrunbe bat duen eroale baten kanpo-gainazaleko P puntua. Barrunbeko kargaren balioa $Q_b = Q = 2\times10^{-6}$ C eta eroalearena $Q_e = Q$ direnean, P puntuan $\sigma = 2\times10^3$ C/m^2 neurtu da. Aldiz, $Q_b = -2Q$ eta $Q_e = Q$ egoerarako, $\sigma = -4\times10^3$ C/m^2 neurtu da. Aurki ezazu σ-ren P puntuko balioa, $Q_b = 3Q$ eta $Q_e = 0$ deneko kasuan.

14. Kontsidera ezazu eroale bat eta haren inguruko kanpoaldean kokatutako puntu-karga bat. Eroalea neutro badago, bere potentziala +40 V da (irudiko A egoera), baina eroaleak ?q karga badu potentziala +15 V da, berriz (irudiko B egoera). (a) Kalkula ezazu eroalearen potentziala eroaleak q karga duenean, beste edozein kargaren eraginetik kanpo egonik (irudiko C egoera). (b) Eztabaida ezazu eroalearen momentu dipolarraren eta kargaren gaineko indar garbiaren norabideak eta noranzkoak.

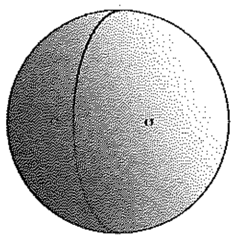


15. Eman dezagun 4,8 zm-ko kanpo-erradioko kondentsadore esferiko baterako haustura-elektrikoa 7.600 V-eko potentzialaz gertatzen dela. (a) Kalkula ezazu kondentsadorearen barne-erradioa. (b) Zer da kondentsadorearen kargaren balioa haustura gertatzen denean? Har ezazu datutzat airearen haustura-tentsioa 3×10^6 V/m dela.

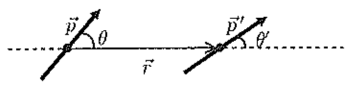
16. Kalkula ezazu ondoko lerroko karga-banaketak sortzen duen momentu dipolarra:

$$\lambda = \lambda_0 z/a\,, \quad -a/2 \leq z \leq a/2\,.$$

17. $\pm\sigma$ gainazaleko karga-dentsitateak dituzten R erradioko bi esferaerdiz osotutako sistemaren portaera dipolo batena bezalakoa da urrutiko puntuetarako. Kalkula ezazu haren momentu dipolarra.



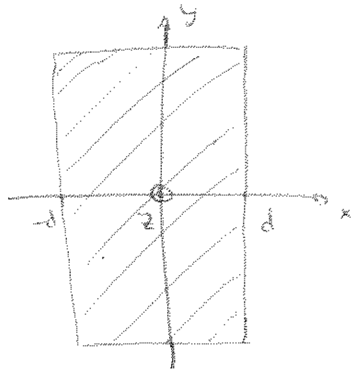
18. Kontsidera itzazu plano berean kokatuta eta distantzia finko batez bananduta dauden bi dipolo elektriko. Dipoloak lotzen dituen lerro irudikaria kontsideratuz, eta dipoloetako baten norabidea eta noranzkoa kanpo-eragile batek finkatuta dagoela joz, lor ezazu dipoloek lerro horrekin osatzen duten angeluen arteko erlazioa (ikus ezazu irudia).



1. ARIKETA

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{d}\,\theta(d-|x|) = \begin{cases} \rho_0 \frac{x}{d}, & -d<x<d \\ 0, & \text{bestela} \end{cases}$$

Bolumeneko karga denez baina soilik x-ren menpe dagoenez, suposatuko dugu Y eta Z norabideetan karga infinitua dugula.



Simetria eta kargaren banaketagatik:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\,\hat{u}_x$$

Badakigu $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Bestalde, $E(x)\,\vec{u}_x \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = E'(x)$

$$\Rightarrow \quad E'(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- $-d<x<d$:

$$\int_{E_0}^{E(x)} E'(x)\,dx = \int_0^x \frac{\rho(\xi)}{\varepsilon_0}\,d\xi = \int_0^x \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d}\,\xi\,d\xi = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x = \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d}$$

$$E(x) = \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d} + E_0$$

Orain E_0 zehaztu behar dugu. Horretarako:

$$Q = \int_{-d}^{d} \rho(x)\,dx = \int_{-d}^{d} \frac{\rho_0 x}{d}\,dx = \frac{\rho_0}{d}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-d}^{d} = 0$$

$Q = 0$ denez, urrutitik ez da kargarik ikusiko, eta ondorioz

$$E(\infty) = 0$$

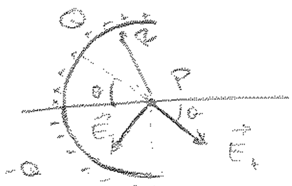
Bestalde, $|x| > d \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow E'(x) = 0 \Rightarrow E(x) = kte$

Ondorioz, $E(d) = E(\infty) = 0$

$$E(d) = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0} + E_0 = 0 \Rightarrow E_0 = -\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}(x^2 - d^2)\,\hat{u}_x\,, & |x| < d \\ 0\,\hat{u}_x\,, & |x| > d \end{cases}$$

2. ARIKETA



Karga banaketaren simetriagatik:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_{+x} + \vec{E}_{-x} &= 0 \\ \vec{E}_{+y} + \vec{E}_{-y} &= 2\vec{E}_y \end{aligned}\right\} \quad \vec{E}_T = 2\vec{E}_y = 2E\sin\theta$$

Soilik Q kargak sortutakoa hartuko dugu kontuan, aurreko adierazpenak dena biltzen duelako.

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{\frac{R\pi}{2}} = \frac{2Q}{R\pi}$$

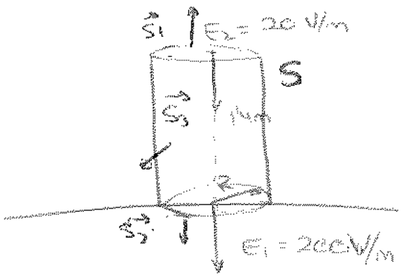
$$dq = \lambda \cdot dl = \frac{2Q}{\cancel{R}\pi}\,\cancel{R}\,d\theta$$

$$dq = \frac{2Q}{\pi}\,d\theta$$

$$E_T = \int_0^{\pi/2} \cancel{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{2Q}{\pi} d\theta \cdot \sin\theta = \frac{Q}{\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{Q}{\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{Q}{\pi^2 \varepsilon_0 R^2}$$

3. ARIKETA



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \cancel{\Phi_{S_3}}$$

$$\vec{E} \perp \vec{S_3} \Rightarrow \Phi_{S_3} = 0$$

$$\Phi_1 = \vec{E_1} \cdot \vec{S_1} = E_1 \hat{u_r} \cdot \pi R^2 (-\hat{u_r}) = -20\pi R^2$$

$$\Phi_2 = \vec{E_2} \cdot \vec{S_2} = E(-\hat{u_r}) \cdot \pi R^2 (-\hat{u_r}) = 200\pi R^2$$

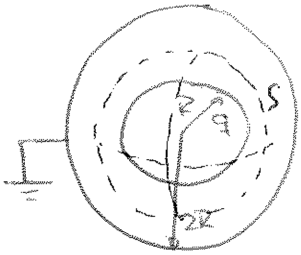
$$\Phi_S = 180\pi R^2 \overset{Gauss}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$180\pi R^2 = \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \frac{180\varepsilon_0}{h}$$

$$\boxed{\rho = 1'14 \cdot 10^{-9} \, C/m^3}$$

Ioi positiboz osatuta gehien bat

4. ARIKETA



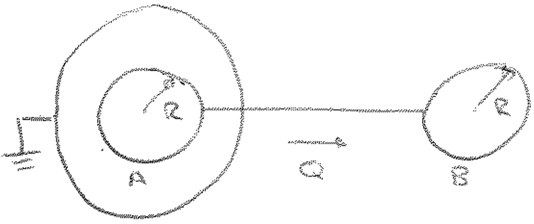
$\vec{E} = E(r)\,\hat{u}_r$

kalkulatu behar dugu bi gerutzen arteko eremu elektrikoa:

Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\int_{\phi(2R)}^{\phi(R)} d\phi = -\int_{2R}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{2R}^{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r \cdot dr\,\hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{2R} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \boxed{\phi(R) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$



Potentzialak berdindu egin behar dira!

A esferak egoera berdinean jarraituko duenez, ϕ berdina izango da,

$$\phi_A = \phi_B \Rightarrow \frac{q-Q}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow q - Q = 2Q$$

$$q = 3Q \Rightarrow \boxed{Q = q/3}$$

$$q_A = q - Q \Rightarrow \boxed{q_A = 2q/3}$$

$$q_B = Q \Rightarrow \boxed{q_B = q/3}$$

5. ARIKETA

$\vec{E} = \vec{E}(x)$ bada, frogatu y eta z-rekiko independiente dela.

Hori frogatzeko: $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$ eta $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$

Badakigu $\nabla \wedge \vec{E} = 0$ izan behar duela

$$\nabla \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial E}{\partial y} \hat{k} = 0$$

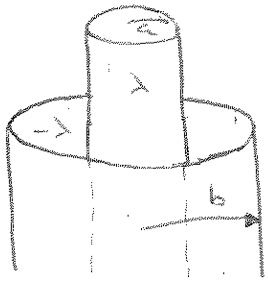
Bektore bat 0 izateko, osagai guztiak 0 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \end{cases}$

Frogatu kargarik ez egotekotan, x-rekiko ere independientea dela.

Badakigu $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \text{ eta } \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \text{ direnez, } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial x} \\ \text{Bestalde, kargarik ez badago, } \rho = 0 \end{array}\right\} \boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = 0}$

6. ARIKETA



$$\lambda_+ = \frac{Q_+}{\ell} = \frac{\rho_+ \cdot \ell \pi a^2}{\ell} \Rightarrow \rho_+ = \frac{\lambda}{\pi a^2}$$

$$\lambda_- = \frac{Q_-}{\ell} = \frac{\rho_- \cancel{\ell} \pi b^2}{\cancel{\ell}} \Rightarrow \rho_- = \frac{-\lambda}{\pi b^2}$$

karga-dentsitatea kalkulatzeko, q karga hartuko dugu:

- $0<r<a$:

$$Q = Q_+ + Q_- = \frac{\lambda \cancel{\ell\pi} r^2}{\cancel{\pi} a^2} - \frac{\lambda \cancel{\ell\pi} r^2}{\cancel{\pi} b^2} = \frac{\lambda}{a^2 b^2}(b^2-a^2) r^2 \ell$$

$$Q = \rho \pi r^2 \ell = \frac{\lambda}{a^2 b^2}(b^2-a^2) r^2 \cdot \ell \Rightarrow \rho = \frac{\lambda(b^2-a^2)}{\pi a^2 b^2}$$

- $a<r<b$:

$$\cancel{Q = Q_+ + Q_- = \frac{\lambda}{\pi a^2} \pi a^2 \ell - \frac{\lambda}{\pi b^2} \pi r^2 \ell = \lambda \ell - \frac{\lambda}{b^2} r^2 \ell}$$

$$\rho = \rho_- = \frac{-\lambda}{\pi b^2}$$

- $b<r$: $\rho = 0$

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\lambda(b^2-a^2)}{\pi a^2 b^2}, & 0<r<a \\ -\dfrac{\lambda}{\pi b^2}, & a<r<b \\ 0, & b<r \end{cases}$$

$\vec{E}$ kalkulatzeko Gauss erabiliko dugu: $\boxed{\oint d\vec{s}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$

- $0<r<a$:

$$Q_{ing} = \frac{\lambda(b^2-a^2)}{\pi a^2 b^2}\cdot \pi r^2 \ell = \frac{\lambda \ell (b^2-a^2)}{a^2 b^2} r^2$$

$$\oint d\vec{s}\cdot\vec{E} = 2\pi r \ell E = \frac{\lambda \ell (b^2-a^2)}{\varepsilon_0 a^2 b^2} r^2 \Rightarrow E = \frac{\lambda(b^2-a^2)}{2\pi\varepsilon_0 a^2 b^2} r$$

- $a<r<b$:

$$Q_{ing} = \frac{\lambda(b^2-a^2)}{\pi a^2 b^2}\pi a^2 \ell - \frac{\lambda}{\pi b^2}\pi(r^2-a^2)\ell = \ell\left[\lambda - \cancel{\lambda\frac{a^2}{b^2}} - \lambda\frac{r^2}{b^2} + \cancel{\lambda\frac{a^2}{b^2}}\right] =$$

$$= \frac{\lambda(b^2-r^2)}{b^2}\ell$$

$$\oint d\vec{s}\cdot\vec{E} = 2\pi r \ell E = \frac{\lambda(b^2-r^2)\ell}{\varepsilon_0 b^2} \Rightarrow E = \frac{\lambda(b^2-r^2)}{2\pi\varepsilon_0 b^2 r}$$

- $b<r$:

$$Q_{ing} = \frac{\lambda(b^2-a^2)}{\pi a^2 b^2}\pi a^2 \ell - \frac{\lambda}{\pi b^2}\pi(b^2-a^2)\ell = \ell\left[\lambda - \lambda\frac{a^2}{b^2} - \lambda + \lambda\frac{a^2}{b^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow E = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(b^2-a^2)}{2\pi\varepsilon_0 a^2 b^2} r\,\hat{u}_r, & 0<r<a \\ \dfrac{\lambda(b^2-r^2)}{2\pi\varepsilon_0 b^2 r}\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_r, & b<r \end{cases}$$

- ϕ kalkulatzeko: $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} d\phi = -\int_a^b \vec{E}\,d\vec{r}$

- <u>$b<r$:</u>

$$\int_{\phi(r)}^{\phi(\infty)} d\phi = \int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{r} 0\cdot dr = 0 \Rightarrow \quad \phi(\infty) - \phi(r) = 0$$

$$\phi(\infty) = 0 \text{ hartuz} \Rightarrow \quad \phi(r) = 0 \Rightarrow \phi(b) = 0$$

- <u>$a<r<b$:</u>

$$\int_{\phi(r)}^{\phi(b)} d\phi = \int_{b}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{b}^{r}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b^2}r\right)dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^r\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{b^2}\right)dr =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(r) - \frac{r^2}{2b^2}\right]_b^r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln(r/b) - \frac{r^2}{2b^2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{b^2-r^2}{b^2} + \ln(r/b)\right)$$

$$\phi(b) - \phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b^2-r^2}{b^2} + \ln(r/b)\right)$$

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r^2-b^2}{b^2} - \ln(r/b)\right)$$

$$\phi(a) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2} - \ln(a/b)\right)$$

◦ $0<r<a$:

$$\int_{\phi(r)}^{\phi(a)} d\phi = \int_r^a \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^a \frac{\lambda(b^2-a^2)}{2\pi\epsilon_0 a^2 b^2}\, r\, dr = \frac{\lambda(b^2-a^2)}{4\pi\epsilon_0 a^2 b^2}\left[r^2\right]_r^a =$$

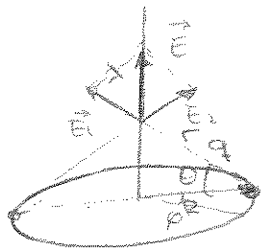
$$= \frac{\lambda(b^2-a^2)}{4\pi\epsilon_0 b^2} - \frac{\lambda(b^2-a^2)}{4\pi\epsilon_0 a^2 b^2}\, r^2$$

$$\phi(r) = \cancel{\frac{\lambda(b^2-a^2)}{4\pi\epsilon_0 b^2}} - \frac{\lambda(b^2-a^2)}{4\pi\epsilon_0 a^2 b^2}\, r^2 - \cancel{\frac{\lambda(b^2-a^2)}{4\pi\epsilon_0 b^2}} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(a/b\right)$$

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2 b^2}\, r^2 - \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2 b^2}\, r^2 - \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right), & 0<r<a \\[2ex] \dfrac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{r^2-b^2}{b^2} - \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right), & a<r<b \\[2ex] 0, & r>b \end{cases}$$

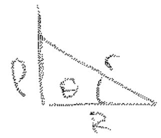
7. ARIKETA



Simetriagatik, soilik osagai bertikalak hartu behar ditugu kontuan.

Kalkulatuko dugu eraztunako dq_e-ak hariko dq_h-an sortzen duen $\vec{F}$

$$dq_h = \lambda \cdot dl \qquad d\vec{F} = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq_e \cdot \lambda \, dl}{r^2} \cdot \sin\theta \; \vec{j} =$$



$$\frac{R}{r} = \cos\theta \qquad = \frac{\lambda \cdot dq_e}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{dl}{R^2} \cos^2\theta \sin\theta \; \vec{j} =$$

$$r = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\frac{l}{R} = \tan\theta \qquad = \frac{\lambda \, dq_e}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{R}}{\cancel{\cos^2\theta}} d\theta \; \cancel{\cos^2}\theta \sin\theta \; \vec{j} =$$

$$l = R \tan\theta$$

$$dl = \frac{R}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{\lambda \cdot dq_e}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \; \vec{j} = \frac{\lambda \, dq_e}{4\pi\varepsilon_0 R} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \vec{j} =$$

$$= \frac{\lambda \cdot dq_e}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(-0 - (-1)\right) \vec{j} = \frac{\lambda \, dq_e}{4\pi\varepsilon_0 R} \vec{j}$$

Hori da dq_e-k sortzen duena. Eraztun osoak sortzen duena kalkulatzeko:

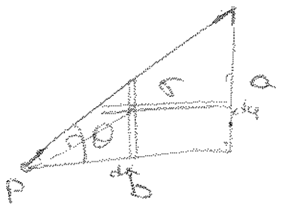
$$\lambda_e = \frac{q}{l} \Rightarrow dq = \lambda_e \cdot dl = \lambda_e \cdot R \, d\varphi$$

$$\vec{F} = \int_F d\vec{F} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \lambda_e \cdot R \, d\varphi \, \vec{j} = \frac{\lambda \lambda_e \cancel{R}}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{R}} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \vec{j} = \frac{\lambda \cdot \lambda_e \, 2\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0} \vec{j} = \frac{\lambda \lambda_e}{2\varepsilon_0} \vec{j}$$

$$\lambda_e = \frac{q}{\ell} = \frac{q}{2\pi R} \rightarrow \boxed{\vec{F}_{e\to k} = \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 R}\vec{d}}$$

Akzio-erreakzio printzipioarengatik: $\boxed{\vec{F}_{k\to e} = -\frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 R}\vec{d}}$

8. ARIKETA



$\frac{a}{b} = \tan\theta \Rightarrow a = b\tan\theta$

$d\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r}$ $\quad dq = \sigma\, dx\, dy$

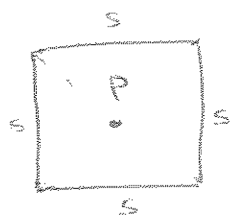
$y = \tan\theta \cdot x$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

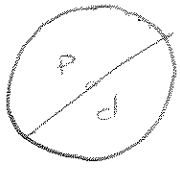
$$\phi = \int d\phi = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^b\int_0^{\tan\theta\, x}\frac{\sigma\, dy\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^b\left[\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\right]_0^{\tan\theta x} dx =$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^b\left(\ln\left(\frac{\tan\theta\cdot x}{x}+\sqrt{1+\frac{\tan^2\theta\, x^2}{x^2}}\right)\right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^b \ln\left(\tan\theta+\sqrt{1+\tan^2\theta}\right)dx =$$

$$= \frac{\sigma b}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\sigma b}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)$$

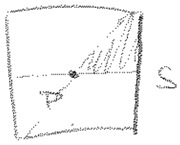
9. ARIKETA





Pontentziala berdina izan behar denez, bakoitzarena kalkulatuko dugu.

a) karratuaren potentziala:

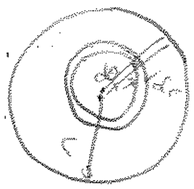


Hartu dezakegu karratua zortzi triangelu zatienez dagoela osatuta.

Hori kontsideratuz, erdiko potentziala triangelu bakoitzak sorturikoaren batura da. Aurreko ariketatik berreskuratuz:

$$\phi = \frac{\sigma b}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = s/2 \\ \theta = \pi/4 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi = \frac{\cancel{8}\sigma s}{\cancel{8}\pi\varepsilon_0} \ln(1+\sqrt{2})$$

b) Diskoaren potentziala:



$$dq = \sigma \cdot ds = \sigma\, dr \cdot r d\theta$$

$$\phi = \int_\phi d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma\, dr\, d\theta\, \cancel{r}}{\cancel{r}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{d/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

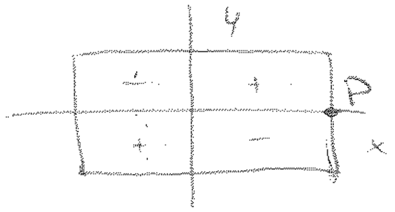
$$\phi = \frac{\sigma d}{4\varepsilon}$$

c) Biak alderatu:

$$\phi_d = \phi_e \Rightarrow \frac{\cancel{\sigma} s}{\pi \cancel{\varepsilon_0}} \ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\cancel{\sigma} d}{4\cancel{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\frac{s}{d} = \frac{\pi}{4\ln(1+\sqrt{2})}}$$

11. ARIKETA



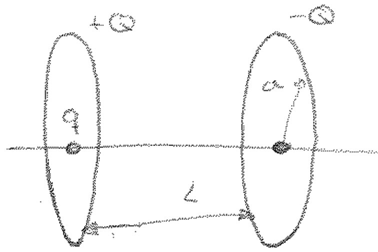
$\sigma = \sigma_0 \, x \cdot y$

kasu honetan ez da kalkulurik egin behar.

X ardatzarekiko antisimetrikoki dagoenez banatua karga, x ardatzaren gainean edozein puntutan potentziala nulua izango da.

$P \in OX \Rightarrow \phi(P) = 0$

12. ARIKETA

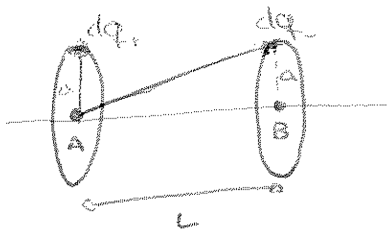


Energiaren kontserbapenarengatik:

$$\Delta E_z + \Delta E_p = 0$$

$$\cancel{E_{zA}} + E_{pA} = E_{zB} + E_{pB}$$

$E_p = q \cdot V = q \cdot V_{eraztuna} \Rightarrow$ eraztunaren dq bakoitzak sortutako potentziala kalkulatu behar dugu



$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a} \Rightarrow dq = \lambda \cdot dl = \frac{Q}{2\pi a} \cdot a\,d\theta = \frac{Q}{2\pi} d\theta$$

$$\phi_1 = \int_{Q_+} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi a} d\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\phi_2 = \int_{Q_-} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} \cdot \frac{-Q}{2\pi} d\theta = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{a^2+L^2}}$$

$$\phi_A = \phi_1 + \phi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)$$

kargaren banaketaren simetriagatik: $\phi_B = -\phi_A$

$$\phi_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} - \frac{1}{a}\right)$$

Abiadura kalkulatzeko, energiaren adierazpenera bueltatuko gara:

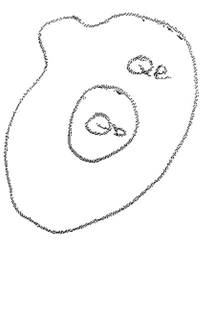
$$E_{PA} = E_{ZB} + E_{PB}$$

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right) = mv^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{q\,Q}{m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)}}$$

13. ARIKETA



$Q_b = Q = 2\mu C$

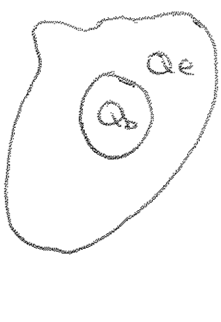
$Q_e = Q$

$\sigma = 2 mC/m^2$

$Q_b = -2Q$

$Q_e = Q$

$\sigma = -4 mC/m^2$



$Q_b = 3Q$

$Q_e = Q$

σ kalkulatzeko, aurreko bi egoerekin dagoen erlazioa ikusi-ko dugu

Ohartu $\quad Q_3 = Q_1 - Q_2$

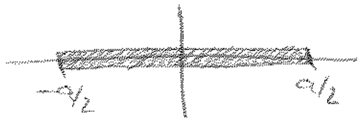
$$Q_{b1} - Q_{b2} = Q_{b3}$$

$$Q_{e1} - Q_{b2} = Q_{e3}$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow \boxed{\sigma_3 = 6\,mC/m^2}$$

16. ARIKETA

$\lambda = \lambda_0 \frac{z}{a}$; $-a/2 \leq z \leq a/2$

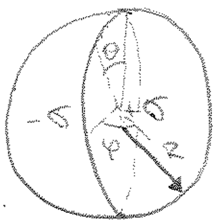


$\vec{p} = \int_Q \vec{r}\, dq$ $\qquad dq = \lambda\, dr = \frac{\lambda_0 z}{a} dz$ $\qquad \vec{r} = z\,\hat{u}_z$

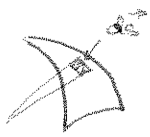
$$\vec{p} = \int_{-a/2}^{a/2} z \cdot \hat{u}_z \cdot \frac{\lambda_0 z}{a} dz = \frac{\lambda_0}{a} \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz\, \hat{u}_z = \frac{\lambda_0}{a} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} \hat{u}_z =$$

$$= \frac{\lambda_0}{3a} \frac{2 \cdot a^3}{8} \hat{u}_z = \frac{\lambda_0 a^2}{12} \hat{u}_z$$

17. ARIKETA



Esferikoen diferentziala behar dugu:



$$\vec{dS} = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{u}_r$$

$dq = \sigma\, ds = \sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ $\qquad \vec{r} = R \cdot \hat{u}_r$

kartesiarretan jarriko dugu: $\vec{r} = R(\sin\theta \cos\varphi\, \hat{u}_x + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{u}_y + \cos\theta\, \hat{u}_z)$

Gainera, σ ez da konstantea $\rightarrow$ $\sigma(\varphi) = \begin{cases} +\sigma, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ -\sigma, & \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\vec{p} = \int_Q \vec{r}\, dq = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R(\sin\theta \cos\varphi\, \hat{u}_x + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{u}_y + \cos\theta\, \hat{u}_z) \cdot \sigma(\varphi) R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin^2\theta \cos\varphi\, \sigma(\varphi)\, \hat{u}_x + \sin^2\theta \sin\varphi\, \sigma(\varphi)\, \hat{u}_y + \sin\theta\cos\theta\, \sigma(\varphi)\, \hat{u}_z\right) d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^3 \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin^2\theta \cos\varphi\, \sigma\, \hat{u}_x + \sin^2\theta \sin\varphi\, \sigma\, \hat{u}_y + \sin\theta\cos\theta\, \sigma\, \hat{u}_z\right) d\theta\, d\varphi +$$

$$+ R^3 \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(-\sin^2\theta \cos\varphi\, \sigma\, \hat{u}_x - \sin^2\theta \sin\varphi\, \sigma\, \hat{u}_y - \sin\theta\cos\theta\, \sigma\, \hat{u}_z\right) d\theta\, d\varphi =$$

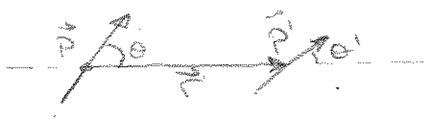
$$= R^3\sigma \int_0^{\pi} \Big[\sin^2\theta\, \cancel{\hat{u}_x (0-0)} + \sin^2\theta\, \hat{u}_y (1-(-1)) + \sin\theta\, \cancel{\cos\theta\, \hat{u}_z}\, \pi +$$

$$- \sin^2\cancel{\theta\, \hat{u}_x}\, (0-0) + \sin^2\theta\, \hat{u}_y (1-(-1)) - \sin\cancel{\theta \cos\theta}\, \hat{u}_z\, \pi\Big]\, d\theta =$$

$$= \sigma R^3 \int_0^{\pi} 4\sin^2\theta\, d\theta\, \hat{u}_y = 4\sigma R^3 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta\, \hat{u}_y =$$

$$= 2\sigma R^3 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi} \hat{u}_y = 2\pi\sigma R^3 \hat{u}_y$$

18. ARIKETA



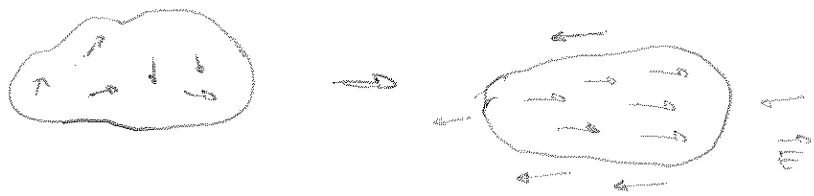
- DIELEKTRIKOAK (1): Eroale bat non kargen higidura askea ez den. Honela ikusita, isolatzaileak dira.

- DIELEKTRIKOAK (2): Definizio honetan POLARIZAZIOA agertzen da.

- POLARIZAZIOA: Material bat $\vec{E}$ batean sartzean, dipolo elektrikoak behatuko ditugu (kargen berrantolaketa).

Hiru modu:

① Dipoloak badaude, eta $\vec{E}$-an sartzean berrantolatu egingo dira. ORIENTAZIO POLARIZAZIOA



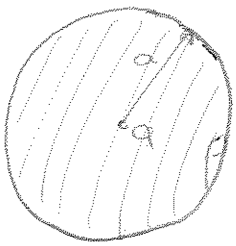
② Dipolorik ez dago, eta $\vec{E}$-ak INDUZITU eta ORIENTATUKO ditu.

③ Ez daude eta INDUZITU egiten dira.

FERROELEKTRIKOAK: materialak non $\vec{E}=0$ baina $\vec{P}\neq 0$

Normalean hori ez da ematen.

Normalean espero dugu erantzuna isotropikoa izatea, baina batzuetan ANISOTROPIKOA da: $P_i = \alpha_{ij} \cdot E_j$



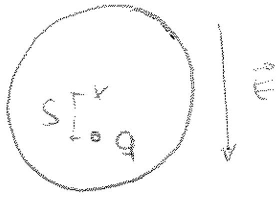
Jatorrian q karga (puntuala)

eta $\rho = \dfrac{-3q}{4\pi a^3}\,\Theta(a-r)$

$Q_{osoa} = 0$ (ρ int. $-q$ dugu)

Argi dago ez dugula dipolorik (ρ-ren karga zentrua esferaren zentrua da)

Orain $\vec{E}$ bat aplikatu, kargak desplazatu:



Ohartu orain q kargak $\vec{E}$-ren eragina nabaritzen duela, baina baita ρ-rena ere.

$$Q(s) = -q\left(\frac{s}{a}\right)^3$$

$$E(s)\cdot 4\pi s^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q(s) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{s}{a}\right)^3$$

$$E(s) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{s}{a^3}$$

Indarrak: $0 = q\left(E - \frac{q\,s}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)$

$$s = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3 E}{q} \Rightarrow \vec{s} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{q}\vec{E}$$

$$\vec{p} = (4\pi\varepsilon_0 a^3)\vec{E} \Rightarrow \alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$$ (E-rekiko proportzionaltasun faktorea)

Ikusten dugunez, dipolo bat sortu da.

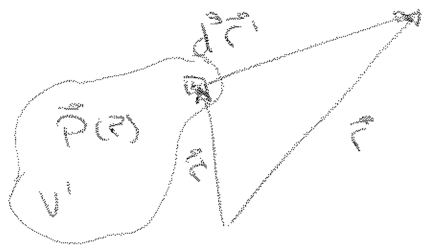
POLARIZAZIO EFEKTUA: Polarizazioaren ondorioz momentu dipolarra agerraraztea

POLARIZAZIOA: $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ → momentu dipolarra, → bolumena } dentsitatea

Orain arte ikusi dugu material batek nola erantzuten duen $\vec{E}$ bat aplikatzean.

Orain, polarizaturiko materialean sorturiko dipoloak, zein $\vec{E}$ sortuko du?

$$\vec{P}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{E}_{\vec{P}}(\vec{r})$$
$$\phi_{\vec{P}}(\vec{r})$$



$$d\Phi_P(\vec{r}) = \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r}\,' : \vec{p}$ $\qquad \Phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

$$\Phi_p(\vec{r}) = \int_{V'}\frac{d^3\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d^3\vec{r}\,'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) =$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \qquad = \int_{V'}\frac{d^3\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\nabla'\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\partial V'}\frac{d\vec{S}\,'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d^3\vec{r}\,'\cdot\frac{-\nabla'\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\sigma_P(\vec{r}\,')\Big|_{\partial V'} = \vec{P}\cdot\vec{n}\Big|_{\partial V'} \qquad \rho_P(\vec{r}\,') = -\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')$$

Hori ordezkatuz: $\Phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\partial V'} dS'\,\frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d^3\vec{r}\,'\,\frac{\rho_p(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

Hortaz, polarizatutako kargak sortutako potentziala bi karga-banaketa horiek sortutako potentzialaren berdina da.

$Q_P(V') = 0$

$$\hookrightarrow = \int_{\partial V'} dS'\cdot\sigma(\vec{r}\,') + \int_{V'} d^3\vec{r}\,'\cdot\rho(\vec{r}\,') = \int_{\partial V'} d\vec{S}\,'\cdot\vec{P} - \int_{V'} d^3\vec{r}\,'\,\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,') = 0$$

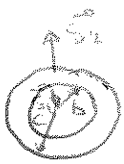
$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi a^2}\,\hat{u}_r, & r<a \\ \dfrac{\lambda}{2\pi r}\,\hat{u}_r, & a<r<c \\ 0\,\hat{u}_r, & c<r \end{cases}$$

- kalkulatu polarizazio-karga dentsitateak:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r<b \\ \dfrac{\lambda}{2\pi r}\left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\hat{u}_r, & b<r<c \\ 0\,\hat{u}_r, & c<r \end{cases}$$

$\rho_P = 0$ (ez dago karga askerik dielektrikoan)



$\hat{n}_1 = -\hat{u}_r$

$\hat{n}_2 = \hat{u}_r$

$$\sigma_{P_1} = \vec{P}\cdot\hat{n}_1 = -\frac{\lambda}{2\pi b}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\sigma_{P_2} = \vec{P}\cdot\vec{n}_2 = \frac{\lambda}{2\pi c}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

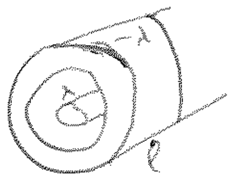
$C = \frac{Q}{V} \rightarrow$ Horretarako potentzial diferentzia kortu dugu:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(c)} d\phi = -\int_a^c \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr - \int_b^c \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,dr =$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot \ln\frac{b}{a} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\cdot \ln\frac{c}{b}$$

$$\phi(a) - \phi(c) = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{c}{b}\right) = \Delta\phi$$

Q zehazteko:

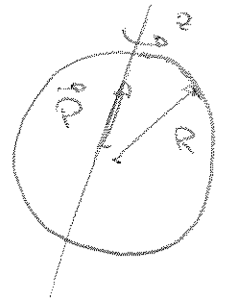


$Q = \lambda\cdot\ell$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda\ell}{\Delta\phi}$$

$$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{c}{b}}$$

↳ ADIBIDEA:



Uniformeki polarizatua ⇒ $\vec{E}$ konste barruan eta O kanpoan

$\vec{P} = P\hat{u}_z$

$\sigma_p(\theta,\varphi) \Longrightarrow \sigma_p(\theta)$ simetria dugulako z biraketan

$\rho_p(r,\theta,\varphi)$

$\hat{u}_r \cdot \hat{u}_z = \cos\theta \longrightarrow \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cdot\hat{u}_z\cdot\hat{u}_r = P\cdot\cos\theta \Rightarrow \boxed{\sigma_p = P\cdot\cos\theta}$

$\boxed{\rho_p = 0}$ $\quad \vec{P} = \text{kte} \Rightarrow \nabla\vec{P} = 0$

Q_p ? ⇒ Gainazaleko karga osoa kalkulatu behar dugu.

$$\int ds\,\sigma = \int_0^{\pi} R^2\cdot d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, P\cos\theta = 2\pi R^2\cdot P \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\cos\theta =$$

$$= \pi R^2 P \int_0^{\pi} d\theta\, \partial_\theta \sin^2\theta = 0$$

$\nabla^2\phi = 0 \qquad \phi(r,\theta) = A(r) + B(r)\cos\theta$

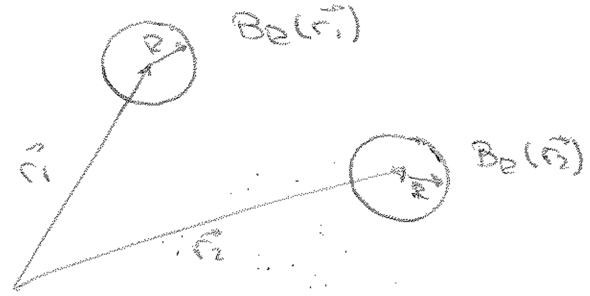
$\qquad\qquad\qquad\left(\cancel{\tfrac{\alpha}{r}} + \cancel{\beta}\right) \quad \left(\tfrac{\gamma}{r^2} + \cancel{\delta}\right)$

$$E_r\big|_R = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\bigg|_R = \frac{2\gamma}{R^3}\cos\theta = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \gamma = \frac{R^3}{2}\cdot\frac{P}{\varepsilon_0}$$

- DESPLAZAMENDU ELEKTRIKOA ($\vec{D}$)

$\vec{e}(\vec{r}) \rightarrow$ Mikroskopikoa

$\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow$ Makroskopikoa



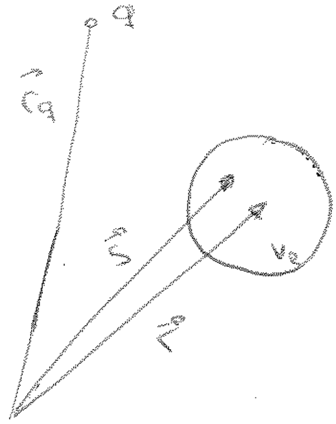
$$\vec{E}_R(\vec{r}) = \frac{1}{V_R}\int_{B_R(\vec{r})} d^3\vec{s}\ \vec{e}(\vec{s}) \rightarrow \vec{E}\ \ \vec{e}\text{-ren batazbestekoa}$$

$L >> R >> a$ ematen denean, $\vec{E}_R$-k ez du R-rekiko menpekotasunik $\rightarrow \vec{E}_R = \vec{E}$

Eremu mikroskopikoak ondorengo ekuazioa betetzen du $\rightarrow \nabla\cdot\vec{e} = \rho/\varepsilon_0$

Aztertu dezagun zein ekuazio betetzen duen eremu makroskopikoak.

1



$$\vec{e}(\vec{s}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{|\vec{r}_q-\vec{s}|}(\vec{r}_q-\vec{s})$$

kalkulurako demagun V_R-n ρ karga-dentsitatea

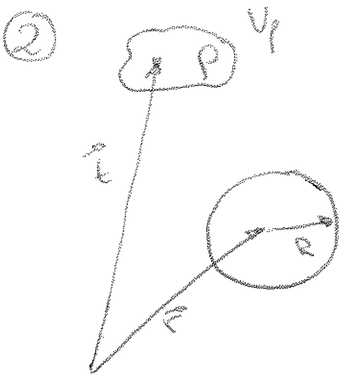
$$\vec{E}_\rho(\vec{r}_q) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\cdot V}{|\vec{r}_q-\vec{r}|^3}(\vec{r}_q-\vec{r})$$

$$\vec{F}_{\rho\to q} = q\cdot\vec{E}_\rho(\vec{r}_q) \Rightarrow \vec{F}_{q\to\rho} = -\vec{F}_{\rho\to q}$$

$$\vec{F}_{q\to\rho} = \int \rho\, dV(\vec{s})\ \vec{e}(\vec{s}) = \rho\int_{B_R(\vec{r})} d^3\vec{s}\ \vec{e}(\vec{s}) = \rho\cdot V_R\cdot\vec{E}_R(\vec{r})$$

$$\vec{E}_R(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{|\vec{r}_q-\vec{r}|^2}\hat{u}_r$$

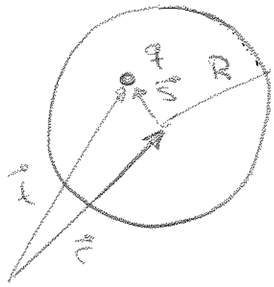
(2)



$$\vec{E}_\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_\rho} \frac{d^3\vec{t}\cdot\rho(\vec{t})}{|\vec{r}-\vec{t}|^3}\,(\vec{r}-\vec{t})$$

$$dq(\vec{t}) = \rho(\vec{t})\,d^3\vec{t}$$

(3) Karga dago integrazio-eremuaren barnean.



$$V_s = \frac{4}{3}\pi s^3$$

$$\underline{\vec{F}_{\rho\to q}} = -\vec{F}_{q\to\rho} = \underline{-\rho\cdot V_R\cdot\vec{E}_R(\vec{r})}$$

$$\vec{E}_\rho(\vec{s}) = \frac{\rho\cdot V_s}{4\pi\epsilon_0\cdot s^3}\cdot\vec{s} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\cdot\vec{s}$$

Beraz, berdintza kontuan hartuz: $\vec{E}_R(\vec{r}) = \dfrac{q\cdot\frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{s}}{-\rho\cdot V_R} = -\dfrac{q}{3\cdot V_R\cdot\epsilon_0}\vec{s}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,(\vec{r}-\vec{t})}$$

(4) Karga banaketa dago integrazio-eremuaren barnean.

$$\vec{E}_R(\vec{r}) = \int_{V_R}\frac{\rho(\vec{s})\,d^3\vec{s}}{3V_R\cdot\epsilon_0}\cdot(-\vec{s}) = -\frac{1}{3V_R\epsilon_0}\int_{V_R} d^3\vec{s}\,\rho(\vec{s})\cdot\vec{s}$$

$$\boxed{\vec{E}_R(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{3V_R\cdot\epsilon_0}}$$

Aurreko guztia kontutan hartuta:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{kanp}(\vec{r}) - \frac{\vec{P}(\vec{r})}{3\varepsilon_0}}$$

$\rho_{lotuak} \to$ Mugitu ez daitezkeen kargak.

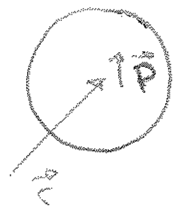
$\rho_{askeak} \to$ Mugitzeko gai diren kargak (ez dira guztiz askeak).

$\rho_p = \rho_{askeak} + \rho_{lotuak}$

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} = \rho = \rho_{lotuak} + \rho_{askeak} = -\nabla\cdot\vec{P} + \rho_{askeak}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_{askeak}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho_{askeak}$$



$$\vec{p} = \vec{P}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

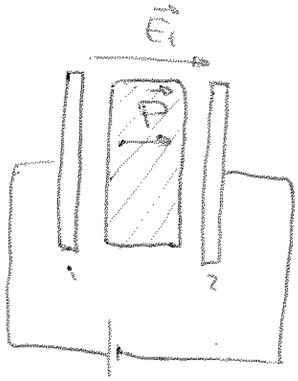
$$\sigma_p(\theta) = P\cdot\cos\theta$$

$$\rho_p = 0 \quad \text{(barruan)}$$

$$\phi(r,\theta) = B\cdot r\cdot\cos\theta \Rightarrow \phi(r,\theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0}\cdot r\cdot\cos\theta$$

$$B = \frac{P}{3\varepsilon_0} \qquad \vec{E}(r,\theta) = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

→ ADIBIDEA:



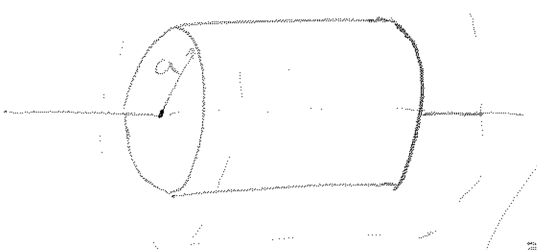
$$\vec{E} = \vec{E}_i - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \cancel{\varepsilon_0} \frac{\rho_{osoa}}{\cancel{\varepsilon_0}} - \rho_p =$$

$$= \rho_{osoa} - \rho_p = \rho_{askea}$$

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{askea}$ ezin dugu askatu orokorrean integratu, ez baitator gradiente batetik ($\nabla \wedge \vec{D} = \nabla \wedge \vec{P}$ eta horrek ez du 0 izan behar)



$$\int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{D} = \int_V d^3\vec{r} \cdot \nabla \vec{D} =$$

$$= \int_V d^3\vec{r}\ \rho_{askea} = Q_{aske}(V)$$

$$D(r) \cdot \ell 2\pi r = \ell \lambda$$

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

Hortaz, $\vec{D}$-tik aterako dugu $\vec{E}$:

$$\vec{E}_{Dielek.\ kanpo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{u}_r$$

- EKUAZIO ERATAILEAK:

Zenbait kasutan, ez ditugu lege unibertsalak definitzen, baizik eta fenomenologian oinarritutakoak; hau da, fenomenoa aztertu eta hor dagoen ekuazioa definitu. Horrela definitzen ditugu ekuazio eratzaileak: $\vec{P}(\vec{E})$ $\vec{D}(\vec{E})$

Dielektrikoen artean: LINEALAK

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ (χ_e suszeptibilitatea)

$\hookrightarrow P_i = \varepsilon_0 \chi_{e_{ij}} E_j$

Lineal isotropikoak $\Rightarrow \chi_{e_{ij}} = \chi_e \cdot \delta_{ij}$

$\vec{P} = \alpha \vec{E}$ $\qquad \chi_e = \dfrac{n_{part} \cdot \alpha}{\varepsilon_0}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

ε_r = Materialaren permitibitate erlatiboa $\rightarrow \varepsilon_r = 1 + \chi_e$

ε = Materialaren permitibitatea $\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

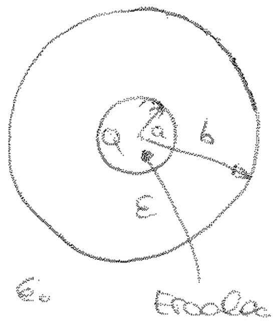
$$\nabla \wedge \vec{P} = \varepsilon_0 \nabla \wedge (\chi_e \cdot \vec{E}) = \varepsilon_0 \chi_e \nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \wedge \vec{D} = 0$$

$$(\nabla \wedge (\chi_e \vec{E}))_k = \varepsilon_{ijk} \cdot \partial_i (\chi_e \vec{E})_j = \varepsilon_{ijk}\, \partial_i (\chi_{e\,jl} \cdot E_l) =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \chi_{jl} \cdot \partial_i \cdot E_l$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \overset{\text{l. ezd.}}{=} -\frac{\chi_e}{\chi_e+1}\, \nabla \cdot \vec{D} = -\frac{\chi_e}{\chi_e+1} \cdot \rho_{aske}$$

4 ADIBIDEA:



$$\vec{D} = D(r)\, \hat{u}_r$$

$$D(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

$$r < a \rightarrow \vec{P} = 0 = \vec{E}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon r^2}\, \hat{u} & a < r < b \\ \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^2}\, \hat{u} & r > b \end{cases}$$

Ohartu $\varepsilon > \varepsilon_0$ dela?,

$E_\varepsilon < E_0$ puntu bakoitzean,

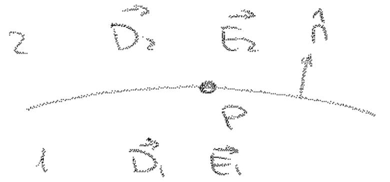
hortaz, dielektrikoak eremua moteltzen du.

$$\vec{P}? \rightarrow \rho_P$$

$$\sigma_P(a)? \rightarrow -Q + \frac{Q}{\varepsilon_r} \Rightarrow \sigma_P = \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) Q}{4\pi a^2}$$

Muga-baldintzak:

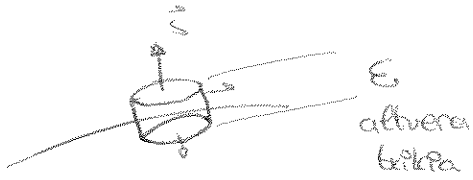
①



$\vec{D}_1(P)$

$\vec{D}_2(P)$

$\hat{n} : 1 \to 2$



↳ Bolumen bat hartzen dugu

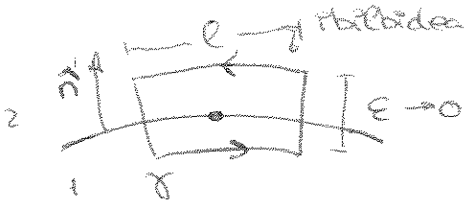
$$\int dV \cdot \nabla \cdot \vec{D} = Q(V)_{askea} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{D} = \lim_{\varepsilon \to 0} Q(V)_{askea}$$

$$\int_{\partial V} d\vec{S}\, \vec{D} =$$

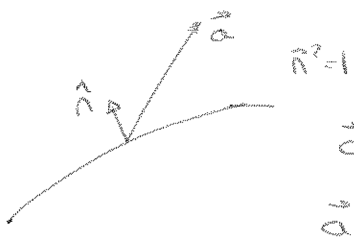
$$S\left[\vec{D}_2 \cdot \hat{n} + \vec{D}_1 (-\hat{n})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\, \vec{n} = \sigma_{askea}}$$

②



$$\left.\begin{array}{l} \int_\gamma d\vec{\ell} \cdot \vec{E} = \int d\vec{S} \cdot (\nabla \wedge \vec{E}) = 0 \\ \quad \parallel \\ \vec{E}_2 \cdot \vec{\ell} - \vec{E}_1 \cdot \vec{\ell} \end{array}\right\} \qquad \boxed{\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel}}$$

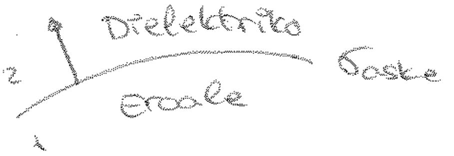


$\hat{n}^2 = 1$

$\vec{a}^{\perp} = (\vec{a} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$

$\vec{a}^{\parallel} = \vec{a} - \vec{a}^{\perp}$

$(\vec{a}^{\parallel} \cdot \vec{n}) = \vec{a} \cdot \vec{n} - (\vec{a} \cdot \vec{n}) \cdot n^2 = 0$



$\vec{E}_1 = 0$

$D_{2n} = \sigma_{askea}$

$\vec{E}_2^{\parallel} = 0$

$$\int_{\Gamma} d\vec{l}\cdot\vec{E} = \int_{S} d\vec{S}\cdot(\nabla$$

$$\int_V dV\,(\nabla\cdot\vec{D}) = \int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{D}$$

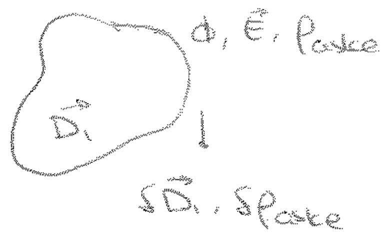
- ENERGIA

$U = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\phi(\vec{r})$ → karga-banaketa osatzeko behar dugun energia.

$\rho = \rho_{aske}$ bada, badirudi dielektrikoaren karga-banaketa osatzeko behar dugun energia. BAINA EZ.

$$\frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\rho_{askea}(\vec{r})\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\nabla\vec{D}\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\vec{D}\cdot\nabla\phi + \cancel{MKG}$$

Hori egia da dielektrikoa lineala bada $\boxed{U = -\frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\vec{D}\cdot\vec{E}}$



$$\delta W = \int d^3\vec{r}\,\delta\rho_{askea}\,\phi = \int d^3\vec{r}\,(\nabla\,\delta\vec{D})\,\phi \overset{zat.int}{=} \int d^3\vec{r}\,\delta\vec{D}\cdot\vec{E}$$

$$W = \sum \delta W = \int d^3\vec{r}\int_0^{\vec{D}} \delta\vec{D}\cdot\vec{E}$$

kasu lineala: $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D}$
isotropikoa

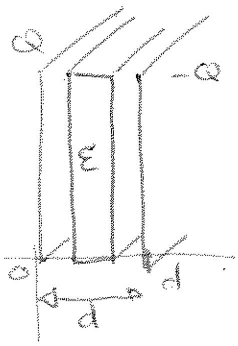
$$W = \int d^3\vec{r} \int_0^{\vec{D}} \underbrace{\delta\vec{D}\cdot\vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon}\vec{D}\,\delta\vec{D} = \frac{1}{2\varepsilon}\delta(\vec{D}^2)} = \int d^3\vec{r}\, \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\vec{D}} \delta(\vec{D}^2) = \frac{1}{2\varepsilon}\int d^3\vec{r}\,\vec{D}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\vec{D}\vec{E}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\vec{D}\cdot\vec{E}}$$ → Dielektrikoaren energia

(kasu lineal isotrop.)

→ ADIBIDEA: (kondentsadorea)

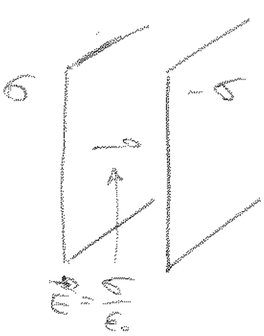


$\vec{D}$? $\vec{E}$? ϕ? W?

Hemen sasi-simetria bat dugu:

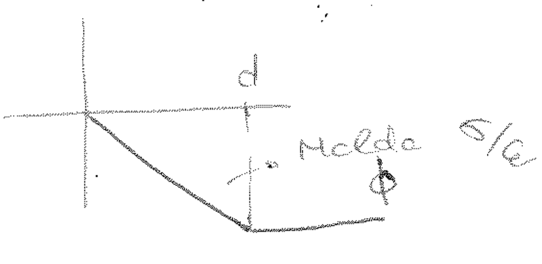
$\vec{E} = E(x)\cdot\hat{u}_x$ $\quad \vec{D} = D(x)\cdot\hat{u}_x$ $\quad \phi(x)$

kasu honetan errazena $\vec{D}$ kalkulatzea:



$$\vec{D} = \begin{cases} \sigma\,\hat{u}_x & \text{barruan} \\ 0 & \text{kanpoan} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D} = \begin{cases} \sigma/\varepsilon\ \hat{u}_x & \text{barruan} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$



$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\sigma\, \vec{u}_x & \text{barruan} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

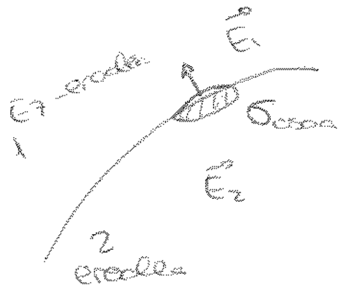
$$\rho_P = 0 \qquad \sigma_P(0) = \vec{P}\cdot(-\vec{u}_x) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\sigma$$

$$\sigma_P(d) = \vec{P}\cdot\vec{u}_x = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\sigma$$

Dielektrikoaren energia elektrostatikoa $= \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \begin{cases} \sigma^2/2\varepsilon & \text{barruan} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$

• ERROALEAK JASANDAKO INDARRA

$$d\vec{F} = \vec{E}_{kanpo}\,\rho(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{besteak} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{besteak} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{besteak} = \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}{2}$$

2 eroalea da egoera estatikoan $\to \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow \vec{D}_2 = 0$

1 hutsa bada: $\Delta\vec{D}\,\hat{n} = \sigma$

$$\vec{D}_1 = \sigma\hat{n} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$\vec{E}_{besteak} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

Presioa $\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{S} = \frac{q\cdot E}{S} = \frac{q}{S}\cdot E = \sigma\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

Energia dentsitatea: $\varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2}$

Orduan: $\varepsilon_0\cdot\frac{\vec{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ = Presioa

Hortaz, presioa eta puntu horretan dagoen eremu totalaren energia dentsitatearekin bat dator.

- Demagun orain dielektrikoa dugula:

Aldatzen den gauza bakarra:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{n}$$

$$\text{Presioa} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2}$$

Orduan kasu honetan ere presioarena eta dielektrikoaren energia elektrostatikoaren adierazpenak bat datozela

• DIELEKTRIKOAK JASANDAKO INDARRA

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$$

$$\varepsilon \vec{E} = \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

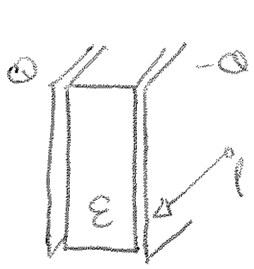
$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$ → Dipolo batek jasandako indarra

$$\vec{p} = \vec{P} \cdot d^3\vec{r} \Rightarrow d\vec{F} = (\vec{P} \cdot \nabla)\vec{E}\, d^3\vec{r} = (\varepsilon - \varepsilon_0)(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} \cdot d^3\vec{r}$$

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)\nabla(\vec{E}^2)\, d^3\vec{r}$$

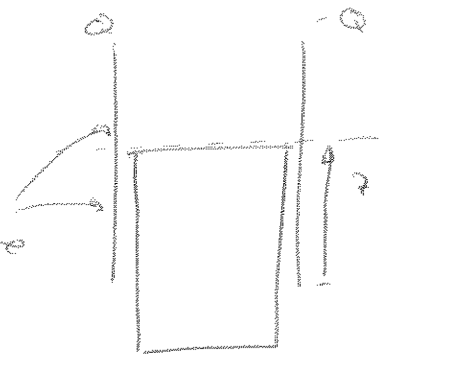
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\, (\varepsilon - \varepsilon_0)\nabla(\vec{E}^2)}$$

↳ ADIBIDEA:

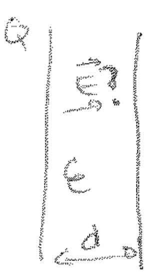


Demagun dielektrikoa ez dagoela guztiz sartua

Bi kondentsadore



Har dezagun dielektrikoaren zati



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon} d = \frac{d}{S\varepsilon} Q \Rightarrow C = \frac{S\varepsilon}{d}$$

$$C = \frac{(h-z)l}{d}\varepsilon_0 + \frac{z \cdot l}{d}\varepsilon \qquad C_0 = \frac{hl}{d}\varepsilon_0$$

$$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$U(z) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{C_0 + \frac{zl}{d}(\varepsilon - \varepsilon_0)}$$

$$\vec{F}_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \rightarrow \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{\ell(\varepsilon-\varepsilon_0)/d}{\left[C_0 + \frac{z\ell}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)\right]^2}$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

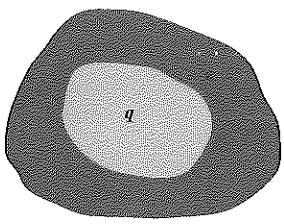
Elektromagnetismoa I — Dielektrikoak 1: Polarizazioa

1. Biz L luzerako eta R erradioko hagaxka polarizatu dugu, ardatzaren norabideko $\mathbf{P}$ polarizazio konstantez. Kalkula ezazu hagaxkatik kanpoko potentzial elektrikoa ardatzean zehar.

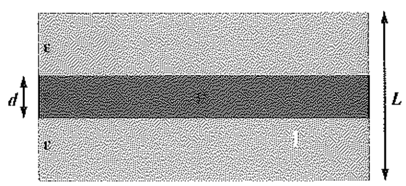
2. Q karga daraman a erradioko esfera eroalea guztiz inguratzen du b kanpo erradioko geruza dielektrikoak.

- Kalkula ezazu desplazamendu elektriko bektorea espazio osoan.
- Demagun orain dielektrikoa lineala dela, ϵ permitibitatea izanda. Kalkula ezazu
  1. Eremu elektrikoa espazio osoan
  2. Potentziala espazio osoan
  3. Polarizazio karga dentsitateak. Behin dentsitateak kalkulatuz gero, erabili horiek berriro eremu elektrikoa kalkulatzeko.

3. Itxura zehaztugabeko eroale batek q karga du, eta ϵ permitibitateko dielektriko homogeneo batez inguratuta dago. Kalkula itzazu dielektrikoaren barneko eta kanpoko gainazaletako karga lotuaren kopuru osoa. Alderatu zure emaitza aurreko ariketarekin.



4. Xafla dielektriko handiaren lodiera L da. Zeharkako dimentsioan zentraturik ρ karga askearen dentsitatea sartu dute, d lodierako material bereko geruza batean. Kalkula ezazu $\mathbf{D}$ desplazamendu eremua espazio osoan. Kalkula itzazu $\mathbf{E}$ eremu elektrikoa eta $\mathbf{P}$ polarizazioa espazio osoan, dielektrikoa linealaren kasuan, $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r = \epsilon_0(1+\chi)$ permitibitateduna. Kasu berean, kalkula itzazu polarizazio karga dentsitate guztiak. Kalkula ezazu potentziala espazio osoan (eman ezazu potentziala nulua dela xaflaren zentruan).

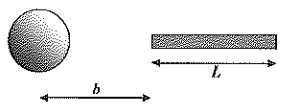


5. Biz b erradioko esfera dielektrikoa. Bere zentruan barrunbe esferiko hutsa dago, $a < b$ erradiokoa. Dielektrikoaren polarizazioa $\mathbf{P} = k\mathbf{r}$ da. Kalkula itzazu $\mathbf{E}$ eremu elektrikoa eta $\mathbf{D}$ desplazamendu elektrikoa espazio osoan. Zentzuzkoa al da $a \to 0$ limitea hartzea esfera dielektriko trinkoaren kasua kalkulatzeko?

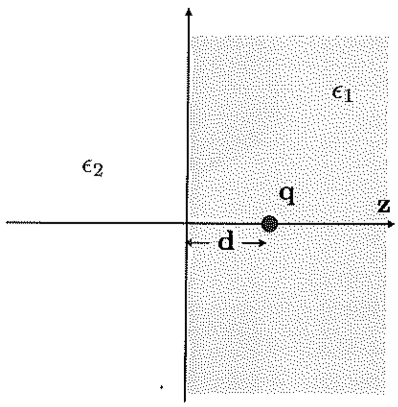
6. Jo ezazu k konstanteko malguki bat x distantzia luzatuz gero qx momentu dipolarra agertzen dela. Erakuts ezazu polarizabilitatea $\alpha = q^2/k$ dela (*Iradokizuna*: zuzenean sorturiko indarrak idatzi, eta hortik oreka, edo energia potentzialen batura aztertu).

7. Aurreko ariketaren ildotik, polarizazio atomikoaren eredu erraza honako hau dugu: elektroiak lotuak dira atomoan/molekuletan. Euren oreka posiziotik desplazatuak direnean indar berreskuratzaile harmonikoa jasango dute. Orekaren inguruko oszilazioen maiztasuna ω dela onartuz, k konstante berreskuratzailea $k = m\omega^2$ dugu, non m elektroiaren masa den (gogoan izan ω *maiztasun angeluarra* dela, eta $\omega = 2\pi \times \nu$ dela, non ν maiztasuna den). Hots, polarizabilitatea $\alpha = \epsilon_0 \left(\sum_i e^2/(m\omega_j^2\epsilon_0)\right)$, non maiztasun batzuk agertzen diren. Egiazta ezazu batugaien dimentsioa bolumenekoa dela. Bere balioa zenbatetsiko dugu orain. Lehengoz: eredua ondo egongo balitz, bolumen hori molekularena baino txikiagoa izan behar da. Nondik nora doaz molekulen luzera eskalak eta bolumenak? Bigarrenez: kitzikapen elektronikoen maiztasunak argi ikusgaiari dagozkio (errotazio kitzikapenak mikrouhinetan daude, bibrazionalak infragorrietan). Argi ikusgaiaren maiztasunak $e^2/m\omega^2\epsilon_0$ adierazpenean sartuz (esate baterako, $\lambda = 3 \times 10^3$ Å $= 300$ nm uhin luzera - gogoan izan $\lambda\nu = c$, non c argiaren abiadura den), zein bolumen eskala lortzen duzu?

8. Aurreko ariketaren zenbateslea erabiliz, azter ezazu *polarizazioa* (aurrekoan *polarizabilitatea* aztertu dugu eta). Argi dago polarizazioa zenbatesteko errezena hau dela: elementu mikroskopikoaren polarizabilitatea bider elementu mikroskopikoen dentsitatea. Alderatu gas eta solido faseen polarizazioak.

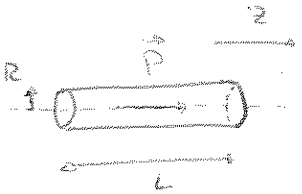


9. Irudiko a erradioko esferak Q karga du bolumenean uniformeki banatuta. Beste aldetik, L luzerako hagaxkaren luzerazko karga dentsitatea λ da, hori ere homogeneoa. Kalkula itzazu a) esferaren eta hagaren arteko elkarrekintza energia, eta b) hagaxkak esferari egindako indarra.



10. Demagun di dielektriko infinitoen arteko muga $z = 0$ planoan dagoela, eta $d\mathbf{u}_z$ puntuan q karga puntuala dagoela. Kalkula ezazu $\mathbf{D}$ desplazamendu bektorea. Demagun orain dielektrikoak linealak direla, eta ϵ_1 eta ϵ_2 permitibitateak ditugula $z > 0$ eta $z < 0$ dielektrikoetan, hurrenez hurren. Kalkula itzazu $\mathbf{E}$ eremu elektrikoa eta $\mathbf{P}$ polarizazioa. Karga lotuaren dentsitaterik al dago inon?

1. ARIKETA



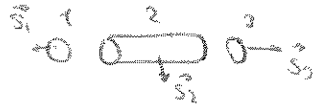
$\vec{P} = P\hat{u}_z$

Ariketa ebazteko polarizatutako kargak kalkulatuko ditugu:

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} \qquad \text{eta} \qquad \sigma_p = \hat{n}\,\vec{P}$$

$$\vec{P} = kte \Rightarrow \nabla\cdot\vec{P} = 0 \Rightarrow \rho_p = 0$$

σ_p aurpegi bakoitzean kalkulatuko dugu:



$$\sigma_{p_1} = \vec{n}_1\cdot\vec{P} = -\hat{u}_z\cdot P\hat{u}_z = -P$$

$$\sigma_{p_2} = \vec{n}_2\cdot\vec{P} = \hat{u}_r\cdot P\hat{u}_z = 0 \quad (\hat{u}_r \perp \hat{u}_z)$$

$$\sigma_{p_3} = \vec{n}_3\cdot\vec{P} = \hat{u}_z\cdot P\hat{u}_z = P$$

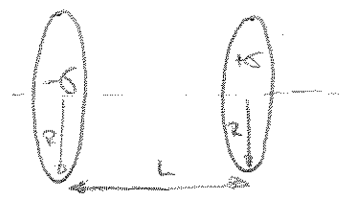
$\vec{S}_1 = S_1(-\hat{u}_z)$

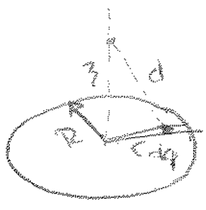
$\vec{S}_2 = S_2\hat{u}_r$

$\vec{S}_3 = S_3\hat{u}_z$

Ondorioz, problema baliokidea ebatziko dugu polarizatutako kargak erabiliz:

Disko batek bere ardatzean sortzen duen potentziala kalkulatu behar dugu:





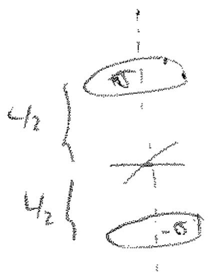
$dq = \sigma\, dr \cdot r\, d\theta$

$d = \sqrt{z^2 + r^2}$

Simetriagatik: $\phi(-z) = -\phi(z)$

$$\phi = \int_Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dr\cdot r\, d\theta}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2+r^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+r^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - |z|\right)$$

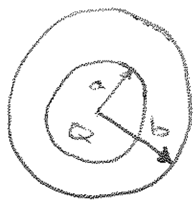


$$\phi_{+\sigma}(z) = \frac{P}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(z-L/2)^2} + |z-L/2|\right)$$

$$\phi_{-\sigma}(z) = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(z+L/2)^2} + |z+L/2|\right)$$

$$\phi = \frac{P}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(z-L/2)^2} - \sqrt{R^2+(z+L/2)^2} + |z-L/2| - |z+L/2|\right)$$

2. ARIKETA



Karga banaketagatik eta simetria esferikoarengatik,

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r)\cdot\hat{u}_r$$

$\vec{D}$ kalkulatzeko, $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{askea}$ erabiliko dugu.

- $0 < r < a$:

Eroale baten barruan $\vec{E} = \vec{0}$

$$\left.\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right\} \quad \vec{D} = \vec{P}$$

Baina $\vec{p}_i = \alpha\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0\,\hat{u}_r$

- $r > a$:

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{askea} \rightarrow \oint_S \vec{D}\,d\vec{s} = Q_{askea} = Q$$

$$d\vec{s} = ds\,\hat{u}_r \rightarrow D\,4\pi r^2 = Q \rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r\,, & 0<r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r\,, & r>a \end{cases}$$

Orain, dielektrikoa lineala dela suposatuz, kalkulatu $\vec{E}$, ϕ, ρ_p eta σ_p.

Dielektrikoa lineala bada $\Rightarrow$ $\vec{D} = \epsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\epsilon}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r\,, & 0<r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{u}_r\,, & a<r<b \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{u}_r\,, & r>b \end{cases}$$

ϕ kalkulatzeko: $\quad \phi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$

- $r>b$:

$(d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r)$

$$\int_{\phi(\infty)}^{\phi(r)} d\phi = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$\phi(\infty) = 0$ hartuz $\Rightarrow$ $\phi(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$

Ondorioz, $\phi(b) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 b}$

• $a<r<b$:

$$\int_{\phi(b)}^{\phi(r)} d\phi = \int_r^b \vec{E}\,d\vec{r} = \int_r^b \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^b = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\phi(r)-\phi(b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) \Rightarrow \phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r} + \frac{1}{4\pi b}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\phi(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon a} + \frac{1}{4\pi b}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

• $r<a$:

$$\oint_{\phi(a)}^{\phi(r)} d\phi = \int_r^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^a 0\cdot dr = 0 \Rightarrow \phi(r) = \phi(a)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon a} + \frac{1}{4\pi b}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>b \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon r} + \dfrac{1}{4\pi b}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0}-\dfrac{1}{\varepsilon}\right), & a<r<b \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon a} + \dfrac{1}{4\pi b}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0}-\dfrac{1}{\varepsilon}\right), & r<a \end{cases}$$

Polarizazio kargak kalkulatzeko, $\vec{P}$ kalkulatu behar dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \qquad (\vec{P} = P\hat{u}_r)$$

$$\vec{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{u}_r \Rightarrow$$ Hemendik polarizazio kargak aterako ditugu.

$\vec{S_1} = -S_1\hat{u}_r$

$\vec{S_2} = S_2\hat{u}_r$

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} \overset{\text{esferikoak}}{=} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon\cancel{r^2}}\right) = 0$$

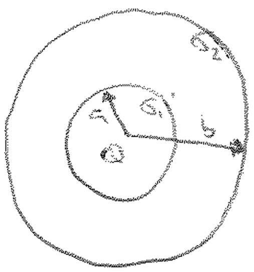
$$\sigma_1 = \vec{n}_1\cdot\vec{P} = -\hat{u}_r\cdot\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon a^2}\hat{u}_r = \frac{(\varepsilon_0-\varepsilon)Q}{4\pi\varepsilon a^2}$$

$$\sigma_2 = \vec{n}_2\cdot\vec{P} = \hat{u}_r\cdot\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon b^2}\hat{u}_r = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon b^2}$$

Dentsitateak erabilita, kalkulatu berriro $\vec{E}$.

Polarizazio-kargak kontuan hartzen baditugu, jada kontuan hartzen dugu dielektrikoaren eragina. Hortaz, ε_0 erabiliko dugu problema baliokidean.

Gauss-en legea erabiliko dugu: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$



- $r<a$:

Hemen ez daudenez gauza berririk, aurreko atalatik hartuko dugu emaitza:

$$\vec{E} = 0\,\hat{u}_r$$

- $a<r<b$:

Hemen inguratzen dugun karga: Q eta σ_1

$$Q_{ing} = Q + \sigma_1\cdot S_1 = Q + \frac{(\varepsilon_0-\varepsilon)Q}{4\cancel{\pi}\varepsilon \cancel{a^2}}\cdot 4\cancel{\pi}\cancel{a^2} = Q + \frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}Q = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}Q$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\frac{\cancel{\varepsilon_0}}{\varepsilon}Q}{\cancel{\varepsilon_0}} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

- $r>b$:

Hemen inguratzen dugu Q, σ_1 eta σ_2

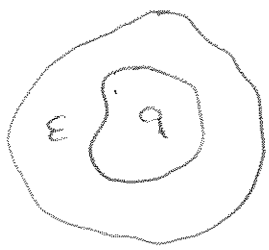
$$Q_{ing} = Q + \sigma_1 \cdot S_1 + \sigma_2 \cdot S_2 = Q + \frac{(\varepsilon_0-\varepsilon)Q}{4\pi\varepsilon a^2}4\pi a^2 + \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon b^2}4\pi b^2 = Q$$

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{u}_r, & a<r<b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r, & r>b \end{cases}$$

Ikus daitekeenez, erantzun berdina lortzen dugu.

3. ARIKETA



Forma zehatza ez duenez (simetriarik gabe) ezin dugu gainazal gaussiarrak definitu. Beraz, ezin dugu ariketa betiko moduan ebatzi.

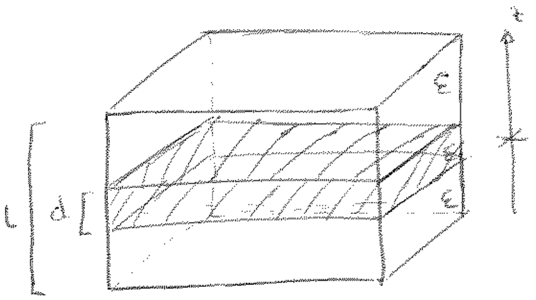
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\vec{D} = \left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\vec{D}$$

$$\rho_P = -\nabla\vec{P} = -\nabla\left[\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\vec{D}\right] = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)\nabla\cdot\vec{D} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)\rho_{askea} = 0$$

↳ Dielektrikoan $=0$

4. ARIKETA



Simetriagatik, $\vec{D}$ kanporantz joango da. $\Rightarrow$ $\vec{D}(\vec{r}) = D(z)\,\hat{u}_z$

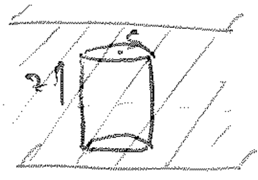
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{askea}$

Z-ren jatorria xaflaren erdian hartuko dugu:

- $\underline{-d/2 < z < d/2}$:

Gainatal Gaussiartzat S oineko eta 2z altuerako zilindroa hartuko dugu:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{ing}$$



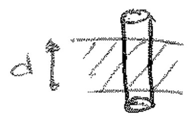
Fluxua soilik topetatik. $\Rightarrow$ $2D \cdot S$

$Q_{ing} = \rho_{askea} \cdot V = \rho\, 2z \cdot S$

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = Q_{ing} \Rightarrow \cancel{2} \cdot D\, \cancel{S} = \rho\, \cancel{2}z \cdot \cancel{S}$$

$$\vec{D} = \rho \cdot z\, \hat{u}_z$$

- $|z| > d/2$:



Prozedura berdina erabiliko dugu:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{ing} \Rightarrow \quad \text{Fluxua} = 2D\cdot S$$
$$Q_{ing} = \rho V = \rho S d$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{ing} \Rightarrow 2D\cancel{S} = \rho \cancel{S} d \Rightarrow \vec{D} = \rho \frac{d}{2} (\pm \hat{u}_z)$$

↳ z-ren arabera

Hortaz,

$$\vec{D}(z) = \begin{cases} \rho z, & |z| < d/2 \\ \text{sign}(z)\cdot \rho \frac{d}{2}, & |z| > d/2 \end{cases}$$

$\vec{E}$ kalkulatzeko, dielektrikoa lineala denez, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ erabiliko dugu: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$. Ondorioz, $\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\,\hat{u}_z$

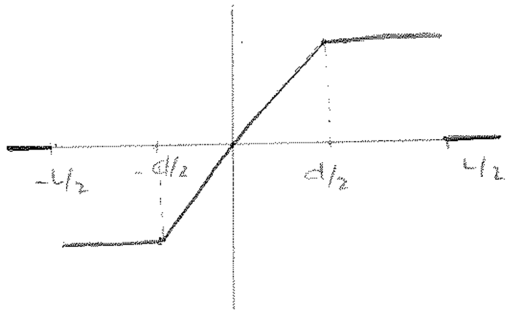
$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \rho \frac{z}{\varepsilon}\hat{u}_z, & |z| < d/2 \\ \text{sign}(z)\, \rho \frac{d}{2\varepsilon}\hat{u}_z, & d/2 < |z| < L/2 \\ \text{sign}(z)\, \rho \frac{d}{2\varepsilon_0}\hat{u}_z, & |z| > L/2 \end{cases}$$

$\vec{P}$ kalkulatzeko, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ erabiliko dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \vec{P}(\vec{r}) = P(z)\,\hat{u}_z$$

$$\vec{P}(z) = \begin{cases} \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon}\rho z\,\hat{u}_z, & |z| < d/2 \\ \text{sign}(z)\, \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon}\rho d\,\hat{u}_z, & d/2 < |z| < L/2 \\ 0\,\hat{u}_z, & \text{bestela.} \end{cases}$$

P irudikatuko dugu:



Polarizazio-kargak kalkulatuko ditugu:

P $|z| > d/2$ denean konstante denez, ez da ρ_P-rik egongo:

$$- \ |z| < d/2 \Rightarrow \quad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial z} = \boxed{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \rho = \rho_P}$$

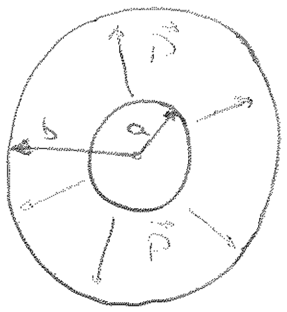
Bestalde, xafla amaitzen den tokian ere σ_P agertuko da.

Simetriagatik, $-L/2$-en berdina sortuko da.

$$\hat{n}_{L/2} = \hat{u}_z \Rightarrow \sigma_{L/2} = \hat{n}_{L/2} \cdot \vec{P}_{L/2} = \boxed{\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \rho d = \sigma_{L/2}}$$

$$\text{Ondorioz} \Rightarrow \boxed{\sigma_{-L/2} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \rho d}$$

5. ARIKETA



$\vec{P} = k\vec{r} = kr\,\hat{u}_r$

Ariketa ebazteko, polarizazio-kargak kalkulatuko ditugu:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot kr) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(kr^3)}{\partial r} = -3k$$

$$\sigma_a = \vec{n}_a\cdot\vec{P}(a) = -\hat{u}_r\cdot k\cdot a\,\hat{u}_r = -ka$$

$$\sigma_b = \vec{n}_b\cdot\vec{P}(b) = \hat{u}_r\cdot k\,b\,\hat{u}_r = kb$$

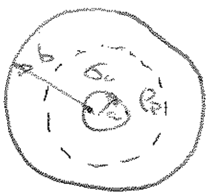
Hemendik aurrera, ariketa hutsean kokaturiko kargak balira bezala ebatziko dugu ariketa.

Gaussen legea erabiliz, $\vec{E}$ kalkulatuko dugu: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

- $0<r<a$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$$

- $a<r<b$:



$d\vec{S} = dS\,\hat{u}_r$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_{int}/\varepsilon_0$$

$$Q_{int} = \sigma_a S_a + \rho_P V = -ka\,4\pi a^2 - 3k\,\frac{4}{3}\pi(r^3-a^3) =$$

$$= -4\pi k a^3 - 4\pi k r^3 + 4\pi k a^3 = -4\pi k r^3$$

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = -\frac{4\pi k r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = -kr/\varepsilon_0$$

• $r>b$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{ing}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{ing} = \sigma_a S_a + \rho_p \cdot V + \sigma_b S_b = -ka4\pi a^2 - \cancel{3}k\frac{4}{\cancel{3}}\pi(b^3-a^3) + bk4\pi b^2 =$$

$$= -4\pi k a^3 - 4\pi k b^3 + 4\pi k a^3 + 4\pi k b^3 = 0$$

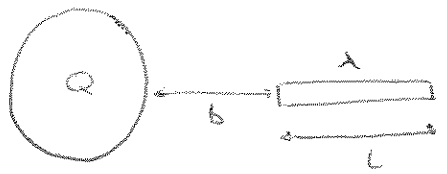
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r<a \\ -kr/\epsilon_0\,\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_r, & r>b \end{cases}$$

Orain, $\vec{D}$ kalkulatzeko: $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r$

Ikus daitekeenez, $\vec{D} = 0\,\hat{u}_r$ espazio osoan. Zentzuzkoa da ez dagoelako karga askerik.

9. ARIKETA



• Lehenengo hagaxkak esferari eragiten dion indarra kalkulatuko dugu. Akzio-erreakzio printzipioarengatik: $\vec{F}_{e \to h} = -\vec{F}_{h \to e}$

Ondorioz, esferak hagaxkaren gainean egiten duen indarra kalkulatuko dugu.

Esfera batek sortzen duen $\vec{E}$ gainazaletik kanpo karga puntualak sortzen duenaren berdina $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r$

Hagaxkaren dq-an sorturiko indarra: $d\vec{F} = \vec{E}\, dq$

$$dq = \lambda \cdot dl \Rightarrow d\vec{F} = \vec{E} \cdot \lambda \cdot dl = \lambda \, dr$$

$$\vec{F} = \int_b^{b+L} \vec{E} \cdot \lambda \, dl = \lambda \int_b^{b+L} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr \, \hat{u}_r = \frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_L^{b+L} \hat{u}_r =$$

$$= \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{L} - \frac{1}{b+L} \right] \hat{u}_r = \frac{\lambda Q b}{4\pi\varepsilon_0 L (b+L)} \hat{u}_r$$

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

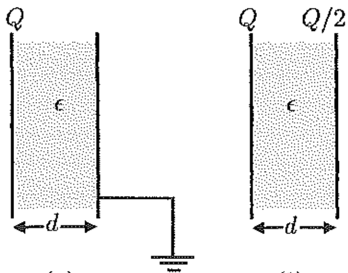
Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Elektromagnetismoa I — Dielektrikoak 2: Kondentsadoreak

1. Lurra kondentsadore esferikotzat har ezazu, eta jo ezazu eremu elektrikoa atmosferan soilik dagoela. Lurraren erradioa 6.37×10^6 m eta atmosferaren lodiera 5×10^4 m (ionosferaren altuera, hain zuzen ere) direla onartuz, kalkula ezazu eremu elektrikoan metatutako energia eguraldi oneko egun batean, non eremu elektrikoa ≈ 100 V/m den.

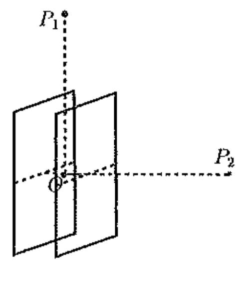
2. S azalerako eta d lodierako kondentsadore lau baten xaflen artean dielektrikoa dugu. Dielektrikoaren konstantea linealki handitzen da ϵ_1 baliotik ϵ_2 balioraino. Kalkula ezazu kondentsadorearen kapazitatea eta polarizazio kargen banaketa.

3. A azalerako bi xafla metaliko d distantziaz aldenduak dira. Xaflen artean ϵ permitibitateko dielektrikoa dugu. Xafla bat Q kargaz hornitu dugu; bestea, berriz, lurrari lotzen zaio, *(a)* irudian agertzen den moduan. a) Zer dira eremu elektrikoaren eta polarizazioaren balioak dielektrikoan? b) Kalkula ezazu xaflen arteko potentzial diferentzia. c) Lurrarekiko lotura apurtu dugu orain, eta bigarren xafla $Q/2$ kargaz hornitua geratu da. Zenbatekoa da orain xaflen arteko potentzial diferentzia? (*Iradokizuna:* erabili ohiko hurbilketak.)

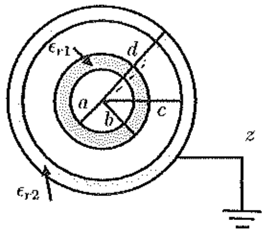


(a) (b)

4. Kondentsadore lau baten kapazitatea 22.5 pF dela neurtu da experimentalki. Jo ezazu xaflen arteko distantzia 1.5 cm dela eta tentsioa 1.8×10^3 V dela. Ertzetako efektuak baztertuz, eta hurbilketa egokiak kontsideratuz, kondentsadoretik kanpo eta oso urrun dauden puntuetako potentzialak zenbatetsi nahi dugu. Hain zuzen ere, irudiko P_1 eta P_2 puntuetan, zentrutik 3 m aldenduak.

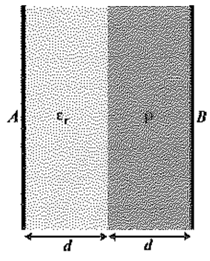


5. Bitez a eta d erradioko esfera eroale zentrukideak ($a < d$). $a < r < b$ dielektrikoak inguratzen du barruko esfera. Dielektriko honen permitibitate erlatiboa ϵ_{r1} dugu. $b < r < c$ tartean hutsa dugu. Hurrengo geruza esferikoa, $c < r < d$ erradioetan, dielektrikoz beteta dago, ϵ_{r2} permitibitate erlatiboarekin. Barne esferaren potentziala V da, eta kanpokoa lurrari lotuta dago. Kalkula itzazu karga aske osoak barne eta kanpo esferetan, eremu elektrikoa espazioko alde guztietan, eta polarizazio karga banaketa guztiak.

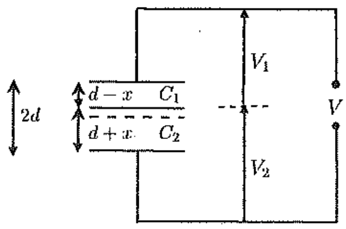


6. a erradioko esfera eroaleak q karga darama. Horren zentrukide b erradioko geruza eroalearen lodiera arbuiagarria da. Kalkula ezazu sistemaren energia elektrostatikoa ondoko kasu bietan: a) kanpo geruzak ez du kargarik; b) kanpo geruza lurrari lotuta dago.

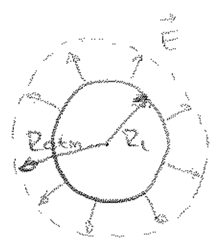
7. A eta B xafla eroaleak $2d$ distantziaz aldenduak dira, eta potentzial berean mantentzen ditugu. Euren artean bi geruza dielektrikok betetzen dute espazio osoa. Lehena, A xafla ukitzen duena, ϵ_r permitibitate erlatibokoa da eta d lodierakoa. Bigarrenak ere d lodiera du, eta permitibitate bera. Hori bai, ρ bolumeneko karga dentsitate konstantea aurkezten du. Kalkula itzazu gainazaleko karga dentsitateak, ohiko hurbilketekin.



8. Kondentsadore aldakor diferentzialean bi kondentsadore aldakor agertzen dira, baten kapazitatearen balio aldaketa besteak hartuz. Irudiko goiko eta beheko xaflak finko daude; tartekoa, beste aldetik, higi daiteke xafleen planoarekiko perpendikularki. Xaflen azalera A dugu; ohi bezala xaflen luzerak xaflen arteko distantziak baino askoz handiagoak dira. Demagun xafla zentrala zentrutik x distantzia aldendu dugu. Zenbatekoak dira C_1eta C_2 kapazitateak? Sistema osoari Vtentsia aplikatuz gero, zein da $V_1 - V_2$ diferentzia? Kalkula ezazu sistemaren energia elektrostatikoa.



1. ARIKETA



$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\, dV$$

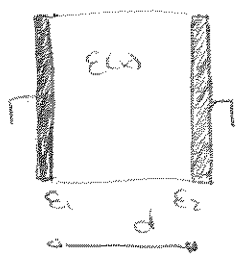
Atmosfera dielektriko linealtzat hartuz:

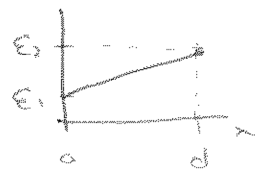
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 dV$$

$$U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\int_V dV = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\int_{R_i}^{R_{atm}} 4\pi r^2 dr = 2\pi\varepsilon_0 E^2 \left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_i}^{R_{atm}}$$

$$U = \frac{2}{3}\pi\varepsilon_0 E^2 (R_{atm}^3 - R_i^3)$$

2. ARIKETA





$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x$$

- Lehenengo $\vec{D}$ kalkulatuko dugu: $\vec{D}(\vec{r}) = D(x)\,\hat{u}_x$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{int} \Rightarrow D\,S = Q \Rightarrow D = \sigma$$

- Dielektrikoa linealtzat hartuz, $\vec{E}$ kalkulatuko dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon \quad (\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\,\hat{u}_x)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x + \varepsilon_1}\,\hat{u}_x$$

- Hemendik ΔV kalkulatuko dugu:

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(d)} d\phi = -\int_0^d \vec{E}\cdot \overset{\overset{\vec{dr}=dx\,\hat{u}_x}{\uparrow}}{\vec{dr}} = -\int_0^d \frac{\sigma}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x+\varepsilon_1}\,dx = \sigma\left[\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x+\varepsilon_1\right)\right]_d^0 =$$

$$= \frac{\sigma d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\left(\ln\varepsilon_1 - \ln\varepsilon_2\right) = \frac{\sigma d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = \Delta\phi$$

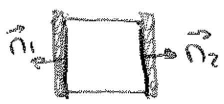
- Azkenik, kapazitatearen adierazpena lortuko dugu:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\cancel{\sigma}\cdot S}{\frac{\cancel{\sigma} d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\left(\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)} \Rightarrow C = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)S}{d\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}$$

→ Polarizazio-kargak kalkulatzeko $\vec{P}$-ren adierazpena behar dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D}-\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \vec{P}(\vec{r}) = P(x)\,\hat{u}_x$$

$$\vec{P} = \sigma\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(x)}\right)\hat{u}_x$$



$\vec{n}_1 = -\hat{u}_x \qquad \vec{n}_2 = \hat{u}_x$

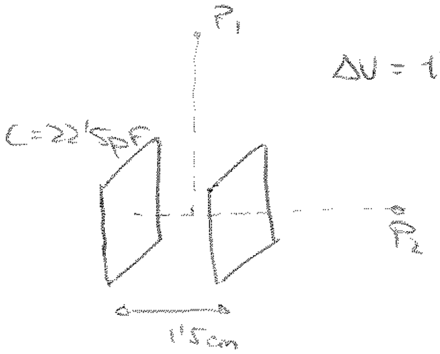
$$\sigma_1 = \vec{n}_1\cdot\vec{P}(0) = -\hat{u}_x\cdot\sigma\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{u}_x = \sigma\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-1\right)$$

$$\sigma_2 = \vec{n}_2\cdot\vec{P}(d) = \hat{u}_x\cdot\sigma\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat{u}_x = \sigma\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)$$

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma-\sigma\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x}\right) =$$

$$= \sigma\varepsilon_0\left[\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x\right)^{-1}\right]' = -\frac{\sigma\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d}\frac{1}{\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x\right)^2}$$

4. ARIKETA



$\Delta V = 1'3 \cdot 10^3\,V$

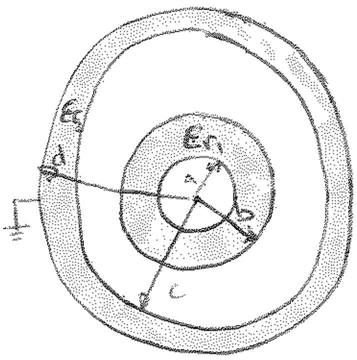
kondentsadorean, hurbilketak onartuz:

$\Delta V = E \cdot d \Rightarrow E = 8'67 \cdot 10^4\,V/m$

Bestalde $\Rightarrow$ $C = \dfrac{Q}{V} \Rightarrow Q = 2'925 \cdot 10^{-8}\,C$

Bi plaken artean: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q/S}{\varepsilon_0} \Rightarrow S = \dfrac{Q}{E \cdot \varepsilon_0} = 3'81 \cdot 10^{-3}\,m^2$

5. ARIKETA



$$\varepsilon_{r_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_{r_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_{r_2} \cdot \varepsilon_0$$

Simetriagatik, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

Kanpoko gartza lurreratuta $\Rightarrow$ kanpotik $Q=0 \Rightarrow Q_d = -Q_a$

Barrukoaren karga kalkulatzeko, sistemaren potentziala kalkulatzen joango gara.

- $c < r < d$:

Barruko karga = Q

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{ins}}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_{r_2}\cdot\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0 r^2}$$

$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r$

$$\oint_{\phi(d)}^{\phi(c)} d\phi = -\int_d^c \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_d^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_d^c = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)$$

$$\phi(d) = 0 \longrightarrow \phi(c) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)$$

- $b < r < c$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{ins}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\oint_{\phi(c)}^{\phi(b)} d\phi = -\int_c^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_c^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_c^b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

$$\phi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

$$\phi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\varepsilon_{r_2} d} + \frac{1-\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\cdot c}\right)$$

- $a<r<b$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{inc}}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1} r^2}$$

$$\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} d\phi = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1} r^2}\,dr = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\phi(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\varepsilon_{r_2} d} + \frac{1-\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2} c}\right)$$

$$\phi(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\varepsilon_{r_2}\cdot d} + \frac{\varepsilon_{r_1}-1}{\varepsilon_{r_1}\cdot b} + \frac{1-\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\cdot c}\right) = V$$

$$\boxed{Q_a = \frac{4\pi\varepsilon_0\cdot V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{\varepsilon_{r_1}\cdot d} + \frac{\varepsilon_{r_1}-1}{\varepsilon_{r_1}\cdot b} + \frac{1-\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\cdot c}}}$$

Eta, esan dugunez, $Q_d = -Q_a$:

$$\boxed{Q_d = \frac{-4\pi\varepsilon_0 V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{\varepsilon_{r_1}\cdot d} + \frac{\varepsilon_{r_1}-1}{\varepsilon_{r_1}\cdot b} + \frac{1-\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\cdot c}}}.$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1} r^2}\hat{u}_r, & a<r<b \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r, & b<r<c \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2} r^2}\hat{u}_r, & c<r<d \\[2ex] 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

Polarizazio-kargak kalkulatzeko, lehenengo $\vec{D}$ kalkulatuko. Simetria esferikoa dugunez, $\vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r$

- $a<r<d$:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{barne} = Q \Rightarrow D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

- Bestela:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q = 0 \Rightarrow D(r) = 0 \qquad \vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r, & a<r<d \\[2ex] 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela.} \end{cases}$$

Orain $\vec{P}$ kalkulatuko dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \qquad (\vec{P}(\vec{r}) = P(r)\,\hat{u}_r)$$

- $a<r<b$:

$$\vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r_1} r^2}\hat{u}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r_1}}\right)\hat{u}_r = \frac{Q(\varepsilon_{r_1}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_1} r^2}\hat{u}_r$$

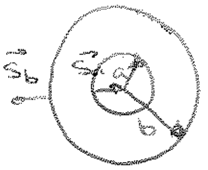
- $c<r<d$:

Berdina baina ε_{r_2}-rekin

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q(\varepsilon_{r_1}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_1}\cdot r^2}\,\hat{u}_r, & a<r<b \\ \dfrac{Q(\varepsilon_{r_2}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_2} r^2}\,\hat{u}_r, & c<r<b \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{Bestela.} \end{cases}$$

* Polarizatio-kargak kalkulatuko ditugu lehenengo dielektrikoan:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{Q(\varepsilon_{r_1}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_1}\cdot r^2}\right) = 0$$



$$\sigma_a = \vec{n}_a\cdot\vec{P}(a) = -\frac{Q(\varepsilon_{r_1}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_1}\cdot a^2}$$

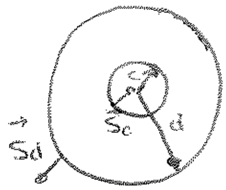
$$\sigma_b = \vec{n}_b\cdot\vec{P}(b) = \frac{Q(\varepsilon_{r_1}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_1} b^2}$$

$\vec{n}_a = -\hat{u}_r$

$\hat{n}_b = \hat{u}_r$

* Polarizatio-kargak kalkulatuko ditugu bigarren dielektrikoan:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot\frac{Q(\varepsilon_{r_2}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_2}\cdot \cancel{r^2}}\right) = 0$$



$$\sigma_c = \vec{n}_c\cdot\vec{P}(c) = -\frac{Q(\varepsilon_{r_2}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_2} c^2}$$

$$\sigma_d = \vec{n}_d\cdot\vec{P}(d) = \frac{Q(\varepsilon_{r_2}-1)}{4\pi\varepsilon_{r_2} d^2}$$

$\vec{n}_c = -\hat{u}_r$

$\vec{n}_d = \hat{u}_r$

6. ARIKETA

a) Geruzak ez du kargarik:

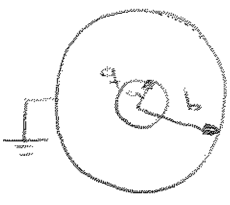
kasu honetan soilik esfera kargatua dugu.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r, & r>a \\ 0\hat{u}_r, & r<a \end{cases} \qquad \vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi r^2}\hat{u}_r, & r>a \\ 0\hat{u}_r, & r<a \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{1}{2}\int_0^\infty D\hat{u}_r\cdot E\hat{u}_r\,.\,4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{q}{\cancel{4\pi r^2}}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cancel{4\pi r^2}dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^\infty = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

b) Geruza lurreratuta dago:



kanpoko geruza lurreratuta dagoenean, $\vec{E}$ soilik a eta b tartean egongo da.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases} \qquad \vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi r^2}\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{q}{\cancel{4\pi r^2}}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cancel{4\pi r^2}dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Kargaren higiduraren gatik ematen den fenomenoa

$dQ(t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot dV \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ karga-dentsitatea aldatu dea denborarekin.

Higidura eremu-elektrikoaren ondorioz ematen da.

karga KONTSERBATU egiten da.

$d\vec{S} = dS\,\hat{n}$ zenbat karga pasatzen da dS-tik denbora-unitateko ?

dt tartean, zenbat karga pasatu da dS-tik?

↳  bolumenean dagoen karga, non $h = v\,dt$

$dq = \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} \cdot dt$

Orain demagun S gainazal finitua:

$$dq(S) = \int d\vec{S}\,(\rho\cdot\vec{v})\cdot dt$$

$$\boxed{\vec{j} = \rho\cdot\vec{v}} \rightarrow \vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}(\vec{r},t)$$

Berez, funtsezkoagoa da $\vec{j}$ $\vec{v}$ baino, eta askotan $\vec{v}$ $\vec{j}$-tik ondorioztatzen dugu.

$$\boxed{\int_S d\vec{S}\ \vec{j} = I(S)}$$ ← Intentsitatea korronte-dentsitatearen FLUXUA da.

$$dQ_V(t) \overset{①}{=} -\left(\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{j}\right) dt$$

$$Q_V(t) = \int_V d^3\vec{r}\ \rho(\vec{r},t)$$

$$\overset{②}{=} \int_V d^3\vec{r}\ \partial_t\rho(\vec{r},t)\cdot dt$$

$$\Rightarrow \boxed{-\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{j} = \int_V d^3\vec{r}\cdot\dot{\rho}}$$ Jarraitutasunaren formula forma integralean

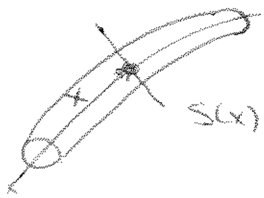
Dibergentziaren teorema $\Rightarrow \int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{j} = \int_V d^3\vec{r}\cdot\nabla\cdot\vec{j}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_V d^3\vec{r}\,(\partial_t \rho + \nabla\cdot\vec{j})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\partial_t \rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0}$$

↳ ADIBIDEA:



Zein da x puntuan S(x) sekziotik pasatzen den fluxua?

$$\int_{S(x)} \vec{j}\cdot d\vec{s} = I(x)$$

- OHM: EKUAZIO ERAIKITZAILEA

Zergatik agertzen da korronte dentsitatea:

* Noizbait zerbait hasten da mugitzen, eta inertziagatik jarraitzen dute.

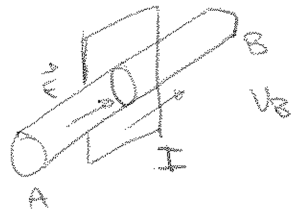
* Indarrak daudelako
$\vec{E}$ da indar nagusia, baina mikroskopikoki beste indarrak ager daiteke.

$$\vec{j} = g\cdot\vec{E} \qquad \text{OHMen LEGEA}$$
$$= \sigma\cdot\vec{E}$$

↳ Eroankortasuna

$g^{-1} = \eta \rightarrow$ ERRESISTIBITATEA

Nola lotzen da hau ezaguna zaigun erresistentziarekin)



Erresistibitate handiko material bat txikiko beste batekin dugunean, korronte gutxia erres. handiko materialetik joango da.

$$V_B - V_A = -\int_A^B d\vec{e} \cdot \vec{E}$$

$I(s) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j} \rightarrow$ Berez, intentsitatea azalera batekin zehazten dugu. Izan ere, hartzen dugun $\hat{n}$-ren araberakoa da I-ren zeinua.

$\vec{E} = E(x) \cdot \hat{u}_x \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = E'(x) \Rightarrow E'(x) = 0$

Ondorioz, $V_B - V_A = -E \cdot \ell$

$$\vec{j} = g \cdot \vec{E} = g \cdot \frac{V_A - V_B}{\ell} \hat{u}_x$$

Beraz, aurreko adierazpenetik, $I(S_x) = g\, S \cdot \frac{\Delta V}{\ell}$

$R = \frac{\ell}{g \cdot S}$ harturik, $\Rightarrow \Delta V = R \cdot I$

OHMen LEGE EZAGUNA

- JOULEen LEGEA

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} \Rightarrow \quad W_{AB}^{q} = q\cdot\int_A^B d\vec{r}\cdot\vec{E} = q\cdot\Delta V$$

$$\frac{dW}{dt} = I\cdot\Delta V = I\cdot RI = R\cdot I^2 \Rightarrow \boxed{P = RI^2}$$

- INDAR ELEKTROERAGILEA:

$$\int_\gamma d\vec{e}\cdot\vec{j} = ?$$

ohmikoa   homogeneoa   Indar kontserbakorra

$$= \int_\gamma d\vec{e}\cdot\sigma\vec{E} = \sigma\cdot\int_\gamma d\vec{e}\cdot\vec{E} = 0$$

Baina zirkulazioa ez da zero!

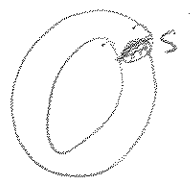
$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} + \vec{F}_{besteak} \Rightarrow \quad \varepsilon_\gamma = \int_\gamma d\vec{e}\cdot\frac{\vec{F}_{besteak}}{q}$$

Ondorioz, $\vec{J}$ ez da ohmen legeak emandakoa izango:

$$\vec{J} = \vec{J}_E + \vec{J}_{besteak}$$

$$\frac{\vec{F}_{best}}{q} = \vec{E}_{eraginkorra} \Rightarrow \quad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{eraginkorra})$$

$$\int_\gamma d\vec{l}\cdot\vec{j} = g\cdot\int_\gamma d\vec{l}\cdot\vec{E}_{eras.} = g\cdot\mathcal{E}_\gamma \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{g}\int_\gamma d\vec{l}\cdot\vec{j}$$



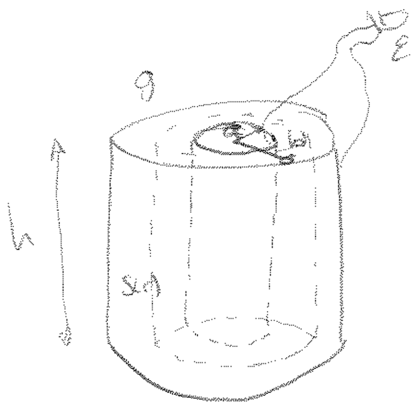
$$j \sim \frac{I}{s} \Rightarrow \mathcal{E} = I\cdot R$$

$$\langle\vec{j}\rangle = \frac{1}{s}\int (d\vec{s}\cdot\vec{j})\hat{u}_e$$ Batez bestekoa $\vec{j}$

$$\int d\vec{l}\cdot\langle\vec{j}\rangle = \frac{1}{s}\int dl\cdot d\vec{s}\cdot\vec{j} = \frac{1}{s}\int ds\cdot d\vec{l}\cdot\vec{j}$$

$$\langle\vec{j}\rangle = \frac{I}{s}\hat{u}_e$$

$$\left.\begin{array}{l}\int \frac{I\cdot dl}{g\,s} = \mathcal{E} \\ I\cdot R = \mathcal{E}\end{array}\right\} \quad R = \int\frac{dl}{g\cdot S}$$



$$V(a) - V(b) = \mathcal{E}$$

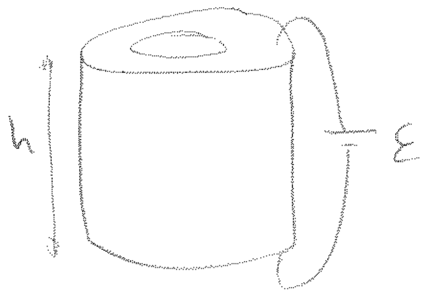
$$\vec{j}(r) = g\vec{E}(r) = g\cdot E(r)\cdot\hat{u}_r$$

$$I(r) = \int_{S(r)} d\vec{s}\cdot\vec{j} = \int_{S(r)} ds\cdot j(r) = j(r)\cdot\int_{S(r)} ds = j(r)\cdot 2\pi r h$$

$$j(r) = \frac{I}{2\pi h r} \qquad E(r) = \frac{I}{2\pi h g r}$$

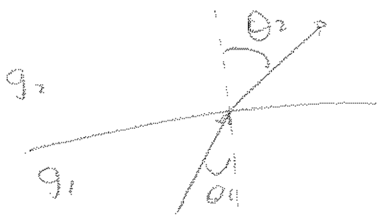
$$V(a)-V(b)=\int_a^b \frac{I}{2\pi hg}\cdot\frac{dr}{r}=\frac{I}{2\pi hg}\ln\frac{b}{a}=\mathcal{E}=R\cdot I$$

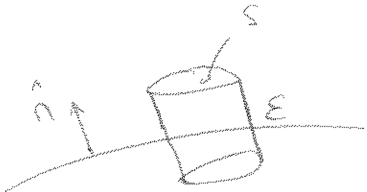
$$R=\frac{1}{2\pi gh}\cdot\ln\frac{b}{a}$$



$$R=\frac{1}{g}\,\frac{h}{\pi(b^2-a^2)}$$

- HUGALDE-BALDINTZAK:





$$\boxed{j_{1n}=j_{2n}}$$

$$\vec{J}_1\cdot\hat{n}=\vec{J}_2\cdot\hat{n}$$

$$E_{2t}=E_{1t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{j_{2t}}{g_2}=\frac{j_{1t}}{g_1}}$$

$$\tan\theta_i=\frac{j_{1t}}{j_{1n}}$$

$$\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r}=\frac{j_{1t}/j_{1n}}{j_{2t}/j_{2n}}=\frac{j_{1t}}{j_{2t}}=g_1/g_2$$

$$\boxed{\frac{\tan\theta_t}{\tan\theta_r} = \frac{g_1}{g_2}}$$

Ohm: $\vec{J} = g\vec{E}$

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \partial_t\rho + g\cdot\nabla\cdot\vec{E} = \partial_t\cdot\rho + g\cdot\frac{\rho_{askea}}{\epsilon_0} = 0$$

$$= \partial_t\cdot\rho + \frac{g}{\epsilon}\cdot\nabla\cdot\vec{D} = \partial_t\rho + \frac{g}{\epsilon}\rho = 0$$

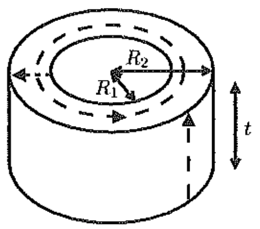
Ekuazio horretatik: $\rho(\vec{x},t) = e^{-gt/\epsilon}\cdot\rho(\vec{x},0)$

Elektromagnetismoa I — Korrontea

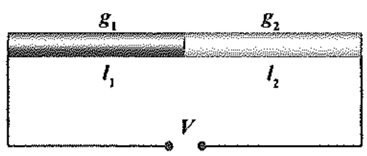
1. Diska baten erradioa a da, eta σ gainazaleko karga dentsitate uniformea du. Diskarekiko elkarzuta eta diskoaren zentrutik pasatzen den ardatz baten inguruan biratzen ari da ω abiadura angeluar konstantez. Kalkula ezazu I korronte eraginkorra.

2. Esfera metaliko baten erradioa a da, eta b erradioko beste esfera zentrukide batez inguratuta dago, $b > a$ izanik. Esfera bien arteko aldea $\sigma(E) = kE$ eroankortasun aldakorreko material batez beteta dago, E eremu elektrikoaren modukua eta k konstante bat izanik. Esfera bien artean V potentzial diferentzia konstante ezartzen bada, zer korronte sortuko da esferen artean? Zein da sistemak erabilitako potentzia? Esango al zenuke Ohmen legea betetzen dela? Zergatik?

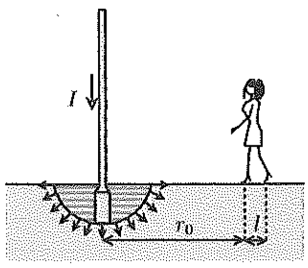
3. Zirrindola lau baten lodiera t da, eta bere barneko eta kanpoko erradioak R_1 eta R_2 dira hurrenez hurren. Zirrindola eroale ohmikoa da, g eroankortasuna izanik. Kalkula ezazu erresistenzia ondoko hiru konfigurazioetan: a) potentzial diferentzia barneko eta kanpoko gainazal zilindrikoen artean dugu; b) potentzial diferentzia goiko eta beheko gainazal lauen artean sortu dugu; c) erradialki ebaki dugu, eta sortutako bi gainazal berrien artean jartzen dugu potentzial diferentzia (hots, korrontearen ibilbideak zirkularrak dira). Zenbakizko aplikazioa: $g = 10^5\ \mathrm{S\cdot m^{-1}} = 10^5\ (\Omega\cdot \mathrm{m})^{-1}$, $R_1 = 10$ mm, $R_2 = 20$ mm, $t = 3$ mm.

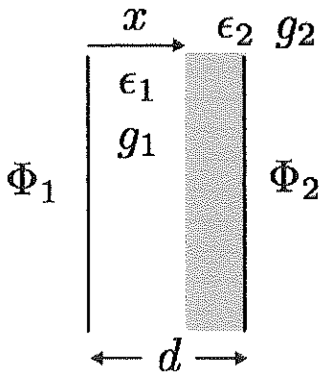


4. Irudiko l_1 eta l_2 luzerako harien sekzioa A dugu. Eroankortasunak g_1 eta g_2 dira, hurrenez hurren. Haien muturren arteko potentziala, V, konstante mantentzen dugu. Kalkula itzazu hari bakoitzeko korronte dentsitatea eta eremu elektrikoa. Zenbatekoa da gainazaleko karga dentsitate osoa harien lotura gainazalean? Demagun orain, aurreko hipotesiaz gain, hari biak dielektriko linealak direla, ϵ_1 eta ϵ_2 permitibitateekin. Kalkula itzazu polarizazio karga banaketa guztiak. Al dago karga askerik loturan?



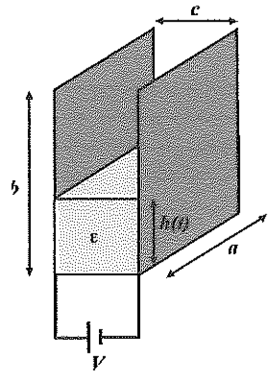
5. Irudiko kontaktu erdiesferikoa lurperatu dute, lur arrasean. Lagun bat inguratzen denean tentsio diferentzia sortzen da bere hanken artean (urrats tentsioa, hain zuzen ere). Demagun kontaktuan sartzen den intentsitatea I, urrats bakoitzen luzera l, oin hurbilaren eta kontaktuaren ardatzaren arteko distantzia r_0 eta lurraren eroankortasuna g direla. Zenbatekoa da urrats tentsioa? Zenbakizko aplikazioa: $g = 10^{-2}\ \Omega^{-1}\cdot \mathrm{m}^{-1}$, $I = 1$ A, $r_0 = 2.0$ m, $l = 2$ m.





6. Bi xafla eroale lau eta paralelo d distantzia banatuta daude. Haien arteko aldea bi material lineal, homogeneo, eta isotropoez beteta dago. Haien arteko baztertze-gainazala xaflen plano paraleloa da. Lehenengo materialaren propietateak g_1 eta ϵ_1 eta haren lodiera x dira. Bigarrenaren propietateak, berriz, g_2 eta ϵ_2 eta haren lodiera $d - x$ da. Xaflak Φ_1 eta Φ_2 potentzial konstanteetara mantentzen dira, haien artean korronte egonkorra sortuz. Lor ezazu potentziala baztertze-gainazalean eta bertan dagoen karga askearen dentsitatea.

7. Kondentsadore lau bat astiro betetzen dugu ϵ permitibitateko dielektrikoarekin. Xaflen arteko V potentziala konstante mantentzen da. Dielektrikoaren t uneko altuera $h(t)$ dela onartuz, kalkula itzazu korronte intentsitatea eta bateriak sortutako aldiuneko potentzia. Zenbat energia emango dugu kondentsadorea bete arte?



2. ARIKETA

Esfera metaliko baten erradioa a da, eta b erradiodun beste esfera zentrokide batez inguratuta dago, b>a izanik. Esfera bien arteko aldea $\sigma(r) = kr$ eroankortasun aldakorreko material batez beteta dago. Esfera bien artean V potentzial diferentzia konstante bat ezartzen bada, zer korronte sortuko da esferen artean? Zein da sistemak erabilitako potentzia? Betetzen da Ohm-en legea?

$\vec{S}_1 = S_1(-\hat{u}_r)$
$\vec{S}_2 = S_2\,\hat{u}_r$

Simetria esferikoa dugunez: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

$$\Delta V = V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a E\,dr = \int_a^b E\,dr$$

Erlazio hori geroago erabiliko dugu.

Bestalde, kargaren kontserbazioarengatik: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$

Egoera geldikorra $\Rightarrow$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{J} = 0$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{J}\,dv = 0 \Rightarrow \int_{\partial V} \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$$ non ∂V V-ren muga den (beraz, $S_1 \cup S_2$)

Dibergentziaren teorema

$$\int_{\partial V} \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J}\cdot dS(-\hat{u}_r) + \int_{S_2} \vec{J}\cdot dS(\hat{u}_r) = -I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2$$

Intentsitatea berdina izango da!

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{J}/\sigma \Rightarrow E = J/\sigma$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = J(r)\cdot 4\pi r^2 \text{ (edozein gainazal bat)}$$

$$\hookrightarrow J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$j(r) = \sigma \cdot E(r)$

$$\frac{I}{4\pi r^2} = kE(r)\, E(r) \Rightarrow \quad E(r) = \sqrt{\frac{I}{4k\pi r^2}}$$

Beraz, garatu dezakegu potentzialaren integrala:

$$\Delta V = \int_a^b \sqrt{\frac{I}{4\pi k}}\, \frac{dr}{r} = \sqrt{\frac{I}{4\pi k}} \cdot \left[\ln r\right]_a^b = \sqrt{\frac{I}{4\pi k}}\, \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V^2 = \frac{I}{4\pi k} \ln^2\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \quad \boxed{I = 4\pi k V^2 \ln^{-2}(b/a)}$$

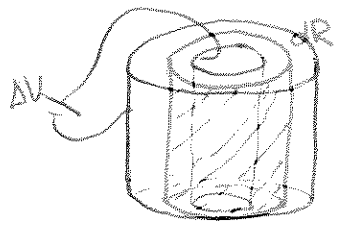
$$P = VI \Rightarrow \quad \boxed{P = 4\pi k V^3 \ln^{-2}(b/a)}$$

Ez da ohm-en legea betetzen, intentsitatea eta potentzialaren artean ez dagoelako erlazio lineialik.

3. ARIKETA

Zirrindola baten lodiera t da, eta barne- eta kanpo-erradioak R_1 eta R_2, hurrenez hurren. Zirrindola eroale ohmikoa da, g eroankortasuna izanik. Kalkula ezazu erresistentzia ondoko 3 konfigurazioetan:

a) Potentzial diferentzia barneko eta kanpoko gainazalen artean dago.



Kargaren kontserbazioarengatik, badakigu gainazalean zehar karga berdina higituko dela.

Gainera, gainazala infinitu geruzetan ebaki dezakegu, bata bestetik oso gertu daudelarik eta itxura berdina izanik.

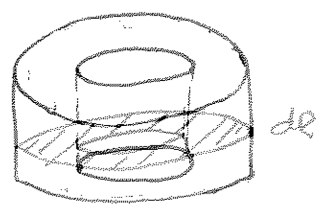
Gauzak horrela, $R = \frac{l}{gS}$ erlazioa aplika dezakegu.

dl bakoitzari S gainazala esleituko diogu (laranja)

$$R = \int_R dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{g\,S(r)} = \frac{1}{g}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{t \cdot 2\pi r}\,dr = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi g t}$$

b) Potentzial diferentzia goiko eta beheko gainazalen artean.

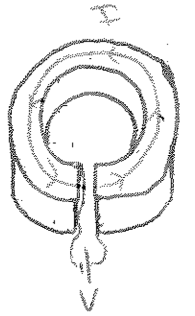
Aurreko arrazonamendu berdina erabiliz:



Kasu honetan dl altueraren diferentziala eta $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$

$$R = \int_R dR = \int_0^t \frac{1}{g(\pi(R_2^2 - R_1^2))}\,dl = \frac{t}{g\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

c) Erradialki ebaki, eta sortutako bi gainazalen artean ezartzen dugu potentzial diferentzia (korrontearen ibilbidea zirkularra).



Korrontea erradialki doanez: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_\varphi$

$$V = -\int_L \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = -\int_0^{2\pi} E(r)\,\hat{u}_\varphi \cdot dl\,\hat{u}_\varphi = -E(r)\int_0^{2\pi} r\,d\varphi = -E(r)\cdot 2\pi r$$

$$V = -E(r)\,2\pi r \rightarrow \quad E(r) = \frac{-V}{2\pi r}$$

Kargaren kontserbazioarengatik $\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$

Egoera geldikorra: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{J} = 0$

$\int_V \nabla\cdot\vec{J}\,dv = \int_{\partial V} \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$ $\quad$ ∂V gainazal osoa, baina $\vec{J} \parallel d\vec{S}$ soilik pilara konektatutako bi gainazaletan, bestela $\vec{J} \perp d\vec{S}$

$$\int_{\partial V} \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} J(r)(-\hat{u}_\varphi)\,dS\,\hat{u}_\varphi + \int_{S_2} J(r)\,\hat{u}_\varphi\cdot dS\,\hat{u}_\varphi = -I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{I_1 = I_2} = I$$

Korrontea berdina da zirkuitu osoan!

$$\vec{J}(\vec{r}) = g\cdot\vec{E}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{J}(\vec{r}) = g\cdot\frac{-V}{2\pi r}\,\hat{u}_\varphi$$

$I = \int_S \vec{J}(\vec{r})\cdot d\vec{S} =$ $\quad$ S hartuko dugu ibilbidearen aurpegi erradiala. $\vec{J}$ $\vec{r}$-ren menpe dagoenez, $d\vec{S}$ aurpegiaren zati bertikala.

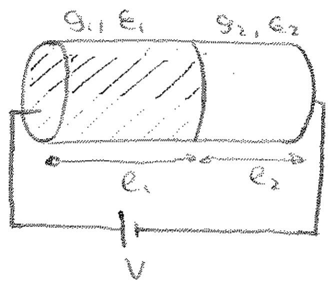
$$= \int_S g\cdot E\cdot dS = \int_{R_1}^{R_2} g\cdot\frac{-V}{2\pi r}\,t\,dr = \frac{gtV}{2\pi}\left[\ln r\right]_{R_2}^{R_1} = \frac{gtV}{2\pi}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = I$$

Ohmen legea $\Rightarrow \quad V = I\cdot R \Rightarrow R = V/I$

$$\boxed{R = \frac{2\pi}{gt\ln(R_1/R_2)}}$$

4. ARIKETA

Irudiko l_1 eta l_2 luzerako harien sekzioa A dugu. Eroankortasunak g_1 eta g_2 dira, hurrenez hurren. Haien arteko potentziala, V, konstante mantentzen dugu. Kalkula itzazu hari bakoitzeko korronte-dentsitatea eta eremu elektrikoa. Zenbatekoa da gainazaleko karga-dentsitate osoa harien lotura gainazalean? Demagun orain, aurreko hipotesiaz gain, hari biak dielektriko linealak direla, ε_1 eta ε_2 permitibitateekin. Kalkula itzazu polarizazio karga banaketa guztiak. Ba al dago karga askerik loturan?



Kargak ezkerretik eskuinera $\Rightarrow$ $\vec{j}(\vec{r}) = j(x)\,\hat{u}_x$

$\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\,\hat{u}_x$

Bestalde, $-V = -\int_0^{l_1+l_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$$\int_{V(0)}^{V(l_1+l_2)} dV = V(l_1+l_2) - V(0) = -V$$

Kargaren kontserbazioarengatik: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$

Egoera geldikorra: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{j} = 0 \rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow j = kte$

Printzipioz pentsa dezakegu $j(x) = \begin{cases} j_1, & x\in[0,l_1] \\ j_2, & x\in[l_1, l_1+l_2] \end{cases}$

Baina $\int_V \nabla\cdot\vec{j}\,dV = \int_{\partial V} \vec{j}\cdot d\vec{s} = -j_1 A + j_2 A = 0 \Rightarrow j_1 = j_2$!

Beraz, badakigu j konstante zilindro osoan.

$j(x) = j = kte$ denez, $E(x) = \begin{cases} j/g_1, & x\in[0,l_1] \\ j/g_2, & x\in[l_1, l_1+l_2] \end{cases}$

$$-V = -\int_0^{l_1+l_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_0^{l_1} j/g_1\,dx - \int_{l_1}^{l_1+l_2} j/g_2\,dx = -j\left(\frac{l_1}{g_1} + \frac{l_1+l_2-l_1}{g_2}\right) = -j\left(\frac{l_1}{g_1} + \frac{l_2}{g_2}\right)$$

$$V = j\left(\frac{l_1}{g_1} + \frac{l_2}{g_2}\right) \Rightarrow \boxed{j = \frac{V g_1 g_2}{g_2 l_1 + g_1 l_2}} \rightarrow \vec{j}(x) = \frac{g_1 g_2 V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}\vec{i}$$

Eta orduan:

$$\boxed{\vec{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{V g_2}{g_2 l_1 + g_1 l_2}\vec{i}, & 0 \leq x \leq l_1 \\ \dfrac{V g_1}{g_2 l_1 + g_1 l_2}\vec{i}, & l_1 \leq x < l_1 + l_2 \end{cases}}$$

Gainazalean dagoen karga-dentsitatea kalkulatzeko, hurrengo mugalde-baldintza aplikatuko dugu:

$\sigma_{TOTAL} = \vec{n}\cdot(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$, $\vec{n}$ 1. gainazaletik ateratzen den bektore unitarioa. (Gure kasuan $\vec{n} = \vec{i}$)

$$\boxed{\sigma_{TOTAL} = \frac{(g_1 - g_2)V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}}$$

Polarizazio karga-banaketa guztiak kalkulatzeko, $\vec{D}$ erabiliko dugu.

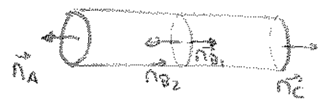
Dielektrikoak linealak direnez, $\vec{D}(x) = \epsilon(x)\cdot\vec{E}(x)$ $(\vec{D}(x) = D(x)\vec{i})$

Beraz, $$\vec{D}(x) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 g_2 V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}\vec{i}, & 0 \leq x \leq l_1 \\ \dfrac{\epsilon_2 g_1 V}{g_2 l_1 + g_2 l_1}\vec{i}, & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \end{cases}$$

Orain, polarizazio-bektorea $\vec{P}(x) = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E}$ $(\vec{P}(x) = P(x)\vec{i})$

Beraz, $$\vec{P}(x) = \begin{cases} \dfrac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)g_2 V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}\hat{u}_x, & 0 < x < l_1 \\ \dfrac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)g_1 V}{g_2 l_1 + g_1 l_1}\hat{u}_x, & l_1 < x < l_1 + l_2 \end{cases}$$

$\vec{P}(x)$ konstantea denez, ez da bolumenean induzitutako kargarik egongo.



$\Rightarrow \quad \vec{n}_A = -\hat{u}_x \qquad \vec{n}_{B_1} = \hat{u}_x \qquad \vec{n}_{B_2} = -\hat{u}_x \qquad \vec{n}_C = \hat{u}_x$

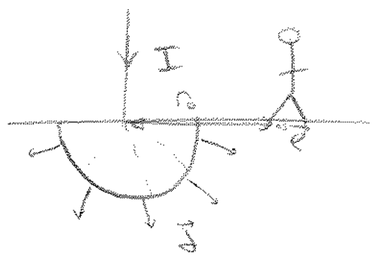
$$\boxed{\sigma_A = \vec{P}(0)\,\vec{n}_A = -\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)g_2 V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}} \qquad \boxed{\sigma_{B_2} = \vec{P}(l_1^+)\,\vec{n}_{B_2} = -\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)g_1 V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}}$$

$$\boxed{\sigma_{B_1} = \vec{P}(l_1^-)\,\vec{n}_{B_1} = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)g_2 V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}} \qquad \boxed{\sigma_C = \vec{P}(l_1+l_2)\,\vec{n}_C = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)g_1 V}{g_2 l_1 + g_1 l_2}}$$

Ikus daitekeenez, $\sigma_{B_1} + \sigma_{B_2} \neq \sigma_{total}$, beraz BADAGO karga askea loturan. Izan ere, $\vec{D}$-ren salto bat dugu, eta horrek karga askearen metaketa adierazten digu.

5. ARIKETA

Irudiko kontaktu erdiesferikoa lurperatu dute. Lagun bat hurbiltzen denean tentsio diferentzia sortzen da hanken artean (urrats tentsioa). Kontaktuan sartzen den intentsitatea I da, urratsen luzera l, oin hurbilaren eta ardatzaren arteko distantzia r_0 eta lurraren eroankortasuna g. Kalkulatu urrats-tentsioa.



Kontaktua erdiesferikoa denez, intentsitatea erradialki hedatuko dela dakigu

Beraz, $\begin{cases} \vec{J}(\vec{r}) = j(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

Hasteko, karga kontserbazioarengatik, badakigu gainazal bakoitza zeharkatuko duen intentsitatea berdina dela.

$$I = \int_S \vec{j}(r)\,d\vec{s} = j(r)\int_S ds = j(r)\cdot 2\pi r^2 \Rightarrow \underline{j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}}$$

Orain, Ohm-en legea aplikatuz:

$$\vec{J}(\vec{r}) = g\vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(r) = \vec{J}(r)/g \qquad (\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{u}_r)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{I}{2g\pi r^2}\,\vec{u}_r$$

Beraz, eremua izanda berehala jakin dezakegu zein den urrats tentsioa.

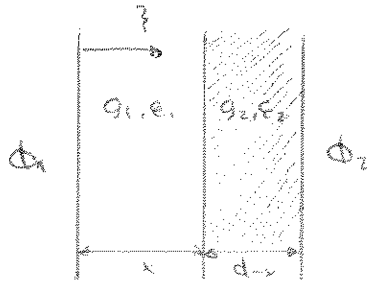
$$\int_{\phi(r_0)}^{\phi(r_0+l)} d\phi = -\int_{r_0}^{r_0+l} \vec{E}(\vec{r})\,d\vec{r} = -\int_{r_0}^{r_0+l} \frac{I}{2g\pi r^2}\,dr = -\frac{I}{2g\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r_0+l} = \frac{-I}{2\pi g}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l}\right) =$$

$$= \frac{-l\cdot I}{2\pi g r_0(r_0+l)} = \phi(r_0+l) - \phi(r_0) = -\left(\phi(r_0) - \phi(r_0+l)\right)$$

Ondorioz, $\boxed{\Phi_{urrats} = \frac{l\,I}{2\pi g(r_0+l)\,r_0}}$

6. ARIKETA

Bi xafla eroale lau eta paralelo d distantziara daude. Haien arteko aldea bi material lineal, homogeneo eta isotropoz beteta dago. Lehenengoaren propietateak g_1 eta ε_1 dira, eta lodiera x. Bigarrenarenarenak g_2, ε_2 eta $d-x$ dira. Xaflak Φ_1 eta Φ_2 potentzial konstanteetara mantentzen dira, haien artean korronte egonkorra sortuz. Lor ezazu potentziala banaketa-gainazalean eta bertan dagoen karga askearen dentsitatea.



Potentziala kalkulatzeko $\vec{E}$ behar dugu lehenik eta behin.

$$\begin{cases} \vec{E}(\xi) = E(\xi)\,\vec{i} \\ \vec{j}(\xi) = j(\xi)\,\vec{i} \end{cases}$$

Jarraitutasunaren ekuazioa: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Korronte egonkorra sortu dugunez: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow j = kte$!

$j(\xi) = g(\xi) \cdot E(\xi)$ dela jakinda $\rightarrow$ $\vec{E}(\xi) = \begin{cases} j/g_1\,\vec{i}, & 0 < \xi < x \\ j/g_2\,\vec{i}, & x < \xi < d \end{cases}$

$$\int_{\Phi(0)}^{\Phi(d)} d\Phi = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{\xi} = -\int_0^x j/g_1\, d\xi - \int_x^d j/g_2\, d\xi = -j\left(\frac{x}{g_1} + \frac{d-x}{g_2}\right) = -j\,\frac{g_2 x + g_1(d-x)}{g_1 g_2}$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -j\,\frac{g_2 x + g_1(d-x)}{g_1 g_2} \quad \rightarrow \quad j = \frac{g_1 g_2(\Phi_1 - \Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}$$

Orain, eremua definituta dugunez, $\Phi(x)$ kalkula dezakegu.

$$\int_{\Phi(0)}^{\Phi(x)} d\Phi = -\int_0^x \frac{g_2(\Phi_1 - \Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}\, d\xi = -\frac{g_2(\Phi_1 - \Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}\, x$$

Beraz, $$\boxed{\Phi(x) = \Phi_1 - \frac{g_2 x(\Phi_1 - \Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}}$$

Orain, σ_{aske} kalkulatzeko $\vec{D}$ kalkulatu behar dugu. Izan ere, $\vec{E}$-ren mugalde baldintza aplikatuz σ_{total} kalkulatuko genuke.

Materialak linealak direnez: $\vec{D}(z) = \epsilon(z)\cdot\vec{E}(z)$ $\quad (\vec{D}(z) = D(z)\vec{i})$

Beraz, $$\vec{D}(x) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 g_2(\Phi_1-\Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}\vec{i}, & 0<z<x \\ \dfrac{\epsilon_2 g_1(\Phi_1-\Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}\vec{i}, & x<z<d \end{cases}$$

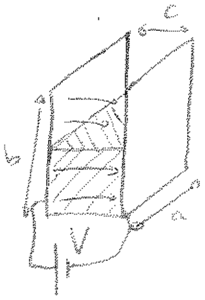
Orain, $\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{aske}$ mugalde baldintza aplikatuko dugu, $\vec{n}$ 1.etik ateratzen den bektore normala izanik (kasu, $\vec{i}$)

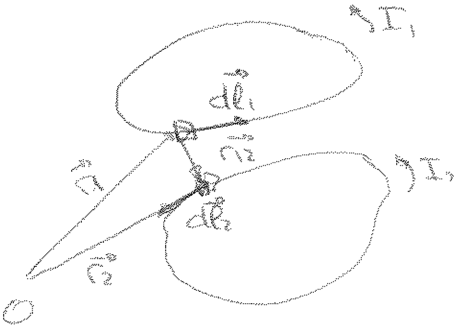
$$\sigma_{aske} = \vec{i}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \frac{\epsilon_2 g_1(\Phi_1-\Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)} - \frac{\epsilon_1 g_2(\Phi_1-\Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}$$

$$\boxed{\sigma_{aske} = \frac{(\epsilon_2 g_1 - \epsilon_1 g_2)(\Phi_1 - \Phi_2)}{g_2 x + g_1(d-x)}}$$

7. ARIKETA

Kondentsadore lau bat astiro betetzen dugu ε permitibitateko dielektriko-arekin. Xaflen arteko V potentziala konstante mantentzen dugu. Dielektrikoaren t uneko altuera $h(t)$ dela onartuz, kalkula itzazu korronte intentsitatea eta bateriak sortutako aldiuneko potentzia. Zenbat energia emango dugu kondentsadorea bete arte?





$$\vec{r_1} - \vec{r_2} = \vec{r_{12}}$$

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \cdot I_2 \oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} \frac{\vec{dl_1} \wedge [\vec{dl_2} \wedge \vec{r_{12}}]}{|\vec{r_{12}}|^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^2$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A}\,\vec{B})$$

$$\vec{dl_1} \wedge (\vec{dl_2} \wedge \vec{r_{12}}) = (\vec{dl_1} \cdot \vec{r_{12}})\,\vec{dl_2} - (\vec{dl_1} \cdot \vec{dl_2}) \cdot \vec{r_{12}}$$

$$\frac{\vec{dl_1} \cdot \vec{r_{12}}}{\vec{r_{12}}^3} = -d\,\frac{1}{r_{12}} = \frac{dr_{12}}{r_{12}^2}$$

$$r_{12} = |\vec{r_1} - \vec{r_2}| \qquad dr_{12}^2 = d(r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}) =$$

$$= 2r_1\,dr_1 - 2\vec{r_2} \cdot d\vec{r_1} =$$

$$= 2 \cdot \vec{r_1} \cdot d\vec{r_1} - 2\vec{r_1}\,d\vec{r_2} =$$

$$= 2\,\vec{r_{12}} \cdot d\vec{r_{12}}$$

Aurreko bi gaietatik lehenengoa: $(d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}) \cdot d\vec{l}_2$

$$\int_{\gamma_2} d\vec{l}_2 \int_{\gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\int_{\gamma_2} d\vec{l}_2 \int_{\gamma_1} d\frac{1}{r_{12}} = 0$$

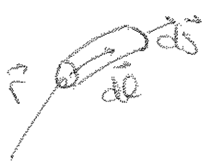
Hortaz: $$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = (*)$$

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \Longrightarrow \vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

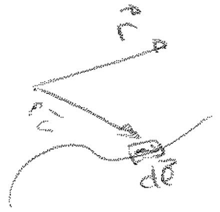
$$(*) = I_1 \cdot \int_{\gamma_1} d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2(\vec{l})$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_2} \frac{I_2 \cdot d\vec{l}_2 \wedge \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B} = \vec{J}(\vec{r}) \wedge \vec{B}(\vec{r}) \cdot d^3\vec{r}$$



$$d\vec{l} \cdot I = \vec{J} \cdot dS \cdot dl = \vec{J}\, dV \qquad \vec{J} \parallel \hat{n} \parallel d\vec{l}$$



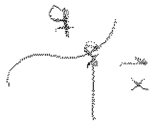
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\wedge(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

↳ korronte-dentsitateak sortutako $\vec{B}$

Orain, $\vec{B}$ ezaguna → zein da korronte dentsitateak jasandako indarra?

$$d\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{J}(\vec{r})\,d^3\vec{r})\wedge\vec{B}(\vec{r})$$



$\vec{v}(\vec{r})$ $\qquad \vec{J}(\vec{r}\,') = q\,\vec{v}(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{x})$

$$\vec{F} = \int dv\, \vec{J}\wedge\vec{B} = q\cdot\vec{v}\wedge\vec{B}$$

• EREMU MAGNETOSTATIKOAREN LEGE DIFERENTZIALAK

$$\nabla\wedge(f\cdot\vec{A}) = \nabla f\wedge\vec{A} + f\,\nabla\wedge\vec{A}$$

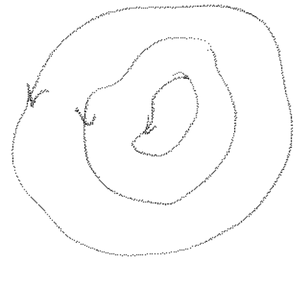
$$\nabla\wedge\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \left(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\wedge\vec{J}(\vec{r}\,') = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\wedge\vec{J}(\vec{r}\,')$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,'\,\nabla\wedge\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\wedge\left(\int d^3\vec{r}\,'\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$ GAUSSen LEGE MAGNETIKOA

$$\nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{A}) = 0$$

Izan ere, eremu lerroak itxiak dira!



$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{C}) = \nabla(\nabla \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \wedge \left(\nabla \wedge \int dv' \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \cdot \left(\int d\vec{r}' \cdot \cancel{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}^{\,0} \right) - \right.$$

$$\left. - \int d^3\vec{r}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \; \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \mu_0 \cdot \vec{J}(\vec{r}')$$

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$ AMPÈREren LEGE DIFERENTZIALA

Elektrostatika	Magnetostatika
• $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ Eremua eta iturriaren lotura	• $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ Eremua eta iturriaren lotura
• $\nabla \wedge \vec{E} = 0$ $\hookrightarrow \vec{E} = -\nabla \phi$	• $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\hookrightarrow \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$

Elektrostatikan ekuazioa ebazteko:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \rightarrow \int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(V)$$

Orain ekuazioa ebazteko:

$$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} \rightarrow \int_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \int_S d\vec{S}\cdot(\nabla\wedge\vec{B}) =$$

$$= \mu_0 \int_S d\vec{S}\cdot\vec{J} =$$

$$\int_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \mu_0\cdot I(S)$$

$$= \mu_0\cdot I(S)$$

Elektrostatikan ebazteko beste modu bat:

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Orain ebazteko beste modu bat:

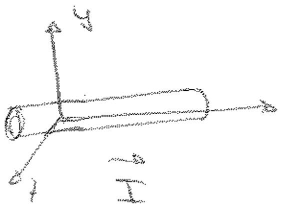
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}' \; \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi, \quad \Phi \rightarrow \Phi + C$$

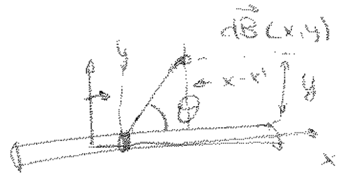
$\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\xi \rightarrow$ Eskalar baten gradientea.

$\nabla\wedge(\nabla\cdot\xi) = 0$ denez, Gauge askatasuna bat dugu, $\vec{B}$ berdina sortzen baita.

↳ ADIBIDEA:



$$\vec{J} = \frac{I}{S}\hat{u}_x$$



$$= I\,\delta(z)\,\delta y\,\hat{u}_x \qquad d^3\vec{r}'\,\vec{J}(\vec{r}') = dx'\,dS\,J\,\hat{u}_x$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y \\ \vec{r}' = x'\hat{u}_x\end{array}\right.$$

$$d\vec{B}(x,y) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dx' I\,\hat{u}_x \wedge \left[(x-x')\hat{u}_x + y\hat{u}_y\right]}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}} =$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|\cdot\sin\theta = y$$

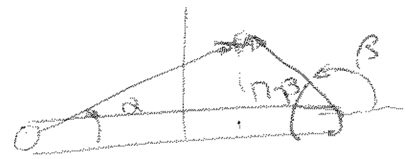
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{y\cdot dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}}\hat{u}_z = \qquad (x-x') = \frac{y}{\tan\theta}$$

$$dx' = \frac{y}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{y\cdot y\,d\theta/\sin^2\theta}{y^3/\sin^3\theta}\hat{u}_z =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi y}d\theta\,\sin\theta\,\hat{u}_z$$

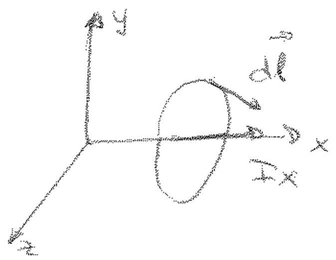
Mugak:



$$\vec{B}(x\hat{u}_x + y\hat{u}_y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}\int_\alpha^\beta d\theta\,\sin\theta\,\hat{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}\left[\cos\alpha - \cos\beta\right]\hat{u}_z$$

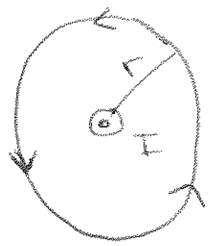
$$L=\infty \rightarrow \vec{B}(x\hat{u}_x + y\hat{u}_y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}(1+1)\hat{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{u}_z$$

Beste modu batean:



$$\vec{B}(z=0,y) = B(y)\,\hat{u}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\hat{u}_\varphi$$



$$\oint d\vec{l}\cdot\vec{B} = \mu_0 I(s) \qquad d\vec{l} = r\, d\varphi\, \hat{u}_\varphi$$

$$2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\varphi$$

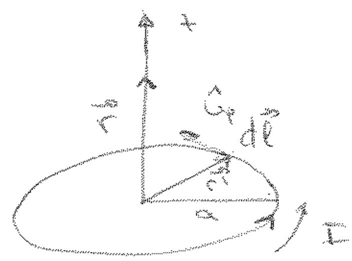
ohartu $y\to\infty$ doanean ez dagoela zehaztuta:

$$\cos\alpha = \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} \xrightarrow{a=0} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y/x)^2}} \simeq \frac{x}{y}$$

$$\cos(\pi-\beta) = \frac{L-a-x}{\sqrt{(L-a-x)^2+y^2}} \xrightarrow{a=0} \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(y/L-x\right)^2}} \simeq -\frac{L-x}{y}$$

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi y}\left[\frac{x}{y} - \frac{x-L}{y}\right]\hat{u}_z = \frac{\mu_0 I L}{4\pi y^2}\hat{u}_z$$

↳ ADIBIDEA:

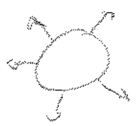


$$\vec{B}(z\hat{u}_z)$$

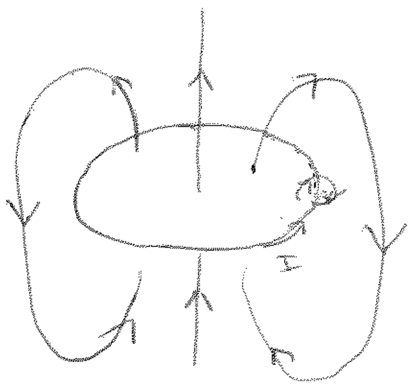
$$\vec{J}(\vec{r}')\, d^3\vec{r}' \Rightarrow I\, dl\, \hat{u}_\varphi = I a\, d\varphi\, \hat{u}_\varphi$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I a\, d\varphi\, \hat{u}_\varphi \wedge (-a\hat{u}_r + z\hat{u}_z)}{[a^2+z^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a\, d\varphi}{4\pi[z^2+a^2]^{3/2}}\left[a\hat{u}_z + z\hat{u}_r\right]$$

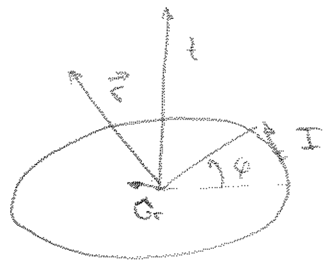
$$\int_0^{2\pi}\hat{u}_r\, d\varphi = 0 \Rightarrow \hat{u}_r\text{-ren kontribuzioa} \to 0$$



$$\vec{B}(z\hat{u}_z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2[z^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_z \rightarrow \text{Espirak sortutako eremua!}$$



Espirak sortutako $\vec{B}$-ren eremu lerroak elektrostatikan dipolo batek sortutako $\vec{E}$-ren eremu lerroen berdinak dira.



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\,d\varphi'\,\hat{u}_{\varphi'}}{|z\hat{u}_z + r\hat{u}_r - a\hat{u}_{r'}|}$$

$$\vec{r} = z\hat{u}_z + x\hat{u}_x$$

$$\hat{u}_{r'} = \cos\varphi'\,\hat{u}_x + \sin\varphi'\,\hat{u}_y$$

$$\hat{u}_{\varphi'} = -\sin\varphi'\,\hat{u}_x + \cos\varphi'\,\hat{u}_y$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{a\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi'\,\frac{[-\sin\varphi'\,\hat{u}_x + \cos\varphi'\,\hat{u}_y]}{[z^2+(x-a\cos\varphi')^2+a^2\sin^2\varphi']^{1/2}} =$$

funtzio bakoitia.

$$= \frac{\mu_0 a I}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi'\,\frac{[\cancel{-\sin\varphi'\,\hat{u}_x} + \cos\varphi'\,\hat{u}_y]}{[z^2+x^2+a^2-2xa\cos\varphi']^{1/2}}$$

Orain, $\vec{r} = z\hat{u}_z + r\,\hat{u}_r$ hartuz,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{\cos\varphi'\ \hat{u}_\varphi}{[z^2+r^2+a^2-2ar\cos\varphi']^{1/2}} = (*)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi(r,z)\ \vec{u}_\varphi} + A_z(r,z)\,\hat{u}_z + A_r(r,z)\,\hat{u}_r$$

$z^2+r^2 >> a^2$:

$$(*) = \frac{\mu_0 I a\ \hat{u}_\varphi}{4\pi(z^2+r^2+a^2)^{1/2}}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \cos\varphi'\left[1-\frac{2ar}{z^2+r^2+a^2}\cos\varphi'\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi(z^2+r^2+a^2)^{1/2}}\hat{u}_\varphi\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \cos\varphi'\left[1+\frac{ar}{z^2+r^2+a^2}\cos\varphi' + \dots\right] =$$

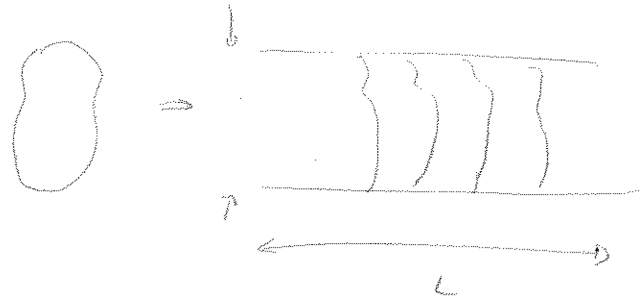
$$= \frac{\mu_0 I a\,\hat{u}_\varphi}{4\pi(z^2+r^2+a^2)^{1/2}}\,\pi\,\frac{ar}{z^2+r^2+a^2} + \dots =$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2 r\,\hat{u}_\varphi}{4(z^2+r^2+a^2)^{1/2}} + \dots$$

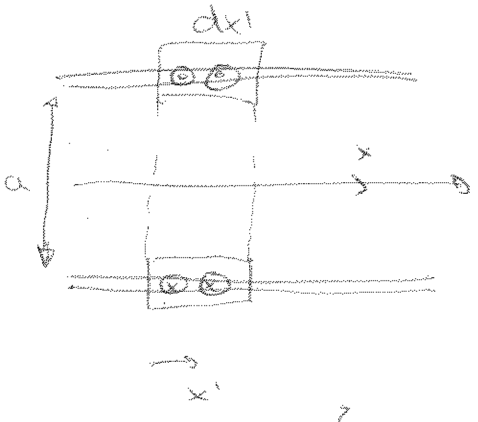
$$\left.\begin{array}{l} R^2 = z^2+r^2 \\ r = R\cdot\sin\theta \end{array}\right\} \quad \vec{A} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{4}\frac{R\sin\theta}{(R^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{u}_\varphi$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I a\,\hat{u}_z$$

• SOLENOIDEA



Espirak bata bestearen atzean jarrita.



$dI = I\,n\,dx' \qquad N/L = n$

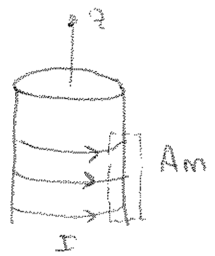
$$d\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{2} I\,n\,dx' \frac{a^2}{[(x-x')^2 + a^2]^{3/2}}\,\hat{u}_x$$

$$\frac{\xi - x}{a} = \tan\theta$$

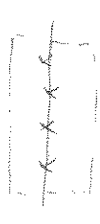
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I n a^2}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \frac{\hat{u}_x}{[(\xi-x)^2 + a^2]^{3/2}} = \ldots$$

$$\vec{B} = \mu_0 I n\,\hat{u}_x$$

Eremua ateratzeko beste modu bat:



$\vec{J}$?



$\int \vec{J}\,d\vec{s} = n l I$

$\vec{J} = I n\,\delta(r-a)\,\hat{u}_\varphi$

$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

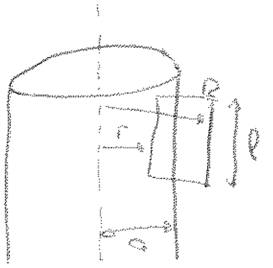
$B' = -\mu_0 I n\,\delta(r-a)$

$\hookrightarrow B(r) = \cancel{B_0}^{\,0} + \mu_0 I n\,\Theta(a-r)$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \, \Theta(a-r) \, \hat{u}_z$$

Hirugarren modu bat:

$$\oint_\gamma d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_S d\vec{S} \, (\nabla \wedge \vec{B}) = \int_S d\vec{S} \, (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \int_S d\vec{S} \cdot \vec{J} = \mu_0 I$$



Hartuko dugu $\vec{B}(\vec{r}) = B(r) \, \hat{u}_z$:

$$\oint_\gamma d\vec{l} \cdot \vec{B} = B(r) l - B(R) l = \mu_0 n l I$$

$$B(r) - B(R) = \mu_0 n I$$

$r < R < a$ hartuz gero, $B(r) - B(R) = 0 \Rightarrow B(r) = B(R)$

Solenoidearen barruko eremua kte. da!

Balioa zehazteko, demagun $B(\infty) = B_0$ dela.

$r < a < R$-ra beltatuz:

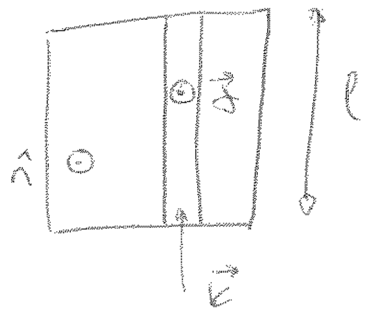
$$B(r) = \mu_0 n I + B_0 \; ; \quad I = 0 \Rightarrow B(r) = 0 \Rightarrow \boxed{B_0 = 0}$$

Hortaz, $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 n I \, \hat{u}_z}$

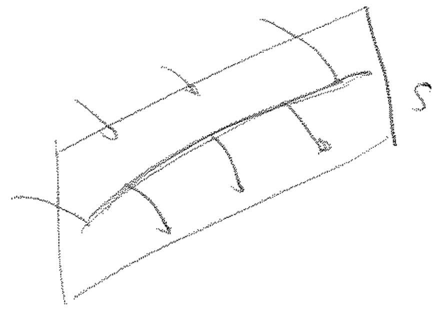
$\vec{J}, \vec{K}, I\,\hat{u}_\varphi \sim \rho, \sigma, \lambda$

$\vec{J} = I n\, \delta(r-a)\, \hat{u}_\varphi$ $\qquad \int_S d\vec{S} \cdot \vec{J} = I(S)$

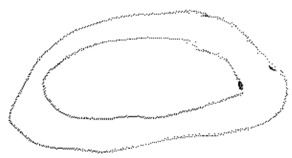
$\vec{K} = I n\, \hat{u}_\varphi$



$I = \int dl\, K$

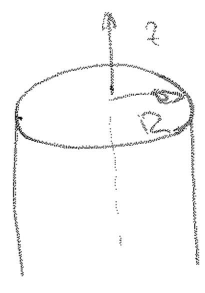


- TOROIDEA



$\vec{B} = B\,\hat{u}_\varphi = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,\hat{u}_\varphi$

- EROALE ZILINDRIKOA:



$\vec{J}(\vec{r}) = J(r)\,\hat{u}_z$

$\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\hat{u}_\varphi$

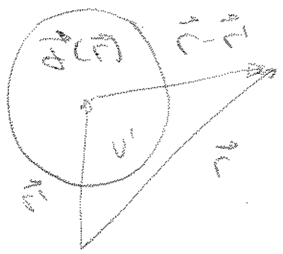
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \cdot 2\pi r$

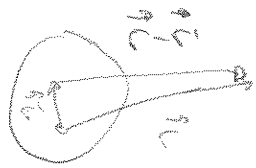
$= \mu_0 I(r) = \mu_0 \int_r d\vec{S} \cdot \vec{J} =$

$$= \mu_0 2\pi \int_0^r ds\, s\, j(s) \qquad\qquad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r ds\, s\, j(s) \qquad\qquad r>R, \quad I = 2\pi\int_0^R ds\, s\, j(s)$$

- GARAPEN MULTIPOLARRA MAGNETOSTATIKAN





$$|\vec r - \vec r'| >> |\vec r'|$$

$$\vec r^2 - 2\vec r\vec r' + \vec r'^2 >> (\vec r')^2$$

$$|\vec r - \vec r'|^n = \left[(\vec r^2 - 2\vec r\,\vec r' + \vec r'^2)\right]^{n/2} = |\vec r|^n\left[1 - \frac{2\vec r\,\vec r'}{\vec r^2} + \frac{\vec r'^2}{\vec r^2}\right]^{n/2} =$$

$$= |\vec r|^n\left[1 - \frac{n}{2}\frac{2\vec r\cdot\vec r'}{\vec r^2} + \frac{n}{2}\frac{(\vec r'^2)}{\vec r^2} + \frac{n}{2}\frac{(n/2-1)}{2} + \dots\right]$$

$$\boxed{n=-1} \Rightarrow |\vec r - \vec r'|^{-1} = \frac{1}{|\vec r|}\left[\underset{A}{1} + \underset{B}{\frac{\vec r\cdot\vec r'}{2}} \underbrace{- \frac12\frac{\vec r'^2}{\vec r^2} + \frac32\frac{(\vec r\cdot\vec r')^2}{r^4}}_{C} + \dots\right]$$

$$\underset{\text{(coulomb)}}{\vec A(\vec r)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} d^3\vec r'\, \frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$A \quad \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_{V'} d^3\vec r'\, \vec J(\vec r') = 0$$

(B) $\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3\vec{r}\,'\,\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r'\,\frac{1}{2}\left[\vec{r}\wedge(\vec{J}\,'\wedge\vec{r}\,')\right] = $

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{m}\wedge\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,'\cdot\vec{r}\,'\wedge\vec{J}(\vec{r}\,')$$

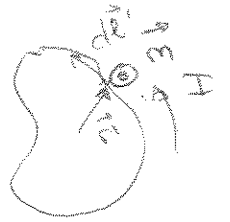
$\vec{m}$ = karga banaketari dagokion momentu magnetiko dipolarra

$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\wedge\vec{A}(\vec{r})$

↳ dipoloa: $\vec{B} = \nabla\wedge\left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{m}\wedge\vec{r}\right)$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^3}\left(\frac{3\cdot\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^2}\cdot\vec{r} - \vec{m}\right)$$

(C)-tik gai kuadrupolarra ateratko genuke.



$$\vec{J}\,'\,d^3\vec{r} \Rightarrow I\cdot d\vec{l}\,'$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,'\,\vec{r}\wedge\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{2}\int \vec{r}\,'\wedge d\vec{l}\,'$$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{I\cdot A}{2}\,\hat{u}_+}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$\hookrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \, \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{q_i}{m_i}\right)\vec{L}_i$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i$$

$$\vec{m} = \sum_i \frac{1}{2}\left(\frac{q_i}{m_i}\right)\vec{L}_i$$

• KARGAK JASANDAKO INDARRA:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) \qquad \vec{F} \sim \vec{j}\wedge\vec{B}$$

$$q\vec{v} \sim \int \vec{j}$$

$$\vec{F} = \int d^3\vec{r}' \, \vec{j}(\vec{r}') \wedge \vec{B}(\vec{r}) \qquad \frac{\leq |\nabla\vec{B}| L}{|\vec{B}|}$$

$\vec{B}$ poliki aldatuz...

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{B}(0) + \dots$$

$$\vec{F} = \Big(\cancel{\int d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r})}\Big)^{0} \wedge \vec{B}(0) + \int d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r}) \wedge [(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{B}(0)] + \dots$$

$$F_i = \int d^3\vec{r}\, \varepsilon_{ilm} \, j_l \, (\vec{r}\cdot\nabla B_m(0)) = \int d^3\vec{r}\, \varepsilon_{ilm} \, j_l x_k \, (\partial_k B_m(0)) =$$

$$= (\varepsilon_{ilm}\cdot\varepsilon_{klr}) \, m_r \, (\partial_k B_m(0))$$

$$F_i = (\delta_{ik}\,\delta_{mr} - \delta_{ir}\,\delta_{km})(\partial_k B_m(0)\, m_r) = \partial_i(\vec{m}\cdot\vec{B}) - (\nabla\cdot\cancel{\vec{B})(0)}^{0}\, m_i$$

$$\boxed{\vec{F} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})}$$

Energia gradiente batetik datorrenez, potentzial magnetiko bat dago:

$$\boxed{U = -\vec{m}\cdot\vec{B}}$$

Hori indarrari dagokionez, zein da, ordea, korronte puska batek jasandako momentua?

$$d^3\vec{r}\,'\ \vec{J}(\vec{r})\wedge\vec{B}(\vec{r}) = dF \rightarrow \vec{N} = \int \vec{r}\wedge d\vec{F}(\vec{r})$$

$$\vec{N} = \int d^3\vec{r}\ \vec{r}\wedge(\vec{J}(\vec{r})\wedge\vec{B}(\vec{r})) = \int d^3\vec{r}\,[(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{J} - (\vec{r}\cdot\vec{J})\vec{B}] =$$

$$= \int d^3\vec{r}\ (\vec{r}\cdot\vec{B}(0))\vec{J}$$

$$\hookrightarrow \quad N_i = \int d^3\vec{r}\ j_i\, x_k B_k(0)$$

$$\boxed{\vec{N} = \vec{m}\wedge\vec{B}(0)}$$

Elektromagnetismoa I — Magnetostatika I

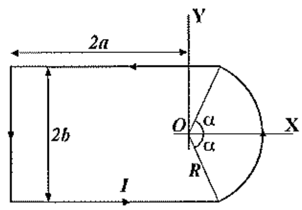
1. Kalkula ezazu xafla mehe bateko gainazaleko korronte dentsitate konstanteak sortutako eremu magnetikoa. Hots, $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_x$ (nahi baduzu, korronte dentsitatea $\mathbf{j} = k\delta(z)\mathbf{u}_x$ dugu). Eta potentzial magnetikoa?

2. Demagun orain aurreko ariketaren antzeko bi gainazaleko korronte dentsitate ditugula, bi xafla paraleloetan, d distantziaz bananduak. Lehen xaflean, $z = 0$ planoan, $\mathbf{k}_1 = -k\mathbf{u}_x$ dugu, eta bigarrenean, $z = d$ planoan, $\mathbf{k}_2 = k\mathbf{u}_x$. Kalkula ezazu potentzial magnetikoa eta indukzio magnetikoa espazio osoan.

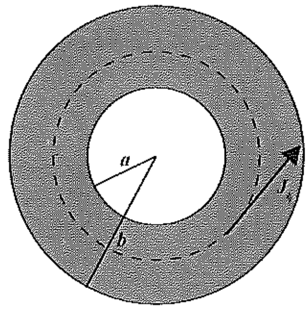
3. a barne erradioko eta $a+d$ kanpo erradioko eraztuna bere ardatzaren inguruan biratzen ari da ω abiadura angeluarrez. Bere gainazaleko karga dentsitatea σ dugu. Kalkula ezazu ardatzaren puntuetako indukzio magnetikoa. Zer gertatuko litzateke $d \ll a$ kasuan?

4. $2a$ zabalerako xafla mehe eta luzea zeharkatzen du I korrontea, xaflean uniformeki banandua. Kalkula ezazu eremu magnetikoa bi puntuetan: P_1 puntua xaflaren plano berean dago, xaflaren ardatzetik $2a$ distantzian; P_2 puntuan xaflaren plano erdibitzailean dago, $2a$ distantzian.

5. Kalkula ezazu irudiko zirkuitoak O puntuan sortzen duen bektore potentziala eta indukzio magnetikoa. Zati kurbaduna O puntuan zentratutako zirkunferentzi arkua da.



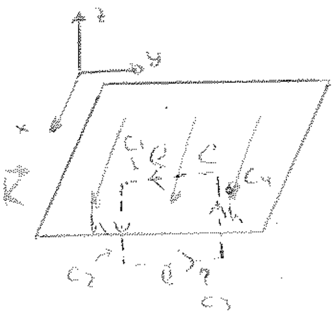
6. Demagun solenoide lodi bat, bere ardatzaren norabidean (z norabidean) mugagabea. Bere $a < r < b$ aldetik $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_\varphi$ korronte dentsitatea dabil. Kalkula ezazu $\mathbf{B}$ indukzio magnetikoa espazio osoan. Era berean, lor ezazu $\mathbf{A}$ bektore potentziala leku guztietan.



1. ARIKETA

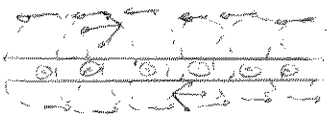
Kalkula ezazu xafla mehe bateko gainazaleko korronte dentsitate konstanteak sortutako eremu magnetikoa. Hots, $\vec{K} = K\hat{u}_x$. Eta potentzial magnetikoa?

Enuntziatuak xaflaren dimentsiorik ematen ez duenez, suposatuko dugu xafla oso luzea dela.



Ampère-ren legea: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{ing}$

Xafla aurretik:



x4 planoa infinitotzat jo dugunez, Eremuaren osagai bertikalak anulatu egingo dira: $\vec{B}(z) = B(z)\,\hat{u}_y$!

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \int_{C_1} -B(z)\,\hat{u}_y \cdot dl\,(-\hat{u}_y) + \int_{C_2} B(z)\cancel{\hat{u}_y}\cdot dl\,(-\hat{u}_z) + \int_{C_3} B(z)\,\hat{u}_y \cdot dl\,\hat{u}_y + \int_{C_4} B(z)\cancel{\hat{u}_y}\cdot dl\,\hat{u}_z =$$

$$= B(z)\,l + B(z)\,l = B(z)\cdot 2l$$

$$I_{ing} = \int_l K\cdot dl = K\cdot l$$

Beraz, $\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{ing} \Rightarrow B(z)\,2l = \mu_0 K\cdot l \rightarrow B(z) = \frac{\mu_0 K}{2}$

Ondorioz, eremuaren adierazpena:

$$\boxed{\vec{B}(z) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2}\hat{u}_y, & z>0 \\ \frac{\mu_0 K}{2}\hat{u}_y, & z<0 \end{cases}}$$

$\vec{A}$ kalkulatzeko, hurrengoa izango dugu kontuan:

$$\begin{cases} \vec{A} \parallel \text{korrontea} \\ \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \end{cases} \rightarrow \text{Hemendik, } \vec{A} = A\cdot\hat{u}_x$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A}{\partial z}\hat{u}_y - \frac{\partial A}{\partial y}\hat{u}_z = \vec{B} = -\text{sign}(z)\,\frac{\mu_0 k}{2}\,\hat{u}_y$$

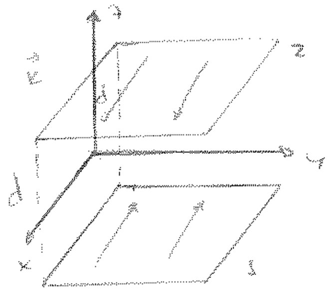
$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y A = 0 \Rightarrow A \text{ y-rekiko independiente.} \\ \dfrac{\partial A}{\partial z} = -\text{sign}(z)\,\dfrac{\mu_0 k}{2} \Rightarrow A(z) = -\text{sign}(z)\,\dfrac{\mu_0 k}{2}\,z \end{cases}$$

Beraz, $\vec{A}(z) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 k}{2} z\,\hat{u}_y, & z>0 \\ \dfrac{\mu_0 k}{2} z\,\hat{u}_y. & z<0 \end{cases}$

Edo, bestela: $\boxed{\vec{A}(z) = -\dfrac{\mu_0 k}{2}|z|\,\hat{u}_y}$

2. ARIKETA

Demagun orain aurreko ariketaren antzeko bi gainazaleko korronte-dentsitate ditugula, bi xafla paraleloetan, d distantziaz aldenduta. Lehen xaflan, $z=0$ planoan, $\vec{K}_1 = -k\,\hat{u}_x$ dugu, eta bigarrenean, $z=d$ planoan, $\vec{K}_2 = k\,\hat{u}_x$. Kalkulatu potentzial magnetikoa eta indukzio magnetikoa espazio osoan.



Xaflak infinitutzat hartuko ditugu. Beraz, soilik z-ren menpe egongo da eremuaren modulua. Bestalde, aurreko ariketako arrazoinamenduarengatik, y norabidean egongo da. Beraz: $\vec{B} = B(z)\,\hat{u}_y$

Lehenengo, xafla bakoitzak sortzen duen $\vec{B}$ idatziko dugu:

$$\vec{B}_1(z) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 k}{2}\hat{u}_y, & z<0 \\ +\dfrac{\mu_0 k}{2}\hat{u}_y, & z>0 \end{cases} \qquad \vec{B}_2(z) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k}{2}\hat{u}_y, & z<d \\ -\dfrac{\mu_0 k}{2}\hat{u}_y, & z>d \end{cases}$$

Orain, gainezarmen printzipioa aplikatuz, eremua espazio osoan kalkula dezakegu:

$$\boxed{\vec{B}(z) = \begin{cases} \mu_0 K\, \hat{u}_y, & 0<z<d \\ 0\, \hat{u}_z, & \text{bestela} \end{cases}}$$

Orain, $\vec{A}$ kalkulatzeko, hurrengoa hartuko degu kontuan:

$$\begin{cases} \vec{A} \parallel \text{korrontea} \rightarrow \text{Beraz, badakigu } \underline{\vec{A} = A\hat{u}_x} \\ \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial A}{\partial y}\vec{k} = B(z)\,\vec{j} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \;!$$

- $\underline{0<z<d}$:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = B(z) = \mu_0 K \rightarrow A(z) = \mu_0 K z$$

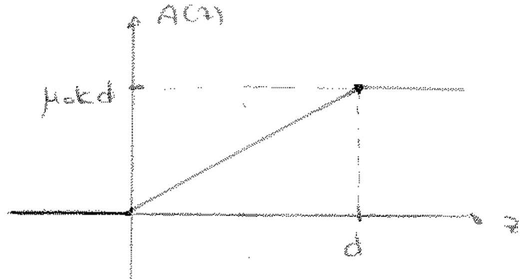
- $\underline{z<0 \text{ edo } z>d}$:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = B(z) = 0 \Rightarrow A(z) = kte$$

$$A(z) = \begin{cases} \mu_0 K z, & 0<z<d \\ kte, & \text{bestela} \end{cases}$$

Baina $\vec{A}$-k jarraitua izan behar duenez, finka dezakegu konstantea.

- $A(0^-) = A(0^+) \Rightarrow \underline{kte_1 = 0}$
- $A(d^-) = A(d^+) \Rightarrow \underline{\mu_0 K d = kte_2}$

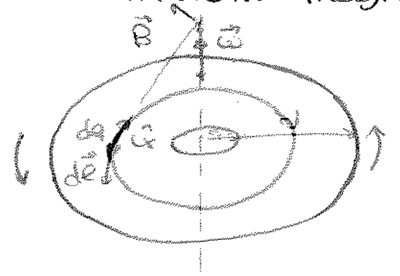


Beraz,

$$\boxed{\vec{A}(z) = \begin{cases} 0\, \hat{u}_x, & z<0 \\ \mu_0 K z\, \hat{u}_x, & 0<z<d \\ \mu_0 K d\, \hat{u}_x, & z>d \end{cases}}$$

3. ARIKETA

a barne erradioko eta a+d kanpo erradioko eraztuna bere ardatzaren inguruan biratzen ari da ω abiadura angeluarrez. Bere gainazaleko karga dentsitatea σ dugu. Kalkula ezazu ardatzaren puntuetako indukzio magnetikoa. Zer gertatuko litzateke $d \ll a$ kasuan?

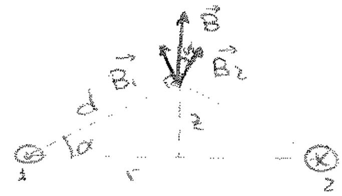


Ardatzeko $\vec{B}$ kalkulatzeko, Biot eta Savarten legea erabiliko dugu:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \, \vec{dl} \wedge \hat{u}_r}{d^2}$$

$$\cdot \; I\,dl = \frac{dq}{dt} \cdot dl = dq \cdot \frac{dl}{dt} = \sigma\, ds\, v = \sigma\, r\, d\theta\, dr\, r\omega = \underline{\sigma \omega r^2 dr\, d\theta}$$

Bestalde, jatorriarekiko simetrikoak diren bi karga



Bi kargen kontribuzioa: <u>osagai bertikal bikoitza eta horizontalik ez.</u>

Beraz, hori guztia kontuan hartuta:

$$B(z) = 2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_a^{a+d} \frac{\sigma \omega r^2 dr\, d\theta}{d^2} \cos\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \sigma\omega \int_0^{\pi}\int_0^{a+d} \frac{r^2 dr\, d\theta}{(\sqrt{z^2+r^2})^2} \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} dr =$$

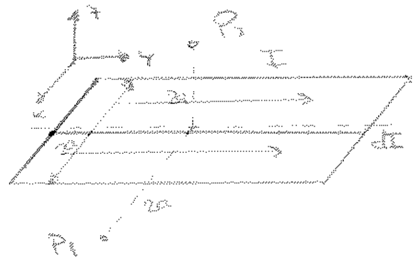
$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_a^{a+d} \frac{r^3}{(z^2+r^2)^{3/2}} dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2+z^2}} \right]_a^{a+d} =$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{(a+d)^2 + 2z^2}{\sqrt{(a+d)^2+z^2}} - \frac{a^2+2z^2}{\sqrt{a^2+z^2}} \right]$$

Beraz, $$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{(a+d)^2 + 2z^2}{\sqrt{(a+d)^2+z^2}} - \frac{a^2+2z^2}{\sqrt{a^2+z^2}} \right] \vec{k}}$$

4. ARIKETA

2a zabalerako xafla mehe eta luzea zeharkatzen du I korronteak, xaflan uniformeki banatua. Kalkula ezazu eremu magnetikoa bi puntuetan: P_1 puntua xaflaren plano bereon dago, xaflaren ardatzetik 2a distantziara; eta P_2 puntuan xaflaren erdibitzailea dago, 2a distantzian.

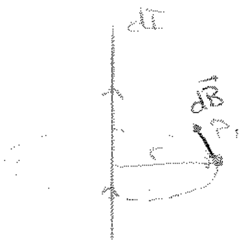


Ariketa ebazteko, dI korrontea daramaten harietan banatuko dugu xafla.

$$I = \int k \cdot dl = 2ak \Rightarrow \vec{k} = \frac{I}{2a}\hat{u}_x$$

Eta beraz, $dI = k \cdot dx = \frac{I}{2a}dx$

• P_1 puntuko eremu magnetikoa:



$$\oint d\vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{barn} = \mu_0 dI$$

$$dB \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2a}dx \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a r}dx\,\hat{u}_\varphi$$

Orain, $\vec{B}$ kalkulatzeko, $d\vec{B}$ xafla osoan integratu behar dugu:

$$\vec{B} = \int_{-a}^{a} \frac{\mu_0 I}{4\pi a r}dx\,\hat{u}_\varphi$$

Baina r eta x ez dira independiente: Izan ere: $x + r = 2a \Rightarrow r = 2a - x$

Gainera, xafla planoan daudenez, $\hat{u}_\varphi = -\hat{u}_z$ izango da.

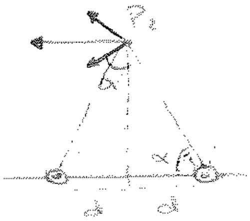
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{2a-x}(-\hat{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\Big[-\ln(2a-x)\Big]_{-a}^{a}(-\hat{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\ln(3a)-\ln a\right)(-\hat{u}_z)$$

Beraz, $\boxed{\vec{B}_{P_1} = \frac{\mu_0 I \ln 3}{4\pi a}(-\hat{u}_z)}$

· P_2 puntuko eremu magnetikoa:

Aurreko puntutik dakigu: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} dx\, \hat{u}_y$

Atera dezagun simetria:



Bi dl simetrikoren kontribuzioa: osagai horizontalak bikoitza eta bertikalak ez.

Horrexegatik, eremu osoa: $\vec{B} = B\,\hat{u}_x$

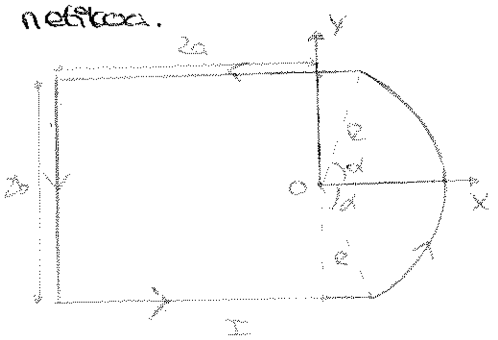
$$\vec{B} = 2\int_0^a \frac{\mu_0 I}{4\pi a r}\sin\alpha\, dx\, \hat{u}_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_0^a \frac{1}{r^2}\, 2a\, dx\, \hat{u}_x = \frac{\mu_0 I}{\pi}\int_0^a \frac{dx}{(x^2+4a^2)}\hat{u}_x =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{2a}\right]_0^a \hat{u}_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\arctan(1/2)\,\hat{u}_x$$

Beraz, $\boxed{\vec{B}_{P_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\hat{u}_x}$

5. ARIKETA

Kalkula ezazu irudiko zirkuituak O puntuan sortzen duen eremu magnetikoa.

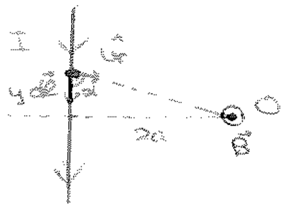


O puntuko eremua kalkulatzeko, zirkuituko zati bakoitzak sortzen duena kalkulatuko dugu.

· Zirkunferentzia zatia:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l}\wedge\hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_L dl\,\hat{u}_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\, d\alpha = \frac{\mu_0 I \alpha}{2\pi R}\hat{u}_z$$

• 2b luzerako aldea:

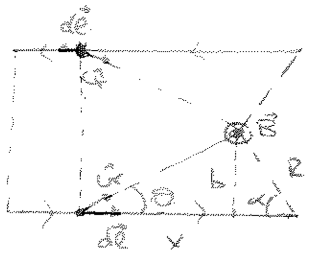


Kasu honetan, simetria dugunez: Erresultantea osagai bertikal bikoitza (baina soilik bertikala dugu).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{b}^{-b} \frac{-dy \cdot \sin\alpha}{y^2+4a^2}\vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-b}^{b} \frac{1}{4a^2+y^2}\cdot\frac{2a}{\sqrt{4a^2+y^2}}\, dy\, \vec{k} =$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{2\pi}\int_{-b}^{b} \frac{dy}{(4a^2+y^2)^{3/2}}\vec{k} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi}\left[\frac{y}{4a^2\sqrt{y^2+4a^2}}\right]_{-b}^{b}\vec{k} = \frac{\mu_0 b I}{4\pi a\sqrt{b^2+4a^2}}\vec{k}$$

• 2a luzerako aldeak:



Ikus dezakegu bakoitzak $\vec{B}$ berdina sortuko duela. Beraz, bakarrik alde batek sortzen duena kalkulatuko dugu, eta gero x2 egin totala kalkulatzeko.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-2a}^{R\cos\alpha} \frac{dx \cdot \sin\theta}{x^2+b^2}\vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-2a}^{R\cos\alpha} \frac{1}{x^2+b^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}\, dx\, \vec{k} =$$

$$= \frac{\mu_0 b I}{4\pi}\int_{-2a}^{R\cos\alpha} \frac{1}{(x^2+b^2)^{3/2}}\, dx\, \vec{k} = \frac{\mu_0 b I}{4\pi}\left[\frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}}\right]_{-2a}^{R\cos\alpha}\vec{k} =$$

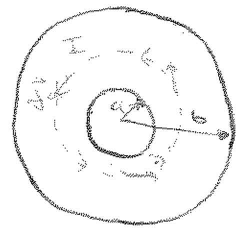
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\frac{R\cos\alpha}{\sqrt{R^2\cos\alpha+b^2}} + \frac{2a}{\sqrt{4a^2+b^2}}\right)\vec{k}$$

Beraz:

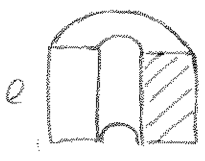
$$\boxed{\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{2\alpha}{R} + \frac{1}{\sqrt{4a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right) + \frac{2R\cos\alpha}{b\sqrt{R^2\cos^2\alpha+b^2}}\right]\vec{k}}$$

6. ARIKETA

Demagun solenoide lodi bat, bere ardatzaren norabidean (z norabidean) mugagabea. Bere $a<r<b$ aldetik $\vec{J} = j\hat{u}_\varphi$ korronte dentsitatea dabil. Kalkula ezazu $\vec{B}$ espazio osoan. Era berean, lor ezazu $\vec{A}$ leku guztietan.



Eremu magnetikoa kalkulatzeko, lehenengo I behar dugu.



Kalkulatuko l luzerako zatian dagoen intentsitatea.

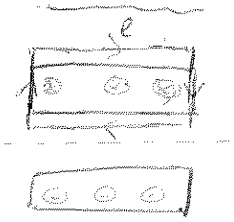
$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S j\hat{u}_\varphi \cdot dS\,\hat{u}_\varphi = j\int_S dS = j\cdot l(b-a)$$

* Nabaria da alde batetik I badoa, bestetik $-I$ izango dugu.

$\vec{B}$ kalkulatzeko Ampere-ren legea aplikatuko dugu: $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{ing}$

Hasteko, solenoide baten kanpoan $B = 0$

- $0<r<a$:



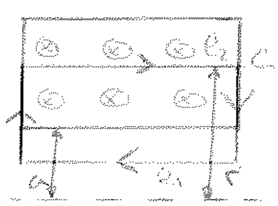
Ampere: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ing} = \mu_0 j\, l(b-a)$

Badakigu integralean soilik beheko aldea egongo dela. ($B=0$ edo $\vec{B}\perp d\vec{l}$)

$$\vec{B}\int dl\,\hat{u}_z = \mu_0 j\, l(b-a)$$

$$\vec{B}\, l\,\hat{u}_z = \mu_0 j\, l(b-a) \rightarrow \vec{B} = \mu_0 j(b-a)\,\hat{u}_z$$

- $a<r<b$:



Ampere: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ing}$

$$I_{ing} = \int_S \vec{J}\, d\vec{S} = j\cdot l(r-a)$$

Kasu honetan integralean bi alde horizontalak.

$$\vec{B}_2 = B_2(-\hat{u}_l)$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B}_1\cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{B}_2 d\vec{l} = \mu_0 j(b-a)l + B_2 l = \mu_0 j l(r-a)$$

$$\Rightarrow B_2 l = \mu_0 j l(r-a-b+a) \Rightarrow \underline{\vec{B}_2 = \mu_0 j(r-b)(-\hat{u}_l)}$$

Beraz, laburbilduz:
$$\boxed{\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 j(b-a)\,\hat{u}_l, & 0<r<a \\ \mu_0 j(b-r)\,\hat{u}_l, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_l, & r>b \end{cases}}$$

Orain, bektore potentziala kalkulatzeko, ondorengoa kontuan hartuko dugu kontuan:

$$\begin{cases} \vec{A} \,//\, \text{korrontea} \Rightarrow \text{Beraz, badakigu } \underline{\vec{A} = A\hat{u}_\varphi} \\ \vec{B} = \nabla\wedge\vec{A} \end{cases}$$

$\vec{B}(r) = B(r)\,\hat{u}_l$ denez, $\nabla\wedge A$-n soilik z ardatzeko osagaia izan behar dugu. Bertatik kalkulatuko dugu $\vec{A}$.

$$(\nabla\wedge\vec{A})_{\hat{u}_l} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat{u}_l = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\hat{u}_l \quad (\vec{A} = A\hat{u}_\varphi \Rightarrow A_r = 0)$$

$$\nabla\wedge\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\,\hat{u}_l = B(r)\,\hat{u}_l$$

- $\underline{0<r<a}$:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA) = \mu_0 j(b-a)r \Rightarrow r\cdot A = \frac{\mu_0}{2} j(b-a)r^2 \Rightarrow \underline{A(r) = \frac{\mu_0 j}{2}(b-a)r}$$

- $\underline{a<r<b}$:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA) = \mu_0 j(br-r^2) \Rightarrow r\cdot A = \mu_0 j\left(\frac{br^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right) \Rightarrow \underline{A(r) = \frac{\mu_0 j}{6}(3br-2r^2)}$$

$\vec{b}$ → eremu magnetiko mikroskopikoa

$\vec{B}$ → eremu magnetiko MAKROSKOPIKOA

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{B_R(\vec{r})} \frac{d^3\vec{r}\,' \cdot \vec{b}(\vec{r}\,')}{V'} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = b(\vec{r})$$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \frac{\vec{m}}{V'}$ → Integrazio eremuaren barrean korronte banaketa bat dugula.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{ext}(\vec{r}) + \frac{2}{3}\mu_0 \cdot \frac{\vec{m}}{V'}$$

$\vec{M}$ → Imanazioa → $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_{askeak}$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$\vec{M}(\vec{r})$ agertzean $\Rightarrow$ $\vec{J}_{lotua} = \nabla \wedge \vec{M}$

$$\vec{K}_{lotua} = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

Hori $\vec{A}(\vec{r})$-n adierazpenean egin daiteke:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V'} ds' \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\vec{J} = \vec{J}_{aske} + \vec{J}_{lotua}$ $\qquad \nabla \cdot \vec{J}_{lotua} = 0$

$$\hookrightarrow \vec{A}_{osoa}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

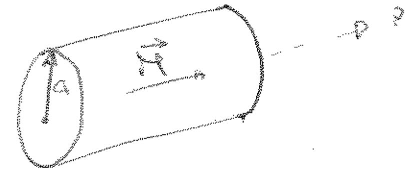
Ondorioz $\Rightarrow$ $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_{aske} + \vec{J}_{lotua}) =$

$$= \mu_0 (\vec{J}_{aske} + \nabla \wedge \vec{M})$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right) = \vec{J}_{aske} \Rightarrow \begin{cases} \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \\ \nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_{aske} \end{cases}$$

$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right) = -\nabla \cdot \vec{M}$ $\rightarrow$ Ez da 0 izan behar!!

↳ ADIBIDEA:

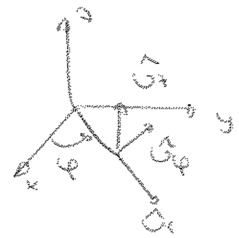


$\vec{M}$ kte $\rightarrow \vec{M} = M\hat{u}_z$

$\vec{A} \sim \vec{m} \wedge \vec{r} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = A(r)\hat{u}_\varphi$

$\vec{J}_{lotua} = \nabla \wedge \vec{M} = 0 \quad (\vec{M}$ kte$)$

$\vec{K}_{lotua} = \vec{M} \wedge \hat{n} \qquad \hat{n} = \hat{u}_r$



$\vec{K}_{lotua} = M\hat{u}_z \wedge \hat{u}_r = M\hat{u}_\varphi$

Solenoidearen barruan kalkulatua, baina hemen $|\vec{K}| = n \cdot I$

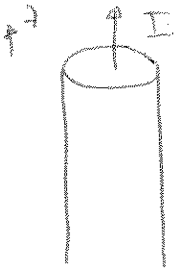
$$\vec{B} = \mu_0 |\vec{K}|\,\hat{u}_z = \mu_0 M\,\hat{u}_z$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla\wedge\vec{A} &= \frac{1}{r}(r\cdot A)'\,\hat{u}_z \\ \nabla\wedge\vec{A} &= \vec{B} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{1}{r}(r\cdot A)' = \begin{cases} \mu_0 M & \text{(barruan)} \\ 0 & \text{(kanpoan)} \end{cases}$$

$$(r\cdot A)' = \begin{cases} \mu_0 M r \\ 0 \end{cases}$$

$$r\cdot A = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 M r^2 + C_1 & \text{barruan} \\ C_2 & \text{kanpoan} \end{cases} \Rightarrow A(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 M r & r<a \\ \dfrac{\mu_0 M a^2}{2r} & r>a \end{cases}$$

↳ ADIBIDEA:



$$\vec{j}_{askea} = \frac{I}{S} \qquad \vec{H} = H(r) \cdot \hat{u}_\varphi$$

Ampère: $$\int_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{H} = I_{askea}(S)$$

$$2\pi r H = j_{askea} \cdot \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$H(S) = \frac{I}{2\pi r}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad r<R$$

Behin $\vec{H}$ finkotuta, $\vec{B}$ ateratzeko:

$$H(S) = \frac{I}{2\pi r} \qquad r>R$$

$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\varphi \quad r>R$ ez dugulako $\vec{M}$-rik,

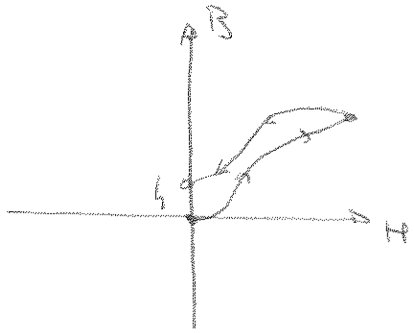
baina $r<R$-n ez dakigu!

Kasu honetan, materiala LINEALA bada:

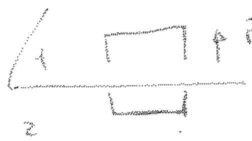
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

$\chi_m > 0 \Rightarrow$ Materiala PARAMAGNETIKOA

$\chi_m < 0 \Rightarrow$ Materiala DIAMAGNETIKOA

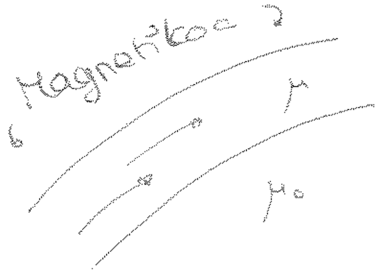


- MUGALDE BALDINTZAK



$$\boxed{\vec{H}_1^{\parallel} - \vec{H}_2^{\parallel} = \vec{K}_{aske} \wedge \vec{n}}$$

$$\boxed{(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0}$$



$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

$\vec{B}$-ren lerroak barruan geratzen dira $\mu >> \mu_0$ bada

Elektriko	Magnetiko
$\vec{J}$	$\vec{B}$
$\vec{E}$	$\vec{H}$
σ	μ
I	Φ_M
$\mathcal{E}$	$\mathcal{M}$ → Indar magnetoeraginkorra

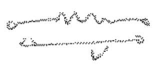
$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_M = \int \vec{B}\, d\vec{S}$$

OHM:

1) $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

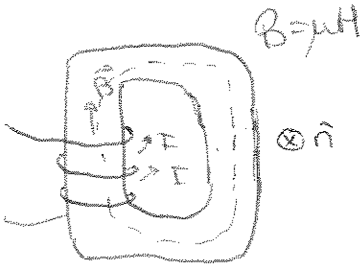
2) $V = RI \rightarrow$ Bi puntuen artean:



3) $\mathcal{E} = RI \rightarrow$ Ibilbide itxi bati.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{EH} \cdot d\vec{l} \qquad (\nabla \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint d\vec{l} \cdot \vec{E} = 0)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = 0 \Rightarrow \mathcal{M} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{H}$$



$$\int_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{H} = I(S) = NI$$

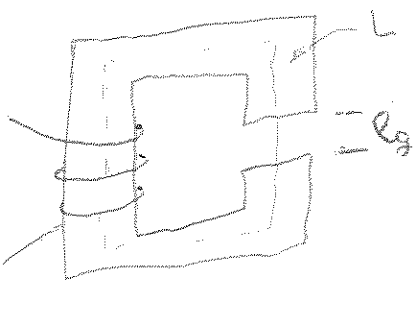
$$\mathcal{M} = NI$$

$$\mathcal{M} = LH = \frac{L}{\mu} B = \frac{L}{\mu} \cdot \frac{\Phi_M}{S} = \frac{L}{\mu S} \Phi_M$$

<u>Elek</u>	<u>Magn</u>
$\mathcal{E} = RI$	$\mathcal{M} = \mathcal{R}_M \Phi_M$
$R = \langle \frac{L}{\sigma S} \rangle$	$\mathcal{R}_M = \langle \frac{L}{\mu S} \rangle$

$$\mathcal{R}_M = \frac{L}{\mu \cdot S}$$

$\mathcal{R}_M$ = erreluktantzia



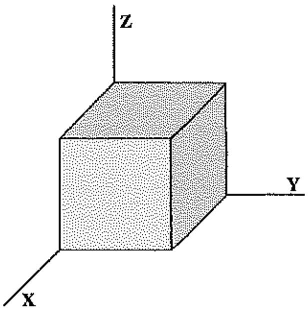
$$\mathcal{M} = NI = \oint \vec{H} \, d\vec{l} = \frac{(L - l_g)\Phi_M}{\mu S} + \frac{\Phi_M l_g}{\mu_0 \cdot S} =$$

$$= \Phi_M \left[\frac{L}{\mu S} + \frac{\ell_g}{S} \left(\frac{1}{\mu_0} - \overset{\mu \gg \mu_0}{\cancel{\frac{1}{\mu}}} \right) \right] = \Phi_M \cdot \mathcal{R}_M = \Phi_M (\mathcal{R}_M^{\text{ferr}} + \mathcal{R}_M^{\text{traf}})$$

$\nabla \wedge \vec{B} = 0$ barruan $\Rightarrow \vec{B} = -\nabla V_M$ $\qquad \nabla^2 V_M = 0$

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia



1. a ertzeko kuboak

$$\mathbf{M} = (M_0/a)\,(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y)$$

imanazioa aurkezten du, non M_0 konstantea den. Kalkula itzazu bolumeneko eta gainazaleko imanazio korronte dentsitateak, $\mathbf{j}_m$ eta $\mathbf{k}_m$.

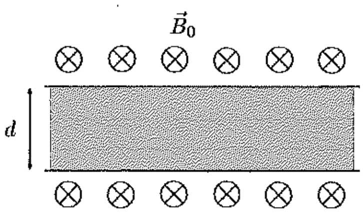
2. Biz hari ardazkide luzea ("coaxial"). Barneko eroalearen erradioa a da, eta kanpokoarena b. Kanpoko eroalearen lodiera arbuiagarritzat joko dugu. Bietatik I intensitatea dario, aurkako noranzkoetan. Eroalen arteko aldea ingurune magnetikoz bete dute. $a < r < c$ tartean μ_1 iragazkortasuna du, eta $c < r < b$ aldean μ_2. Eroalen iragazkortasun magnetikoa hutseangoa da, μ_0. Kalkula itzazu alde guztietako $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ eta $\mathbf{M}$ eremuak. Horrezaz gain, lor itzazu imanazio korronte dentsitateak.

3. Zilindro infinituki luze batek $\mathbf{M} = M_0(r/a)\mathbf{u}_\varphi$ imanazio azimutala du, non M_0 konstante bat den, eta a haren erradioa. Lor ezazu $\mathbf{B}$ eta $\mathbf{H}$ zilindroaren barne eta kanpoaldean.

4. Eroale lerrozuzen eta infinituki luze batetik I korrontea dabil, eta bi ingurune isotropo eta ez eroaleen arteko muga-gainazalean dago. Kalkula ezazu $\mathbf{B}$ espazioko edozein puntutan inguruneen iragazkortasuna μ_1 eta μ_2 direla joz.

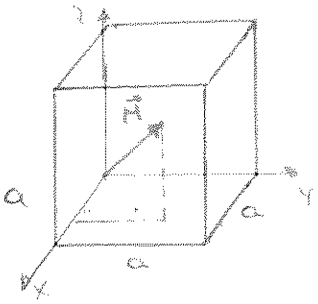
5. Diska magnetiko batek a erradioa eta $l \ll a$ lodiera du, eta xy planoan dago. $\mathbf{M} = M_0\mathbf{u}_x$ imanazio uniformea duela joz, kalkula itzazu i) polo-dentsitate magnetikoak, ii) imanazio korronte-dentsitateak, eta iii) $\mathbf{H}$ eta $\mathbf{B}$ diskaren zentruan.

6. Xafla laun oso handi bat, d lodierakoa eta μ iragazkortasunekoa, $\mathbf{B}_0$ eremu magnetiko uniforme batean sartzen da. Eremu hura xaflaren azalen paraleloa da. Materialaren barnean sortuko den eremu erresultantea $\mathbf{B}_0$-ren norabide bera du. i) Erakuts ezazu $\mathbf{M}$ imanazioa xaflan uniformea dela. ii) Lor itzazu imanazio-korronteak. iii) Kalkula ezazu $\mathbf{M}$ magnetizazioa μ eta $\mathbf{B}_0$-ren menpe. iii) Kalkula ezazu eremu magnetikoa xaflaren barne eta kanpoaldean.



1. ARIKETA

a ertzeko kuboak $\vec{M} = \frac{M_0}{a}(x\vec{u_x} + y\vec{u_y})$ imanazioa aurkezten du, non M_0 konstantea den. Kalkula itzazu bolumeneko eta gainazaleko imanazio korronte dentsitateak, $\vec{J}_m$ eta $\vec{K}_m$.



Imanazio korronteak kalkulatzeko, ondorengo adierazpenak erabiliko ditugu:

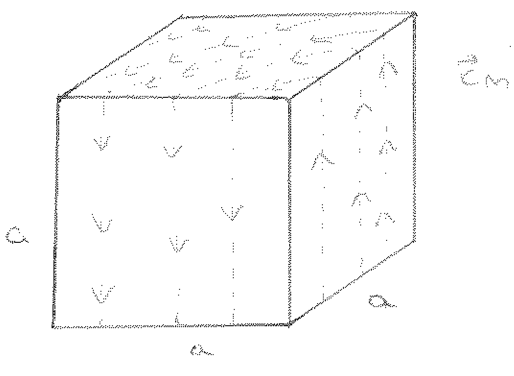
$$\vec{J}_m = \nabla\wedge\vec{M} \qquad \vec{K}_m = \vec{M}\wedge\vec{n}$$

$$\vec{J}_m = \frac{M_0}{a}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \qquad \boxed{\vec{J}_m = \vec{0}}$$

Horrela izendatuko ditugu aurpegiak:
$\vec{n_1} = \vec{i}$ $\quad \vec{n_2} = \vec{j}$ $\quad \vec{n_3} = -\vec{i}$
$\vec{n_4} = -\vec{j}$ $\quad \vec{n_5} = \vec{k}$ $\quad \vec{n_6} = -\vec{k}$

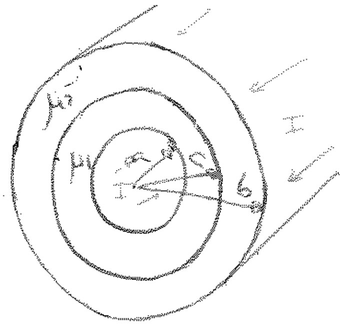
- $\vec{K}_{m1} = -\vec{i}\wedge\left(M_0/a\,(x\vec{i} + y\vec{j})\right) = \boxed{-\frac{M_0 y}{a}\vec{k} = \vec{K}_{m1}}$
- $\vec{K}_{m2} = -\vec{j}\wedge\left(M_0/a\,(x\vec{i} + y\vec{j})\right) = \boxed{+\frac{M_0 x}{a}\vec{k} = \vec{K}_{m2}}$
- $\vec{K}_{m3} = +\vec{i}\wedge\left(\frac{M_0}{a}(x\vec{i} + y\vec{j})\right) = \boxed{+\frac{M_0 y}{a}\vec{k} = \vec{K}_{m3}}$
- $\vec{K}_{m4} = +\vec{j}\wedge\left(\frac{M_0}{a}(x\vec{i} + y\vec{j})\right) = \boxed{-\frac{M_0 x}{a}\vec{k} = \vec{K}_{m4}}$
- $\vec{K}_{m5} = -\vec{k}\wedge\left(\frac{M_0}{a}(x\vec{i} + y\vec{j})\right) = \boxed{\frac{M_0}{a}(x\vec{j} - y\vec{i}) = \vec{K}_{m5}}$
- $\vec{K}_{m6} = +\vec{k}\wedge\left(\frac{M_0}{a}(x\vec{i} + y\vec{j})\right) = \boxed{-\frac{M_0}{a}(y\vec{i} - x\vec{j}) = \vec{K}_{m6}}$

Beraz, induzitutako korronteen eskema



2. ARIKETA

Bi hari ardazkide luzea. Barneko eroalearen erradioa a da, eta kanpokoarena b. Kanpoko eroalearen lodiera arbuiagarritzat jako dugu. Bietatik I intentsitatea doa, aurkako noranzkoetan. Eroaleen arteko aldea ingurune magnetikoz bete dute: $a<r<c$ tartean μ_1 iragazkortasuna du, eta $c<r<b$ aldean μ_2. Kalkula itzazu alde guztietako $\vec{H}$, $\vec{B}$ eta $\vec{M}$. Horrez gain, lor itzazu imanazio korronte dentsitateak.



Lehenik eta behin, simetria zilindrikoa daukagu, eta hariaren ardatza z norabidean hartuz:

$$\begin{cases} \vec{H}(\vec{r}) = H(r)\,\vec{u}_\varphi \\ \vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

Hasteko, $\vec{H}$ kalkulatuko dugu.

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{askea} \quad \Updownarrow \quad \oint_{\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{ing}$$

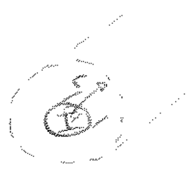
- $0<r<a$:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{ing} \Rightarrow I_{ing} = \frac{I}{A}\cdot A_{ing} = \frac{r^2}{a^2} I$$

$$\oint_C H(r)\,\vec{u}_\varphi\cdot dl\,\vec{u}_\varphi = H(r)\oint_C dl = H(r)\cdot 2\pi r = \frac{r^2}{a^2} I$$

$$\Rightarrow H(r) = \frac{r}{2\pi a^2} I$$

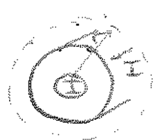
- $a<r<b$:



$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{ing} = I$$

$$\oint H(r)\,\vec{u}_\varphi\cdot dl\,\vec{u}_\varphi = H(r)\cdot 2\pi r = I \Rightarrow H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

- $r>b$:



$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{ing} = -I+I = 0 \Rightarrow H(r)=0$$

Beraz, emaitzak laburbilduz:

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi a^2}\,\hat{u}_\varphi, & r<a \\ \dfrac{I}{2\pi r}\,\hat{u}_\varphi, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_\varphi, & \text{bestela} \end{cases}}$$

Orain, $\vec{B}(\vec{r})$ kalkulatzeko, materialak linealak direla kontuko dugu:

$$\vec{B}(r) = \mu(r)\cdot\vec{H}(r) \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\,\hat{u}_\varphi, & r<a \\ \dfrac{\mu_1 I}{2\pi r}\,\hat{u}_\varphi, & a<r<c \\ \dfrac{\mu_2 I}{2\pi r}\,\hat{u}_\varphi, & c<r<b \\ 0\,\hat{u}_\varphi, & \text{bestela} \end{cases}}$$

Orain, $\vec{M}$ kalkulatzeko, hurrengo erlazioa erabiliko dugu:

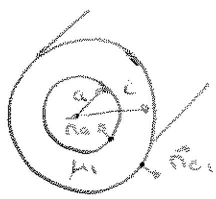
$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}) = M(r)\,\hat{u}_\varphi$$

Beraz,

$$\boxed{\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{(\mu_1-\mu_0)\,I}{2\pi\mu_0 r}\,\hat{u}_\varphi, & a<r<c \\ \dfrac{(\mu_2-\mu_0)\,I}{2\pi\mu_0 r}\,\hat{u}_\varphi, & c<r<b \\ 0\,\hat{u}_\varphi, & \text{bestela} \end{cases}}$$

Orain, $\vec{J}_m$ eta $\vec{K}_m$ kalkulatuko ditugu:

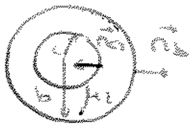
- $\vec{J}_m = \nabla\wedge\vec{M} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\alpha}{r}\right)\hat{u}_z = 0\hat{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{J}_m = 0}$



$\vec{n}_a = -\hat{u}_r$
$\vec{n}_{c_1} = \hat{u}_r$

- $\vec{K}_a = \vec{n}_a \wedge \vec{M}(a) \Rightarrow \vec{K}_a = -\dfrac{(\mu_0-\mu_1)\,I}{2\pi\mu_0 a}\,\hat{u}_z$

- $\vec{K}_{c_1} = \vec{n}_{c_1} \wedge \vec{M}(c) \Rightarrow \vec{K}_{c_1} = \dfrac{(\mu_1-\mu_0)\,I}{2\pi\mu_0 c}\,\hat{u}_z$



$\vec{n}_{c_2} = -\hat{u}_r$

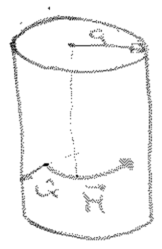
$\vec{n}_b = \hat{u}_r$

• $\vec{K}_{c_2} = \vec{n}_{c_2} \wedge \vec{H}(c) \Rightarrow \vec{K}_{c_2} = -\dfrac{(\mu_2-\mu_0) I}{2\pi\mu_0 c}\hat{u}_z$

• $\vec{K}_b = \vec{n}_b \wedge \vec{H}(b) \Rightarrow \vec{K}_b = \dfrac{(\mu_2-\mu_0) I}{2\pi\mu_0 b}\hat{u}_z$

3. ARIKETA

Zilindro infinitu luze batek $\vec{M} = M_0 \frac{r}{a}\hat{u}_\varphi$ imanazio azimutala du, non M_0 konstante bat den, eta a bere erradioa. Kalkulatu $\vec{B}$ eta $\vec{H}$ zilindroaren barne eta kanpoaldean.



Problema ebazteko, imanazio korronteak kalkulatuko ditugu.

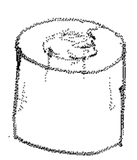
$$\vec{J}_m = \nabla\wedge\vec{M} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{M_0}{a}r^2\right)\hat{u}_z = \frac{2M_0}{a}\hat{u}_z$$

$$\vec{K}_m = \vec{M}\wedge\vec{n} = -M_0\frac{a}{a}\hat{u}_z = -M_0\hat{u}_z$$

Korronte hauek ez direnez askeak, $\vec{B}$ kalkulatuko dugu lehenengo

Ampère: $\oint_C \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{ing}$ → korrontea z-n ⇒ $\vec{B}(r) = B(r)\hat{u}_\varphi$

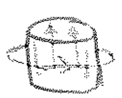
• $r<a$:



$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{ing} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{2M_0}{a}\pi r^2$$

$$B\oint_C dl = B\cdot 2\pi r = \mu_0\frac{2M_0}{a}\pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 M_0 r}{a}$$

• $r>a$:



$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{ing} = \mu_0\left(\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \int_C K\cdot dl\right) = \mu_0(2M_0\pi a - M 2\pi a) = 0$$

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = 0 \Rightarrow B(r) = 0$$

Bi emaitzak laburbilduz: $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 M_0}{a} r \, \hat{u}_\varphi, & r < a \\ 0 \, \hat{u}_\varphi, & r > a \end{cases}}$

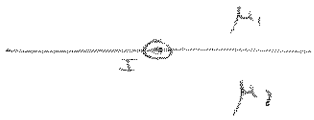
$\vec{H}$ kalkulatzeko, ondorengo adierazpena erabiliko dugu:

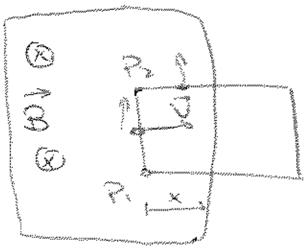
$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow$ Beraz, badakigu $\vec{H}(\vec{r}) = H(r) \, \hat{u}_\varphi$

Kenketa eginez: $\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = 0 \, \hat{u} \quad \forall r}$

4. ARIKETA

Eroale lerrozuzen eta infinitu batetik I korrontea dabil, eta bi inguru- ne isotropo eta ez eroaleen arteko muga-gainazalean dago. Kalku- la ezazu $\vec{B}$ espazioko edozein puntutan inguruneen iragazkortasuna μ_1 eta μ_2 direla jo.





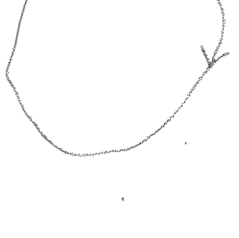
$\dot{x} = -v \qquad \vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

Lorentzen indarraren eragina, kargen berrantolaketa, eta horregatik $\Delta\phi \Rightarrow$ Higidura.

$$\vec{F} \to \Delta\phi \Rightarrow \varepsilon = \int d\vec{l} \cdot \vec{E}_{eragin} = \int d\vec{l} \cdot \frac{\vec{F}}{q} = \int_{P_1}^{P_2} dl \cdot \frac{qvB}{q} = vBh$$

$\Phi(S) = B \cdot x(t) \cdot h$

$$\hookrightarrow \frac{d\Phi}{dt} = Bh\dot{x} = -vBh = -\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$



$\gamma \quad \varepsilon(\gamma)$ Faraday-Henry

$\partial S = \gamma$

LENZ: Sortuko den I dagoen Φ-ren aldaketa konpentsatzeko $\left(\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}\right)$

2. egoera → zirkuitua geldi, $\vec{B}$ t-rekin aldatzen.

$$\mathcal{E} \rightarrow \oint d\vec{l} \cdot \vec{E} = \int d\vec{S} \, (\nabla \wedge \vec{E})$$

$$= -\frac{d}{dt}\int d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int d\vec{S} \left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{dt}$$

MAXWELL-en ekuazioa

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ -ren beste jatorria (bestea 1. kasua, Lorentz)

MAXWELL en ekuazioa

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}}$$

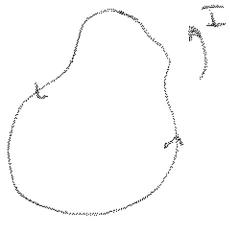
$$\nabla \wedge \vec{E} = \nabla \wedge \left(-\frac{\partial \vec{A}}{dt}\right)$$

$$\nabla \wedge \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{dt}\right)}_{-\nabla \phi} = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

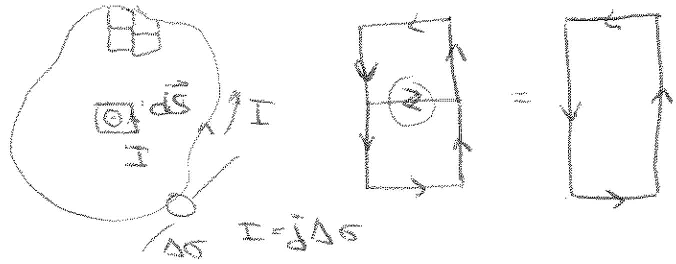
Fenomeno honi INDUKZIO MAGNETIKO deritzegu.

- ENERGIA MAGNETIKOA



$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I \cdot \frac{d\Phi_M}{dt}$$

$$\delta W = I \cdot \delta \Phi_M$$



Zati komunean konpen-tsatu egiten dira!! Hortaz, pixel bakoitzean I, gero batzean kanpoan soilik I

$$\Delta(\delta W) = I\int \hat{n}\cdot\delta\vec{B}\,\Delta S = I\int \Delta\vec{S}\,(\nabla\wedge\delta\vec{A}) = I\int_{\Gamma} d\vec{l}\cdot\delta\vec{A} =$$

$$\vec{j} \parallel d\vec{l} \Rightarrow j\,d\vec{l} = \vec{j}\,dl$$

$$\delta W = \int d^3\vec{r}\cdot\vec{j}\cdot\delta\vec{A}$$

Orain, korronte aske banaketa bati dagokion energia:

$$\nabla\wedge\vec{H} = \vec{j}$$

$$\hookrightarrow \delta\vec{A}\cdot(\nabla\wedge\vec{H}) = -\nabla(\delta\vec{A}\wedge\vec{H}) + \vec{H}\cdot(\nabla\wedge\delta\vec{A}) =$$

$$= -\nabla(\delta\vec{A}\wedge\vec{H}) + \vec{H}\cdot\vec{B}$$

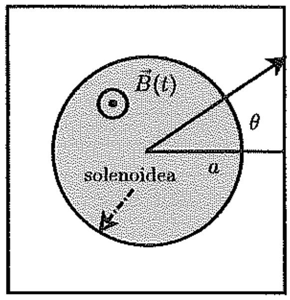
$$\boxed{\delta W = \int d^3\vec{r}\cdot\vec{H}\cdot\delta\vec{B}}$$

$$\boxed{W_{lineala} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\cdot\vec{H}\cdot\vec{B}}$$

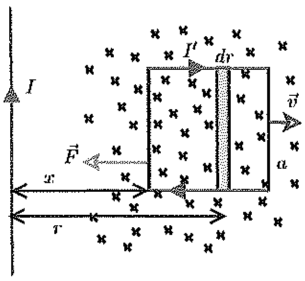
$$\boxed{W_{hutsean} = \frac{1}{2\mu_0}\int d^3\vec{r}\cdot\vec{B}^2}$$

Elektromagnetismoa I — Indukzioa eta energia magnetikoa

1. Kontsidera ezazu $2a$ aldeko lauki itxurako zirkuitu bat, eta harek solenoide zuzen, zirkular eta zentrukide bat inguratzen duela (laukiaren solenoidearen espiren planokidea da). Irudiko **B** eremua eta zirkuitua elkarzuta dira, eta eremu magnetikoa aldakorra dugu. Indar elektroeragilerik al dago zirkuitoan? Lorentz indarrik jaso al dute zirkuituko kargek? Zein da indar elektroeragilearen jatorria? Kalkula ezazu **A** potentziala espazioko alde guztietan. Zer esan dezakezu **E** eremu elektrikoari buruz?



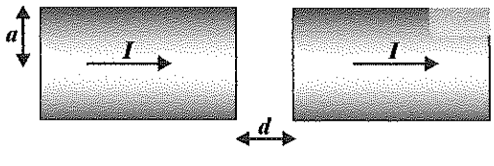
2. Irudiko haritik I intentsitatea dario. a aldeko zirkuitu karratuaren erresistentzia R da, eta irudian agertzen den moduan higitzen ari da, **v** abiaduraz. Kalkula itzazu i) zirkuitu karratuan induzitako indar elektroeragilea; ii) barreiaturiko potentzia elektrikoa; iii) zirkuitu karratu eta zurrunak jasandako indarra; iv) zirkuitua mugiarazteko beharrezkoa den potentzia mekanikoa. Zure emaitzak bateragarriak al dira?



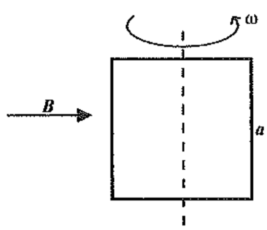
3. Xafla lau eta paraleloetako kondentsadore baten barruko dielektrikoaren permitibitatea ϵ eta eroankortasuna g dira, hurrenez hurren. Diska formakoak dira xaflak, R erradiokoak. Euren arteko distantzia $d \ll R$ da. Kondentsadorea V potentziala lortu arte kargatzen da, C bere kapazitatea izanda. Behin kargatuz gero, zirkuituetatik deskonektatzen dugu eta uzten dugu aldatzen. Kalkula ezazu kondentsadorearen karga denboran zehar. Kalkula itzazu dielektrikoan aurkituko dugun desplazamendu korronte dentsitatea, desplazamendu korronte intentsitatea, eta eremu magnetikoa dielektrikoan.

4. a erradioko esferaerdi-formako gainazal eroalea bere ardatzaren inguruan biratzen ari da ω abiadura angeluarrez, **B** eremu magnetikoa konstante batean murgilduta. **B** eremua eta esferaerdia ardazkideak dira. Kalkula ezazu polotik ekuatoreraino doan meridiano batean zeharko indar elektroeragilea.

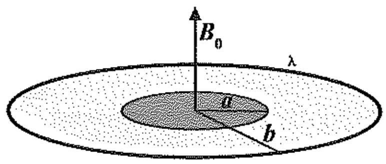
5. a erradioko hari zilindrikoak darama I intentsitate elektriko konstante, uniformeki banandua zeharko sekzioan. Zeharkako mozte baten zabalera $d \ll a$ dugu, eta hor kondentsadore bat sortzen da. Kalkula ezazu eremu magnetikoa moztean ardatzetik $r < a$ distantzian.



6. a alboko espira karratua ω abiadura angeluarrez biratzen ari da, **B** eremu magnetiko konstantean murgilduta. Kalkula ezazu espirako indar elektroeragilea.



7. λ karga dentsitate linealeko lerro zirkularrak bere ardatzaren inguruan bira daiteke. Zirkuluaren erradioa b da. Bere barneko $a < b$ erradioko zirkulu bat zeharkatzen du $\mathbf{B}$ eremu magnetiko zutak. T denboran zehar $\mathbf{B}$ eremua $\mathbf{B}_0$ hasierako baliotik balio nulura pasatzen da. Zein da horren eragina karga lerroaren gainean? Kalkula ezazu honen momentu angeluarra.



1. ARIKETA

Kontsidera ezazu 2a aldeko zirkuitu karratu bat, eta solenoide zuzen, zirkular eta zentrokide bat inguratzen duela. Irudiko $\vec{B}$ eremua eta zirkuitua elkarzuta dira, eta eremu magnetikoa aldakorra da. Indar elektroeragilerik al dago zirkuituan? Lorentzen indarrik jasango al dute zirkuituko kargek? Zein da indar elektroeragilearen jatorria? Kalkula ezazu $\vec{A}$ potentziala espazioko alde guztietan. Zer esan dezakezu $\vec{E}$ eremuari buruz?

2. ARIKETA

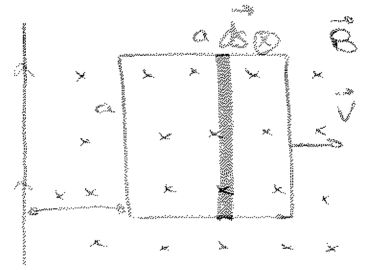
Irudiko haritik I intentsitatea dario. a aldeko zirkuitu karratuaren erresistentzia R da, eta irudian ikusten den moduan higitzen da, $\vec{v}$ abiaduraz. Kalkula itzazu:

i) Zirkuitu karratuan induzitutako indar elektroeragilea.

ii) Barreiatutako potentzia elektrikoa.

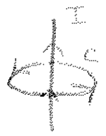
iii) Zirkuitu karratu eta zuzenak jasandako indarra.

iv) Zirkuitua mugiarazteko beharrezkoa den potentzia mekanikoa.



Lehenengo, I-k sortzen duen $\vec{B}$ kalkulatuko dugu. I-ren norabidean z hartuz:

$$\vec{B}(r) = B(r)\,\hat{u}_\varphi$$



Ampère: $\oint_c \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{ing} = \mu_0 I$

$$\oint_c B\,dl = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\varphi$$

$$\Phi_m = \int_S \vec{B}\,d\vec{S} = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot a\,dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$$

$$\mathcal{E}_{iee} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\Phi_m}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = +\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\,\frac{x}{x+a}\cdot\frac{x-x+a}{x^2}\cdot\overset{v}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{iee} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}}$$

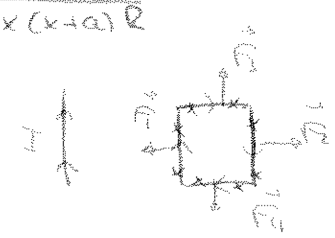
$\mathcal{E}_{iee}$-ak kargak mugiarazten dituenez, V-ren papera egiten du:

$$P = VI = V\frac{V}{R} = \frac{\mathcal{E}_{iee}^2}{R} \Rightarrow \boxed{P = \frac{\mu_0^2 I^2 a^4 v^2}{4\pi^2 x^2 (x+a)^2 R}}$$

Zatituak jasandako indarra aztertzeko, bertatik doan intentsitatea kalkulatu behar dugu (I').

$$\varepsilon_{ind} = I' \cdot R \Rightarrow \qquad I' = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x (x+a) R}$$

Zeinu positiboa duenean:



Simetriagatik, $\vec{F}_3 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \underline{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2}$

$$\vec{F}_1 = \int_L I \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(x) = -I' a \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{u}_r$$

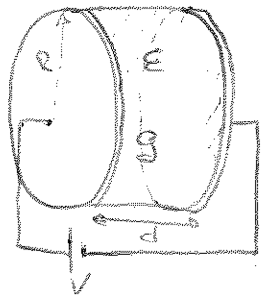
$$\vec{F}_2 = \int_L I \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(x+a) = I' a \frac{\mu_0 I}{2\pi (x+a)} \hat{u}_r$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 a I'}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) \hat{u}_r = -\frac{\mu_0 a^2 I \cdot I'}{2\pi x (x+a)} \hat{u}_r$$

I' ordezkatuz $\Rightarrow$ $$\boxed{\vec{F}(x) = -\frac{\mu_0^2 a^4 I^2 v}{4\pi^2 x^2 (x+a)^2 R} \hat{u}_r}$$

3. ARIKETA

Xafla lau eta paraleloetako kondentsadore baten barruko dielektrikoaren permitibitatea ε eta eroankortasuna g. Diska formakoak dira xaflak, R erradiokoak. Euren arteko distantzia V da. Kondentsadorea V potentziala lortu arte kargatzen da, C bere kapazitatea izanda. Behin kargatuz gero, zirkuitutik deskonektatzen dugu eta uzten dugu aldatzen. Kalkula ezazu kondentsadorearen karga denboraren gain. Kalkula itzazu dielektrikoan aurkituko ditugun desplazamendu korronte dentsitatea, desplazamendu korronte intentsitatea eta eremu magnetikoa dielektrikoan.



C kapazitatea badu, V aplikatzean...

$$V = \frac{Q}{C} \Rightarrow \underline{Q_0 = V \cdot C}$$

Eta, ondoren, $Q(t) = C\,V(t) \rightarrow$ karga aldatzen joango da.

$d \ll R$ denez, ertz efektuak arbuia ditzakegu, eta badakigu xaflen artean sortuko den $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{u}_z$ izango dela. $\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon}\hat{u}_z$ (kondentsadorea)

Bestalde, kondentsadorean: $\vec{J} = g\vec{E}$ $\quad (\vec{J} = J\hat{u}_z)$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S gE\,dS = g\frac{\sigma(t)}{\varepsilon}\pi R^2 = g\frac{Q(t)}{\varepsilon}$$

Bestalde, $I = \frac{dQ}{dt}$

Biak berdinduz: $g\frac{Q(t)}{\varepsilon} = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \int_0^t \frac{g}{\varepsilon}\,dt = \int_{Q(0)}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{g}{\varepsilon}t = \ln(Q(t)/Q(0)) \Rightarrow \boxed{Q(t) = CV e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \vec{J}_d$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon}\hat{n} = \frac{CV}{\pi \varepsilon R^2} e^{-gt/\varepsilon}\hat{n}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{CVg}{\pi \varepsilon^2 R^2} e^{-gt/\varepsilon}\hat{n} \Rightarrow \boxed{\vec{J}_m = -\frac{\varepsilon_0 g C V}{\pi \varepsilon^2 R^2} e^{-gt/\varepsilon}\hat{n}}$$

$$I_d = \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{s} = J_m \cdot \pi R^2 \Rightarrow \boxed{I_d = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2} gCV e^{-gt/\varepsilon}\hat{n}}$$

$\vec{B}$ kalkulatzeko: $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_d$

Stokes-en teorema aplikatuz: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_{irg} + I_{d,irg})$

$$I_{irg} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S g \frac{CV}{\pi \varepsilon R^2} e^{-gt/\varepsilon} ds = \frac{gCV}{\varepsilon R^2} r^2 e^{-gt/\varepsilon}$$

$$I_{d,irg} = \int_S \vec{J}_d \, d\vec{s} = -\int_S \frac{g\varepsilon_0 CV}{\pi \varepsilon^2 R^2} e^{-gt/\varepsilon} ds = -\frac{g\varepsilon_0 CV}{\varepsilon^2 R^2} r^2 e^{-gt/\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \frac{gCV}{\varepsilon R^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) r^{\cancel{2}} e^{-gt/\varepsilon}$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 g C V (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi \varepsilon^2 R^2} e^{-gt/\varepsilon} r \, \hat{u}_\varphi}$$

Adibidea,

$$\vec{E}(z,t) \qquad \partial_t^2 \vec{E} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \partial_z^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \partial_z E_z = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \partial_z E_x = -\partial t\, B_y \\ \partial_z E_y = \partial t\, B_x \end{cases}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \partial_z B_x = \frac{1}{c^2} \cdot \partial_t \cdot E_y \\ \partial_z B_y = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_x \end{cases}$$

Hartuko dugu: $\vec{E}(z,t) = E(z,t)\,\hat{u}_x$

Ondorioz, $\vec{B}(z,t) = B(z,t)\,\hat{u}_y$

$$\vec{E} \to [f(z-ct) + g(z+ct)]\hat{u}_x$$

$$\partial_z E = f'(z-ct) + g'(z+ct) = -\partial_t B$$

$$\partial_t E = -cf'(z-ct) + cg'(z+ct) = -c^2 \partial_z B$$

$$F(z,t) = f(\xi)\Big|_{\xi = z-ct}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}(\xi)\,\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$B = \frac{1}{c} f(z - ct) - \frac{1}{c} g(z + ct)$$

$$\vec{E} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} A_{\vec{k}}^i \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}}^{\,i} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega_{\vec{k}} t} \qquad \vec{\varepsilon}_{\vec{k}}^{\,i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{k}^{\perp} = \alpha_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}}^{\,1} + \alpha_2 \vec{\varepsilon}_{\vec{k}}^{\,2} \qquad \vec{\varepsilon}_{k}^{\,i} \, \vec{\varepsilon}_{k}^{\,j*} = \delta^{ij}$$

$$\vec{E}_0 \, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} = E_0 \vec{n} \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \omega = c|\vec{k}| \qquad \vec{n}\cdot\vec{k} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{n}}{\omega} E_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Energia kalkulatzeko zati erreala erabiliko dugu:

$$\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

$$\rightarrow \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2 k^2}{\omega^2} \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) =$$

$$= \frac{E_0^2}{2} \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \left(\varepsilon_0 + \frac{\vec{k}^2}{\mu_0 \omega^2} \right) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

Kasu honetan uhin elektrikoaren eta magnetikoaren energia berdina da.

$$\vec{S} = \vec{H} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \wedge \vec{E} = \frac{-E_0^2}{\mu_0 \omega} \left[(\vec{k} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n} \right] \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) =$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{k}}{\omega} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \cdot \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\vec{k}}{\omega} =$$

$$= c^2 u \cdot \frac{\hat{n}_k}{c} = c \cdot u \, \vec{n}_k$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{k} = \vec{n} \, |\vec{k}| \\ \omega = c \, |\vec{k}| \end{array}\right\} \quad \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{\vec{n}}{c}$$

$$\partial_t u + \nabla \vec{S} = -\vec{j} \vec{E}$$

$$\frac{\int_S d\vec{s} \; \vec{S}_{\text{punct}}}{S} \qquad \text{Intensit} \quad \frac{W}{m^2}$$

INGURU UNEALA UHIN E.M.

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\partial_t^2 \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon \mu} \nabla^2 E = 0 \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

$$\frac{B_1^{\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_2^{\parallel}}{\mu_2} \qquad B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$$

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \qquad \varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp}$$

- UHIN ELEKTROMAGNETIKOAK EROALE BATEAN

$$\vec{J} = g\vec{E} \qquad \varepsilon, \mu$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{askea}}{\varepsilon} \qquad \nabla \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu g \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\hookrightarrow \partial_t \rho + g \nabla \vec{E} = \partial_t \rho + \frac{g}{\varepsilon} \rho = 0$$

$$\rho(t) = \rho(0)\, e^{-gt/\varepsilon}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = -\partial_t \nabla \wedge \vec{B} = -\mu g \partial_t \vec{E} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \vec{E}$$

$$\parallel$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho$$

$$\partial_t^2 \vec{E} - \frac{1}{\mu\varepsilon} \nabla^2 \vec{E} + \frac{g}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu\varepsilon} \nabla \rho = 0$$

$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{F}(t)$ ordertatua... $\partial_t^2 \vec{F} + \omega_k^2 \vec{F} + \frac{g}{\varepsilon} \partial_t \vec{F} = 0$

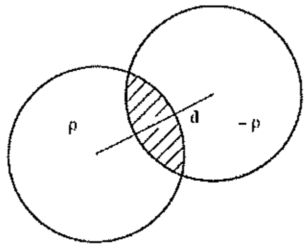
ostilladore indorgetua

ZTF-FCT

ELECTROMAGNETISMO I

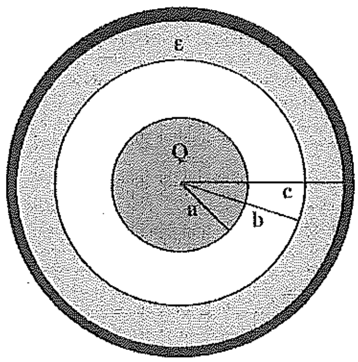
Noviembre 2012

1.- Dos esferas de radio R cada una tienen densidades de carga ρ y $-\rho$ respectivamente. Están situadas tal que se solapan parcialmente, siendo la distancia entre sus centros d. Calcular el campo $\vec{E}$ en cualquier punto de la región común a ambas esferas. Calcular el momento dipolar de este sistema. 3



2.- Una esfera de radio R tiene una densidad de carga $\rho = kr$, donde k en una constante. Hallar la energía de esta configuración. 3

3.- Un conductor cilíndrico de radio a con carga λ por unidad de longitud está rodeado por una capa cilíndrica conductora de radio interno c. La región intermedia está parcialmente rellena con un dialéctico de constante ϵ (entre b y c) mientras que el resto es vacío. Calcular la capacidad por unidad de longitud. 3



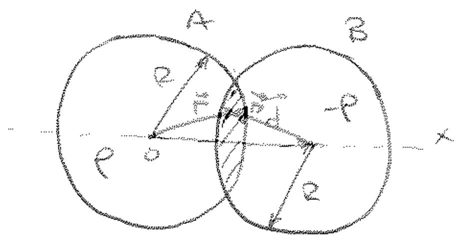
4.- Un campo vectorial viene dado por: 1

$$\vec{E} = k[xy\vec{u}_x + 2yz\vec{u}_y + 3xz\vec{u}_z].$$

¿Puede ser un campo electrostático? Razona la respuesta.

1. ARIKETA

R erradioko bi esfera ρ eta $-\rho$ karga dentsitateak dentsitateak dituzte, hurrenez hurrenez. d distantziaz aldenduta daude eta partzialki gainezarturik dira. Kalkulatu $\vec{E}$ zati komuneko edozein puntutan. Kalkulatu sistema osoaren momentu dipolarra.



$\vec{d} = d\,\hat{u}_x$

Simetria esferikoa dugunez: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

Esfera kargatu baten barneko $\vec{E}$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{ins}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{ins} = \int_V \rho\, dV = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{ins}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho\cdot r}{3\varepsilon_0}\,\hat{u}_r$$

B esferak A-ren zentrutik ikusita sortzen duen $\vec{E}$:

$$\vec{E}_B(\vec{r}) = \frac{-\rho r'}{3\varepsilon_0}\,\hat{u}_r \qquad \text{non } \vec{r} = d\hat{u}_x + r'\hat{u}_r \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - d\hat{u}_x$$

Hortaz, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_A(\vec{r}) + \vec{E}_B(\vec{r}) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\hat{u}_r - \dfrac{\rho(\vec{r} - d\hat{u}_x)}{3\,\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{d\rho}{3\varepsilon_0}\,\hat{u}_x}$$

2. ARIKETA

R erradioko esfera batek $\rho = kr$ karga-dentsitatea dauka, non k konstante bat den. Aurkitu konfigurazioaren energia.

$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \cdot \vec{E}^2 dv \Rightarrow \vec{E}$-ren adierazpena behar dugu.

Simetria esferikoarengatik: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

- $r < R$:

$d\vec{S} = dS\,\hat{u}_r$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{ing} = \int_V \rho \, dv = \int_0^r k \cdot \xi \, 4\pi \xi^2 d\xi = k 4\pi \int_0^r \xi^3 d\xi = \pi k r^4$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\cancel{\pi} r^2 = \frac{\cancel{\pi} k r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{k r^2}{4\varepsilon_0}\hat{u}_r$$

- $r > R$:

$Q_{ing} \equiv$ Esferan dagoen karga totala.

$d\vec{S} = dS\,\hat{u}_r$

$$Q = \int_V \rho \, dv = \int_0^R kr \, 4\pi r^2 dr = 4\pi k \int_0^R r^3 dr = \pi k R^4$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\cancel{\pi} r^2 = \frac{\cancel{\pi} k R^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{k R^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{k r^2}{4\varepsilon_0}\hat{u}_r, & r < R \\[2ex] \dfrac{k R^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r, & r > R \end{cases}$$

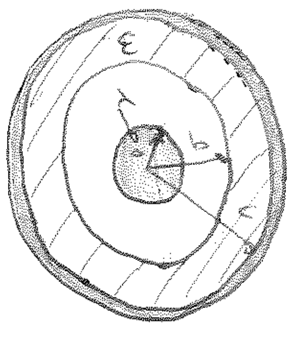
$$U=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \vec{E}^2 dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R\left[\frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\right]^2 4\pi r^2 dr+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\left[\frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\right]^2 4\pi r^2 dr=$$

$$=\frac{\pi k^2}{8\varepsilon_0}\int_0^R r^6 dr+\frac{\pi k^2 R^8}{8\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr=\frac{\pi k}{8\varepsilon_0}\left[\left[\frac{r^7}{7}\right]_0^R+R^8\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty\right]=$$

$$=\frac{\pi k}{8\varepsilon_0}\left(\frac{R^7}{7}+R^7\right)=\frac{\pi k}{8\varepsilon_0}\cdot\frac{8R^7}{7}=\frac{\pi k R^7}{7\varepsilon_0}$$

3. ARIKETA

λ luzera unitateko karga duen a erradioko eroale zilindrikoa c erradioko geruza eroaleaz dago inguratuta. Erdiko tartea partzialki beteta dago ε konstanteko dielektrikoaz (b eta c tartean), eta gainontzekoa hutsa da. Kalkulatu luzera unitateko kapazitatea.



Ondorengoa behar dugu:

$C \Rightarrow V \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{D}$

Simetria zilindrikoagatik $\rightarrow \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\,\hat{u}_\rho \\ \vec{D}(\vec{r}) = D(\rho)\,\hat{u}_\rho \end{cases}$

Hasteko $\vec{D}$ kalkulatu behar da:

- $\rho < a$:

Eroalea denez barruan ez dago kargarik $\Rightarrow$ $D=0$

- $a<\rho<c$:

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$ $\Rightarrow$ Gainazal Gaussiartzat ρ erradioko eta ℓ altuerako zilindroa hartuko dugu:

$$D 2\pi \cdot \rho \cdot \ell = \lambda \cdot \ell \Rightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi\rho}\hat{u}_\rho$$

- $\rho>c$:

kanpoko geruzaren kargak barrukoa anulatuko du: $D=0$

$$\vec{D}(\rho) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\rho}\hat{u}_\rho, & a<\rho<c \\ 0\,\hat{u}_\rho, & \text{bestela.} \end{cases}$$

Orain, $\vec{E}$ kalkulatzeko dielektrikoa linealtzat hartuko dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$$

$$\vec{E}(\rho) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{u}_\rho, & a<\rho<b \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\hat{u}_\rho, & b<\rho<c \\ 0\,\hat{u}_\rho, & \text{bestela.} \end{cases}$$

Ondoren ΔV kalkulatuko dugu:

- $\rho>c$:

$$\vec{E}(\rho) = 0 \Rightarrow V(c) = V(\infty) = 0$$

- $b<\rho<c$:

$$d\vec{r} = d\rho\,\hat{u}_\rho$$

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(b)} d\phi = -\int_c^b \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_c^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho}\hat{u}_\rho\, d\rho\,\hat{u}_\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln\rho\right]_c^b =$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}(\ln b - \ln c) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right) = V(b) \quad (V(c)=0)$$

• $a<\rho<b$:

$$\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} d\phi = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,d\rho = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\rho\right]_b^a = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V(a) - V(b) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(b/a)$$

$$V(a) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(b/a) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\ln(b/a) + \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right] = \Delta V$$

Azkenik C kalkulatuko dugu:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda \cdot \ell}{\frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\ln(b/a) + \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]}$$

$$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_0}\ln(b/a) + \frac{1}{\varepsilon}\ln(c/b)}$$

4. ARIKETA

Eremu bektorial batek ondorengo adierazpena dauka:

$$\vec{E} = k\left[xy\,\hat{u}_x + 2yz\,\hat{u}_y + 3xz\,\hat{u}_z\right]$$

Izan ahal daiteke eremu elektrostatikoa? Arrazoitu erantzuna.

Eremu elektrostatikoa izateko irrotazionala izan behar da, hau da, $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ kxy & 2kyz & 3kxz \end{vmatrix} = (0 - 2ky,\ 0 - 3kz,\ 0 - kx)$$

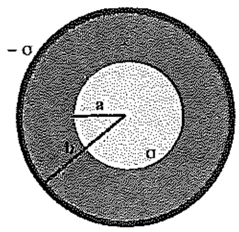
$\nabla \wedge \vec{E} = -k(2y, 3z, x) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ Ezin da eremu elektrostatikoa izan!

ZTF-**FCT**

ELECTROMAGNETISMO I

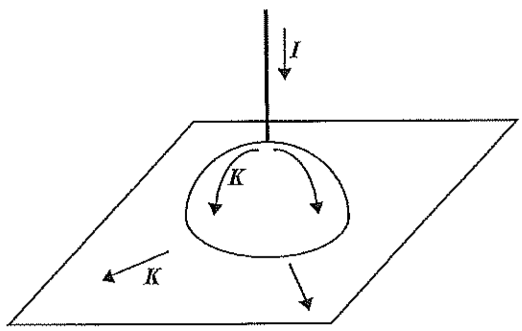
Enero 2013

1.- Una esfera conductora de radio a tiene una densidad de carga superficial σ. Una superficie esférica de radio b concéntrica con la anterior tiene una densidad de carga $-\sigma$. Entre ambas hay un material dieléctrico de constante ϵ. Encontrar los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$ en todos los puntos del espacio así como el potencial electrostático Φ. Hallar las densidades de carga de polarización y la energía electromagnética del sistema.



2.- Un cilindro infinitamente largo de radio R tiene una magnetización que en coordenadas cilíndricas viene dada por $\vec{M} = M_0(r/R)^2\,\vec{u}_\phi$, donde M_0 es una constante. Encontrar el campo magnético en cualquier punto y las corrientes de magnetización.

3.- Una corriente I desciende por el eje z y alcanza una superficie semiesférica de radio R y de allí pasa a un plano infinito. Calcular la densidad de corriente superficial $\vec{K}$ en la superficie semiesférica y en el plano.



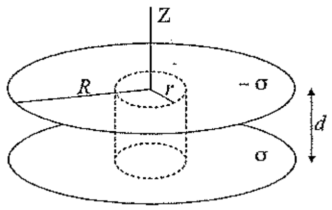
4.- Un condensador plano de placas circulares de radio R y distancia entre las mismas d ($d << R$) tiene una densidad de carga $\sigma = \sigma_0(t/t_0 - 1)$.

i) Calcular el campo eléctrico, el magnético y el vector de Poynting en la región interior al condensador.

ii) Considerar un cilindro de radio r ($r < R$). Calcular el flujo de energía a través de la superficie del cilindro.

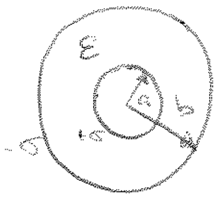
iii) Calcular la energía electromagnética en el volumen del cilindro.

iv) Usando ii) y iii) mostrar la conservación de la energía.


Z
R
r
- σ
d
σ

1. ARIKETA

a erradioko gerutza eroale batek σ karga-dentsitatea du. b erradioko gainazal zentrukide batek, $-\sigma$. Bien artean ε konstanteko material dielektrikoa dago. Aurkitu $\vec{D}$, $\vec{E}$ eta $\vec{P}$ espazioko puntu guztietan, baita ϕ ere. Aurkitu polarizazio karga dentsitateak eta sistemaren energia.



Simetria esferikoa dugunez: $\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

Lehenik eta behin, $\vec{D}$ finkatuko dugu:

Materialak lineala direnez: $\nabla \wedge \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \nabla \wedge \vec{E} = 0$

Beraz, $\nabla \wedge \vec{D} = 0$ izango da. Ondorioz, Gauss-en legeak guztiz zehaztuko digu $\vec{D}$:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{aske}$$

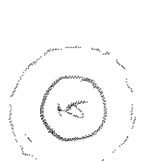
$$\int_V \nabla \cdot \vec{D}\, dV = \int_V \rho_{aske}\, dV \iff \int_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{S} = Q_{aske}$$

- $r < a$:

Esfera eroalea denez, barruan ez da kargarik egongo:

$Q_{aske} = 0 \Rightarrow D(r) = 0$

- $a < r < b$:



$$Q_{irg} = \int_S \sigma\, dS = 4\pi a^2 \sigma$$

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = Q_{irg} \rightarrow D\, 4\pi r^2 = 4\pi \sigma a^2 \Rightarrow D(r) = \frac{\sigma a^2}{r^2}$$

- $r > b$:

$$Q_{irg} = \int_{S_1} \sigma\, dS + \int_{S_2} (-\sigma)\, dS = \sigma 4\pi a^2 - \sigma 4\pi b^2 = 4\sigma\pi (a^2 - b^2)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{irg} \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \sigma (a^2 - b^2) \Rightarrow D(r) = \frac{\sigma(a^2 - b^2)}{r^2}$$

Beraz, emaitzak laburtuz: $\boxed{\vec{D}(r) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r<a \\ \dfrac{\sigma a^2}{r^2}\,\hat{u}_r, & a<r<b \\ \dfrac{\sigma(a^2-b^2)}{r^2}\,\hat{u}_r, & r>b \end{cases}}$

Orain, $\vec{E}$ kalkulatzeko, materialak linealtzat hartuz:

$$\vec{D}(r) = \varepsilon(r)\cdot\vec{E}(r) \rightarrow \vec{E}(r) = \vec{D}(r)/\varepsilon(r)$$

Ondorioz, $\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r<a \\ \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon r^2}\,\hat{u}_r, & a<r<b \\ \dfrac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r, & r>b \end{cases}}$

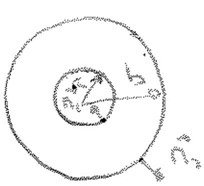
Orain, $\vec{P}$ kalkulatzeko, hurrengo erlazioa erabiliko dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \quad \left(\vec{P}(r) = P(r)\,\hat{u}_r\right)$$

Beraz, $\boxed{\vec{P}(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(\varepsilon-\varepsilon_0)a^2}{\varepsilon r^2}\,\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}}$

Orain, $\vec{P}(r)$ dugunez, polarizazio karga-dentsitateak kalkula ditzakegu:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\sigma(\varepsilon-\varepsilon_0)a^2}{\varepsilon r^2}\right) = 0 \rightarrow \boxed{\rho_P = 0}$$



$$\sigma_{P_a} = \vec{P}(a)\cdot\vec{n}_1 = -\frac{\sigma(\varepsilon-\varepsilon_0)a^2}{\varepsilon a^2} = -\sigma\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

$$\sigma_{P_b} = \vec{P}(b)\cdot\vec{n}_b = \frac{\sigma(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon b^2}\,a^2$$

$\vec{n}_1 = -\hat{u}_r$

$\vec{n}_2 = \hat{u}_r$

Konprobatuko dugu ea $\sigma_{P\,TOTAL} = 0$ den

$$Q_{P\,TOTAL} = \int_{S_a} \sigma_{P_a} ds + \int_{S_b} \sigma_{P_b} ds = -\sigma \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon} \pi a^2 + \frac{\sigma(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon b^2} a^2 \pi b^2 = 0 \;!$$

Beraz,
$$\boxed{\sigma_{P_a} = -\sigma \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}} \qquad \boxed{\sigma_{P_b} = \sigma \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\, a^2}{\varepsilon b^2}}$$

Energia kalkulatzeko, hurrengoa erabiliko dugu:

$$U = \int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv = \int_a^b \frac{\sigma a^2}{r^2} \frac{\sigma a^2}{\varepsilon r^2} 4\pi r^2 dr + \int_b^\infty \frac{\sigma(a^2-b^2)}{r^2} \frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 dr =$$

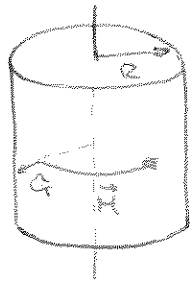
$$= \frac{4\pi\sigma^2 a^4}{\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b + \frac{4\pi(a^2-b^2)^2\sigma^2}{\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^\infty =$$

$$= \frac{4\pi\sigma^2 a^4}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{4\pi(a^2-b^2)^2\sigma^2}{\varepsilon_0 b} = \frac{4\pi\sigma^2 a^{3}(b-a)}{ab\varepsilon} + \frac{4\pi\sigma^2(a^2-b^2)^2}{b\varepsilon_0}$$

$$\boxed{U = \frac{4\pi\sigma^2}{b}\left[\frac{a^3(b-a)}{\varepsilon} + \frac{(a^2-b^2)^2}{\varepsilon_0}\right]}$$

2. ARIKETA

R erradioko zilindro infinitu batek $\vec{M}=M_0(r/R)^2\,\hat{u}_\varphi$ magnetizazioa du, non M_0 konstante bat den. Aurkitu eremu magnetikoa eta magnetizazio korronteak.



Lehenik eta behin, magnetizazio korronteak kalkulatuko ditu:

$$\vec{J}_m = \nabla\wedge\vec{M} \qquad \vec{K}_m = \vec{M}\wedge\vec{n}$$

$$\vec{J}_m = \nabla\wedge\vec{M} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(M_0\frac{r^3}{R^2}\right)\hat{u}_z = \frac{1}{r}\left(\frac{3M_0 r^2}{R^2}\right)\hat{u}_z = \boxed{\frac{3M_0 r}{R^2}\,\hat{u}_z = \vec{J}_m}$$

$$\vec{K}_m = \vec{M}(R)\wedge\vec{n} = M_0\,\hat{u}_\varphi\wedge\hat{u}_r = \boxed{-M_0\,\hat{u}_z = \vec{K}_m}$$

Orain, Ampère-ren legearen bitartez, $\vec{B}$ kalkulatuko dugu

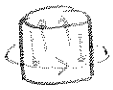
$$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} \Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (\text{korrontea } z\text{-n} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B(r)\hat{u}_\varphi)$$

- $r<a$:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0\int_S \vec{J}_m\cdot d\vec{S} = \mu_0\frac{3M_0 r}{R^2}\pi r^2 = \frac{3\mu_0 M_0}{R^2}\pi r^3$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \frac{3\pi\mu_0 M_0}{R^2}r^3 \Rightarrow B(r) = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 M_0}{R^2}r^2$$

- $r>a$:



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0\,0 \Rightarrow B(r) = 0$$

Beraz, laburbilduz:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu_0 M_0}{R^2}r^2\,\hat{u}_\varphi, & r<a \\ 0\,\hat{u}_\varphi, & r>a \end{cases}}$$

Badaezpada, konprobatuko dugu $I_{totala} = 0$ dela.

$$I_L = \int_L -M_0 \cdot dl = -M_0 \, 2\pi R$$

$$I_j = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \frac{3 M_0 r}{R^2} \, 2\pi r \, dr = \frac{2\pi M_0}{R^2} \left[r^3 \right]_0^R = 2\pi M_0 R$$

$$I_{totala} = I_L + I_j = -2\pi R M_0 + 2\pi R M_0 = 0 \; !$$

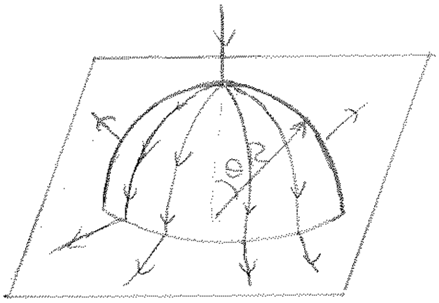
Azkenik, $\vec{H}$ kalkulatuko dugu, horretarako ondorengo adierazpena erabiliz:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \;\rightarrow\; \text{Beraz, badakigu } \vec{H}(\vec{r}) = H(r)\,\hat{u}_\varphi$$

Beraz,
$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{M_0}{R^2} r^2 \, \hat{u}_\varphi, & r < a \\ 0 \, \hat{u}_\varphi, & r > a \end{cases}}$$

3. ARIKETA

I intentsitatea Z ardatzetik behera doa eta R erradioko esferaerdi batera iristen da, eta hemendik plano batera. Kalkulatu korronte-dentsitatea ($\vec{K}$) gainazalean eta planoan.

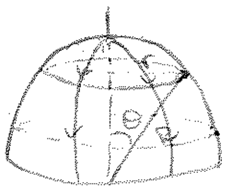


Badakigu korrontea bertikalki iristen denez geruzara, uniformeki banatuko dela gainazalean zehar. Gauza bera pasako da planoan, erradialki higitzen.

Bestalde, karga-kontserbazioa dela eta intentsitate bera egongo da lerro guztietan. Hau da, gainazaleko eraztun guztietatik I bera pasako da, eta baita planoan.

$$\underbrace{I = \int_L K\, dl = kte}$$!

- Gainazal erdiesferikoa:



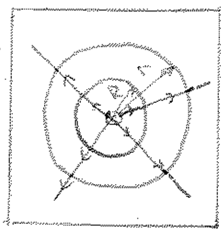
simetriagatik, $\vec{K}(\vec{r})$ konstante eraztun bakoitzerako

Gainera, $\vec{K}(\vec{r}) = K(r)\,\hat{u}_\theta$

$$I = \int_L K \cdot dl = \int_L K(r) \cdot dl = K(r) \int_L dl = K(r) \cdot 2\pi r = K(\theta)\, 2\pi R \sin\theta$$

Ondorioz, $K(\theta) = \dfrac{I}{2\pi R \sin\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{K}(\theta) = \dfrac{I}{2\pi R \sin\theta}\,\hat{u}_\theta}$

- Planoa:



$\vec{K}(\vec{r}) = kte$ eraztun bakoitzean. $\vec{K}(\vec{r}) = K(r)\,\hat{u}_r$

$$I = \int_L K \cdot dl = K(r) \int_L dl = K(r) \cdot 2\pi r$$

Ondorioz, $K(r) = \dfrac{I}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\vec{K}(r) = \dfrac{I}{2\pi r}\,\hat{u}_r}$

4. ARIKETA

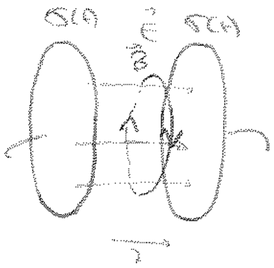
Kondentsadore bat d distantziara dauden R erradioko bi xafla borobilez dago osatuta, d<<R izanik. Karga dentsitatea honela deskribatzen da: $\sigma(t) = \sigma_0 (t/t_0 - 1)$

i) Kalkulatu eremu elektrikoa, magnetikoa eta Poynting bektorea kondentsadorearen barneko eremuan.

ii) Kontsideratu $r<R$ erradioko zilindroa. Kalkulatu zilindroaren gainazalaren zeharreko energia fluxua.

iii) Kalkulatu zilindroan dagoen energia elektromagnetikoa.

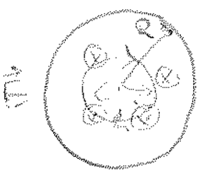
iv) Erabili aurreko bi puntuak energiaren kontserbazioa erakusteko.



$d<<R$ denez, ertz efektuak baztertu ditzakegu, eta badakigu plaken artean sortuko den eremu elektrikoa $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ izango dela $\rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(t/t_0 - 1)\,\hat{u}_z}$

$\vec{E}$ aldakorra denez, badakigu honek $\vec{B}(t)$ bat induzituko duela. Hori kalkulatzeko Maxwellen ekuazioa erabiliko dugu:

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\, d\vec{s}$$

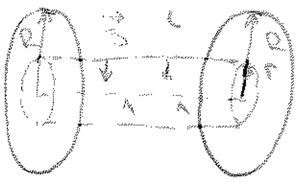


$$B\, 2\pi r = \mu_0 \frac{\sigma_0}{t_0} \pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 \sigma_0}{2 t_0}\, r\, \hat{u}_\varphi}$$

Azkenik, Poynting bektorea kalkulatzeko:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) \hat{u}_z \wedge \frac{\cancel{\mu_0} \sigma_0}{2 t_0}\, r\, \hat{u}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{S} = -\frac{\sigma^2 (t - t_0)}{2 t_0^2 \varepsilon_0}\, r\, \hat{u}_r}$$



$$\Phi_S = \int_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = -\frac{\sigma^2(t-t_0)}{\cancel{2}t_0^2\,\varepsilon_0}\cdot r\cdot \cancel{2}\pi r L$$

Beraz, $\vec{S}$-ren fluxua zilindroan: $\boxed{\Phi_S = \dfrac{2\pi L\sigma^2(t-t_0)r^2}{\varepsilon_0\, t_0^2}}$

Zilindroan dagoen energia elektromagnetikoa kalkulatzeko, elektrikoa eta magnetikoa kalkulatuko ditugu, bakoitza bere aldetik.

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \vec{E}^2\, dv = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^r \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0^2}(t/t_0-1)^2\, \cancel{2}\pi\xi\, d\xi\cdot L =$$

$$= \frac{\pi\sigma_0^2(t-t_0)^2\cdot L}{\varepsilon_0\, t_0^2}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^r = \frac{\pi\sigma_0^2(t-t_0)^2 L r^2}{\varepsilon_0\, t_0^2}$$

$$U_M = \frac{1}{2}\int_V \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\, dv = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^r \frac{\mu_0\,\sigma_0^2}{4t_0^2}\xi^2\cdot \cancel{2}\pi\xi\, d\xi\, L = \frac{\pi\mu_0\sigma_0^2 L}{4t_0^2}\left[\frac{\xi^4}{4}\right]_0^r =$$

$$= \frac{\pi\mu_0\sigma_0^2 L r^4}{16\, t_0^2}$$

Beraz, $\boxed{U_{EM} = \dfrac{\pi\sigma_0^2 L r^2}{t_0^2}\left[\dfrac{(t-t_0)^2}{\varepsilon_0} + \dfrac{\mu_0 r^2}{16}\right]}$

Energiaren kontserbazioa frogatzeko, Poynting-en teorema erabiliko dugu:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{EM}}{dt} - \oint \vec{S}\cdot d\vec{S}$$

Gure kasuan $\frac{dW}{dt} = 0$ izango da. $\frac{dU_{EM}}{dt} = -\oint \vec{S}\cdot d\vec{S}$

$$\frac{dU_{EM}}{dt} = \frac{\pi\sigma_0^2 L r^2}{t_0^2}\cdot\frac{2(t-t_0)}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi L\sigma^2(t-t_0)r^2}{\varepsilon_0\, t_0^2} = -\oint \vec{S}\cdot d\vec{S}$$

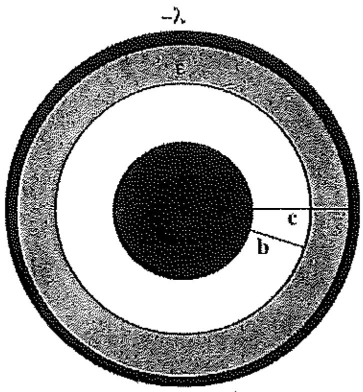
ZTF-FCT

ELECTROMAGNETISMO I

Noviembre 2013

1.- Sea una superficie esférica de radio R y con una densidad de carga superficial constante σ. Encontrar el potencial electrostático en cualquier punto del eje z.

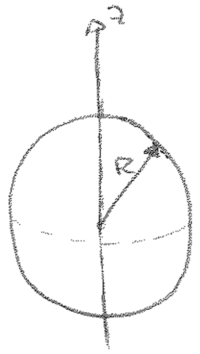
2.- Un cilindro conductor de radio a con carga por unidad de longitud λ está rodeado por una capa cilíndrica conductora de radio interno c con una carga por unidad de longitud $-\lambda$. La región intermedia está parcialmente rellena con un dialéctico de constante ϵ (entre b y c) mientras que el resto es vacío. Calcular el campo eléctrico en todas las regiones, las densidades de carga de polarización y la capacidad por unidad de longitud.



3.- Sea una esfera conductora de radio R y carga Q y una distribución de carga con el mismo radio y la misma carga. Sin realizar cálculos razonar cual de los dos sistemas tiene más energía electrostática.

1. ARIKETA

R erradioko gainazal esferiko batek σ karga-dentsitate konstantea du. Kalkulatu z ardatzeko edozein puntuko potentziala.



Simetria esferikoa dugunez, gainazal esferikoetan neurtu dezakegu potentziala. Gainazal hauetako z-ren puntu bati aplikatuko diogu.

Simetria esferikoagatik $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

- $0 < r < R$:

Esferaren barruan ez dago kargarik $\Rightarrow E = 0$

- $r > R$:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{Q_{ins}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{ins} = \int_S \sigma\,ds = \sigma \int_S ds = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow \vec{E} = \sigma \frac{R^2}{\varepsilon r^2}\,\hat{u}_r$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r < R \\ \sigma \dfrac{R^2}{r^2}\,\hat{u}_r, & r > R \end{cases}$$

- Ondoren potentziala kalkulatuko dugu:

- $r < R$:

$$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r$$

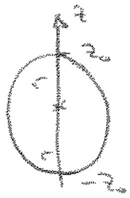
$$\int_{\phi(\infty)}^{\phi(r)} d\phi = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,d\vec{r} = \int_{r}^{\infty} \sigma \frac{R^2}{\varepsilon r^2}\,dr = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R^2 \left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \qquad \phi(R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(r) - \underset{0}{\phi(\infty)} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \phi(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \phi(R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

- $r<R$:

$$\int_{\phi(R)}^{\phi(r)} d\phi = -\int_{R}^{r} 0 \cdot dr = 0 \Rightarrow \phi(r) = \phi(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0}, & r<R \\[2mm] \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}, & r>R \end{cases}$$



$\Rightarrow$ r-ren balioak $\pm z$-ren balioak dira. Beraz, z-ren menpe jartzeko $r \to |z|$

$$\text{Ardatzean} \Rightarrow \phi(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0}, & |z|<R \\[2mm] \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 |z|}, & |z|>R \end{cases}$$

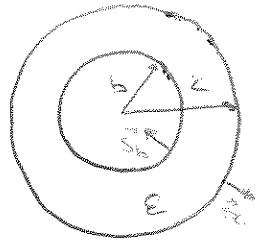
2. ARIKETA

λ luzera unitateko karga duen a erradioko zilindro eroalea $-\lambda$ luzera unitateko karga duen c erradioko geruzaz dago inguratuta. Erdiko tartea partzialki beteta dago ε konstanteko dielektrikoaz (b eta c tartean), eta gainontzekoa hutsa da. Kalkulatu eremu elektrikoa ingurune osoan, polarizazio karga-dentsitateak eta luzera unitateko kapazitatea.

$\vec{E}$, $\vec{D}$ eta luzera unitateko kapazitatea 2012ko azaroko azterketako 3. ariketan daude kalkulatuta. Beraz, soilik polarizazio-kargak kalkulatuko ditugu.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow (\vec{P}(\vec{r}) = P(r)\,\hat{u}_r)$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{(\epsilon - \epsilon_0)\lambda}{2\pi\epsilon r}\,\hat{u}_r, & b<r<c \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$



$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r}\,\frac{(\epsilon-\epsilon_0)\lambda}{2\pi\epsilon\cancel{r}}\right) = 0$$

$$\sigma_{p_b} = \vec{n}_b \cdot \vec{P}(b) = -\frac{(\epsilon-\epsilon_0)\lambda}{2\pi\epsilon b}$$

$$\sigma_{p_c} = \vec{n}_c \cdot \vec{P}(c) = \frac{(\epsilon-\epsilon_0)\lambda}{2\pi\epsilon c}$$

$\vec{n}_b = -\hat{u}_b$

$\vec{n}_c = \hat{u}_c$

3. ARIKETA

Kalkulurik egin gabe, azaldu zein sistemak izango duen energia elektrostatiko gehiago: R erradioko eta Q karga duen esfera eroalea edo erradio eta karga berdineko karga banaketak.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_0 \cdot \vec{E}^2 \cdot dV \Rightarrow$$ Energia sistemak sortzen duen $\vec{E}$-rekiko proportzionala da.

Bi sistemek gainazaletik kanpo Q karga puntualak sortuko lukeen eremu berdina sortzen dute. Hortaz, inguruko espazioan energia berdina dute bi sistemek.

Bestalde, gorputz eroaleak barruan ez du kargarik, eta ondorioz, E=0, beraz ez dago energiarik barruan. karga-banaketak aldez badu eremu elektrikoa barnean, eta ondorioz sistema honek energia izango du ere $r<R$ ingurunean.

Ondorioz, karga-banaketaren sistemak izango du energia gehiago.

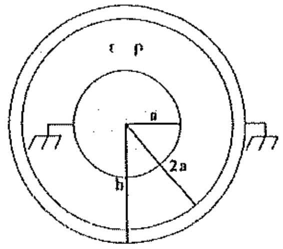
ZTF-FCT

ELECTROMAGNETISMO I

Enero 2014

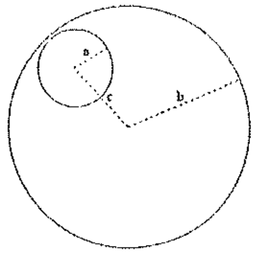
1.- Una esfera conductora de radio a está envuelta por una capa esférica de radio interior $2a$ y radio exterior b. Entre ambas hay un dialéctico de constante ϵ que tiene una carga libre cuya densidad es:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right] \text{ C m}^{-3}$$

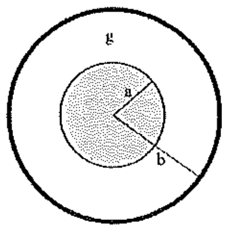


Ambas esferas están conectadas a tierra. Encontrar las cargas en la esfera interior y en las dos superficies de la capa esférica. Hallar las densidades de carga de polarización

2.-Un cable largo, cilíndrico, de radio b tiene un agujero cilíndrico paralelo al eje del cable de radio a. La distancia entre los ejes de ambos cilindros es c. El cable está recorrido por una corriente de intensidad I homogeneamente repartida. Calcular el campo magnético en el eje del cable.



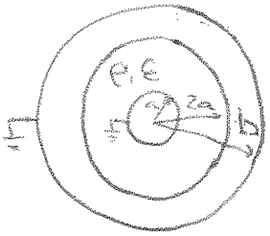
3.- Una esfera conductora de radio a está envuelta por una capa esférica de radio b. Entre ambas hay un material conductor ohmico con constante de conductividad g. Las dos esferas se mantienen a una diferencia de potencial V. Encontrar la resistencia entre ambas esferas.



4.- Por un largo solenoide de radio a y con n espiras por unidad de longitud circula una corriente $I = I_0 \cos\omega t$. Encontrar el campo eléctrico en la aproximación cuasiestática. Encontrar la energía electromagnética en el interior de un cilindro de longitud L y radio $R > a$.

1. ARIKETA

a erradioko esfera eroale bat geruza eroale batez dago estalita, haren kanpo- eta barne-erradioak 2a eta b izanik, hurrenez hurren. Haien artean ε konstanteko dielektrikoa dago, $\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right]$ karga-dentsitate askea duena. Bi esferak lurreratuta daude. Aurkitu itzazu barneko esferan eta kanpoko geruzaren bi gainazaletan. Aurkitu polarizazio karga-dentsitateak.



Simetria esferikoa dugunez: $\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

Lehenengo, $\vec{D}$ kalkulatuko dugu:

Hartuko dugu Q_a, Q_{2a} eta Q_b.

- $r<a$:

Eroalea $\rightarrow Q_{inq} = 0 \rightarrow D(r) = 0$

- $a<r<2a$:

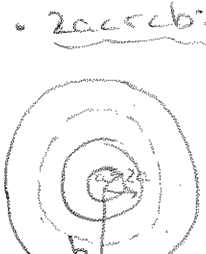
$$Q_{inq} = Q_a + \int_V \rho\, dv = Q_a + \int_a^r \rho_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)4\pi r^2 dr = Q_a + 4\pi\rho_0\left[\frac{r^3}{3} + a^2 r\right]_a^r =$$

$$= Q_a + 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} + a^2 r - \frac{a^3}{3} - a^3\right) = Q_a + \frac{4}{3}\pi\rho_0\left(r^3 + 3a^2 r - 4a^3\right)$$

$$\oint \vec{D}\,d\vec{s} = Q_{inq} \Rightarrow D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q_a + \frac{4\pi}{3}\rho_0\left(r^3 + 3a^2 r - 4a^3\right)$$

$$D(r) = \frac{Q_a}{4\pi r^2} + \frac{\rho_0}{3}\left(r + \frac{3a^2}{r} - 4\frac{a^3}{r^2}\right)$$

- $2a<r<b$:



$$Q_{inq} = Q_a + Q_{2a} + \int_V \rho\, dv = Q_a + Q_{2a} + \int_a^{2a} \rho_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)4\pi r^2 dr =$$

$$= Q_a + Q_{2a} + 4\pi\rho_0\left[\frac{r^3}{3} + a^2 r\right]_a^{2a} = Q_a + Q_{2a} + \rho_0 4\pi\left(\frac{8}{3}a^3 + 2a^3 - \frac{a^3}{3} - a^3\right) =$$

$$= Q_a + Q_{2a} + \frac{40}{3}\pi a^3 \rho_0$$

$\oint \vec{D}\, d\vec{s} = Q_{ing} \Rightarrow$ Eroalea $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow Q_{ing} = 0$

$$Q_a + Q_{2a} + \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 = 0$$

- ~~$b < r$:~~

$$\cancel{Q_{ing} = Q_a + Q_{2a} + Q_b + \frac{4\pi}{3}\frac{a^3\rho_0}{r^2}}$$

$$\cancel{\oint \vec{D}\, d\vec{s} = Q_{ing} \Rightarrow D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q_a + Q_{2a} + Q_b + \frac{4\pi}{3}\frac{a^3\rho_0}{r^2}}$$

$$\cancel{D(r) = \frac{Q_a}{4\pi r^2} + \frac{Q_{2a}}{4\pi r^2} + \frac{Q_b}{4\pi r^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3\rho_0}{r^2}}$$

~~Orain, materialak lineakoak hartuz:~~

$$\cancel{\vec{E}(r) = \begin{cases} \left(\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon r^2} + \frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(r + \frac{3a^2}{r} - \frac{4a^3}{r^2}\right)\right)\vec{u}_r, & a < r < 2a \end{cases}}$$

- $b < r$:

$Q_{ing} = Q_a + Q_{2a} + Q_b + \frac{4\pi}{3}a^3\rho_0 = 0$

Baina aldez barne dugun erlazioa aplikatuz: $Q_{ing} = Q_b$

$\oint \vec{D}\, d\vec{s} = Q_{ing} \Rightarrow D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q_b \Rightarrow D(r) = \frac{Q_b}{4\pi r^2}$

Materialak lineakoak hartuz:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \left[\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon r^2} + \frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(r + \frac{3a^2}{r} - 4\frac{a^3}{r^2}\right)\right]\vec{u}_r, & a < r < 2a \\ \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r, & b > r \\ 0\,\vec{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

Azkenik, potentzialak kalkulatuko ditugu:

- $r>b$:

$$\int_{\Phi(\infty)}^{\Phi(b)} d\Phi = \int_b^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_b^{\infty} \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^{\infty} = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$\Phi(\infty)=0$ hartuz, $0-0 = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b} \rightarrow \boxed{Q_b=0}$

- $2a<r<b$:

$$\int_{\Phi(b)}^{\Phi(2a)} d\Phi = \int_{2a}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \Phi(2a)=\Phi(b) \Rightarrow \Phi(2a)=0$$

- $a<r<2a$:

$$\int_{\Phi(2a)}^{\Phi(a)} d\Phi = \int_a^{2a} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^{2a}\left(\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon r^2} + \frac{\rho_0}{3\varepsilon}r + \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon r} - \frac{4a^3\rho_0}{3\varepsilon}\frac{1}{r^2}\right)dr =$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{2a} + \frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{2a} + \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon}\left[\ln r\right]_a^{2a} + \frac{4a^3\rho_0}{3\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\right]_a^{2a} =$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{2a} + \frac{\rho_0}{\cancel{3}\varepsilon}\cdot\frac{\cancel{3}a^2}{2} + \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon}\ln 2 + \frac{4a^{\cancel{3}\,2}\rho_0}{3\varepsilon}\left(-\frac{1}{2\cancel{a}}\right) =$$

$$= \frac{Q_a}{8\pi\varepsilon a} + \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon} + \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon}\ln 2 - \frac{2}{3}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon} = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon a} + \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon}\left(\ln 2 - \frac{1}{6}\right)$$

$$\Phi(a)-\Phi(2a) = 0 = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon a} + \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon}\left(\ln 2 - \frac{1}{6}\right)$$

$$\rightarrow \frac{Q_a}{4\pi a} = \rho_0 a^2\left(\frac{1}{6} - \ln 2\right) \Rightarrow \boxed{Q_a = \rho_0 4\pi a^3\left(\frac{1}{6} - \ln 2\right)}$$

Bete erlazioa hartuz: $\boxed{Q_a = \rho_0 4\pi a^3\left[\ln 2 - \frac{7}{3}\right]}$

Orain, polarizazio kargak kalkulatzeko, $\vec{P}(\vec{r})$ kalkulatzen dugu ondorengo erlazioaren bidez:

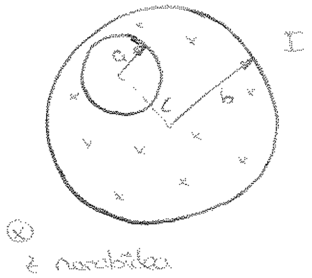
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \qquad \left(\vec{P}(\vec{r}) = P(r)\,\vec{u}_r\right)$$

Behin $\vec{P}$ izanda, formulak aplikatuz lortuko genituzke polarizazio karga-dentsitateak:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad \sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

2. ARIKETA

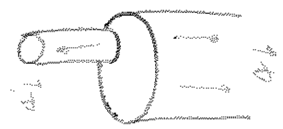
b erradioko hari luze eta zilindriko batek a erradioko zulo bat du, haren ardatzarekiko paraleloa. Bi ardatzen arteko distantzia c da. Kablean homogeneoki banatutako I korronteak zeharkatzen du. Kalkulatu eremu magnetikoa kablearen ardatzean.



Zuloaren ardatzeko, kablea bi kableen gainezarmena bezala ebatziko dugu problema. Zuloko I aurkakoa, kableek korronte dentsitate berdinak izan behar dituzte.

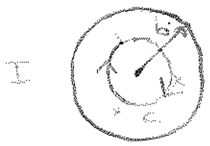
$$I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = j\pi(b^2-a^2) \Rightarrow j = \frac{I}{\pi(b^2-a^2)}$$

- b erradioko zilindro muturretik $\vec{j}$ sartzen da.
- a erradioko zilindro zuzenetik $\vec{j}$ ateratzen da.



Beraz, gainezarmen printzipioarengatik, $\vec{B}(0)$ biek sortutako eremuen batura izango da.

- b erradioko kableak sortutakoa:



Puntua kablearen barruan dagoenez, barruko eremua kalkulatuko dugu.

Lehenik eta behin, I $\vec{u}_z$ norabidean $\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{u}_\varphi$

Ampère: $\oint_C \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{inb} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{I}{b^2-a^2} r^2$

$$B(r)\oint_C dl = B(r)\,2\pi r = \mu_0 \frac{I}{b^2-a^2} r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2-a^2)} r$$

Beraz, jatorriko eremua: $\vec{B}(r=0) = 0\,\vec{u}_\varphi$

- a erradioko kableak sortutakoa:

Puntua kanpoan dagoenez (c>a), bertan kalkulatuko dugu.

Lehenik eta behin, I $-\vec{u}_z$ norabidean $\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -B(r)\vec{u}_\varphi$

Ampère: $\oint_C \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{inb} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\mu_0 \frac{I}{\cancel{\pi}(b^2-a^2)}\cancel{\pi}a^2 = -\mu_0 \frac{a^2 I}{b^2-a^2}$

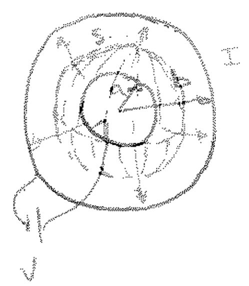
$$\vec{B}(r) \cdot 2\pi r \,\hat{u}_\varphi = -\mu_0 \cdot \frac{a^2 I}{b^2 - a^2} \Rightarrow \vec{B}(r) = -\frac{\mu_0 a^2 I}{2\pi r (b^2 - a^2)} \hat{u}_\varphi$$

Beraz, kablearen jatorriko eremua: $\vec{B}(c) = \frac{-\mu_0 a^2 I}{2\pi c (b^2 - a^2)} \hat{u}_\varphi$

Beraz, $\vec{B}_{totala} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \rightarrow \boxed{\vec{B}_{totala} = \frac{-\mu_0 a^2 I}{2\pi c (b^2 - a^2)} \hat{u}_\varphi}$

3. ARIKETA

a erradioko esfera eroale bat b erradioko geruza esferiko batek inguratzen du. Bien artean g eroankortasuneko material eroale ohmikoa dago. Bi esferak U potentzial diferentziarekin mantentzen dira. Kalkulatu haien arteko erresistentzia.



Kargaren kontserbazioarengatik, badakigu gainazalean zehar karga berdina igarotzen dela.

Gainera, tarteko eremua infinitu gainazaletan ebaki dezakegu, bata bestetik oso gertu egonik eta itxura berdina izanik.

Gauzak horrela, $R = \frac{\ell}{gS}$ erlazioa aplika dezakegu.

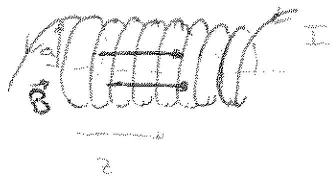
$d\ell$ bakoitzari $S(r)$ gainazala (laranja) egokitu:

$$R = \int_L \frac{d\ell}{g \cdot S} = \int_a^b \frac{dr}{g \cdot 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi g} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{1}{4\pi g} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\boxed{R = \frac{b-a}{4\pi a b g}}$$

4. ARIKETA

a erradioko eta n espira-dentsitateko solenoide infinitu batetik $I = I_0 \cos(\omega t)$ intentsitatea doa. Aurkitu eremu elektriko kurbilkoia kuasiestatikoan. Kalkulatu $R < a$ erradioko eta L luzerako zilindro baten energia elektromagnetikoa.



Lehenik eta behin, solenoidearen barruan indutzen den eremu magnetikoa kalkulatuko dugu:

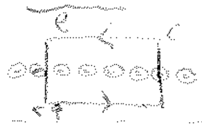
$$\left.\begin{array}{l}\text{Solenoide zilindriko infinitua} \\ I \ \hat{u}_\varphi \text{ norabidean doa}\end{array}\right\} \ \vec{B}(r) = B(r)\,\hat{u}_z$$

Bestalde, badakigu solenoidearen kanpoan: $B(r) = 0$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ denez, Ampèreren legeaz barruko eremua kalkulatuko dugu:

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{ing} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ing}$$

- $r < a$:



$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \int_l B\, dl = B \cdot l \quad (\text{besteak } B = 0 \text{ edo } \vec{B} \perp d\vec{l})$$

$$I_{ing} = I \cdot N = I\, n \cdot l$$

Beraz $\rightarrow$ $B l = \mu_0 I\, n\, l \Rightarrow \underline{B(r) = \mu_0 I n}$

I-ren adierazpena aplikatuz:

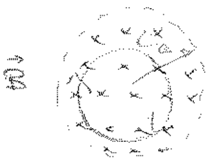
$$\boxed{\vec{B}(r,t) = \begin{cases} \mu_0 n I_0 \cos(\omega t)\, \hat{u}_z, & r < a \\ 0\, \hat{u}_z, & \text{bestela} \end{cases}}$$

Ikus dezakegunez, $\vec{B}$ aldakorra da, ondorioz, $\vec{E}$ aldakor bat indukituko du. $\vec{B}(r,t) = B(r,t)\,\hat{u}_z$ denez, $\vec{E}(r,t) = E(r,t)\,\hat{u}_\varphi$

Maxwellen ekuazioa: $\nabla \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \int_S (\nabla \wedge \vec{E})\, d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{s} \ \underset{\text{Stokesen teorema}}{\Longleftrightarrow} \ \oint_{\partial S} \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{s}$$

• $r<a$:

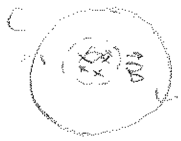


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot 2\pi r$$

$$\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} = -\mu_0 n \omega I_0 \sin(\omega t)\, \pi r^2$$

Beraz $\rightarrow$ $E\cdot 2\pi \cancel{r} = -\mu_0 n\omega I_0 \sin(\omega t)\, \pi r^{\cancel{2}} \rightarrow \underbrace{E = -\frac{n\mu_0 I_0 \omega}{2} r \sin(\omega t)}$

• $r>a$:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot 2\pi r$$

$$\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} = -\mu_0 n\omega I_0 \sin(\omega t)\, \pi a^2$$

Beraz $\rightarrow$ $E\cdot 2\cancel{\pi} r = -\mu_0 n\omega I_0 \sin(\omega t)\, \cancel{\pi} a^2 \Rightarrow \underbrace{E = -\frac{\mu_0 n\omega a^2 I_0}{2r}\sin(\omega t)}$

Beraz, emaitzak laburtuz: $\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \begin{cases} -\dfrac{n\mu_0 I_0\omega}{2} r \sin(\omega t)\, \vec{u}_\varphi, & r<a \\ -\dfrac{\mu_0 n\omega a^2 I_0}{2r}\sin(\omega t)\, \vec{u}_\varphi, & r>a \end{cases}}$

Zilindroko energia elektromagnetikoa kalkulatzeko, elektrikoa eta magnetikoa bakoitza bere aldetik kalkulatuko dugu:

$$U_{E_1} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^a \varepsilon_0 \frac{n^2\mu_0^2 I_0^2\omega^2}{4} r^2 \sin^2(\omega t)\, \cancel{2}\pi r\, dr\, L =$$

$$= \frac{\pi\varepsilon_0 n^2\mu_0^2\omega^2 I_0^2 L}{4}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi\varepsilon_0 n^2\mu_0^2\omega^2 I_0^2 L a^4}{16}\cdot\sin^2(\omega t)$$

$$U_{E_2} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{\cancel{2}}\int_a^R \varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 n^2\omega^2 a^4 I_0^2}{4r^{\cancel{2}}}\sin^2(\omega t)\, \cancel{2}\pi \cancel{r}\, dr\, L =$$

$$= \frac{\pi\varepsilon_0 n^2\omega^2\mu_0^2 I_0^2 L a^4}{4}\left[\ln r\right]_a^R = \frac{\pi\varepsilon_0 n^2\omega^2\mu_0^2 I_0^2 L a^4}{4}\ln(R/a)\cdot\sin^2(\omega t)$$

$$U_H = \frac{1}{2}\int_V \frac{B^2}{\mu_0}\,dV = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^a \mu_0 n^2 I_0^2 \cos^2(\omega t)\cdot \cancel{2}\pi r\,dr\,L =$$

$$= \mu_0 n^2 I_0^2 \pi L \cos^2(\omega t)\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a = \frac{\pi\mu_0 n^2 I_0^2 a^2 L}{2}\cos^2(\omega t)$$

Beraz:

$$\boxed{U_{EM} = \frac{\pi\mu_0 n^2 I_0^2 a^2 L}{2}\left[\frac{\varepsilon_0\mu_0 a^2}{2}\left(\frac{1}{4}+\ln(R/a)\right)\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t)\right]}$$

ZTF-FCT

ELECTROMAGNETISMO I

Junio 2014

1.- Una esfera dieléctrica de radio R tiene una polarización $\vec{P} = \alpha r^2 \vec{u}_r$ donde α es una constante. Encontrar: las dimensiones de la constante α, el potencial electrostático en el centro y la energía electrostática del sistema y su momento dipolar.

2.- Un condensador cilíndrico está formado por un conductor de radio a rodeado de una superficie cilíndrica coaxial de radio b. Entre ambos hay un dieléctrico de constante dieléctrica $\epsilon(r)$ que depende de la distancia al eje del cilindro. La diferencia de potencial entre ambos conductores es V. Calcular $\epsilon(r)$ para que la energía electrostática en el interior del condensador sea constante y encontrar la densidad lineal de carga en el condensador.

3.- Una superficie esférica de radio R tiene una carga Q repartida uniformemente. Está girando con velocidad angular ω. Encontrar el momento magnético.

4.- Un solenoide largo con n espiras por unidad de longitud y radio R está recorrido por una corriente que aumenta uniformemente con el tiempo: $I = kt$. Encontrar el campo eléctrico en la aproximación cuasiestática. Calcular el flujo de energía que entra (o sale) en el solenoide

1. ARIKETA

R erradioko esfera dielektriko batek $\vec{P}=\alpha r^2 \hat{u}_r$ polarizazioa du, non α konstante bat den. Kalkulatu α-ren dimentsioak, zentruko potentziala, sistemaren energia eta momentu dipolarra.

Lehenik eta behin, polarizazio karga-dentsitateak lortuko ditugu:

$$\rho_P = -\nabla \vec{P} \qquad \sigma_P = \vec{P}(R)\cdot\vec{n}$$

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot\alpha\cdot r^2) = -\frac{1}{r^2}4\alpha r^3 = -4\alpha r$$

$$\sigma_P = \vec{P}(R)\,\vec{n} = \alpha R^2\hat{u}_r\cdot\hat{u}_r = \alpha R^2$$

Orain, Gaussen legearekin $\vec{E}$ zehaztuko dugu:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \oint_S \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{Q_{inq}}{\varepsilon_0}$$

• r<R:

$$Q_{inq} = \int_V \rho\,dv = \int_0^r -4\alpha z\,4\pi z^2\,dz = -4\pi\alpha\left[z^4\right]_0^r = -4\pi\alpha r^4$$

$$\rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{inq}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r)\,4\pi r^2 = -\frac{4\pi\alpha r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = -\frac{\alpha}{\varepsilon_0}r^2$$

• r>R:

$$Q_{inq} = \int_V \rho_P\,dv + \int_S \sigma_P\,ds = -4\pi\alpha R^4 + 4\pi\alpha R^4 = 0$$

$$\rightarrow \oint \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{Q_{inq}}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow E(r) = 0$$

Simetria esferikoa dugunez: $\vec{E}(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\varepsilon_0}r^2\hat{u}_r, & r<R \\ 0\,\hat{u}_r, & r>R \end{cases}$

Zentruko potentziala kalkulatzeko, erabiliko dugu:

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\phi(r) \Rightarrow \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} d\phi = -\int_a^b \vec{E}(r)\,d\vec{r}$$

- $r > R$:

$$\oint_{\phi(\infty)}^{\phi(R)} d\phi = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \phi(\infty) = 0 \text{ bada } \Rightarrow \underline{\phi(R) = 0}$$

- $r < R$:

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(R)} d\phi = \int_R^0 -\frac{\alpha}{\varepsilon_0} r^2 dr = -\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_R^0 = -\frac{\alpha}{3\varepsilon_0}(0 - R^3) \rightarrow \boxed{\phi(0) = \frac{\alpha R^3}{3\varepsilon_0}}$$

Energia kalkulatzeko, $\vec{D}$ behar dugu.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow (\vec{D}(r) = D(r)\hat{u}_r) \Rightarrow \underline{\vec{D}(r) = 0\,\hat{u}_r}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv \text{ denez, } \boxed{U = 0}$$

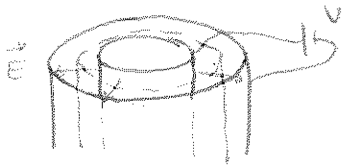
Momentu dipolarra kalkulatzeko, $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$ erabiliko dugu.

$$\vec{p} = \int_V \vec{P}\, dv = \int_0^R \alpha r^2 \hat{u}_r \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \hat{u}_r = 4\pi\alpha \cdot \frac{R^5}{5}\hat{u}_r$$

Beraz, $\boxed{\vec{p} = \frac{4}{5}\alpha\pi R^5 \hat{u}_r}$

2. ARIKETA

Kondentsadore zilindriko bat a erradioko eroale batek eta b erradioko geruzaz dago osatuta. Bien artean $\varepsilon(r)$ permitibitateko dielektriko bat dago. Kalkulatu $\varepsilon(r)$ energia elektrostatikoa konstantea izan dadin kondentsadorearen barnean eta karga-dentsitate lineala, bi alderen arteko potentzial diferentzia V bada.



Gaussen legea: $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{int}$

$$D(r)\cdot 2\pi r L = Q \Rightarrow \underbrace{\vec{D}(r)}= \frac{Q}{2\pi r L}\hat{u}_r = \underline{\frac{\lambda}{2\pi r}\hat{u}_r}$$

Materiala lineala dela kontuan hartuta: $\underbrace{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon(r)\cdot r}\hat{u}_r}$

Energia: $U = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\, dv$

Uniformea izateak esan nahi du energia-dentsitateak ez duela r-rekiko menpekotasunik izango.

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2\cdot\varepsilon(r)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon(r) = \frac{\alpha}{r^2}}$$

Beraz, $\vec{E}(r) = \frac{\lambda r}{2\pi\alpha}\hat{u}_r$

$$\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} d\phi = \int_a^b \vec{E}\,d\vec{r} = \int_a^b \frac{\lambda r}{2\pi\alpha}dr = \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\left[\frac{r^2}{2}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\alpha}(b^2-a^2)$$

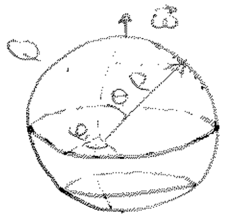
$\Downarrow$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\alpha}(b^2-a^2) \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{4\pi\alpha V}{b^2-a^2}}$$

$$\cancel{\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} d\phi = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr}$$

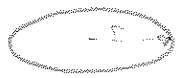
3. ARIKETA

R erradioko esfera batek Q karga du uniformeki banatuta. ω abiadura angularrarekin dago biraten. Kalkulatu momentu magnetikoa.



Esfera osoaren $\vec{m}$ kalkulatzeko, infinitu eraztunetan zatituko dugu, bakoitzaren $\vec{m}$ kalkulatu, eta denak batu.

Badakigu $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$



Espira baten momentu magnetikoa: $\vec{m} = I \cdot \vec{A}$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma\, ds}{dt} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{dt} = \frac{Q\omega}{4\pi} \sin\theta\, d\theta$$

Beraz, $\vec{m}_{esp} = \frac{\omega Q}{4\cancel{\pi}} \sin\theta\, d\theta \cdot \cancel{\pi} r^2\, \hat{u}_z = \frac{\omega Q R^2}{4} \sin^3\theta\, d\theta\, \hat{u}_z = d\vec{m}_T$

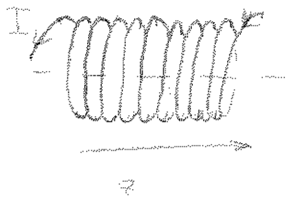
$$\vec{m}_T = \int d\vec{m}_T = \int_0^{\pi} \frac{\omega Q R^2}{4} \sin^3\theta\, d\theta\, \hat{u}_z = \frac{\omega Q R^2}{4} \int_0^{\pi} (\sin\theta - \cos^2\theta \sin\theta)\, d\theta\, \hat{u}_z =$$

$$= \frac{\omega Q R^2}{4} \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \hat{u}_z = \frac{\omega Q R^2}{4} \left(+1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) \hat{u}_z = \frac{\omega Q R^2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} \hat{u}_z$$

Ondorioz, $\boxed{\vec{m} = \frac{\omega Q R^2}{3} \hat{u}_z}$

4. ARIKETA

R erradioko eta n espira-dentsitateko solenoide luze batetik I=kt intentsitatea doa. Aurki ezazu eremu elektrikoa hurbilketa kuasiestatikoan. Aurki ezazu solenoidean sartzen edo ateratzen den energiaren fluxua.



Lehenik eta behin, solenoidearen barruan induzitzen den eremu magnetikoa kalkulatuko dugu

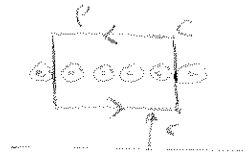
I z norabidean
solenoidea luzea $\left\{ \underline{\vec{B} = B\,\hat{u}_z} \right.$

Bestalde, badakigu solenoidearen kanpoan: $B(r) = 0$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$ denez, Ampère-ren legeaz eremua kalkulatuko dugu:

$$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\,\vec{J}_{ing} \Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ing}$$

• $r<a$:



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_\ell B\cdot dl = B\ell \quad (\text{besteak } B=0 \text{ edo } \vec{B}\perp d\vec{l})$$

$$I_{ing} = I\cdot N = I n \ell$$

Beraz → $B\cancel{\ell} = \mu_0 I n \cancel{\ell} \to \underline{B(r) = \mu_0 n I}$

I-ren adierazpena aplikatuz: $\boxed{\vec{B}(r,t) = \begin{cases} \mu_0 n k t\,\hat{u}_z, & r<a \\ 0\,\hat{u}_z, & \text{bestela} \end{cases}}$

Ikus daitekeenez, $\vec{B}$ aldakorra da, eta ondorioz, $\vec{E}$ aldakor bat sortuko da.

$$\vec{B}(r,t) = B(r,t)\,\hat{u}_z \to \vec{E}(r,t) = E(r,t)\,\hat{u}_\varphi$$

Maxwell-en ekuazioa: $\nabla\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \int_S (\nabla\wedge\vec{E})\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S} \Longrightarrow \oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

Stokesen teorema

• $r<a$:

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{\ell} = E(r)\cdot 2\pi r$$

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \mu_0 n k \pi r^2$$

Beraz → $E(r)\cdot 2\cancel{\pi} \cancel{r} = \mu_0 n k \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \rightarrow \underbrace{E(r) = -\frac{\mu_0 n k}{2} r}$

• $r>a$:

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{\ell} = E(r)\cdot 2\pi r$$

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \mu_0 n k \pi a^2$$

Beraz → $E(r)\, 2\cancel{\pi} r = -\mu_0 n k \cancel{\pi} a^2 \rightarrow \underbrace{E(r) = -\frac{\mu_0 n k a^2}{2r}}$

Beraz, emaitzak laburtuz: $\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 n k}{2} r\, \hat{u}_\varphi, & r<a \\ -\dfrac{\mu_0 n k a^2}{2r}\, \hat{u}_\varphi, & r>a \end{cases}}$

Energiaren fluxua = Φ_S

$$\underset{\sim}{\vec{S}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 n k}{2} r\right)\hat{u}_\varphi \wedge \mu_0 n k t\, \hat{u}_z = \underline{-\mu_0 \frac{n^2 k^2}{2} t r\, \hat{u}_r}$$

Fluxua kalkulatzeko, $\vec{S}$-rekiko perpendikularra den gainazala hartu behar dugu; hots, zilindrikoa. Baina, r bakoitzerako desberdina da, zein hartzen dugu?

↳ $\vec{S}$-ren fluxuak solenoidetik atera edo sartzen den energia adierazten duenez, energia intentsitatetik sartzen da, hau da, $r=a$ gainazaletik.

$$\Phi_S = \int_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = -S(a)\hat{u}_r \cdot A\,\hat{u}_r = -\mu_0 \frac{n^2k^2}{2} t\, a \cdot 2\pi a \cdot L$$

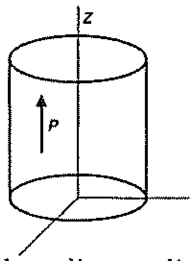
$$\boxed{\Phi_S = -\frac{\mu_0 \pi t a^2 n^2 k^2 L}{2}}$$

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

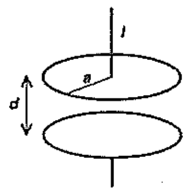
ELECTROMAGNETISMO I

Enero 2015

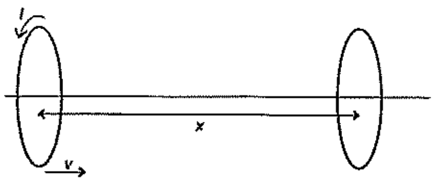
1.- Una barra de material dieléctrico tiene una longitud L y radio a. La polarización es $P = \alpha z + \beta$. Hallar i) el momento dipolar y ii) el campo eléctrico en $z = L/2$. (2)



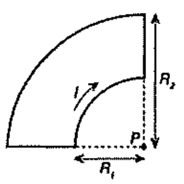
2.- Dos placas circulares metálicas de radio a y distancia entre ambas d ($d << a$) están a una diferencia de potencial $V = V_0 \cos \omega t$ debido a la corriente que circula por los cables. En la aproximación cuasiestática i) hallar el campo magnético en la región entre las placas, ii) encontrar la intensidad I y iii) la densidad de corriente superficial que hay en cada una de las placas. (3)



3.- Dos espiras coaxiales de radio a están separadas una distancia x ($x >> a$). Una de ellas tiene una corriente estacionaria I y se mueve a lo largo del eje con velocidad constante v. Encontrar la fuerza electromotriz inducida en la otra espira y el sentido de la corriente (Usar la aproximación dipolar) (2)



4.- Por el circuito de la figura circula una intensidad I. Encontrar el campo magnético en el punto P. (2)

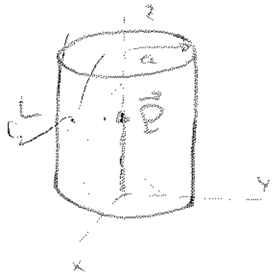


5.- Demostrar que la densidad de energía del campo eléctrico es la misma que la del campo magnético en el caso de una onda plana $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{r} \cdot \vec{k} - \omega t)$. (1)

$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

1. ARIKETA

Izan bedi a erradioko eta L luzerako material dielektrikoz egindako barra bat. Polarizazioa $P = az + b$ da. Aurkitu momentu dipolarra eta eremu elektrikoa $z = L/2$-en.



Momentu dipolarra kalkulatzeko: $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$

$$p = \int_V P \cdot dV = \int_0^L (az+b) \cdot \pi a^2 \, dz = \pi a^2 \left[\frac{az^2}{2} + bz\right]_0^L =$$

$$= \pi a^2 \left(\frac{aL^2}{2} + bL\right) = \frac{\pi a^3 L^2}{2} + \pi a^2 bL$$

Beraz, $\boxed{\vec{p} = \pi a^2 L \left(\frac{aL}{2} + b\right) \hat{u}_z}$

$\vec{E}$ kalkulatzeko, polarizazio karga-dentsitateak kalkulatuko ditugu:

- $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial z}(az+b) = -a$

- $\sigma_{P_1} = \vec{P}(0) \cdot \vec{n}_1 = -b$
- $\sigma_{P_2} = \vec{P}(L) \cdot \vec{n}_2 = aL + b$

$\vec{n}_1 = -\hat{u}_z$

$\vec{n}_2 = \hat{u}_z$

Bestalde, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ da

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{askea}$

↳ kargak polarizatuak direnez → $\rho_{askea} = 0$ → $\nabla \cdot \vec{D} = 0$

Bestalde, $\nabla \wedge \vec{E}$ eta $\nabla \wedge \vec{P} = 0$ badira, $\nabla \wedge \vec{D}$ ere 0 izango da.

$\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$ izango dela dakigu, eremu elektrostatikoa delako.

$$\nabla \wedge \vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi}\hat{u}_r - \frac{\partial P}{\partial r}\hat{u}_\varphi = 0\hat{u}_r + 0\hat{u}_\varphi$$

Ondorioz, $\left.\begin{array}{l} \nabla \wedge \vec{D} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{D}(r) = 0\hat{u}$

Ondorioz, $D(z)=0$ izanik, $\vec{E}(z) = \frac{-\vec{P}(z)}{\varepsilon_0}$ $\underline{(\vec{E}(z)=E(z)\,\hat{u}_z)}$

$$\vec{E}(z) = \frac{-a\cdot z - b}{\varepsilon_0}\,\hat{u}_z \rightarrow \boxed{\vec{E}\left(\tfrac{L}{2}\hat{u}_z\right) = \frac{-\frac{aL}{2} - b}{\varepsilon_0}\,\hat{u}_z}$$

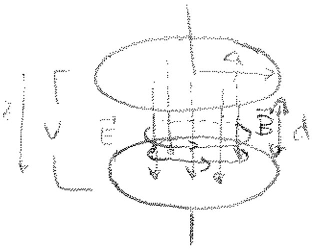
2. ARIKETA

a erradioko bi xafla metaliko d distantziara daude, d<<a izanik. $V = V_0\cdot\cos(\omega t)$-ko potentzial diferentzia dago. Hurbilketa kuasiestatikoan, aurkitu:

i) Eremu magnetikoa bi plaken artean.

ii) I intentsitatea.

iii) Gainazal bakoitzean dagoen korrontearen gainazal-dentsitatea.



Badakigu $\vec{E}$ sortuko dela plaka batetik bestera.

Beraz, $\vec{E}(z) = E(z)\,\hat{u}_z$

Bestalde, d<<a denez, hertz efektuak arbuia ditzakegu

Ondorioz, $\underline{\vec{E}(z) = V/d\ \cos(\omega t)\,\hat{u}_z}$

Orain, badakigu $\vec{E}$ aldakorra denez, $\vec{B}$ bat sortuko da.

Gainera, $\vec{E} = E\,\hat{u}_z$ denez, $\rightarrow$ $\underline{\vec{B}(r,t) = B(r,t)\,\hat{u}_\varphi}$

Maxwell-en ekuazioa: $\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\int_S(\nabla\wedge\vec{B})\,d\vec{S} = \int_S\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,d\vec{S} \underset{\substack{\text{Stokesen}\\\text{teorema}}}{\Longleftrightarrow} \oint_{\partial S}\vec{B}\,d\vec{l} = \int_S\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

$$\Rightarrow B(r)\,2\pi r = -\underline{\frac{\mu_0\varepsilon_0\,\omega\,V_0}{d}}\sin(\omega t)\,\pi r^2$$

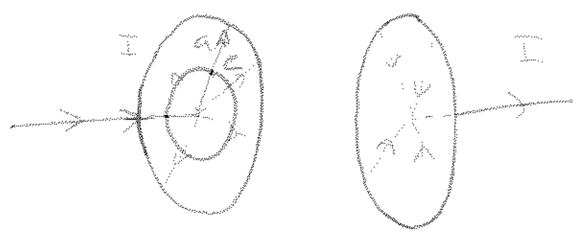
$$\boxed{\vec{B}(r) = -\frac{\mu_0\varepsilon_0\,\omega\cdot V_0}{2d}\sin(\omega t)\cdot r\,\hat{u}_\varphi}$$

Kargaren kontserbazioarengatik, badakigu $\vec{J}$-k eta $\vec{J}_d$-k definitutako I berdina izan behar dela.

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{d} \sin(\omega t)$$

$$I_d = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{s} = \frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{d} \sin(\omega t)\, \pi a^2$$

Esan bezala, $I = I_d \Rightarrow \boxed{I = \frac{\varepsilon_0 \omega V_0 \pi a^2}{d} \sin(\omega t)}$



Kargaren kontserbazioarengatik, c bakoitzetik I berdina pasatuko da. Gainera, simetria zilindrikoa dugunez, intentsitatea uniformeki banatuko da, beraz, $\vec{K} = K(r)\,\hat{r}$

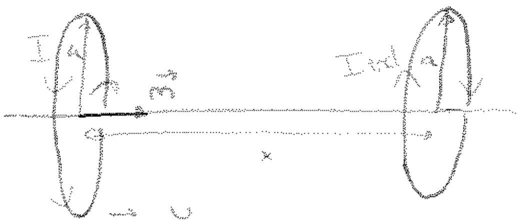
$$I = \oint_c K(r)\, dl = K(r) \cdot 2\pi r \Rightarrow K(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$\vec{K}(r) = \frac{\varepsilon_0 \omega V_0 a^2}{2dr} \sin(\omega t)\,\hat{r}$ intentsitatea sartzen den xaflan.

$\vec{K}(r) = -\frac{\varepsilon_0 \omega V_0 a^2}{2dr} \sin(\omega t)\,\hat{r}$ intentsitatea ateratzen den xaflan.

3. ARIKETA

a erradioko bi espira ardazkide x distantziara daude (x>>a). Bietako batek I korronte geldikorra du eta v abiadura konstantez mugitzen da ardatzean zehar. Aurkitu indar elektroeragilea beste espiran eta korrontearen noranzkoa.



x>>a denez, hurbilketa dipolarra erabiliko dugu: hau da, espirak sortutako eremu magnetikoa momentu dipolar magnetiko bera duen dipolo batek sortutakoaren berdina da.

Espira batean: $\vec{m} = I\cdot\vec{A} = \pi a^2 I\,\hat{u}_x$

Dipolo magnetiko batek sortutako B: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,\vec{r}\cdot\vec{m}}{r^5}\vec{r} - \frac{1}{r^3}\vec{m}\right)$

Onartu dugunez x>>a dela, suposatuko dut $\vec{r} = x\hat{u}_x$ mangoa dela beti.

$$\vec{B}(x\hat{u}_x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\cdot \cancel{x}\,\cancel{\hat{u}_x}\cdot\pi a^2 I\,\cancel{\hat{u}_x}}{x^{\cancel{5}3}}\,\cancel{x}\,\hat{u}_x - \frac{1}{x^3}\,\pi a^2 I\,\hat{u}_x\right)$$

Beraz, $\vec{B}(x\hat{u}_x) = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{x^3}\hat{u}_x$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}(x)\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{x^3}\pi a^2 = \frac{\mu_0\pi a^4 I}{2x^3}$$

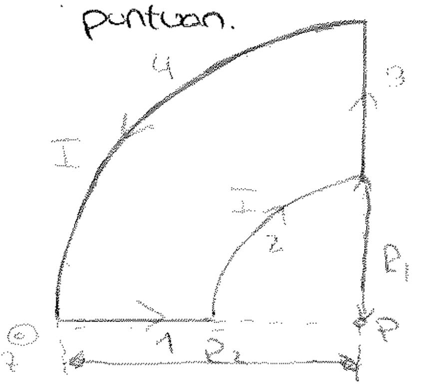
$$\varepsilon_{iee} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0\pi a^4 I v}{x^4}$$

Beraz → $\boxed{\varepsilon_{iee} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0\pi v a^4 I}{x^4}}$

$\varepsilon<0$ → Definitutako azalearen aurkako orientazioan.

4. ARIKETA

Irudiko zirkuitutik I intentsitatea doa. Aurkitu eremu magnetikoa P puntuan.



P-ko eremua kalkulatzeko, zirkuituaren alde bakoitzak sortzen duen $\vec{B}$ kalkulatuko dugu, eta gero gainezarmen printzipioa aplikatuko dugu.

Zati bakoitzak sortzen duen $\vec{B}$ Biot-de Savarten legea erabiliko dugu.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

- 1 aldeak sortua:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\, dl(-\hat{u}_r)\wedge \hat{u}_r}{r^2} = \vec{0}$$

- 2 aldeak sortua:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\, dl(-\hat{u}_\theta)\wedge(-\hat{u}_r)}{R_1^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\int_0^{\pi/2} R_1\, d\theta\, (\hat{u}_z) = -\frac{\mu_0 I}{8R_1}\hat{u}_z$$

- 3 aldeak sortua:

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\, dl\, \hat{u}_r \times(-\hat{u}_r)}{r^2} = \vec{0}$$

- 4 aldeak sortua:

$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\, dl\, \hat{u}_\theta \wedge(-\hat{u}_r)}{R_2^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2}\int_0^{\pi/2} R_2\, d\theta\, \hat{u}_z = \frac{\mu_0 I}{8\pi R_2}\hat{u}_z$$

Orain, $\vec{B} = \sum_{i=1}^{4}\vec{B}_i = \frac{\mu_0 I}{8\pi}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\hat{u}_z = \frac{\mu_0 I(R_1-R_2)}{8\pi R_1 R_2}\hat{u}_z$

Beraz, $\boxed{\vec{B}_P = -\frac{\mu_0 I(R_1-R_2)}{8\pi R_1 R_2}\hat{u}_z}$

5. ARIKETA

Demostratu eremu elektrikoaren energia dentsitatea eremu magnetikoaren berdina dela, $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ uhin lauean.

Har dezagun $\vec{u}$ non: $\begin{cases} |\vec{u}| = 1 \\ \vec{u}\cdot\vec{E}_0 = 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = B\,\hat{u}$

Gainera, $B_0 = \frac{E_0}{c}$ denez, $\underbrace{\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\,\hat{u}}$

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \vec{E}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$u_m = \frac{1}{2}\frac{\vec{B}^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_0^2}{c^2}\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ erlazioa hartuta $\Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$

Orduan, $u_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \Rightarrow \boxed{u_e = u_m}$

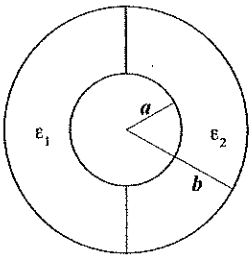
eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Elektromagnetismoa I — 2015/16 kurtsoko azterketa finala

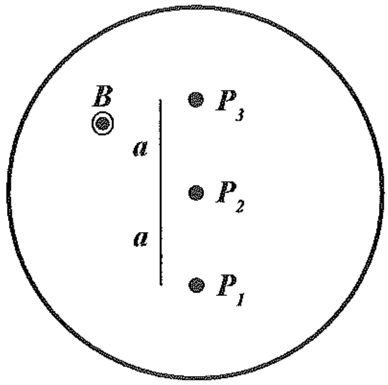


1. Kondentsadore esferikoaren barneko eta kanpoko erradioak a eta b dira, hurrenez hurren. Esfera eroaleen arteko aldea dielektrikoz beteta dago, erdi batean ϵ_1 konstatearekin eta ϵ_2 beste erdian. Kalkula itzazu kondentsadorearen kapazitatea eta energia elektrostatikoa Q kargarako.

2. $\mathbf{B}$ eremu magnetikoa uniformea da R erradioko zilindro batean, eta nulua kanpoan. Eremuaren norabidea zilindroaren ardatza da. Eremuaren modulua txikituz doa,

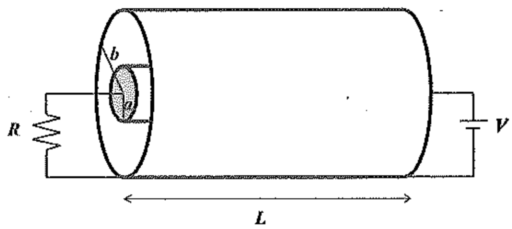
$$\frac{d\|\mathbf{B}\|}{dt} = -\alpha\,,$$

non $\alpha > 0$ konstantea den. Kalkula itzazu q kargako eta m masako partikula baten hasierako azelerazioak, pausagunean P_1, P_2 eta P_3 puntuetan kokatuz gero.



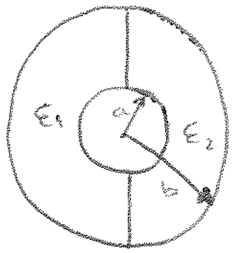
3. $2a$ lodierako xafla eroale infinituan $\mathbf{j}$ korronte dentsitate homogoneoa dario. Korrontea eta xafla paraleloak dira. Kalkula ezazu $\mathbf{B}$ eremu magnetikoa espazioko alde guztietan.

4. Irudiko kable ardazkidez dario V indar elektroeragileak sorturiko intentsitatea. Zirkuitoa R erresistentziak ixten du. Demagun kablearen luzera , L , a eta b bere erradioak baino askoz handiagoa dela. Kalkula itzazu 1) eremu elektrikoa, 2) eremu magnetikoa eta 3) Poynting bektorea, hirurak espazioko alde guztietan. Biz kablearekiko zeharkako S gainazala. Aldera ezazu S-ren zeharko Poynting bektorearen fluxua eta erresistentzian disipatutako potentzia.



1. ARIKETA

Kondentsadore esferikoaren barneko eta kanpoko erradioak a eta b dira, hurrenez hurren. Esfera eroaleen arteko aldea dielektrikoz beteta dago, erdi batean ϵ_1 konstantearekin eta ϵ_2 bestean. Kalkula itzazu kondentsadorearen kapazitatea eta energia elektrostatikoa Q kargarako.



Simetria esferikoa dugunez $\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

Azterketa soilik (a,b) tartean egin behar dugu

Potentziala kalkulatzeko $\vec{E}$ behar dugu, eta horretarako $\vec{D}$-z baliatuko gara.

Ohartu orain r erradioko gainazal baterako ϵ ez dela konstante, beraz ezin dugu hain erraz $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$ aplikatu.

Lehenik eta behin, badakigu muga-baldintzetatik $\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel}$ dielektrikoak banatzen dituen gainazalean.

Bestalde, $\vec{E}(\vec{r}) = E\,\hat{u}_r$ denez, gainazalean eremua soilik gainazalarekiko paralelo izango da: $\vec{E}_1 = \vec{E}_1^{\parallel}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_2^{\parallel}$

Ondorioz, $\boxed{\vec{E}_1 = \vec{E}_2}$ $\rightarrow$ $\vec{E}$ konstante izango da r erradioko gainazalean zehar.

Ondorioz ezin da aplikatu $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{D}}{\epsilon_1}$ eta $\vec{E}_2 = \dfrac{\vec{D}}{\epsilon_2}$

$\vec{D}$ kalkulatzeko, $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$

$d\vec{S} = dS\,\hat{u}_r$

Dielektrikoak ezberdinak direnez, $\oint_S \varepsilon\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = Q$

E konstante, baina ε ez: $E\oint_S \varepsilon\, dS = Q$ → kalkulatu behar da!

$dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$\oint \varepsilon\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon(\varphi)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi}\varepsilon(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= r^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\cdot\left(\int_0^{\pi}\varepsilon_1\, d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi}\varepsilon_2\, d\varphi\right) = 2r^2(\varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi) = 2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$\oint_S \varepsilon\vec{E}\, d\vec{S} = Q \Rightarrow 2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E = Q \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\, r^2}\,\hat{u}_r$$

$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r$

$$\oint_{\phi(b)}^{\phi(a)} d\phi = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\, r^2}\, dr = -\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^a = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\phi(a)-\phi(b) = \Delta\phi = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

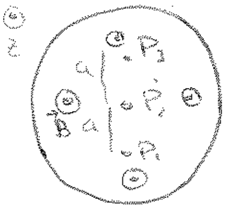
$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} \Rightarrow C = \frac{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{1/a + 1/b}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{Q}{\cancel{4\pi r^2}}\hat{u}_r\, \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\, r^2}\,\hat{u}_r\, \cancel{4\pi r^2}\, dr =$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

2. ARIKETA

$\vec{B}$ eremu magnetikoa uniformea da R erradioko zilindro batean, eta nulua kanpoan. Eremuaren norabidea zilindroaren ardatza da. Eremuaren modulua txikitzen doa, $\partial_t B = -\alpha$, non $\alpha > 0$ konstantea den. Kalkula itzazu q kargako eta m masako partikula baten hasierako azelerazioak, pausagunean, P_1, P_2 eta P_3 puntuetan kokatuz gero.



Eremu magnetikoa aldakorra denez, badakigu eremu elektriko bat sortuko dela. Beraz, partikula kargatu batek eremu elektrostatiko batean jasaten duen indarra Lorentzen indarra da:

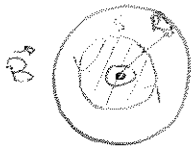
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Baina partikulak pausagunean daudenez, $\vec{F} = q\vec{E}$

Bestalde, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ denez, $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ izango da.

Gainera, $\vec{B} = B\hat{u}_z \Rightarrow \vec{E} = E\hat{u}_\varphi$ izango da.

Maxwell: $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$



$\vec{S} = S\hat{u}_z$ gainazala definituz: $\int_S (\nabla \wedge \vec{E}) d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$

Ezkerreko zatian Stokesen teorema aplikatuz: $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$

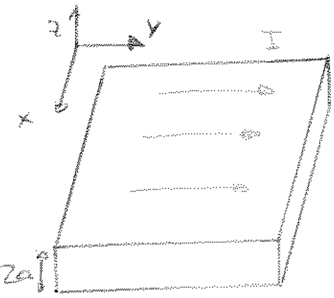
$$E \cdot 2\cancel{\pi} \cancel{r} = -(-\alpha)\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\alpha}{2} r \hat{u}_\varphi$$

Beraz, $\vec{a}(r) = \frac{\alpha q}{2m} r \hat{u}_\varphi$

$\boxed{\vec{a}(P_1) = \frac{\alpha q}{2m} a \hat{u}_\varphi}$ $\boxed{\vec{a}(P_2) = 0 \hat{u}_\varphi}$ $\boxed{\vec{a}(P_3) = \frac{\alpha q}{2m} a \hat{u}_\varphi}$

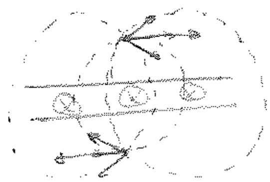
3. ARIKETA

2a lodierako xafla zabal infinituan $\vec{j}$ korronte dentsitate homogeneoa dario. Korrontea eta xafla paraleloak dira. Kalkula ezazu $\vec{B}$ eremu magnetikoa espazioko alde guztietan.



Hartuko dugu $\vec{j} = j\,\hat{u}_y$.

Beraz, korrontearen norabidea jakinda, eremuaren finkatuko dugu:



Simetria dugunez, eremuaren osagai bertikalak anulatu egingo dira.

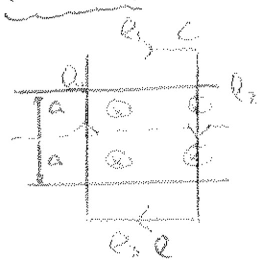
Beraz, $\vec{B} = B\,\hat{u}_x$

Gainera, simetria dugunez $z=0$ planoarekiko: $B(z) = B(-z)$

$z \to -z$ aldaketa egitean korronteak noranzkoa aldatzen duenez, $\vec{B}(z) = -\vec{B}(-z)$

Gauzak horrela, eremua kalkulatuko dugu:

- $|z| > a$:



Ampère: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ing}$

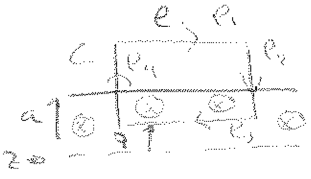
$I_{ing} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{s} = \int_S j\, ds = j\, 2a\cdot l$

Bestalde: $\int_{l_2} \vec{B}\, d\vec{l} = 0$ eta $\int_{l_4} \vec{B}\, d\vec{l} = 0$ $(\vec{B} \perp d\vec{l})$

Beraz, $\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \int_{l_1} B\,\hat{u}_x\cdot dl\,\hat{u}_x + \int_{l_3} B(-\hat{u}_x)\, dl(-\hat{u}_x) = 2Bl$

$\Rightarrow 2Bl = \mu_0 j\, 2a\, l \Rightarrow \underline{B = \mu_0 a j}$

- $|z| < a$:



Aurreko arrazonamenduak aplikatuz:

$I_{ing} = j\cdot S = j\,l(a-z)$

$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B}\, d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 a j l - Bl = \mu_0 j\, l(a-z)$

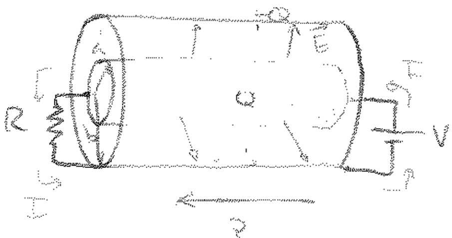
$$\mu_0 a j l - Bl = \mu_0 j l a - \mu_0 j l z \rightarrow \quad B = \mu_0 j z$$

Azkenik, simetria argudioak kontuan izanda, emaitza espazio osora hedatuko dugu:

$$\boxed{\vec{B}(z) = \begin{cases} \text{sign}(z)\, \mu_0 j |z|\, \hat{u}_x, & |z| < a \\ \text{sign}(z) \cdot \mu_0 j a\, \hat{u}_x, & |z| > a \end{cases}}$$

4. ARIKETA

Irudiko kable ardazkidean dario V indar elektroeragileak sortutako intentsitatea. Zirkuitua R erresistentzian ixten da. Demagun $L >> a, b$ dela. Kalkula itzazu eremu elektrikoa, eremu magnetikoa eta Poynting bektorea, hirurak espazioko alde guztietan. Bi kablearekiko zeharkako S gainazala. Aldera ezazu S-ren zeharkako Poynting bektorearen fluxua eta erresistentzian disipatutako potentzia.



Barruko kabletik I ezkerrera, kanpoko gainazaletik I eskuinera.

Gauzak horrela, badakigu $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

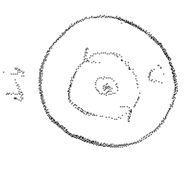
Bestalde, Ohm-en legea: $V = I \cdot R \rightarrow I = V/R$

Espazioko $\vec{B}$ kalkulatzen hasiko gara.

I $\hat{u}_z$ norabidean doanez $\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\hat{u}_\varphi$

- $r < a$:

Ampère-ren legea: $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

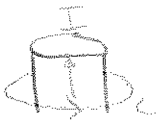


$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j\,\pi a^2 \Rightarrow \vec{j}(r) = \frac{I}{\pi a^2}\,\hat{u}_z$$

$$\underbrace{\int_S (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\text{Stokesen teorema}} \Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

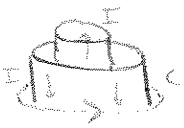
$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \cdot V}{2\pi a^2 R} \, r \, \hat{u}_\varphi$$

- $a < r < b$:



$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 I_{inG} \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 V}{2\pi r R} \hat{u}_\varphi$$

- $r > b$:

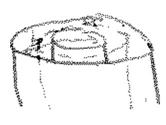


$$\oint \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 I_{inG} = \mu_0 (I - I) = 0 \Rightarrow \vec{B}(r) = 0 \, \hat{u}_\varphi$$

Beraz, emaitzak laburbilduz: $\boxed{\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 V}{2\pi a^2 R} \, r \, \hat{u}_\varphi, & r < a \\ \frac{\mu_0 V}{2\pi r R} \hat{u}_\varphi, & a < r < b \\ 0 \, \hat{u}_\varphi, & r > b \end{cases}}$

Ikusten dugunez, $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ da, eta V konstantea denez $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ izango dela ere badakigu. Beraz, ez dugu $\vec{E}$ kalkulatuko $\vec{B}$-ren induktibitateagatik.

Esan dugunez, $\vec{E}(r) = E(r)\, \hat{u}_r$. Hortaz, $a < r < b$ tartean Gauss-en legea aplikatuz:



$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{inG}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} \hat{u}_r$$

Hala ere, adierazpen honek ez du E finkatzen Q ez dakigulako!

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} d\phi = -\int_a^b \vec{E}(r)\, d\vec{r} = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} dr = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(a/b)$$

$$V = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(a/b) \Rightarrow Q = \frac{2\pi L V \varepsilon_0}{\ln(a/b)}$$

Beraz, $\vec{E}(r) = \dfrac{V}{r \cdot \ln(a/b)} \hat{u}_r$

- $r > b$:

Kondentsadore bat denez, badakigu kanpoko gainazalean barruko metalezko kargaren aurkakoa metatuko dela. Ondorioz, guztira inguratutako karga nulua izango da! → $E(r) = 0$

- $r < a$:

Hemen eremua ez da erradiala izango, z norabidean egongo da. Gainera, konstantea izango da.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

Nola da posible karga ligatuen badago barruan?

↳ Horrek esan nahi du bolumetriko karga dentsitatea 0 izango dela. Ondorioz, eroalea perfektutzat hartuz, $E(r) = 0$ onartuko dugu.

Beraz, emaitzak laburtuz: $\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{V}{\ln(a/b) \cdot r} \hat{u}_r, & a < r < b \\ 0 \, \hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}}$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{V}{r \ln(a/b)} \hat{u}_r \wedge \frac{\mu_0 V}{2\pi R r} \hat{u}_\theta = \frac{V^2}{2\pi R \ln(a/b) r^2} \hat{u}_z$$

Beraz, $\boxed{\vec{S}(r) = \dfrac{V^2}{2\pi R \ln(a/b) r^2} \hat{u}, \quad a < r < b}$

$\vec{S}$-ren fluxua A-n:

$$\underset{\sim}{\Phi_S} = \int_A \vec{S}\,d\vec{A} = \int_a^b \frac{V^2}{2\pi R \ln(a/b)\, r^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{2\pi r}\, dr = \frac{V^2}{R \ln(a/b)} \left[\ln r\right]_a^b = \underset{\sim}{-\frac{V^2}{R}}$$

$$\underset{\sim}{P} = I \cdot V = \frac{V}{R} \cdot V \Rightarrow \underset{\sim}{P = \frac{V^2}{R}}$$

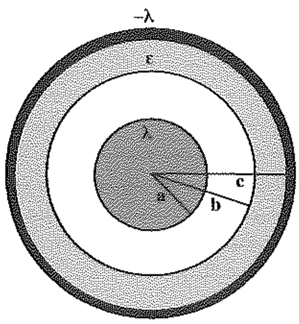
Ikus daitekeena: $\boxed{P + \Phi_S = 0}$

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Elektromagnetismoa I 2015/16 kurtsoko ezohiko azterketa



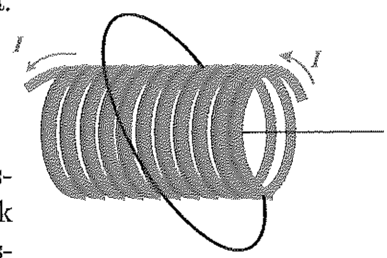
1. a erradioko zilindro infinitu batek λ karga darama luzera unitateko. c barne erradioko geruza zilindrikoak inguratzen du, eta geruza honen luzerazko karga dentsitatea $-\lambda$ da. Euren arteko zonaldean dielektrikoa aurkitzen dugu, b eta c erradioen artean, ϵ konstante dielektrikoa duena. Barneko zilindroaren eta dielektrikoaren artean hutsirik dago espazioa. Kalkula itzazu eremu elektrikoa espazioko alde guztietan, polarizazio karga dentsitateak, eta luzerazko kapazitate dentsitatea.

2. a erradioko eroale zilindrikoaren eroaletasuna σ_1 da. b kanpo erradioko geruza zilindrikoak guztiz inguratzen du zilindroa. Geruzaren eroaletasuna σ_2 dugu. Sistema osotik I intentsitatea dario ardatzaren norabidean. Kalkula ezazu eremu magnetikoa espazioko alde guztietan.

3. a erradioko solenoide infinitu baten bira dentsitatea n da. Solenoidetik

$$I = \begin{cases} I_0 t/t_0, & t < t_0 \\ I_0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

intentsitatea dario, non I_0 eta t_0 konstanteak diren. b erradioko espirak guztiz inguratzen du solenoidea ($b > a$), eta espiraren planoak eta solenoidearen ardatzak α angelua osatzen dute. Lor itzazu espirako eremu elektrikoa eta indar elektroeragilea.

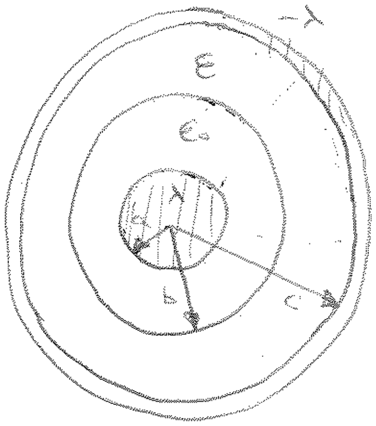


4. Biz

$$\mathbf{E} = E_0[\mathbf{i}\cos(kz - \omega t) + \mathbf{j}\sin(kz - \omega t)]$$

uhin elektromagnetikoa. Lor itzazu eremu magnetikoa eta Poynting bektorea.

1. ARIKETA



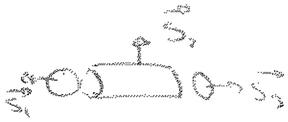
- kalkulatu $\vec{E}$ espazio osoan.

Gauss aplikatu $\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q_{osoa}}{\varepsilon_0}$

Gainera, simetriagatik $\vec{E} = E\cdot\hat{u}_r$

$\boxed{\cdot\ r<a}$

$\lambda\cdot\ell = \rho\cdot\pi a^2\cdot\ell \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\pi a^2}$

S ⇒ zilindroa: 

$\vec{S}_1 \perp \vec{E} \Rightarrow \oint_{S_1} d\vec{S}\cdot\vec{E} = 0$

$\vec{S}_2 \perp \vec{E} \Rightarrow \oint_{S_1} d\vec{S}\vec{E} = 0$

$\oint_{S_2} d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\cdot V}{\varepsilon_0}$

$2\pi\cancel{r}\ell E = \frac{\lambda}{\cancel{\pi}a^2}\cdot\frac{\cancel{\pi}r^2\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda r}{2\pi a^2\varepsilon_0}$

$\boxed{\cdot\ a<r<b}$

$\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi r\ell E = \frac{\lambda\cdot\ell}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$\boxed{\bullet\ b<r<c:}$

$$\oint_S d\vec{S}\,\vec{E} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon}$$

$$2\pi r\ell E = \frac{\lambda \cdot \ell}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

$\boxed{\bullet\ c<r:}$

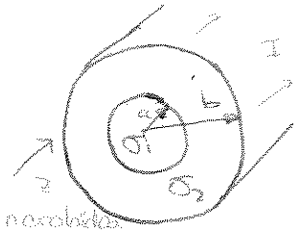
$$\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\ell - \lambda\ell}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi a^2 \varepsilon_0}\,\hat{u}_r, & r<a \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{u}_r, & a<r<b \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,\hat{u}_r, & b<r<c \\[2ex] 0\,\hat{u}_r, & c<r \end{cases}$$

Bestalde, $\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$ denez:

2. ARIKETA

a erradioko eroale zilindrikoaren eroaletasuna σ_1 da. b kanpo erradioko geruza zilindrikoak guztiz inguratzen du zilindroa, honen eroaletasuna σ_2 izanik. Sistema osotik I intentsitatea doa ardatzaren norabidean. Kalkula ezazu eremu magnetikoa espazioko alde guztietan.

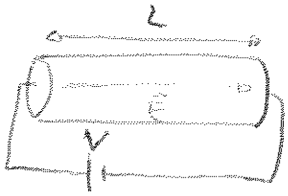


Hemen I zilindro osoan dugu, baina atal bakoitzetik doana kalkulatzeko hurrengoa aztertuko dugu:

Hasteko, argi dago $\vec{J}$ r-ren mende egongo dela

Gainera, badakigu $\underline{\vec{J}(r) = \sigma(r)\cdot\vec{E}(r)}$ $\begin{cases} \vec{E}(r) = E(r)\,\hat{u}_z \\ \vec{J}(r) = j(r)\,\hat{u}_z \end{cases}$

Bestalde, zilindroan intentsitatea sortu bada, alboetan potentzial diferentzia bat egongo da.



Edozein r-tarako: $V = E\cdot L$

$\Rightarrow$ Ondorioz, $\vec{E}(r) = E\cdot\hat{u}_z \rightarrow$ konstante !

Beraz, $\underline{\vec{J}(r) = \sigma(r)\,E\,\hat{u}_z}$

Badakigu $I = \int_S \vec{J}(r)\cdot d\vec{s} = \int_{S_1}\sigma_1 E\,ds + \int_{S_2}\sigma_2 E\,ds = E(\sigma_1\pi a^2 + \sigma_2\pi(b^2-a^2))$

Beraz, $\vec{E}(r) = \dfrac{I}{\pi(\sigma_1 a^2+\sigma_2(b^2-a^2))}\,\hat{u}_z$

Aurreko adierazpena berreskuratuz, $\vec{J}(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1 I}{\pi(\sigma_1 a^2+\sigma_2(b^2-a^2))}\,\hat{u}_z, & r<a \\ \dfrac{\sigma_2 I}{\pi(\sigma_1 a^2+\sigma_2(b^2-a^2))}\,\hat{u}_z, & a<r<b \end{cases}$

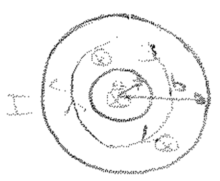
Orain, $\vec{J}$ izanda, Ampère aplikatuz atera dezakegu $\vec{B}$:

- $\underline{r<a}$:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\cdot I_{ing} = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = \mu_0\cdot\frac{\sigma_1 I r^2}{\sigma_1 a^2+\sigma_2(b^2-a^2)}$$

$$B\,2\pi r = \frac{\mu_0\sigma_1 I r^2}{\sigma_1 a^2+\sigma_2(b^2-a^2)} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0\sigma_1 I r}{2\pi(\sigma_1 a^2+\sigma_2(b^2-a^2))}$$

- $a<r<b$



$$I_{ins} = \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_1 a^2 I}{\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (b^2 - a^2)} + \frac{\sigma_2 I (r^2 - a^2)}{\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (b^2 - a^2)}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \cdot \frac{\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (r^2 - a^2)}{\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (b^2 - a^2)} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I (\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (r^2 - a^2))}{2\pi r (\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (b^2 - a^2))}$$

- $r>b$:

Ampere: $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{ing} = \mu_0 I$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Beraz, dena laburtuz:

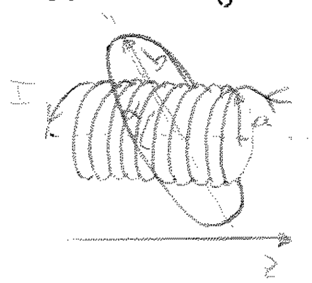
$$\boxed{\vec{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \sigma_1 I r}{2\pi (\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (b^2 - a^2))} \vec{u}_\varphi, & r<a \\ \dfrac{\mu_0 I (\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (r^2 - a^2))}{2\pi r (\sigma_1 a^2 + \sigma_2 (b^2 - a^2))} \vec{u}_\varphi, & a<r<b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi, & r>b \end{cases}}$$

3. ARIKETA

a erradioko solenoide infinitu baten bira dentsitatea n da. Solenoidetik:

$$I = \begin{cases} I_0\, t/t_0, & t<t_0 \\ I_0, & t>t_0 \end{cases}$$

intentsitatea dario, non I_0 eta t_0 konstanteak diren. b erradioko espirak guztiz inguratzen du solenoidea ($b>a$), eta espiraren planoak eta solenoidearen ardatzak α angelua osatzen dute. Lor itzazu espirako eremu elektrikoa eta indar elektroeragilea.



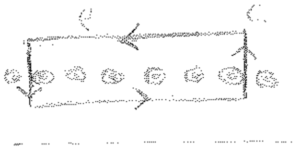
Lehenik eta behin, solenoidearen barruan induzitzen den eremu magnetikoa kalkulatuko dugu.

I $\vec{u}_\varphi$ norabidean doanez, $\vec{B}(r) = B(r)\vec{u}_z$

Bestalde, badakigu solenoidearen kanpoan ($r>a$) ez dela eremurik sortuko.

• $r < a$:

Ampère-ren legea: $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{lng} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{lng}$



$\oint_C \vec{B} \, d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot l$ (Besteetan $B=0$ edo $\vec{B} \perp d\vec{l}$)

$I_{lng} = I N = I \cdot n \cdot l$

Beraz $\Rightarrow$ $B l = \mu_0 I n l \Rightarrow \underline{B = \mu_0 I n}$

I-ren adierazpena aplikatuz: $\vec{B}(r,t) = \begin{cases} \mu_0 n I_0 \dfrac{t}{t_0} & t < t_0 \\ \mu_0 n I_0, & t \geq t_0 \end{cases}$

Espiran induzitutako $\mathcal{E}$ kalkulatzeko, fluxu magnetikoaren aldakuntza denboran zehar kalkulatuko dugu.

$\Phi_m = \int_S \vec{B} \, d\vec{S} = B \cdot \pi a^2 \Rightarrow \Phi_m = \begin{cases} \mu_0 n \pi a^2 I_0 \dfrac{t}{t_0}, & t < t_0 \\ \mu_0 n \pi a^2 I_0, & t \geq t_0 \end{cases}$

$\mathcal{E} = - \dfrac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 n \pi a^2 I_0}{t_0}, & t < t_0 \\ 0, \text{ bestela} \end{cases}}$

Eremu magnetikoa aldakorra denez $t < t_0$ denbora tartean, badakigu $\vec{E}(r)$ bat sortuko dela.

$\vec{B}(r,t) = B(r,t)\, \hat{u}_z$ denez $\Rightarrow \vec{E}(r,t) = E(r,t)\, \hat{u}_\varphi$

Maxwell-en ekuazioa: $\nabla \wedge \vec{E} = - \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow \int_S (\nabla \wedge \vec{E}) \, d\vec{S} = - \int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokesen} \\ \text{teorema}}}{\Rightarrow} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \mathcal{E}$

• $r < a$:

$$\oint_c \vec{E}\, d\vec{l} = E\, 2\pi r = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} = -\frac{\mu_0 n I_0}{t_0} \pi r^2 \Rightarrow E(r) = -\frac{\mu_0 n I_0}{2 t_0} r$$

• $r > a$:

$$\oint_c \vec{E}\, d\vec{l} = E\, 2\pi r = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} = -\frac{\mu_0 n I_0}{t_0} \pi a^2 \Rightarrow E(r) = -\frac{\mu_0 n a^2 I_0}{2 t_0 r}$$

Emaitza osoa:

$$\boxed{\vec{E}(r,t) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 n I_0}{2 t_0} r\, \hat{u}_\varphi, & r < a \text{ eta } t < t_0 \\ -\dfrac{\mu_0 n a^2 I_0}{2 t_0 r} \hat{u}_\varphi, & r > a \text{ eta } t \geq t_0 \\ 0\, \hat{u}_\varphi, & \text{bestela} \end{cases}}$$

4. ARIKETA

Bedi $\vec{E} = E_0 [\cos(kz - \omega t)\vec{i} + \sin(kz - \omega t)\vec{j}]$ uhin elektromagnetikoa. Lor itzazu eremu magnetikoa eta Poynting bektorea.

Maxwell-en ekuazioa: $\nabla \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{j} = -kE_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i} - kE_0 \sin(kz - \omega t)\vec{j}$$

Hortaz, $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kE_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i} + kE_0 \sin(kz - \omega t)\vec{j}$

$$\vec{B} = \int [kE_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i} + kE_0 \sin(kz - \omega t)\vec{j}]\, dt$$

$$\boxed{\vec{B}(z,t) = -\frac{kE_0}{\omega} \sin(kz - \omega t)\,\vec{i} + \frac{kE_0}{\omega} \cos(kz - \omega t)\,\vec{j}}$$

Konprobaketa: $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$? $\quad \dfrac{k \cdot E_0}{\omega} = \dfrac{\frac{2\pi}{\lambda} E_0}{2\pi f} = \dfrac{E_0}{\lambda f} = \dfrac{E_0}{c}$ ✓

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i} + E_0 \sin(kz - \omega t)\vec{j}\right)\left(-\frac{kE_0}{\omega} \sin(kz - \omega t)\vec{i} + \frac{kE_0}{\omega} \cos(kz - \omega t)\vec{j}\right)$$

$$= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(kz - \omega t)\vec{k} + \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \sin^2(kz - \omega t)\vec{k}$$

Ondorioz: $\boxed{\vec{S} = \frac{k \cdot E_0^2}{\mu_0 \omega} \vec{k}}$

Bektoreak z' norantza du, eta fasetik ondorioztatu dezakegun hedapen norantza-arekin bat dator. √

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Electromagnetismo I — Noviembre 2016

1. Entre dos esferas concéntricas conductoras con radios a y $b > a$ encontramos un dieléctrico lineal isótropo inhomogéneo, con permitividad $\epsilon(r) = \epsilon_0/(1 + kr)$. k es una constante (¿qué dimensiones porta?). El conductor interior lleva carga Q, mientras que el externo está conectado a tierra. Calcule

(i) el desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ en todo el espacio;

(ii) la capacidad;

(iii) las densidades de carga de polarización y la carga total de polarización.

2. Sea una varilla cargada situada entre los puntos $z = -a$ y $z = 0$ (siendo para ambos $x = 0$ e $y = 0$), con densidad lineal de carga $\lambda(z) = Az^2 + Bz$. A y B son constantes (¿cuáles son sus dimensiones?). Calcule

(i) la carga total de la varilla;

(ii) el momento dipolar con respecto al origen;

(iii) el momento dipolar con respecto al punto $b\mathbf{u}_x$.

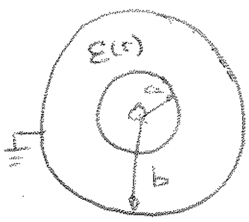
3. ¿Es el siguiente campo un campo electrostático? Justifique su respuesta.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\left(xy\mathbf{u}_x + 2yz\mathbf{u}_y + 3xz\mathbf{u}_z\right) .$$

1. ARIKETA

a eta b erradioko bi esfera eroaleen artean dielektriko lineal eta homogeneoa aurkitzen da, $\epsilon = \epsilon_0 / 1+kr$ permitibitatearekin. (Zein da k-ren dimentsioa?). Barruko esferak Q karga darama, kanpokoa, aldiz, lurrera lotuta dago. Kalkulatu:

i) $\vec{D}$ desplazamendu elektrikoa espazio osoan:



Kanpoko esfera lurreratuta dagoenez, esferatik kanpo efektuak anulatu behar dira $\Rightarrow Q_{totala} = 0$
$\Leftrightarrow Q_b = -Q$

Simetria esferikoa dugunez: $\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

- $r < a$:

Esfera eroalean kargak gainazalean $\Rightarrow$ Barruan ez dago kargarik.

$$D = 0$$

- $a < r < b$:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{inq} \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

- $r > b$:

$$Q_{inq} = Q + (-Q) = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

ii) Kondentsadorearen kapazitatea.

$C \Rightarrow \Delta V \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{E}$ kalkulatu behar dugu.

Dielektrikoa lineala denez, $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon(r)\cdot r^2}\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

Orain potentzial diferentzia kalkulatuko dugu:

$$\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} d\phi = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi r^2}\cdot\frac{1+kr}{\varepsilon_0}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a\left(\frac{1}{r^2}+\frac{k}{r}\right)dr =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}+k\ln r\right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+k\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \Delta\phi$$

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/a - 1/b + k\ln(b/a)}$$

iii) Polarizazio karga dentsitateak eta polarizatutako karga totala.

Polarizazio-kargak kalkulatzeko $\vec{P}$ bektorea kalkulatu behar dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \quad \vec{P}(\vec{r}) = P(r)\,\hat{u}_r$$

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r - \frac{\varepsilon_0 Q}{4\pi\varepsilon(r) r^2}\hat{u}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon_0}{1+kr}}\right)\hat{u}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}(1-1-kr)\hat{u}_r$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{kQ}{4\pi r}\hat{u}_r, & a<r<b \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

$\vec{P}$-tik polarizazio-kargak kalkulatu ahal ditugu: $\begin{cases} \sigma_P = \vec{n}\cdot\vec{P} \\ \rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} \end{cases}$

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-\frac{kQ}{4\pi r}\right)\right) = \frac{kQ}{4\pi r^2}$$

$$\sigma_a = \vec{n}_a\cdot\vec{P}(a) = -\hat{u}_r\cdot\left(-\frac{kQ}{4\pi a}\right)\hat{u}_r = \frac{kQ}{4\pi a}$$

$$\sigma_b = \vec{n}_b\cdot\vec{P}(b) = \hat{u}_r\cdot\left(-\frac{kQ}{4\pi b}\right)\hat{u}_r = \frac{-kQ}{4\pi b}$$

$\vec{n}_a = -\hat{u}_r$

$\vec{n}_b = \hat{u}_r$

Polarizazio-kargak: $\rho_P = \frac{kQ}{4\pi r^2}$ $\quad \sigma_a = \frac{kQ}{4\pi a}$ $\quad \sigma_b = -\frac{kQ}{4\pi b}$

$$Q_P = Q_{\sigma_a} + Q_{\sigma_b} + Q_{\rho_P}$$

$$Q_a = \sigma_a\cdot S_a = \frac{kQ}{4\pi a}\cdot 4\pi a^2 = kQa$$

$$Q_b = \sigma_b\cdot S_b = -\frac{kQ}{4\pi b}\cdot 4\pi b^2 = -kQb$$

$$Q_\rho = \int_V \rho_P\, dV = \int_a^b \frac{kQ}{\cancel{4\pi r^2}}\cdot\cancel{4\pi r^2}\,dr = kQ\left[r\right]_a^b = kQb - kQa$$

$$Q_P = kQa - kQb + kQb - kQa = 0$$

2. ARIKETA

Izan bedi $z=-a$ eta $z=a$ puntuen artean kokaturiko hagaxka kargatu bat, hurrengo karga-dentsitatearekin:

$\lambda(z) = Az^2 + Bz$ (A eta B konstanteak. Zeintzuk dira haien dimentsioak?). Kalkulatu:

i) Hagaxkaren karga totala:

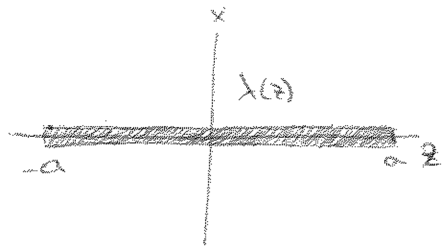
Lehenengo A eta B-ren dimentsioak kalkulatuko ditugu:

$[\lambda] = [Az^2] = [Bz]$

$$[\lambda] = Q \cdot L^{-1} \Rightarrow \begin{cases} [A \cdot z^2] = C \cdot L^{-1} \Rightarrow [A] \cdot L^2 = C \cdot L^{-1} \\ [B \cdot z] = C \cdot L^{-1} \Rightarrow [B] \cdot L = C \cdot L^{-1} \end{cases}$$

Beraz, dakigu $[A] = Q \cdot L^{-3}$ eta $[B] = C \cdot L^{-2}$

Orain hagaxkaren karga kalkulatuko dugu:



$$Q = \int_Q dq = \int_L \lambda \cdot dl = \int_{-a}^{a} (Az^2 + Bz)\, dz =$$

$$= \left[\frac{A}{3} z^3 + \frac{B}{2} z^2 \right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{A}{3} a^3 + \frac{B}{2} a^2 + \frac{A}{3} a^3 - \frac{B}{2} a^2 = \frac{2}{3} a^3 A$$

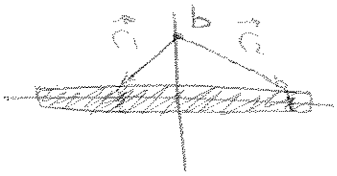
ii) Jatorriarekiko momentu dipolarra:

$\vec{p} = \int \vec{r} \cdot dq$ $\quad \vec{r}$? Kasu honetan: ... dq bakoitzera $\Rightarrow \vec{r} = z\,\hat{u}_z$

$$\vec{p} = \int z \cdot \hat{u}_z \cdot \lambda\, dl = \int z(Az^2 + Bz)\, dz \cdot \hat{u}_z = \left[\frac{A}{4} z^4 + \frac{B}{3} z^3 \right]_{-a}^{a} \hat{u}_z =$$

$$= \frac{2}{3} B a^3 \hat{u}_z \longrightarrow \vec{p} = \frac{2}{3} a^3 B \hat{u}_z$$

iii) $b\hat{u}_x$ puntuarekiko momentu dipolarra.



$\vec{r} = -b\hat{u}_x + z\hat{u}_z$

b-tik dq bakoitzera doan bektorea!

$$\vec{p} = \int_Q \vec{r}\, dq = \int_L (-b\hat{u}_x + z\hat{u}_z)\,\lambda(z)\, dl = \int_{-a}^{a} (-b\hat{u}_x + z\hat{u}_z)(Az^2 + Bz)\, dz =$$

$$= -b\hat{u}_x \int_{-a}^{a} (Az^2 + Bz)\, dz + \hat{u}_z \int_{-a}^{a} (Az^3 + Bz^2)\, dz = -b\hat{u}_x \frac{2}{3} a^3 A + \hat{u}_z \frac{2}{3} a^3 B$$

$$\vec{p} = \frac{2}{3} a^3 B \hat{u}_z - \frac{2}{3} a^3 b A \hat{u}_x$$

3. ARIKETA

Eremu elektrostatikoa al da hurrengo eremua? Arrazoitu erantzuna. $\vec{E}(\vec{r}) = k(xy\hat{u}_x + 2yz\hat{u}_y + 3xz\hat{u}_z)$

Eremu elektrostatikoa izateko $\Rightarrow \nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$

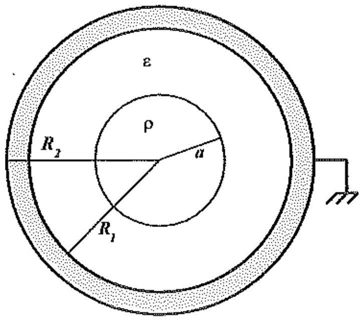
$$\nabla \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ kxy & 2kyz & 3kxz \end{vmatrix} = (-2ky, -3kz, -kx)$$

$\nabla \wedge \vec{E} \neq \vec{0}$ denez, $\vec{E}(\vec{r})$ EZ DA EREMU ELEKTROSTATIKOA

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea
ZIENTZIA ETA TEKNOLOGIA FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Electromagnetismo I — Examen Enero 2017.



1. (3 puntos) Sea una esfera de radio a con una distribución de carga $\rho = kr$ que está rodeada por un material dieléctrico de constante ϵ hasta un radio R_1. El conjunto está a su vez rodeado por una capa esférica conductora de radio interno R_1 y radio externo R_2, que está conectada a tierra. Obtenga

i) el campo eléctrico en todas las regiones del espacio,

ii) el potencial eléctrico en el centro,

iii) la carga depositada en la capa conductora y las distribuciones de carga de polarización, y

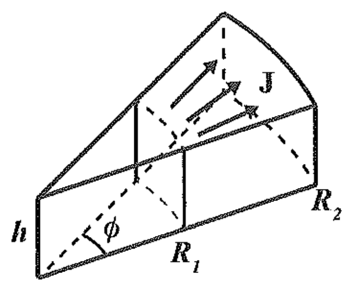
iv) la energía electrostática de la configuración.

2. (3 puntos) Un cilindro infinito de radio a presenta una imanación a lo largo de su eje cuyo módulo disminuye con el tiempo en el intervalo $[0, t_0]$ en la forma

$$\|\mathbf{M}\| = M_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) .$$

Calcule los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en todos los puntos del espacio. Suponga un volumen (imaginado) interior al cilindro con forma también de cilindro, coaxial con el primero, de radio $R < a$ y longitud L. Estudie la energía electromagnética en este cilindro imaginado.

3. (2 puntos) Halle la resistencia entre las superficies de radio R_1 y R_2 del bloque de la figura, hecho de plata con conductividad $g = 6 \times 10^7$ Si/m $= 6 \times 10^7\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. La corriente fluye radialmente, y la intensidad I que atraviesa las superficies de radio constante es la misma. Datos: $R_1 = 0.5$ m, $R_1 = 1.0$ m, $\phi = 10°$, $h = 5 \times 10^{-2}$ m.



4. (2 puntos) Sea una onda electromagnética

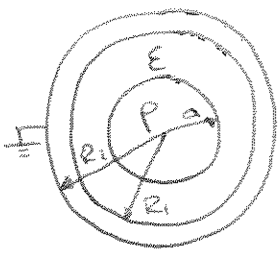
$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_x , \quad \mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_y .$$

Calcule a) el vector de Poynting, b) el potencial vector $\mathbf{A}$ y c) el potencial ϕ. Use la elección de gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. *Sugerencia:* Parta de que los potenciales son solo función de z y t.

1. ARIKETA

a erradioko esfera batek $\rho = kr$ karga-dentsitatea darama. R_1 erradioraino ε konstanteko dielektriko batek inguratzen du esfera. Sistema honen inguruan geruza esferiko eroalea eta zentrukidea dugu, bere barneko eta kanpoko erradioak R_1 eta R_2 dituena, hurrenez hurren. Lurrari lotuta dago geruza eroalea. Lor ezazu:

i) Eremu elektrikoa espazio osoan:



Simetria esferikoa dugunez $\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

$\vec{E}$ kalkulatzeko, lehenengo $\vec{D}$ kalkulatuko dugu

- $r < a$:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{askea} \Rightarrow Q_{askea} = \int_V \rho \cdot dV = \int_0^r kr\,4\pi r^2 dr = \pi k r^4$$

$$\Downarrow$$

$$D\,4\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} = \cancel{\pi} k r^{\cancel{4}\,2} \rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{k}{4} r^2\,\hat{u}_r$$

- $a < r < R_1$:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{askea} \rightarrow Q_{askea} = \int_V \rho\,dV = \int_0^a kr\,4\pi r^2 dr = k\pi a^4$$

$$\Downarrow$$

$$D\cdot 4\cancel{\pi} r^2 = k\cancel{\pi} a^4 \rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{k a^4}{4 r^2}\,\hat{u}_r$$

• $R_1 < r < R_2$:

Eroale baten barruan gaudenez $\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = 0\,\hat{u}_r$

• $r > R_2$:

Esfera lurreratuta dagoenez, kanpoan ez dugu efekturik sumatuko.

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = 0\,\hat{u}_r$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{k}{4} r^2\,\hat{u}_r, & r < a \\ \frac{k a^4}{4 r^2}\,\hat{u}_r, & a < r < R_1 \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

Orain, dielektrikoa lineala dela suposatuz, $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}/\epsilon$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{k r^2}{4\epsilon_0}\,\hat{u}_r, & r < a \\ \frac{k a^4}{4\epsilon r^2}\,\hat{u}_r, & a < r < R_1 \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

ii) Zentruko potentzial elektrikoa.

• $R_1 < r < R_2$:

$$\int_{\phi(R_2)}^{\phi(R_1)} d\phi = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\cdot \overset{d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r}{d\vec{r}} = -\int_{R_2}^{R_1} 0\,dr = 0 \Rightarrow \phi(R_1) = \phi(R_2) = 0$$

• $a < r < R_1$:

$$\int_{\phi(R_1)}^{\phi(a)} d\phi = -\int_{R_1}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{R_1}^{a} \frac{k a^4}{4\epsilon r^2}\,dr = -\frac{k a^4}{4\epsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{a} = \frac{k a^4}{4\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_1}\right)$$

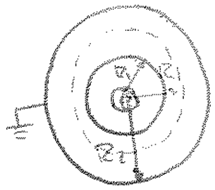
$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\phi(a) - \phi(R_1)} = \frac{ka^4}{4\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R_1}\right) \Rightarrow \phi(a) = \frac{ka^4}{4\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R_1}\right)$$

- $0<r<a$:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(0)} d\phi = -\int_a^0 \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^0 \frac{kr^2}{4\varepsilon_0}dr = -\frac{k}{4\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_a^0 = \frac{ka^3}{12\varepsilon_0}$$

$$\phi(0) = \frac{ka^3}{12\varepsilon_0} + \phi(a) = \frac{ka^3}{12\varepsilon_0} + \frac{ka^4}{4\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{ka^3}{4}\left(\frac{1}{3\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{a}{\varepsilon R_1}\right)$$

iii) Geruza eroalean dagoen karga, eta polarizazio karga banaketa guztiak.



Har dezagun $R_2<R<R_1$ erradioa duen esfera.

Bertan Gauss aplikatzen badugu: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Baina lehen ikusi dugu $\vec{E}=0\,\hat{u}$ eremu horretan.

Hortaz, $0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{int}=0 \rightsquigarrow Q_a + Q_{ger}=0$

$Q_{geruza} = -Q_a$

$$\boxed{Q_{geruza} = -k\pi a^4}$$

Polarizazio kargak kalkulatzeko $\vec{P}$ kalkulatuko dugu:

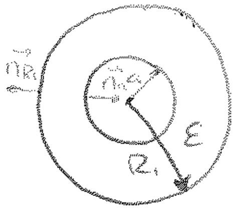
$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$ $\quad (\vec{P}(\vec{r}) = P(r)\,\hat{u}_r)$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{ka^4(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon r^2}\,\hat{u}_r, & a<r<R_1 \\ 0\,\hat{u}, & \text{bestela} \end{cases}$$

$\vec{P}$ bektoretik polarizazio-kargak kalkulatuko ditugu:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} \qquad \sigma_P = \vec{n}\cdot\vec{P}$$

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\frac{ka^4(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon \cancel{r^2}}\right) = 0$$



$$\sigma_{Pa} = \vec{n}_a\cdot\vec{P}(a) = -\hat{u}_r\cdot\frac{ka^4(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon a^2}\hat{u}_r = \frac{-k a^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon}$$

$$\sigma_{PR_1} = \vec{n}_{R_1}\cdot\vec{P}(R_1) = \hat{u}_r\cdot\frac{ka^4(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon R_1^2}\hat{u}_r = \frac{ka^4(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon R_1^2}$$

$\vec{n}_a = -\hat{u}_r$

$\vec{n}_{R_1} = \hat{u}_r$

$$\boxed{\rho_P = 0} \qquad \boxed{\sigma_{Pa} = \frac{-ka^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon}} \qquad \boxed{\sigma_{PR_1} = \frac{ka^4(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\varepsilon R_1^2}}$$

d) Egoera honen energia elektrostatikoa.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{kr^2}{4}\hat{u}_r\cdot\frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\hat{u}_r\cdot 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\int_a^{R_1}\frac{ka^4}{4r^2}\hat{u}_r\cdot\frac{ka^4}{4\varepsilon r^2}\hat{u}_r\cdot 4\pi \cancel{r^2} dr =$$

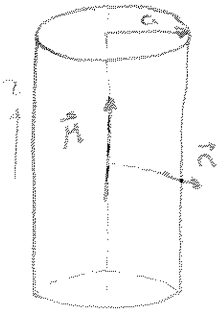
$$= \frac{k^2\pi}{8\varepsilon_0}\int_0^a r^6 dr + \frac{k\pi a^8}{8\varepsilon}\int_a^{R_1}\frac{1}{r^2}dr = \frac{k^2\pi}{8\varepsilon_0}\left[\frac{r^7}{7}\right]_0^a + \frac{k\pi a^8}{8\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{R_1} =$$

$$= \frac{k^2\pi a^7}{56\varepsilon_0} + \frac{k^2\pi a^8}{8\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{k^2\pi a^7}{8}\left(\frac{1}{7\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{a}{\varepsilon R_1}\right)$$

2. ARIKETA

a erradioko zilindro infinituak imanazioa aurkezten du bere ardatzean zehar, eta horren modulua txikitzen doa hurrengo eran:

$\|\vec{M}\| = M_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$. Kalkulatu $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ espazioko puntu guztietan. Har ezazu $R<a$ erradioko zilindro bat, lehenengoarekin ardatzkidea, L luzerakoa, eta aztertu horen energia elektromagnetikoa.

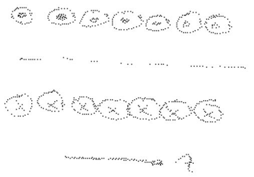


Problema ebazteko, korronte dentsitate baliokideak kalkulatuko ditugu:

$$\vec{J}_M = \nabla \wedge \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \wedge \vec{n} = M\,\hat{u}_z \wedge \hat{u}_r \Rightarrow \vec{K}_M = M_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\hat{u}_\varphi$$

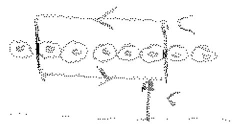
Korronteak zilindroaren inguruan zirkulatzen duenez, solenoide infinitu baten problema dugu.



Badakigu $\vec{B}(r,t) = B(r,t)\,\hat{u}_z$ izango dela.
Gainera, zilindrotik kanpo $(r>a)$ $B(r)=0$
($\nabla \cdot \vec{B} = 0$ denez). Ampère-ren legeak eremua emango digu:

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \oint_c \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 I_{ing}$$

$0<r<a$:



$$\oint_c \vec{B}\, d\vec{\ell} = \int_\ell B\, d\ell = B\,\ell$$

$$I_{ing} = \int_\ell K\, d\ell = M_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\ell$$

Beraz $\longrightarrow$ $B\,\ell = \mu_0 M_0\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)\ell \Rightarrow B = \mu_0 M_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$

$$\boxed{\vec{B}(r,t) = \begin{cases} \mu_0 M_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\hat{u}_z, & r<a \\ 0\,\hat{u}_z, & r>a \end{cases}}$$

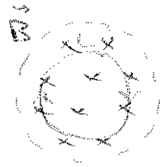
$\vec{B}$ aldakorra denez, badakigu $\vec{E}$ bat induzituko duela.

$\vec{B}(r,t)=B(r,t)\hat{u}_z$ denez $\longrightarrow$ $\vec{E}(r)=E(r)\hat{u}_\phi$ izango da

Maxwellen ekuazioa: $\nabla\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\int_S(\nabla\wedge\vec{E})\,d\vec{s}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \underset{\text{Stokesen teorema}}{\Longleftrightarrow} \oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

- $r<a$:

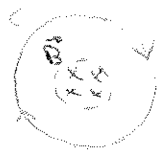


$$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{l}=E(r)\cdot 2\pi r$$

$$\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=+\int_S\left(-\frac{\mu_0 M_0}{t_0}\right)d\vec{s}=-\frac{\mu_0 M_0}{t_0}\pi r^2$$

Beraz $\rightarrow$ $E(r)\cdot 2\pi r=+\left(+\frac{\mu_0 M_0}{t_0}\pi r^2\right)\Rightarrow \underline{E(r)=\frac{\mu_0 M_0}{2t_0}r}$

- $r>a$:



$$\oint_{\partial S}\vec{E}\,d\vec{s}=E(r)\cdot 2\pi r$$

$$\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=\int_S\frac{-\mu_0 M_0}{t_0}\cdot d\vec{s}=-\frac{\mu_0 M_0}{t_0}\pi a^2$$

Beraz $\rightarrow$ $E(r)\cdot 2\pi r=+\left(+\frac{\mu_0 M_0}{t_0}\pi a^2\right)\Rightarrow \underline{E(r)=\frac{\mu_0 M_0 a^2}{2t_0 r}}$

Beraz, emaitzak laburtuz: $$\boxed{\vec{E}(r)=\begin{cases}\frac{\mu_0 M_0}{2t_0}r\,\hat{u}_\phi, & r<a\\ \frac{\mu_0 M_0 a^2}{2t_0 r}\hat{u}_\phi, & r>a\end{cases}}$$

Energia elektromagnetikoa kalkulatzeko, elektrikoa eta magnetikoa bakoitza bere aldetik aztertuko ditugu.

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E(r)^2 \, dV = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^R \varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 M_0^2}{4 t_0^2} r^2 \cancel{2}\pi r \, dr \cdot L =$$

$$= \frac{\pi \varepsilon_0 \mu_0^2 M_0^2 L}{4 t_0^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi \varepsilon_0 \mu_0^2 L M_0^2 R^4}{16 t_0^2}$$

$$U_M = \frac{1}{2}\int_V \frac{B(r)^2}{\mu_0} dV = \frac{1}{\cancel{2}}\int \mu_0 M_0^2 \left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2 \cancel{2}\pi r L dr = \frac{\pi \mu_0 M_0^2 (t_0-t)^2 L}{t_0^2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R =$$

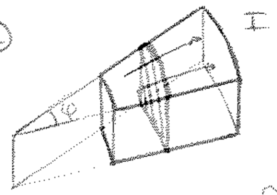
$$= \frac{\pi \mu_0 M_0^2 (t_0-t)^2 L R^2}{2 t_0^2}$$

Beraz,
$$\boxed{U_{EM} = \frac{\pi \mu_0^2 M_0^2 L R^2}{2 t_0^2}\left[\frac{\varepsilon_0 R^2}{8} + \frac{(t_0-t)^2}{\mu_0}\right]}$$

3. ARIKETA

Aurkitu ezazu irudiko objektuaren erresistentzia R_1 eta R_2 gainazalen artean, jakinik $\sigma = 6\cdot10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$ dela. Korrontea erradiala dela, eta bi gainazalak zeharkatzen dituen korrontea berdina da. Datuak: $R_1 = 0'5\,m$, $R_2 = 1\,m$, $\varphi = 10°$ eta $h = 5\,cm$.

Ariketa bi modutan ebatziko dugu:

ⓐ 

Gure objektua geruza txikitan banatu dezakegu (laranja), eta guztietatik intentsitate bera pasako denez, bata bestetik oso gertu daudenez eta itxura berdina dutenez, hurrengo adierazpena aplika dezakegu: $R = \frac{l}{\sigma S}$

Hori esandako geruza fin bakoitzari aplikatuz:

$$R = \int_R dR = \int_l \frac{dl}{\sigma S} = \frac{1}{\sigma}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{h\cdot r\cdot\varphi} = \frac{1}{\sigma h\varphi}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{\sigma h \varphi}$$

Datuak ordezkatuz: $\boxed{R = 1'32\ \mu\Omega}$

ⓑ Demagun bi gainazalen artean V potentzial diferentzia aplikatzen dugula.

Orduan: $V = \int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}$ Simetria zilindrikoagatik: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r$

Jarraitasunaren ekuazioa: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$

Potentzial diferentzia konstante bat aplikatu dugunez, korronte egonkor bat sortuko da: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{J} = 0$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{J}\,dV = \int_{\partial V}\vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 = \int_{S_1}\vec{J}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2}\vec{J}\cdot d\vec{S} = -I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow$$ Intentsitatea beti berdina.

$$I = \int_S \vec{J}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = J(r)\cdot\int_S dS = J(r)\cdot h\cdot r\cdot\varphi \Rightarrow J(r) = \frac{I}{h\cdot r\cdot\varphi}$$

Ohm-en legea: $\vec{J}(r) = g\,\vec{E}(r) \Rightarrow \vec{E}(r) = \vec{J}(r)/g$

Aurreko adierazpena berreskuratuz:

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{g h r \varphi}\,dr = \frac{I}{g h \varphi}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{I}{g h \varphi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Bestalde, badakigu $V = I \cdot R \Rightarrow R = \frac{V}{I}$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{g h \varphi} \Rightarrow \boxed{R = 1'32\,\mu\Omega}$$

4. ARIKETA

Izan bedi $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{u}_x$, $\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\,\hat{u}_y$ uhin elektromagnetikoa. Kalkulatu:

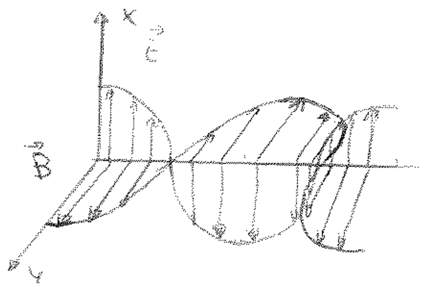
a) Poynting bektorea.

b) $\vec{A}$ potentzial bektorea.

c) ϕ potentziala.

Har ezazu $\nabla \cdot A = 0$ gauge askea eta suposatu potentzialak z eta t-ren menpekoak direla.

Fasea: $kz - \omega t \Rightarrow z^+$ norabidean hedatzen da.



Poynting bektorea kalkulatuz:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos(kz-\omega t)\,\hat{u}_x \wedge \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\,\hat{u}_y = \boxed{\frac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2(kz-\omega t)\,\hat{u}_z}$$

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ aukeratu dugunez, $\nabla \wedge \vec{A} = \vec{B}$ erabiliko dugu zehazteko $\vec{A}$

$\vec{B} = B\,\hat{u}_y \Rightarrow \nabla \wedge \vec{A} = (\nabla \wedge \vec{A})\,\hat{u}_y \Rightarrow \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = \dfrac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)$

Baina suposatu dugunez $\vec{A} = \vec{A}(z)$, $\dfrac{\partial A_z}{\partial x} = 0$!

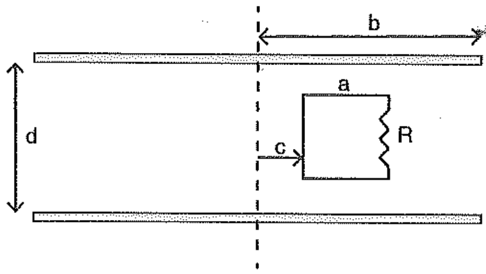
Beraz $\Rightarrow \dfrac{\partial A_x}{\partial z} = \dfrac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t) \rightarrow \boxed{\vec{A}(z,t) = \dfrac{E_0}{k \cdot c}\sin(kz - \omega t)\,\hat{u}_x}$

Azkenik, ϕ kalkulatzeko: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ erabiliko dugu

suposatu dugunez $\phi = \phi(z,t)$ dela: $\vec{\nabla}\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\,\hat{u}_x$

Beraz, $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = -E_0 \cos(kz - \omega t) \rightarrow \boxed{\phi(z,t) = -\dfrac{E_0}{k}\sin(kz - \omega t)}$

Elektromagnetismoa I 2016/17 kurtsoko ez-ohiko azterketa

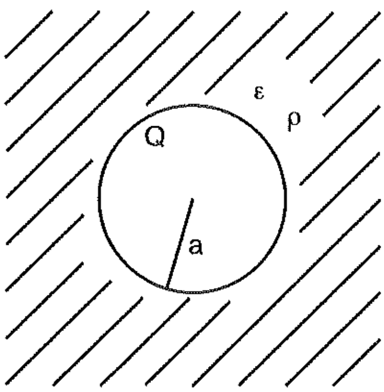


1. (3 puntu) Irudiko b erradioko xafla zirkular eta paraleloek kondentsadore bat osatzen dute, euren arteko distantzia $d \ll b$ izanda. Potentzial diferentzia $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ da. Plaken artean a aldeko eta R erresistentziako espira karratua kokatu dugu, irudian agertzen den moduan. Kalkula ezazu espiratik doan intentsitatea, eta espirari dagokion indar elektroeragilea.

2. (3 puntu) a erradioko esfera hutsaren gainazalean Q karga dago, uniformeki banandua gainazalean. ϵ konstanteko dielektriko batek guztiz inguratzen du esfera. Dielektriko honetan karga askearen banaketa dugu, infinituraino, ondoko adierazpenaren arabera:

$$\rho(r) = -Q_\epsilon k^2 \frac{e^{-kr}}{r}.$$

Hemen r esferaren zentrutik neurtutako distantzia da, eta Q_ϵ eta k konstanteak dira (zeintzuk dira euren dimentsioak?). Demagun infinituko potentziala zero dela. Kalkula ezazu esferaren zentruko potentzial elektrostatikoa. Lor itzazu polarizazio karga banaketak.

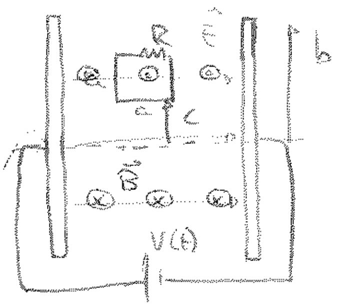


3. (2 puntu) R_1 eta R_2 erradioko esfera eroale zentrukideen artean korronte geldikor bat dario. Esferen arteko potentzial diferentzia V dugu, eta esferen arteko espazioa σ eroankortasunako eroale dago. Kalkula ezazu erresistentzia.

4. (2 puntu) Biz a erradioko zilindro infinitua, μ_1 iragazkortasun magnetikoz. Zilindro hau I intentsitateak zeharkatzen du ardatzaren norabidean, zilindroaren sekzioan uniformeki banandua. I intentsitate hau kanpoko geruza zilindriko zentrukide batetik itzultzen da. Geruza zilindriko honen barne erradioa b eta kanpo erradioa c ditugu, $c > b > a$. Geruza zilindrikoaren materialaren iragazkortasuna μ_2 da. Geruza honetan ere uniformea da korrontearen banaketa. Kalkula ezazu luzera unitateko energia magnetikoa.

1. ARIKETA

Irudiko b erradiodo xafla zirkular eta paraleloek kondentsadore bat osatzen dute, euren arteko distantzia $d \ll b$ izanik. Potentzial diferentzia $V(t) = V_0 \cdot \sin(\omega t)$ da. Plaken artean a aldeko eta R erresistentziako espira karratua dago, irudian agertzen den moduan. Kalkulatu espiratik doan intentsitatea, eta espirari dagokion indar elektroeragilea.



Xaflen arteko potentzial diferentzia aldakorrak eremu elektriko aldakor bat sortuko du, eta horrek eremu magnetiko aldakor bat. Horrela, espiran fluxu magnetikoaren aldaketak indar elektroeragile bat sortuko du, intentsitate bat induzituz.

Lehenik eta behin, $d \ll b$ denez, hertz efektuak arbuiatu ditzakegu eta ondorioz, onar dezakegu eremu elektrikoa uniformea izango dela.

Beraz, $\int_{V(0)}^{V(d)} dV = -\int_0^d \vec{E}\, d\vec{r} = -E d$

$$V(d) - V(0) = -E \cdot d \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{d}\sin(\omega t)\,\hat{u}_z$$

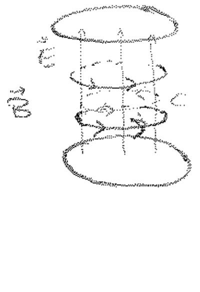
Esan bezala, $\vec{E}$ t-ren menpe dago, beraz $\vec{B}(t)$ bat sortuko da.

$$\vec{E}(t) = E(t)\,\hat{u}_z \Rightarrow \vec{B}(t) = B(t)\,\hat{u}_\varphi$$

Maxwell-en ekuazioa: $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Plaken artean hutsa dagoenez, ez da $\vec{J}$-rik egongo.

Beraz: $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$! $\quad \vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{d}\cos(\omega t)\,\hat{u}_z$

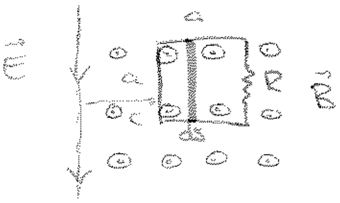


$$\int_S (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{s}$$

Ezkerreko atalean Stokesen teorema aplikatuz: $\oint_{\partial S} \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{s}$

$$\Rightarrow \quad B\, 2\pi r = \mu_0 \frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{d} \cos(\omega t)\, \pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega V_0}{2d} \cos(\omega t)\, r\, \hat{u}_\varphi}$$

Orain, espiran zeharreko fluxua kalkulatuko dugu:



$$\Phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega V_0}{2d} \cos(\omega t)\, r\, a\, dr =$$

$$= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega V_0 a}{2d} \cos(\omega t) \left[\frac{r^2}{2}\right]_c^{c+a} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega V_0 a}{4d} \cos(\omega t)\,(a^2 + 2ac)$$

Beraz, $$\Phi_m = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega a^2 V_0}{4d} (a+2c) \cos(\omega t)$$

Indar elektroeragilea, beraz:

$$\varepsilon_{iee} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega a^2 V_0}{4d} (a+2c)(+\sin(\omega t)) \cdot \omega$$

$$\boxed{\varepsilon_{iee} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 a^2 V_0}{4d} (a+2c) \sin(\omega t)}$$

Intentsitatea kalkulatzeko, Ohm-en legea aplikatuko dugu:

$$\varepsilon_{iee} = I R \Rightarrow \boxed{I = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 a^2 V_0}{4dR} (a+2c) \sin(\omega t)}$$

2. ARIKETA

a erradioko esfera hutsaren gainazalean Q karga dugu, uniformeki banandua gainazalean. ε konstanteko dielektriko batek guztiz inguratzen du esfera. Dielektriko honetan karga askearen banaketa dugu, infinituraino, ondoko adierazpenaren arabera:

$$\rho(r) = -Q_\varepsilon k^2 \cdot \frac{e^{-kr}}{r}$$

Hemen 'r' esferaren zentrutik neurtutako distantzia da, eta Q_ε eta k konstanteak dira (zeintzuk dira euren dimentsioak?). Demagun infinituko potentziala zero dela. Kalkula ezazu esferaren potentzial elektrostatikoa. Lor itzazu polarizazio karga banaketak.

$$-kr \text{ esponentzialean} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}[k\cdot r]=1\\ [r]=L\end{array}\right\} [k]=L^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}[\rho]=[Q_\varepsilon k^2/r]=Q\cdot L^{-3}\\ [k^2]=L^{-2}\\ [\frac{1}{r}]=L^{-1}\end{array}\right\} [Q_\varepsilon]=Q$$

ϕ kalkulatzeko $\Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{D}$

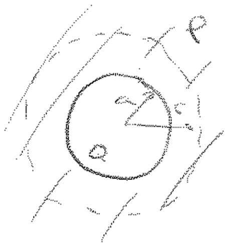
Simetria esferikoa dugunez: $\left\{\begin{array}{l}\vec{E}(\vec{r})=E(r)\,\hat{u}_r\\ \vec{D}(\vec{r})=D(r)\,\hat{u}_r\end{array}\right.$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_{askea}$$

- $r<a$:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{askea} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0\,\hat{u}_r$$

• $a > r$:



$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = Q_{aske} = Q + \int_V \rho\, dV$$

$$\int_V \rho \cdot dv = \int_a^r -Q_E k^2 \cdot \frac{e^{-kr}}{\cancel{r}} \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= +Q_E \cdot k^2 \cdot 4\pi \int_a^r -r \cdot e^{-kr} dr = (*)$$

Integral mugagabea ebatziko dugu:

$$\int -r e^{-kr} dr = \frac{r}{k} e^{-kr} - \int \frac{e^{-kr}}{k} dr = \frac{r}{k} e^{-kr} + \frac{e^{-kr}}{k^2} + C =$$

$u = r$ $\quad -e^{-kr} dr = dv$

$du = dr$ $\quad \frac{e^{-kr}}{k} = v$

$$= \frac{1}{k}\left(r + \frac{1}{k}\right) e^{-kr} + C$$

$$(*) = 4\pi Q_E k^2 \left[\frac{1}{k}\left(r+\frac{1}{k}\right) e^{-kr}\right]_a^r = 4\pi Q_E\left[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}\right]$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{aske} \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = Q + 4\pi Q_E\left[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}\right]$$

$$\vec{D} = \frac{Q + 4\pi Q_E\left[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}\right]}{4\pi r^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q + 4\pi Q_E\left[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}\right]}{4\pi r^2}\hat{u}_r, & r > a \\ 0\,\hat{u}_r, & r < a \end{cases}$$

Dielektrikoa linealtzat hartuz, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ erabiliko dugu $\vec{E}$ kalkulatzeko $\Rightarrow$ $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q + 4\pi Q_E[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}]}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{u}_r, & r>a \\ 0\,\hat{u}_r, & \text{bestela} \end{cases}$$

$\vec{E}$ izanda kalkula dezakegu ϕ:

$$\int_{\phi(\infty)}^{\phi(a)} d\phi = -\int_{\infty}^{a} \frac{Q + 4\pi Q_E[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}]}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr$$

Banandu egingo dugu:

- $$\int_{\infty}^{a} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a}$$

- $$\int_{\infty}^{a} \frac{\cancel{4\pi} Q_E(ka+1)e^{-ka}}{\cancel{4\pi}\varepsilon r^2}\,dr = \frac{Q_E(ka+1)e^{-ka}}{\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{a} = -\frac{Q_E(ka+1)e^{-ka}}{\varepsilon a}$$

- $$\int_{\infty}^{a} \frac{-\cancel{4\pi} Q_E(kr+1)e^{-kr}}{\cancel{4\pi}\varepsilon r^2}\,dr = -\frac{Q_E}{\varepsilon}\int_{\infty}^{a} \frac{(kr+1)e^{-kr}}{r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{Q_E}{\varepsilon}\int_{\infty}^{a} \frac{d}{dr}\left(-\frac{e^{-kr}}{r}\right)dr = +\frac{Q_E}{\varepsilon}\left[+\frac{e^{-kr}}{r}\right]_{\infty}^{a} = \frac{Q_E e^{-ka}}{\varepsilon a}$$

$$\phi(a) - \phi(\infty) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} + \frac{Q_E}{\varepsilon a}e^{-ka} - \frac{Q_E(ka+1)e^{-ka}}{\varepsilon a}$$

$$\phi(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} - \frac{Q_E k}{\varepsilon}e^{-ka}$$

Polarizazio kargak kalkulatzeko $\vec{P}$ erabiliko dugu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow (\vec{P}(\vec{r}) = P(r)\,\hat{u}_r)$$

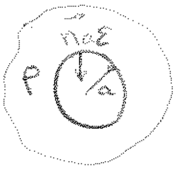
$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} (\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{Q + 4\pi Q_\varepsilon\left[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}\right]}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{u}_r, & r>a \\ 0\,\hat{u}_r, & r<a \end{cases}$$

Polarizazio kargak kalkulatzeko: $\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$, $\sigma_P = \vec{n}\cdot\vec{P}$

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{Q+4\pi Q_\varepsilon\left[(kr+1)e^{-kr} - (ka+1)e^{-ka}\right]}{4\pi\varepsilon \cancel{r^2}}\right) =$$

$$= -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q_\varepsilon\left[(kr+1)e^{-kr}\right]}{\varepsilon}\right) = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_\varepsilon}{\varepsilon r^2}\left(k e^{-kr} - k(kr+1)e^{-kr}\right) =$$

$$= -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_\varepsilon}{\varepsilon r^2}k e^{-kr}(1-kr-1) = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_\varepsilon k}{\varepsilon r^2}e^{-kr}\cdot k\cancel{r} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_\varepsilon k^2}{\varepsilon r}e^{-kr}$$



$$\sigma_{Pa} = \vec{n}_a\cdot\vec{P}(a) = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{Q+4\pi Q_\varepsilon\left[\cancel{(ka+1)e^{-ka} - (ka+1)e^{-ka}}\right]}{4\pi\varepsilon a^2} =$$

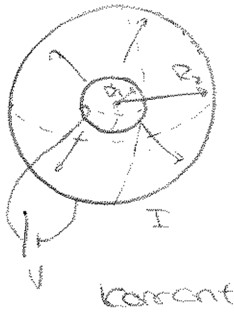
$\vec{n}_a = -\hat{u}_r$

$$= -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon a^2}$$

$$\boxed{\rho_P = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_\varepsilon k^2}{\varepsilon r}e^{-kr}} \qquad \boxed{\sigma_{Pa} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon a^2}}$$

3. ARIKETA

R_1 eta R_2 erradioko esfera eroale zentrukideen artean korronte geldikor bat dario. Esferen arteko potentzial diferentzia V dugu, eta esferen arteko espazioan σ eroankortasuneko eroalea dago. Kalkula ezazu sistemaren erresistentzia.



Potentzial diferentzia bi geruza esferikoen artean dagoenez, korrontea erradialki hedatuko da.

Jarraitutasunaren ekuazioa: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Korrontea geldikorra: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = 0$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{j}\, dV = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j}(r)\, d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{j}(r)\, d\vec{S} = -I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2$$

Intentsitate berdina gainazal guztietan

$$I = \int_S \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} = j(r) \int_S dS = j(r)\, 4\pi r^2 \Rightarrow j(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

Ohm-en legea: $\vec{j}(r) = \sigma \vec{E}(r) \rightarrow \vec{E}(r) = \vec{j}(r)/\sigma$

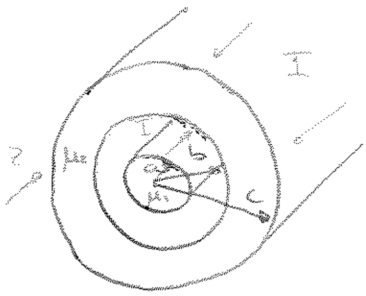
$$V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r)\, d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\, dr = \frac{I}{4\pi\sigma}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{(R_2 - R_1) I}{4\pi\sigma R_1 R_2}$$

Azkenik, $V = I \cdot R \Rightarrow R = \frac{V}{I}$

Beraz, $\frac{V}{I} = \frac{(R_2 - R_1) I}{4\pi\sigma R_1 R_2} \rightarrow \boxed{R = \frac{I(R_2 - R_1)}{4\pi\sigma R_1 R_2}}$

4. ARIKETA

Biz a erradioko zilindro infinitua, μ_1 iragazkortasun magnetikoa. Zilindro hau I intentsitateak zeharkatzen du ardatzaren norabidean, uniformeki banandua. I intentsitate hau kanpoko geruza zilindriko zentrukide batetik itzultzen da. Geruza zilindriko honen barne erradioa b eta kanpo erradioa c dira. Geruza zilindrikoaren iragazkortasuna μ_2 da. Geruza honetan ere uniformea da korrontearen banaketa. Kalkula ezazu luzera unitateko energia magnetikoa.



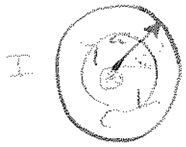
Lehenik eta behin, simetria zilindrikoa dugunez eta intentsitatea z norabidean doanez, badakigu:

$$\vec{H}(\vec{r}) = H(r)\,\hat{u}_\varphi \qquad \vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\hat{u}_\varphi$$

Hasteko, $\vec{H}$ kalkulatuko dugu.

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_{askea} \Rightarrow \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{ing}$$

• $r<a$:



I_{ing} kalkulatzeko, $\vec{J}$ kalkulatuko dugu:

$$I = \vec{J}\cdot\vec{A} = J\cdot\pi a^2 \rightarrow \vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{u}_z$$

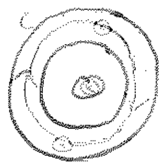
$$I_{ing} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = \frac{I}{\pi a^2}\int_S ds = \frac{I}{\pi a^2}\,\pi r^2 \Rightarrow I_{ing} = I\frac{r^2}{a^2}$$

Orduan: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\int_C dl = H\cdot 2\pi \cancel{r} = I\frac{r^{\cancel{2}}}{a^2} \Rightarrow H(r) = \frac{I}{2\pi a^2}r$

• $a<r<b$:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{ing} = I \Rightarrow H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

• $b<r<c$:



Kanpoko geruzaren $\vec{J}$ kalkulatuko dugu:

$$I = \vec{J}\cdot\vec{A} = J\,\pi(c^2-b^2) \Rightarrow \vec{J} = \frac{I}{\pi(c^2-b^2)}(-\hat{u}_z)$$

Beraz, $I_{ing} = I + \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = I - \frac{I}{\cancel{\pi}(c^2-b^2)}\cancel{\pi}(r^2-b^2) = I\,\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = H\cdot 2\pi r = I\,\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \rightarrow H(r) = \frac{(c^2-r^2)\,I}{2\pi r(c^2-b^2)}$$

• $c > r$:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{ing} = I - I = 0 \Rightarrow H(r) = 0$$

Beraz, dena laburtuz:

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi a^2}\,\vec{u}_\varphi, & r<a \\ \dfrac{I}{2\pi r}\,\vec{u}_\varphi, & a<r<b \\ \dfrac{(c^2-r^2)I}{2\pi r(c^2-b^2)}\,\vec{u}_\varphi, & b<r<c \\ 0\,\vec{u}_\varphi, & \text{bestela} \end{cases}}$$

Orain, materialak emandakoak hartuz, $\vec{B}$ kalkulatuko dugu:

$\vec{B}(\vec{r}) = \mu(r)\cdot\vec{H}(\vec{r})$, beraz

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_1 I r}{2\pi a^2}\,\vec{u}_\varphi, & r<a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\varphi, & a<r<b \\ \dfrac{\mu_2(c^2-r^2)I}{2\pi r(c^2-b^2)}\,\vec{u}_\varphi, & b<r<c \\ 0\,\vec{u}_\varphi, & \text{bestela} \end{cases}}$$

Azkenik, energia magnetikoa kalkulatzeko, ondorengo adierazpena erabiliko dugu.

$$W = \frac{1}{2}\int_v \vec{H}\cdot\vec{B}\,dv = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^a \mu_1\cdot\frac{I^2r^2}{4\pi^2a^4}\,l\,\cancel{2}\cancel{\pi} r\,dr + \frac{1}{\cancel{2}}\int_a^b \mu_0\,\frac{I^2}{4\pi^{\cancel{2}}r^{\cancel{2}}}\,\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{r}\,dr\,l\,+$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}}\int_b^c \mu_2\,\frac{(c^2-r^2)^2I^2}{4\pi^{\cancel{2}}r^{\cancel{2}}(c^2-b^2)}\,\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{r}\,dr\cdot l =$$

$$= \frac{\mu_1 I^2 \ell}{4\pi a^4}\int_0^a r^3 dr + \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\int_a^b \frac{1}{r} dr + \frac{\mu_2 I^2 \ell}{4\pi (c^2-b^2)^2}\int_b^c \left(\frac{c^4}{r} - 2c^2 r + r^3\right) dr =$$

$$= \frac{\mu_1 I^2 \ell}{16\pi} + \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_2 I^2 \ell}{4\pi(c^2-b^2)^2}\left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - c^2(c^2-b^2) + \frac{c^4}{4} - \frac{b^4}{4}\right] =$$

$$= \frac{\mu_1 I^2 \ell}{16\pi} + \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_2 I^2 \ell}{4\pi(c^2-b^2)^2}\left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{3}{4}c^4 + c^2 b^2 - \frac{b^4}{4}\right]$$

Condotta: $\boxed{\frac{W}{\ell} = \frac{\mu_1 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_2 I^2}{4\pi(c^2-b^2)^2}\left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{3}{4}c^4 + c^2 b^2 - \frac{b^4}{4}\right]}$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

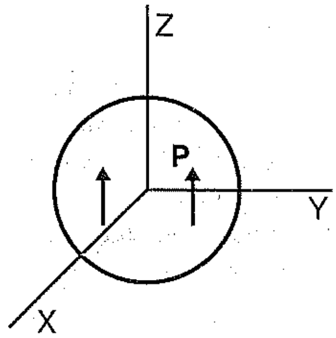
Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Elektromagnetismoa I — 2017ko Azaroa

1. R erradioko esfera eroale bat hutsean isolatua eta kargatua da, Q kargarekin.

- Kalkula ezazu sisteman gordetako energia.
- Esferaren karga aldatu gabe, geruza esferiko dielektrikoz inguratzen dugu. Bere barne erradioa R eta kanpokoa $R+a$ dira, eta ϵ permitibitatekoa da. Kalkula ezazu, sistema egonkortu ondoren, sistema berrian gordetako energia. Aurrekoarekiko aldaketarik agertuz gero, azaldu aldaketaren jatorria.
- Lehen aipatutako hasierako egoera izan beharrean esferaren potentziala kanpotik V_0 balioan finkatuko dugu. Zeintzuk dira sistemaren energiak dielektrikorik gabe eta geruza dielektrikoarekin?

2. R erradioko esfera dieletrikoak $\mathbf{P}$ polarizazio konstantea aurkezten du, Z ardatzaren norabidean. Kalkula ezazu esferaren zentruko potentziala, eta potentziala eta eremu elektrostatikoa X ardatzeko $L \gg R$ distantziako puntu batean.



1. ARIKETA

R erradioko esfera eroale bat hutsean isolatuta eta kargatuta da, Q kargarekin.

· Kalkulatu sistemaren energia.

Simetria esferikoa dugunez: $\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

Lehenengo $\vec{D}$ kalkulatuko dugu: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{aske}$

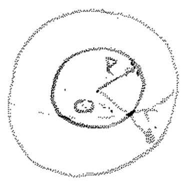
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{aske}$$

· $0<r<R$:

Esfera eroalea denez, barruan ez da kargarik egongo.

$Q_{aske} = 0 \Rightarrow D(r) = 0$

· $r>R$:



Esferatik kanpo $\Rightarrow$ $Q_{aske} = Q$;

$$\int_S \vec{D}\, d\vec{s} = Q \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Beraz: $$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r<R \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{u}_r, & r>R \end{cases}$$

Orain, $\vec{E}$ kalkulatzeko, bi medioak material eroalea eta hutsa direnez, badakigu $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon_0$

Beraz, $$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r<R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r, & r>R \end{cases}$$

$$U = \int_V \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{2}\int_0^R 0\,dV + \frac{1}{2}\int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r\, 4\pi r^2\,dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

- Esferaren karga aldatu gabe, geruza esferiko dielektrikoz inguratzen dugu sistema. Barne erradioa R eta kanpokoa $R+a$ dira, eta ε permitibitatekoa da. Kalkulatu sistema egonkortu ondoreneko energia. Aurrekoarekiko aldaketarik agertuz gero, azaldu aldaketaren jatorria.

Aurreko atalatik kalkulatutako D erabiliko dugu.

Orain, $E(r) = D(r)/\varepsilon(r)$, non $\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon, & R<r<R+a \\ \varepsilon_0, & \text{bestela} \end{cases}$

Beraz, $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\cdot\hat{u}_r, & 0<R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{u}_r, & R<r<R+a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r, & r>R+a \end{cases}$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{2}\int_R^{R+a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{u}_r \cdot \frac{Q}{\cancel{4\pi\varepsilon r^2}}\hat{u}_r\, 4\pi r^2\,dr + \frac{1}{2}\int_{R+a}^{\infty} \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r \cdot \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{u}_r\, 4\pi r^2\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+a} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R+a}^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right) + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 (R+a)} =$$

$$= \frac{Q^2 a}{8\pi\varepsilon R(R+a)} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 (R+a)}$$

• Lehen aipatutako egoera izan beharrean esferaren potentziala V_0 balioan finkatu dugu. Zeintzuk dira sistemaren energiak dielektrikoarekin eta dielektrikorik gabe?

Badakigu kargatutako esfera batek $r \geq R$ eremuan sortzen duen potentziala bere zentruan kokatutako karga berdineko karga puntual batek sortuko lukeenaren berdina da.

Beraz: $V(r) = \dfrac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow V(r) = V_0 = \dfrac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \underline{Q' = 4\pi\varepsilon_0 V_0 R}$

Beraz, lehenengo egoeran: $U = \dfrac{\cancel{16}\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0^{\cancel{2}} V_0^2 R^{\cancel{2}}}{\cancel{8}\cancel{\pi}\cancel{\varepsilon_0}\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{U = 2\pi\varepsilon_0 R V_0^2}$

Geruza dielektrikoaren kasuan, Q'' kalkulatzeko $\vec{E}$ behar dugu

Simetria esferikoarengatik, badakigu $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 \, \vec{u_r}, & r < R \\ \dfrac{Q''}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u_r}, & R < r < R+a \\ \dfrac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}, & R+a < r \end{cases}$

Orain, geruzaren potentziala finkatuko dugu:

• $\underline{r > R+a}$:

$$\int_{\phi(\infty)}^{\phi(R+a)} d\phi = \int_{R+a}^{\infty} \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R+a}^{\infty} = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 (R+a)}$$

$\phi(\infty) = 0$ hartuz $\Rightarrow \underline{\phi(R+a) = \dfrac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 (R+a)}}$

• $\underline{R < r < R+a}$:

$$\int_{\phi(R+a)}^{\phi(R)} d\phi = \int_{R}^{R+a} \frac{Q''}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{R+a} = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right)$$

$$\Phi(R) = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 (R+a)} + \frac{a\,Q''}{4\pi\varepsilon (R+a) R} = V$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q''}{4\pi (R+a)}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{a}{\varepsilon R}\right) = \frac{Q''(\varepsilon R + \varepsilon_0 a)}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon (R+a) R}$$

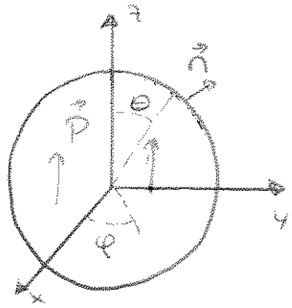
Ondorioz, $$Q'' = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon (R+a) R V}{\varepsilon R + \varepsilon_0 a}$$

Aurreko ataleko adierazpenetik adierazpena berreskuratu:

$$\boxed{U = \frac{a Q^2}{8\pi\varepsilon\, \varepsilon (R+a)} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 (R+a)} \quad \text{non} \quad Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon (R+a) R V}{\varepsilon R + \varepsilon_0 a}}$$

2. ARIKETA

R erradioko esfera dielektrikoak $\vec{P}$ polarizazio konstantea aurkezten du, z ardatzaren norabidean. Kalkulatu ezazu esferaren zentruko potentziala, eta potentziala eta eremu elektrostatikoa X ardatzeko L>>R distantziako puntu batean.



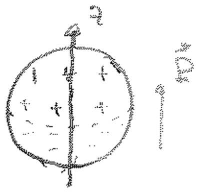
$\vec{n} = \hat{u}_r$

r=0 puntuko potentziala kalkulatzeko, polarizazio kargak kalkulatu ditugu:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\vec{n} = P\hat{u}_z\cdot(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{u}_y + \cos\theta\,\hat{u}_z)$$

$$\sigma_P = P\cos\theta$$



Simetria esferikoarengatik:

Positiboki kargatutako esferaerdi hutsak V negatiboak sortutakoaren aurkakoa!!

$$V_+ + V_- = 0 \Rightarrow \boxed{V_0 = 0}$$

x=L>>R puntuko $\vec{E}$ eta V kalkulatzeko, hurbilketa dipolarra erabiliko dugu.

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \Rightarrow \vec{p} = \int_V \vec{P}\,dV = \int_0^R P\,\hat{u}_z\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 P\,\hat{u}_z$$

Orain, dipolo elektriko batek sortutako $\vec{E}$ eta V kalkulatuko ditugu.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{r} = r\,\hat{u}_x\\ \vec{p} = p\,\hat{u}_z\end{array}\right\}\ \vec{r}\cdot\vec{p} = 0 \Rightarrow \boxed{V(x=L) = 0}$$

$$\vec{E}(x=L) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\,\cancel{\vec{r}\cdot\vec{p}}}{r^5}\vec{r} - \frac{1}{r^3}\vec{p}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-4\pi R^3 P}{3\cdot L^3}\hat{u}_z = -\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 L^3}\hat{u}_z$$

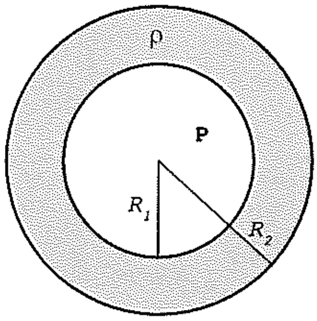
$$\boxed{\vec{E}(x=L) = \frac{-R^3 P}{3\varepsilon_0 L^3}\hat{u}_z}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZIENTZIA ETA TEKNOLOGIA FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Elektromagnetismoa I 2017/18 kurtsoko azterketa



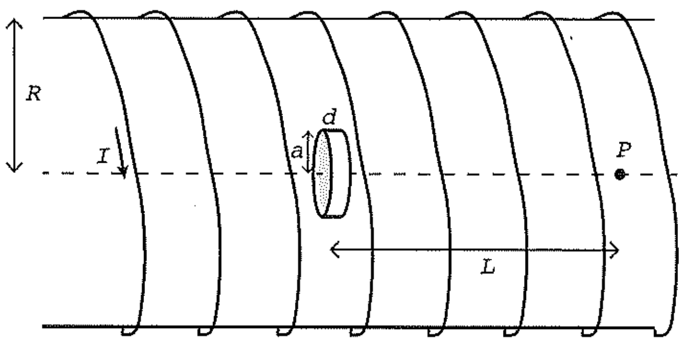
1. (3 puntu) R_1 erradioko esfera dielektriko batek $\mathbf{P} = Kr^2\mathbf{u}_r$ polarizazio konstantea darama. R_2 erradioraino $\rho = br$ karga dentsitateko geruza esferiko batek inguratzen du esfera. Lor itzazu

i) eremu elektrikoa eta desplazamendu elektrikoa espazioko alde guztietan;

ii) zentruko potentzial elektrikoa;

2. (3 puntu) a erradioko bi xafla eroale eta paralelo d distantziaz aldenduak dira. I korronte konstanteak kargatzen du kondentsadorea. Erabil ezazu Poyntingen bektorea ondokoa frogatzeko: denbora unitateko kondentsadorearen barruan sartzen den energia elektromagnetikoa VI dugu, non V xaflen arteko potentzial diferentzia den.

3. (3 puntu) R erradioko eta luzera infinituko solenoide batetik I intentsitatea dario. Solenoidearen bira dentsitatea n dugu. Solenoidearen barruan μ konstanteko diska magnetiko bat dago, a erradiokoa eta d altuerakoa ($d \ll a$). Diska eta solenoidea ardazkideak dira. Kalkula itzazu diskaren momentu magnetikoa eta bere imanazioa. Kalkula ezazu P puntuko eremu magnetiko osoa.



4. (Puntu 1) Kontsidera dezagun uhin gida ardazkide infinitua; hau da, a erradioko zilindro infinitu eroale bat eta b erradioko geruza zilindriko eroalea ardazkideak dira. Euren artean uhin elektromagnetika hedatzen da. Koordenatu zilindrikoetan uhinaren eremu elektrikoa dugu:

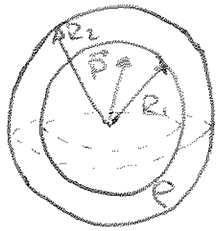
$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{r}\cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_r\,.$$

Kalkula itzazu $\mathbf{B}$ eremua eta $r = a$ gainazaleko karga dentsitatea. Iradokizuna: $\mathbf{B}$ kalkulatzeko, kontuan izan $\mathbf{B}$ eta $\mathbf{E}$ ortogonalak direla, eta $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ beti betetzen dela.

1. ARIKETA

R_1 erradioko esfera dielektriko batek $\vec{P} = kr^2\hat{u}_r$ polarizazio konstantea darama. R_2 erradioraino $\rho = br$ karga-dentsitateko geruza esferiko batek inguratzen du esfera. Lor itzazu:

i) Eremu elektrikoa eta desplazamendu elektrikoa espazioko alde guztietan.



Lehenik eta behin:

R_1 esferan polarizazio karga egongo da, baina hau ez da karga askea izango!!

R_2 geruzarena aldiz, BAI izango dela karga askea!

• Lehenik eta behin, $\vec{D}$ kalkulatuko dugu:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{askea} \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{askea}$$

Lehenik eta behin, simetria esferikoa dugunez: $\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{u}_r \\ \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{u}_r \end{cases}$

* S gainazalak esferarekin zentrukide diren r erradioko geruza esferikoak izango dira.

• $0 < r < R_1$:

Esan bezala, $Q_{aske} = 0 \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = 0\,\hat{u}_r$

• $R_1 < r < R_2$:

Kasu honetan esfera barruan geratzen zaigun karga hartu behar dugu kontuan.

$$Q_{aske} = \int_{R_1}^{r} \rho(r)\, dV = \int_{R_1}^{r} b \cdot r\, 4\pi r^2 dr = 4\pi b \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{r} = \pi b\,(r^4 - R_1^4)$$

Beraz: $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{aske} \Rightarrow D\cdot 4\cancel{\pi} r^2 = \cancel{\pi} b\,(r^4 - R_1^4)$

$$D(r) = \frac{b}{4}\,\frac{r^4 - R_1^4}{r^2}$$

- $r > R_2$:

Hemen inguratutako karga askea geruzak duen karga da.

$$Q_{aske} = \int_{R_1}^{R_2} \rho(r)\,dr = \ldots = \pi b\,(R_2^4 - R_1^4)$$

Beraz: $\oint_S \vec{D}\,d\vec{s} = Q_{aske} \Rightarrow D\cdot 4\cancel{\pi} r^2 = \cancel{\pi} b\,(R_2^4 - R_1^4) \Rightarrow D(r) = \frac{b}{4}\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{r^2}$

Beraz, laburbilduz:

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0\,\hat{u}_r, & r < R_1 \\ \frac{b}{4}\,\frac{r^4 - R_1^4}{r^2}\,\hat{u}_r, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{b}{4}\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{r^2}\,\hat{u}_r, & r > R_2 \end{cases}}$$

Orain, badakigunez, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ dela, $\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0}$

Polarizaturik soilik R_1 erradioko esfera dagoenez, eremua ezaguna dugu.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{k}{\epsilon_0}\,r^2\,\hat{u}_r, & r < R_1 \\ \frac{b\,(r^4 - R_1^4)}{4\epsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{b\,(R_2^4 - R_1^4)}{4\epsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r, & r > R_1 \end{cases}}$$

ii) Zentruko potentzial elektrikoa.

Eremua ezaguna dugunez, hau integratzea nahikoa zaigu zentruko potentziala kalkulatzeko.

- $r > R_2$:

$$\int_{\Phi(\infty)}^{\Phi(R_2)} d\Phi = -\int_{\infty}^{R_2} \frac{b(R_2^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{b(R_2^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R_2} = \frac{b(R_2^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 R_2}$$

$\Phi(\infty) = 0$ hartu $\longrightarrow$ $\Phi(R_2) = \dfrac{b(R_2^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 R_2}$

- $R_1 < r < R_2$:

$$\int_{\Phi(R_1)}^{\Phi(R_2)} d\Phi = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{b(r^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 r^2}\, dr = -\frac{b}{4\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr + \frac{bR_1^4}{4\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\, dr =$$

$$= -\frac{b}{4\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2} + \frac{bR_1^4}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = -\frac{b}{12\varepsilon_0}(R_2^3 - R_1^3) + \frac{bR_1^4}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi(R_1) = \frac{b}{4\varepsilon_0}R_2^3 - \cancel{\frac{b}{4\varepsilon_0}\frac{R_1^4}{R_2}} + \frac{b}{12\varepsilon_0}R_2^3 - \frac{b}{12\varepsilon_0}R_1^3 + \cancel{\frac{bR_1^4}{4\varepsilon_0 R_2}} - \frac{bR_1^3}{4\varepsilon_0}$$

$$= \frac{bR_2^3}{3\varepsilon_0} - \frac{bR_1^3}{3\varepsilon_0}$$

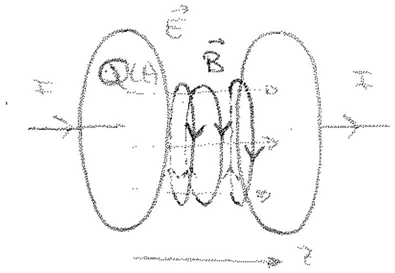
- $0 < r < R_1$:

$$\int_{\Phi(R_1)}^{\Phi(0)} d\Phi = -\int_{R_1}^{0} -\frac{k}{\varepsilon_0} r^2\, dr = \frac{k}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_1}^{0} = -\frac{kR_1^3}{3\varepsilon_0} = \Phi(0) - \Phi(R_1)$$

Eta, beraz: $\boxed{\Phi(0) = \dfrac{bR_2^3 - (k+b)R_1^3}{3\varepsilon_0}}$

2. ARIKETA

a erradioko bi xafla eroale eta paralelo d distantziaz aldenduta daude. I korronte konstanteak kargatzen du kondentsadorea. Erabili ezazu Poyntingen bektorea ondokoa frogatzeko: denbora unitateko kondentsadorean sartzen den energia elektromagnetikoa VI dugu, non V xaflen arteko potentzial diferentzia den.



Lehenengo, kondentsadorearen karga kalkulatuko dugu:

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow Q(t) = I\,t$$

Bestalde, bi xaflen artean, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{u}_z$

$\sigma = \frac{Q(t)}{S}$ hortaz, $\vec{E}(r,t) = \frac{I\,t}{\pi\epsilon_0 a^2}\hat{u}_z$

Ikus dezakegunez, $\vec{E}$ aldakorra da, ondorioz, $\vec{B}$ bat induzituko du.

$\vec{E}(r,t) = E(r,t)\,\hat{u}_z$ denez, badakigu $\vec{B}(r) = B(r)\,\hat{u}_\varphi$ motakoa dela.

Maxwellen ekuazioa: $\nabla\wedge\vec{B} =$

$$\int_S (\nabla\wedge\vec{B})\, d\vec{s} = \int_S \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\, d\vec{s} \underset{\text{Stokesen teorema}}{\Longleftrightarrow} \int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\, d\vec{s}$$

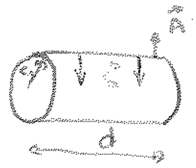
$$B(r)\, 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \frac{I}{\cancel{\pi} a^2}\cdot \cancel{\pi} r^{2} \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\, r\, \hat{u}_\varphi$$

Zilindrora sartzen den energia kalkulatzea Poynting bektorearen fluxua kondentsadorearen mugan zehar kalkulatzea da.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{I\,t}{\pi\epsilon_0 a^2}\hat{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\, r\, \hat{u}_\varphi$$

$$\vec{S} = -\frac{I^2 t r}{2\pi^2 a^4 \epsilon_0}\hat{u}_r$$

Esan bezala, fluxua kondentsadorearen mugan:



$$\Phi_S = \int_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = -\frac{I^2 t}{\epsilon_0 \cancel{2}\pi^{\cancel{2}} a^3} \cdot \cancel{2\pi} a \cdot d = -\frac{I^2 t d}{\pi a^2 \epsilon_0}$$

Gainazala kanporantz definitu dugunez, $\Phi_S < 0$ izateak energia sartu egiten dela adierazten digu

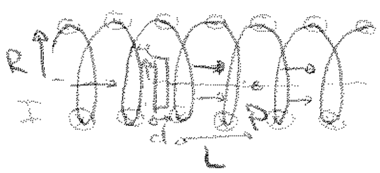
Frogatu behar dugu hori $V\cdot I$-ren berdina dela:

$\vec{E} = \frac{I t}{\pi \epsilon_0 a^2}\hat{u}_z$ izanik, badakigu $V = \frac{I t d}{\pi a^2 \epsilon_0}$.

Hortaz, $I\cdot V = \frac{I^2 t d}{\pi \epsilon_0 a^2}$, eta, beraz, $\boxed{-\Phi_S = V\cdot I}$

3. ARIKETA

R erradioko eta luzera infinituko solenoide batetik I intentsitatea doa. Solenoidearen bira dentsitatea n dugu. Solenoidearen barruan μ konstanteko diska magnetikoa dago, a erradiokoa eta d altuerakoa ($d \ll a$). Diska eta solenoidea ardazkideak dira. Kalkulatu diskaren momentu magnetikoa eta imanazioa. Kalkulatu P puntuko eremu magnetiko osoa.



Lehenengo $\vec H$ kalkulatuko dugu solenoidearen barruan.

Badakigu solenoidearen kanpoan $B=0$ dela eta barruan, intentsitatearen noranzkoarengatik, $\underline{\vec B = B\hat u_z} \Rightarrow \vec H = H\hat u_z$

$\vec H$ kalkulatzeko: $\nabla \wedge \vec H = \vec J_{askea} \Rightarrow \oint_C \vec H \cdot d\vec l = I_{ing}$

$$\left.\begin{array}{l}\oint_C \vec H\, d\vec l = \int_l H\hat u_z\, dl\, \hat u_z = H\cdot l \\ I_{ing} = n\cdot l I\end{array}\right\} \quad \underline{\vec H = nI\hat u_z}$$

Orain, diskoa material lineal bat hartuz: $\vec B = \begin{cases} \mu\, nI\hat u_z, & \text{diskoan} \\ \mu_0 nI\hat u_z, & \text{bestela}\end{cases}$

Diskoaren imanazioa kalkulatzeko:

$$\vec H = \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec M \Rightarrow \vec M = \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec H \Rightarrow (\vec M = M\hat u_z)$$

$$M = \frac{\mu}{\mu_0} nI - nI = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} nI \Rightarrow \boxed{\vec M = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} n I \hat u_z}$$

$$\vec M = \frac{d\vec m}{dV} \Rightarrow \int d\vec m = \vec m = \int_V \vec M\, dV = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} nI \pi a^2 d\, \hat u_z$$

$(\vec m = m\hat u_z)$

$$\boxed{\vec m = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} nI\pi a^2 d\,\hat u_z}$$

Orain, P puntuko eremu magnetikoa ($\vec{B}$) kalkulatzeko, gainezarmen printzipioa aplikatuko dugu.

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_{sole}(P) + \vec{B}_{disk}(P)$$

- $\vec{B}_s(P)$ ezagutzen dugu $\Rightarrow$ $\underline{\vec{B}_s(P) = \mu_0 n I \hat{u}_z}$

- $\vec{B}_d(P)$ kalkulatzeko, hurbilketa dipolarra egingo dugu:

  Hau da, $L >> a, d$ kontsideratuz, $\vec{m}$ duen diskak sortutako eremu magnetikoa $\vec{m}$-ko dipolo magnetiko batek sortuko lukeen eremuaren berdina izango da.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,\vec{r}\cdot\vec{m}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,L\hat{u}_z\cdot\chi_m n I a^2\pi d\hat{u}_z}{L^5}L\hat{u}_z - \frac{\chi_m n I a^2\pi d}{L^3}\hat{u}_z\right) =$$

$$= \frac{\cancel{\mu_0}}{2\cancel{\pi}}\cdot\frac{\mu-\mu_0}{\cancel{\mu_0}}\,\frac{n I \cancel{\pi} a^2 d\,\hat{u}_z}{L^3} \Rightarrow \underline{\vec{B}_s(P) = \frac{\mu-\mu_0}{2L^3}\,n I d a^2\,\hat{u}_z}$$

Beraz, $\boxed{\vec{B}(P) = \left(\mu_0 + \frac{\mu-\mu_0}{2L^3}da^2\right)n I \hat{u}_z}$

4. ARIKETA

Kontsidera dezagun uhin gida ardazkide infinitua; hau da, a erradioko zilindro eroale infinitu bat eta b erradioko geruza zilindriko eroalea ardazkideak dira. Euren artean uhin elektromagnetikoa hedatzen da. Koordenatu zilindrikoetan eremu elektrikoa ondorengoa dugu:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r}\cos(kz-\omega t)\,\hat{u}_r$$

Kalkula itzazu $\vec{B}$ eremua eta $r=a$ gainazaleko karga dentsitatea.

Uhina z^+ norabidean hedatzen denez, $\vec{B}(r) = B(r)\,\hat{u}_\varphi$ izango da.

Maxwellen ekuazioa: $\nabla\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\cdot\ \nabla\wedge\vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial z}\hat{u}_\varphi = -\frac{E_0}{r}k\sin(kz-\omega t)\,\hat{u}_\varphi$$

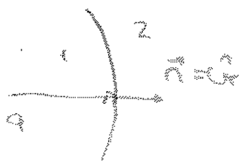
$$\cdot\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{E_0}{r}k\sin(kz-\omega t)\,\hat{u}_\varphi$$

$$\rightarrow\ \vec{B} = \int\frac{E_0}{r}k\sin(kz-\omega t)\,dt\,\hat{u}_\varphi = \frac{E_0}{r}\frac{k}{\omega}\cos(kz-\omega t)\,\hat{u}_\varphi$$

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi/\lambda}{2\pi f} = \frac{1}{\lambda f} = \frac{1}{c}\ \text{(uhin elektromagnetikoak)}$$

Beraz, $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c\,r}\cos(kz-\omega t)\,\hat{u}_\varphi}$

σ kalkulatzeko, $\vec{E}$-ren mugalde baldintza aplikatuko dugu:



$r<a$ denean, eroalea denez, $\vec{E}(1) = 0\,\hat{u}_r$

$$\hat{n}\,(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\hat{u}_r\left[\frac{E_0}{a}\cos(kz-\omega t)\,\hat{u}_r - 0\,\hat{u}_r\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Beraz, $\boxed{\sigma = \dfrac{\varepsilon_0 E_0}{a}\cos(kz-\omega t)}$