

**Ekonomiako Gradua, 3. kurtsoa**

**EKONOMETRIA  
APLIKATUA**

**Gomendatutako ariketak**

**Azterketen bilduma**

**Ordenagailuko tareak**

Bilduma honen erreprodukzioa, eta baita bere kopien banaketa baimenik gabe egitea ere, debekaturik dago. Halaber beste eskubide infrakzioak egitea ere. Publikatze eskubide guztiak UPV/EHUko Ekonomia eta Enpresa Fakultateko Ekonometria eta Estatistikaren Sailak ditu.

©UPV/EHU 2019

Egileak: Ekonomia Aplikatua III  
Ekonometria eta Estatistika

# Edukia

<b>Gomendatutako ariketak</b>	<b>6</b>
1 GAIA: Karratu Txikien Zabalduak . . . . .	6
2 GAIA: Heterozedastizitatea . . . . .	9
3 GAIA: Autokorrelazioa . . . . .	27
4 GAIA: Erregresore estokastikoak eta eredu dinamikoak . . . . .	38

## **Azterketen bilduma** **63**

<b><u>ARIKETA EL-2006. 1</u></b> (2006-Ekaina)	<b>63</b>
<b><u>ARIKETA EL-2006. 2</u></b> (2006-Ekaina)	<b>66</b>
<b><u>ARIKETA EL-2006. 3</u></b> (2006-Iraila)	<b>67</b>
<b><u>ARIKETA EL-2006. 4</u></b> (2006-Iraila)	<b>69</b>
<b><u>ARIKETA EL-2007. 1</u></b> (2007-Ekaina)	<b>73</b>
<b><u>ARIKETA EL-2007. 2</u></b> (2007-Ekaina)	<b>76</b>
<b><u>ARIKETA EL-2007. 3</u></b> (2007-Iraila)	<b>78</b>
<b><u>ARIKETA EL-2007. 4</u></b> (2007-Iraila)	<b>81</b>
<b><u>ARIKETA EL-2008. 1</u></b> (2008-Ekaina (jarraia))	<b>84</b>
<b><u>ARIKETA EL-2008. 1</u></b> (2008-Ekaina)	<b>89</b>
<b><u>ARIKETA EL-2008. 2</u></b> (2008-Ekaina)	<b>94</b>
<b><u>ARIKETA EL-2008. 3</u></b> (2008-Iraila)	<b>96</b>
<b><u>ARIKETA EL-2008. 4</u></b> (2008-Iraila)	<b>98</b>
<b><u>ARIKETA EL-2008. 5</u></b> (2008-Iraila)	<b>102</b>
<b><u>ARIKETA EL-2009. 1</u></b> (2009-Ekaina (jarraia))	<b>105</b>
<b><u>ARIKETA EL-2009. 2</u></b> (2009-Ekaina (jarraia))	<b>108</b>
<b><u>ARIKETA EL-2009. 3</u></b> (2009-Ekaina)	<b>108</b>
<b><u>ARIKETA EL-2009. 4</u></b> (2009-Ekaina)	<b>110</b>
<b><u>ARIKETA EL-2009. 5</u></b> (2009-Ekaina)	<b>112</b>

<u>ARIKETA EL-2009. 6</u> (2009-Ekaina)	113
<u>ARIKETA EL-2009. 7</u> (2009-Iraila)	116
<u>ARIKETA EL-2009. 8</u> (2009-Iraila)	119
<u>ARIKETA EL-2010. 1</u> (2010-Ekaina (jarraia))	123
<u>ARIKETA EL-2010. 2</u> (2010-Ekaina (jarraia))	126
<u>ARIKETA EL-2010. 3</u> (2010-Ekaina/Irila)	127
<u>ARIKETA EL-2010. 4</u> (2010-Ekaina/Irila)	129
<u>ARIKETA EL-2010. 5</u> (2010-Ekaina/Irila)	130
<u>ARIKETA EL-2010. 6</u> (2010-Ekaina/Irila)	133
<u>ARIKETA 2014. 1</u> (2014-Maiatza)	134
<u>ARIKETA 2014. 2</u> (2014-Maiatza)	136
<u>ARIKETA 2014. 3</u> (2014-Ekaina)	137
<u>ARIKETA 2014. 4</u> (2014-Ekaina)	139
<u>ARIKETA 2015. 1</u> (2015-Maiatza)	140
<u>ARIKETA 2015. 2</u> (2015-Maiatza)	143
<u>ARIKETA 2015. 3</u> (2015-Ekaina)	145
<u>ARIKETA 2015. 4</u> (2015-Ekaina)	148
<u>ARIKETA 2015. 5</u> (2015-Ekaina)	150
<u>ARIKETA 2016. 1</u> (2016-Maiatza)	151
<u>ARIKETA 2016. 2</u> (2016-Maiatza)	153
<u>ARIKETA 2016. 3</u> (2016-Ekaina)	155
<u>ARIKETA 2016. 4</u> (2016-Ekaina)	158
<u>ARIKETA 2016. 5</u> (2016-Ekaina)	160
<u>ARIKETA 2017. 1</u> (2017-Maiatza)	160
<u>ARIKETA 2017. 2</u> (2017-Maiatza)	162

<u>ARIKETA 2017. 3 (2017-Ekaina)</u>	164
<u>ARIKETA 2017. 4 (2017-Ekaina)</u>	165
<u>ARIKETA 2017. 5 (2017-Ekaina)</u>	167
<u>ARIKETA 2018. 1 (2018-Maiatza)</u>	167
<u>ARIKETA 2018. 2 (2018-Maiatza)</u>	169
<u>ARIKETA 2018. 3 (2018-Ekaina)</u>	171
<u>ARIKETA 2018. 4 (2018-Ekaina)</u>	173
<b>Ordenagailuko tareak</b>	176
<u>1. TAREA</u>	176
<u>2. TAREA</u>	177
<u>3. TAREA</u>	178
<u>4. TAREA</u>	180
<u>5. TAREA</u>	182
<u>6. TAREA</u>	183
<u>7. TAREA</u>	184
<u>8. TAREA</u>	185

# Gomendatutako ariketak

## 1 GAIA: Karratu Txikien Zabalduak

### ARIKETA 1 (PZ-E8)

Izan bedi  $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$  eredua, non  $E(u_t^2) = tX_t^2$  den.

- a)  $Y_t$  eta  $X_t$ -ren hiru behaketa ezagutuz, lor itzazu matrizialki aurreko ereduaren  $\alpha$  eta  $\beta$  parametroen KTA estimazioak.

t		1	2	3
$Y_t$		1	1	0
$X_t$		1	-1	1

- b) Kalkula ezazu KTA estimatzailearen bariantza eta kobariantzen matrizea, ondorengo informazioa kontuan harturik:

$$E(u_1 u_3) = E(u_3 u_1) = 1$$

$$E(u_1 u_2) = E(u_2 u_1) = E(u_2 u_3) = E(u_3 u_2) = 0$$

- c) Aurreko informazioa emanik, zein propietate ditu KTA estimatzaileak?
- d) Ezagutzen al duzu propietate hobeak dituen estimatzailearik? Zein? Zein propietate ditu? Idatz ezazu bere bariantza eta kobariantzen matrizea (ez ezazu estimatu, idatz ezazu formula baino ez, bere elementu bakoitza zer den adieraziz).
- e) Hasierako erudian ondokoa betetzen bada:

$$E(u_t^2) = tX_t^2 \text{ eta } E(u_t, u_s) = 0 \quad \forall t, s \quad t \neq s$$

Idatz ezazu eredu hau zuzentzen duen eraldatutako eredua eta froga ezazu perturbazioek bariantza konstantea daukatela.

- f) Estima itzazu matrizialki eraldatutako ereduaren parametroak KTA metodoaren bitartez.

## ARIKETA 2 (PZ-E15)

A ikertzaile batek ikasleen gastuak azaldu nahi ditu ondorengo ereduarekin:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad i : 1, \dots, N \quad (1)$$

non  $Y_i$  :  $i$  ikaslearen gastua den.

$X_i$  :  $i$  ikaslearen sarrera den.

(1) ereduan oinarrizko hipotesiak betetzen dira, bereziki:

$$E(u_i) = 0$$

$$\text{Var}(u_i) = \sigma_u^2 \quad \forall i$$

$$E(u_i u_s) = 0 \quad \forall i \neq s$$

Beste ikertzaile batek, **B**, klase bakoitzeko datuak taldekatzea hobea dela dio, horrela eragiketak errazten direlako. Ikasleak 8 taldeetan daude banatuta, klase bakoitzeko ikasleen kopurua  $n_1, n_2, \dots, n_8$  izanik. B ikertzaileak, beraz, aldagai bakoitzatik 8 behaketa erabiliko ditu, behaketa bakoitza talde ezberdin bakoitzari dagokiolarik.

$$\bar{Y}_j = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} Y_k}{n_j} \quad \bar{X}_j = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} X_k}{n_j} \quad j : 1, 2, \dots, 8$$

Eraikitzen den eredu ondorengoa da:

$$\bar{Y}_j = \alpha + \beta \bar{X}_j + v_j \quad j : 1, 2, \dots, 8$$

- a) Zein da  $v_j$ -ren batezbestekoa eta bariantza?
- b) Ikertzaile biek beraien ereduak Karratu Txikien Arrunten bidez estimatu nahi dituzte. Zein metodo da egokiena kasu bakoitzean? Zergatik?
- c) Klase guztietako ikasleen kopurua berdina izango balitz, aurreko atalean ateratako ondorioak aldatuko lirateke?

**ARIKETA 3** (EAZL-1997.1)

Kontsidera ezazu ondorengo erregresio eredua:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \dots, 100$$

non  $X_2$  eta  $X_3$  aldagai finkoak diren eta  $u_t \sim NIB(0, a + bt^2)$ .

- a) Suposa ezazu  $a = 2b$  dela jakina dela, non  $b$  parametro ezezagun bat den.
  - a.1) Lor ezazu  $Y$ -ren bariantza eta kobariantzen matrizea.
  - a.2) Esan ezazu zein estimazio metodo den egokiena, erantzuna arrazonatuz.
- b) Suposa ezazu orain  $a = 0$  dela eta  $b$  parametro ezezaguna dela. Eredua Karratu Txikien Zabalduen bitartez estimatu da, ondorengo emaitzak lortuz:

$$\hat{\beta}_{KTZ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \widehat{Var}(\hat{\beta}_{KTZ}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kontrasta itzazu ondorengo hipotesiak:

- b.1)  $\beta_3 = 0$
- b.2)  $\beta_3 = 0$  eta  $\beta_1 + 2\beta_2 = 5$



## 2 GAIA: Heterozedastizitatea

### ARIKETA 4 (PZ-E6)

Demagun ondorengo eredua:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

non:

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 0 & \forall t \\ E(u_t^2) &= \frac{1}{X_{3t}^2} & \forall t \\ E(u_t u_s) &= 0 & \forall t \neq s \end{aligned}$$

- Idatz ezazu perturbazio homozedastikoak dituen eraldatutako eredua. Bila ezazu eraldatutako perturbazio hauen banaketa.
- Ondorengo lau datuak emanik, idatz ezazu eraldatutako ereduaren X erregresore matrizea.

$t$	1	2	3	4
$X_{2t}$	0	1	1	2
$X_{3t}$	3	0,5	1	1

### ARIKETA 5 (PZ-E20)

Izan bedi ondoko eredua

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad i = 1, \dots, N$$

non  $\text{Var}(u_i) = P_i^2 \sigma^2$  den.

Erabaki ezazu, ondorengo ereduetatik, zein dagoen behar bezala eraldatuta heterozedastizitatearen arazoa zuzentzeko. Azal ezazu zergatik.

$$\begin{aligned} P_i Y_i &= \alpha + \beta P_i X_i + P_i u_i \\ \frac{Y_i}{P_i} &= \frac{\alpha}{P_i} + \beta \frac{X_i}{P_i} + \frac{u_i}{P_i} \\ P_i Y_i &= \alpha P_i + \beta P_i X_i + P_i u_i \\ \frac{Y_i}{P_i} &= \alpha + \beta \frac{X_i}{P_i} + \frac{u_i}{P_i} \end{aligned}$$

## ARIKETA 6 (PZ-E38)

$$K_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + u_t \quad (1)$$

kontsumo eredua estimatu egin da Euskal Autonomia Erkidegoarentzat 1965 eta 1994 bitarteko urteko datuak erabiliz. KTA bitartez bi estimazio egin dira, bat lehen hamar datuentzat eta beste bat azken hamarrentzat.

$$\begin{aligned} 1965 - 1974 : \hat{K}_t &= 22699,0 + 0,336R_t \\ KTB_1 &= 9703500,0 \quad R_1^2 = 0,85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1985 - 1994 : \hat{K}_t &= 38.767,0 + 0,6542R_t \\ KTB_2 &= 457036363,0 \quad R_2^2 = 0,78 \end{aligned}$$

- Erabil ezazu Goldfeld eta Quandten kontrastea epe bien artean homozedastizitatea dagoen egiaztatzeko.
- Epe osoaren datuak erabiliz (1965-1994), KTA bitartez lortutako emaitzak ondorengoak dira:

$$K_t = 35.205,0 + 0,586R_t + \hat{u}_t \quad R^2 = 0,82 \quad (2)$$

eta  $R_t$ -rekiko erregresioa:

$$\hat{u}_t^2 = 64519,0 + 0,52R_t + \hat{v}_t \quad R^2 = 0,71 \quad (3)$$

Azken bi erregresio hauek ematen duten informazioa erabiliz, kontrasta ezazu a) ataleko hipotesi hutsa.

- Aurreko ataletan lortutako emaitzak kontuan harturik, zein estimazio metodo erabiliko zenuke kontsumo eredua azaltzeko? Zergatik? Azal ezazu zehaztasunez.

## ARIKETA 7 (EL-2000.2)

Izan bedi ondorengo eredua:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

non  $X_i$  ez estokastikoa den,  $E(u_i) = 0$ ,  $E(u_i^2) = \sigma^2[1+0,5X_i]^2 \quad \forall i$  eta  $E(u_i u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

- Idatz ezazu perturbazio bektorearen bariantza eta kobariantzen matrizea.
- Idatz ezazu KTZri dagokion eraldatutako eredua eta lor itzazu bere perturbazioaren propietateak.
- Azal ezazu nola estimatuko zenituzkeen eraldatutako ereduaren parametroak. Zein propietate dituzte zure estimatzaileek?

- d) KTZ estimatzailea erabiliz eta  $u_i$  normala dela suposatuz, azal ezazu nola kontrastatuko zenukeen  $H_o : \beta_2 = 1$  hipotesia. (Ez ahaztu kontrasterako estatistikoaren elementu guztiak azaltzea)
- e) (4) ekuazioaren parametroen KTA estimatzailea ez da efizientea. Zehaz ezazu nola erabiliko zenukeen estimatzaile hau  $H_o : \beta_2 = 1$  era egoki batean kontrastatzeko. (Ez ahaztu kontrasterako estatistikoaren elementu guztiak azaltzea)
- f) Kontraste biak baliokideak dira edo bietatik baten bat nahiago duzu? Arrazona ezazu zure erantzuna.

### **ARIKETA 8** (EL-2000.7)

Hedapen prozesuan dagoen enpresa komertzial batek industri sektore eta bulego kopuruaren arteko erlazioa ikertu nahi du probintziaka. Horretarako,  $S$  (probintziako sukurtsal kopurua) eta  $L$  (lizentzia komertzialen kopurua, komertzio sektorearen garrantziaren adierazlea) aldagaien 50 behaketaz osaturiko lagin bat dauka. Bere ikerketa-taldeak hurrengo ekuazioa KTA bitartez estimatu du:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 L_i + u_i \quad (5)$$

Estimazioaren emaitzak, 50 behaketak erabiliz, hurrengoa da:

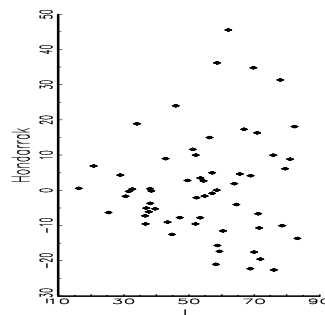
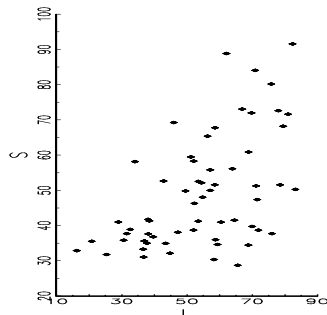
$$\hat{S}_i = 22,2 + 0,5 L_i, \quad R^2 = 0,3 \quad (6)$$

(t - ratioa)
(3, 9)
(5, 05)

$L_i$  aldagai azaltzailearekiko,  $S_i$  aldagai endogenoaren eta (6) doikuntzaren KTA hondarren adierazpen grafikoa hurrengoa da:

Ereduaren aldagaiak

KTA hondarrak



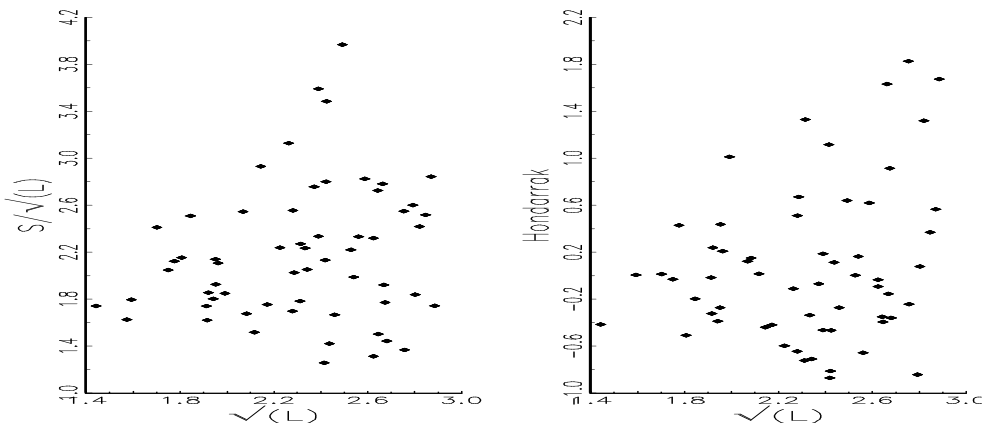
- a) Ikerketa-taldeko arduraduna ez dago pozik lorturiko emaitzekin. Zein arazo islatzen dira aurreko grafikoetan?

Arduradun berberak, estimazioa hobetzeko, bi aukera ematen ditu.

**Lehena** hurrengo ekuazioa KTA bitartez estimatzean datza:

$$\frac{S_i}{\sqrt{L_i}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{L_i}} + \beta_2 \sqrt{L_i} + \frac{u_i}{\sqrt{L_i}} \quad (7)$$

- b) Zein da (5) ereduan bete behar ez den oinarritzko hipotesia (7) eredua erabiltzeko? Zein da proposatzen ari den konponbidea? (6) ereduko KTA estimazioa zertan hobetzea espero du?
- c)  $\sqrt{L_i}$ -rekiko  $\frac{S_i}{\sqrt{L_i}}$  aldagaiaren eta (7) ereduaren doikuntzaren KTA hondarren adierazpen grafikoak ikusirik, arazoa era egoki batean konpontzen ari dela uste duzu?



**Bigarren** aukera  $S_i$  eta  $L_i$ -ren arteko erlazioa ez lineala izatea da, esponentziala baizik:  $S_i = \exp\{\gamma_1 + \gamma_2 L_i + v_i\}$ . Ondorioz hurrengo eredua KTA bitartez estimatzen da:

$$\ln S_i = \gamma_1 + \gamma_2 L_i + v_i \quad (8)$$

50 behaketaz osaturiko lagin osoa erabiliz, lorturiko emaitzak hauek dira:

$$\widehat{\ln S_i} = 3,31 + 0,02 L_i, \quad R^2 = 0,33 \quad HKB = 10,54 \quad (9)$$

(t - ratioa)                      (31, 0)                      (5, 3)

$$\frac{\hat{v}_i^2}{0,21} = 0,053 + 0,017 L_i + \hat{e}_i, \quad R^2 = 0,014 \quad HKB = 89,72 \quad (10)$$

(0,09)                      (1,6)

**Gainera**,  $L$  aldagaiaren balioen funtzioan lagina ordenatu ondoren, lehen eta azken 12 behaketak erabiliz, (8) motako bi erregresio estimatu dira. Lorturiko hondar karratuen baturen balioak  $HKB_1 = 0,77$  eta  $HKB_2 = 0,992$  dira hurrenez hurren.

- d) Zure ustez, (8) ereduak (5) ereduak aurkezten zuen hipotesien ez betetzearen arazo berbera al du? Justifika ezazu zure erantzuna kontraste baten medioz. Azal ezazu zehazki egiten duzuna eta zergatik egiten duzun.
- e) Azkenik, eskainitako konponbideetatik, bat bestea baino egokiagoa dela iruditzen al zaizu? Arrazona ezazu zure erantzuna.

**ARIKETA 9** (EAZL-2001.1)

Familien kontsumoa ( $Y$ ) eta familia-buruaren errentaren ( $X$ ) arteko erlazioa zehazteko hurrengo ekuazioa proposatzen da:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad (11)$$

non  $u_i$  perturbazioek banaketa normala dutela suposatzen den eta 10 familiaren behaketak ezagutzen diren:

$i$	$Y$	$X$
1	8	4
2	91	49
3	191	100
4	22	9
5	55	25
6	32	16
7	81	36
8	176	81
9	138	64
10	31	16
Baturak	825	400

KTA bitarteko estimazioan ondorengoa lortu da:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 400 \\ 400 & 25588 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 825 \\ 52176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gainera, hurrengo erregresio laguntzailea burutu da:

$$\frac{\hat{u}_i^2}{48,65} = -0,245 + 0,0311X_i + \hat{w}_i \quad \sum \hat{w}_i^2 = 1,1473 \quad R^2 = 0,89 \quad (12)$$

non  $\hat{u}_i$ , (11) ereduko KTA hondarrak diren.

- a) Erabil ezazu metodo grafikoren bat heterozedastizitatearen arrazoren bat existitzen den edo ez ikusteko. Komenta itzazu emaitzak.

- b) Kontrasta ezazu, Breusch-Paganen kontrastearen bitartez,  $X_i$  aldagaiak eragindako heterozedastizitatearen existentzia. Idatz ezazu garbi zein den hipotesi hutsa, hipotesi alternatiboa, kontrasterako estatistikoa eta bere banaketa. Kasu konkretu honentzako, **komenta** ezazu aurreko kontrastearen **fidagarritasuna**.
- c) Estima ezazu (11) eredua KTZ bitartez,  $Bar(u_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i$  dela suposiziopean.
- d) Familia-buruaren errenta,  $X$ , nabaria al da familien kontsumoa,  $Y$ , azaltzeko?

### ARIKETA 10 (EL-2002.1)

15 herrialdetako lagin batekin hurrengo estimatu nahi da: Gizarte Segurantzari egindako kotizazioen gorapenak langileek egindako kotizazioaren zatian izango lukeen eragina. 1982 urteko datuekin Gizarte Segurantzari egindako kotizazioei (GSK) buruzko informazioa eta langileei dagokien zatia (GSKL), bi kasuetan sarrera fiskalen portzentai bezala, hurrengo taulako lehen bi zutabeetan agertzen dira:

	GSK	GSKL	$\hat{u}$
Austria	31,9	13,5	
Belgika	29,8	10,1	-0,08327
Danimarka	2,8	1,5	-2,97434
Frantzia	43,2	11,5	
Alemania	36,2	16,1	
Irlanda	15,0	5,4	-1,65393
Italia	47,2	7,1	
Japonia	30,4	10,7	0,38986
Luxenburgo	28,0	11,2	1,39732
Herbehereak	41,6	18,0	
Portugal	28,5	10,8	0,89160
Espania	46,5	10,3	
Suitza	31,0	10,2	-0,23700
Britaina Handia	16,9	7,6	0,14433
A.E.B.	27,7	10,8	1,06076

Hurrengo eredua zehazten dugu:

$$GSKL_i = \beta_1 + \beta_2 GSK_i + u_i \quad i = 1, \dots, 15$$

Eredua KTA bidez estimatzearen emaitzak hurrengoak dira:

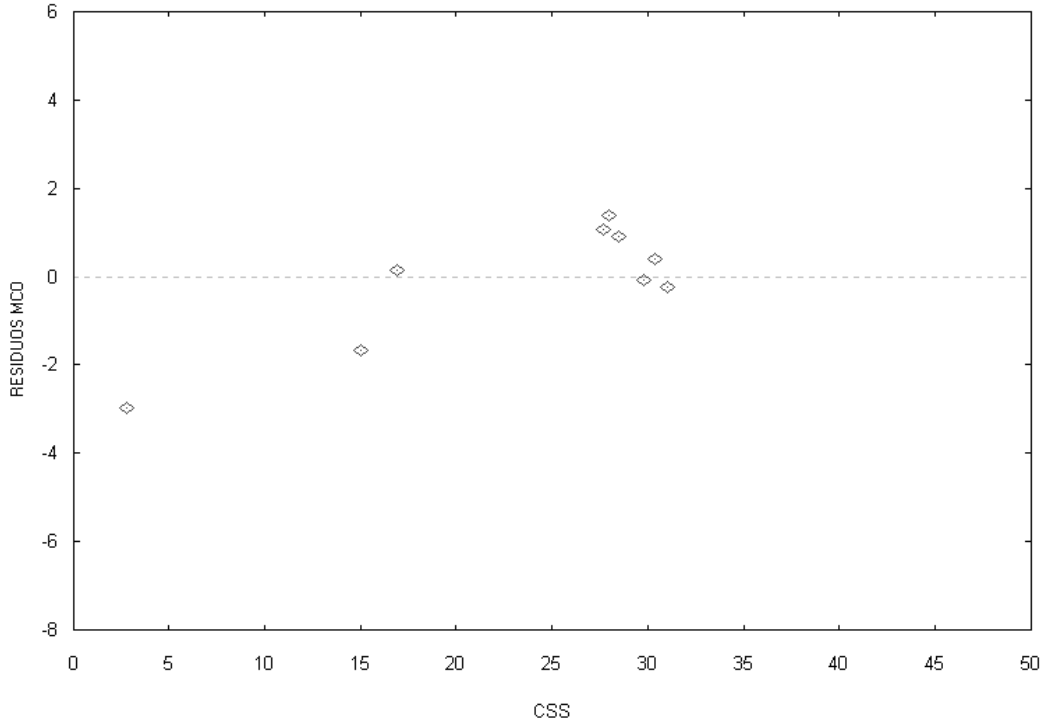
$$\widehat{GSKL}_i = 3,8823 + 0,211442 GSK_i \quad (13)$$

(t - estat.)                      (1,69)                      (3,01)

$$\bar{R}^2 = 0,365 \quad HKB = 132,7767$$

- a) **Begira ezazu taula**, non hirugarren zutabean KTA hondarrak,  $\hat{u}_i$ , aurkezten diren. Eman ezazu  $\hat{u}_i$  lortzeko formula orokorra. Ondoren, bete itzazu taulan eta hurrengo grafikoan falta direnak:

Irudia 1: **KTA hondarrak**



- b) Grafikoa bete ondoren, komenta ezazu ea arazoren bat egon litekeen zure erantzuna arrazonatuz.
- c) Hurrengo informazioarekin burutu ezazu Goldfeld eta Quandt-en kontrastea. Osatu falta den informazioa eta zehaz itzazu argi kontrastearen elementu guztiak, hipotesi hutsa eta alternatiboa barne.

- Lehen azpilagina

$$\widehat{GSKL}_i = 0,463351 + 0,374431GSK_i \quad (14)$$

$GSKL_i$	1,5					
$GSK_i$	2,8					
$\hat{u}_1$	-0,011759		0,808758		0,25257	

- Bigarren azpilagina

$$\widehat{GSKL}_i = 28,9928 - 0,395203GSK_i \quad (15)$$

$GSKL_i$	13,5				
$GSK_i$	31,9				
$\hat{u}_2$		1,413507		-0,420075	-3,239264

- d) Aurreko ataletan lortutakoari jarraituz eta **hurrengo informazioarekin** estima itzazu **efizienteki** ereduaren koefizienteak. Azal ezazu nola lortzen den estimatzaile hau eta zer hipotesi egiten ari diren estimatzaile hau efizientea izan dadin.

	$GSKL_i/GSK_i$	$1/GSK_i$	$Konstante_i = 1$
$GSKL_i/GSK_i$	2,12814	0,3672255	5,47296
$1/GSK_i$		0,1463262	0,8374455
$Konstante_i = 1$			15

non, adibidez,  $\sum GSKL_i/GSK_i = 5,47296$ .

- e) Aurreko atalean proposatu duzun estimatzailearekin **kontrasta ezazu** hurrengo hipotesi hutsa: Gizarte Segurantzaren egindako kotizazioen gorapen batek langileen gain eroriko litzateke oso-osorik, hau da,  $H_0 : \beta_2 = 1$ . Zehaz itzazu kontrastea baliagarria izan dadin beharrezko diren balizko guztiak.

## ARIKETA 11 (EL-2002.6)

Hurrengo ereduari

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \dots, T$$

non  $X_{2t}$  eta  $X_{3t}$  aldagai finakoak diren, eta

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 0 \quad \forall t \\ E(u_t^2) &= \sigma_t^2 \quad t = 1, \dots, T \\ E(u_t u_s) &= 0 \quad \forall t, s \quad t \neq s \end{aligned}$$

- a) Demagun  $\sigma_t^2$  ezezaguna dela.  $H_0 : \beta_2 = 0$  hipotesia kontrastatu nahi bada eta  $\beta_2$ ren KTA estimatzailean oinarrituz, idatz itzazu kontrasterako estatistikoa eta bere elementu guztiak, baita erabaki araua ere.
- b) Demagun  $\sigma_t^2 = \frac{1}{X_{3t}^2}$  dela. Azal ezazu nola lortuko zenukeen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ren estimatzaile lineala, alboragabea eta efizientea. Arrazona ezazu zure erantzuna.



## ARIKETA 12 (EL-2003.7)

Demagun hurrengo erregresio eredua dugula:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad i = 1, \dots, N$$

non  $X_i$  ez estokastikoa den,  $u_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ ,  $E(u_i u_j) = 0, i \neq j$  eta  $\sigma_i^2$  funtzio gorakorra da  $X_i$ -rekiko.

- Zer arazo daukagu aurreko ereduan? Nola detekta daiteke? Azal ezazu zehaztasunez proposatzen duzun kontrastea.
- $\beta_1$  eta  $\beta_2$ -ri buruzko hipotesi kontrasteetan, zer ondorio dakar  $\frac{\sum_i \hat{u}_i^2}{N-2} (X'X)^{-1}$  estimatzailearen erabilpenak  $t$  edo  $F$  estatistikoetan? Arrazona ezazu zure erantzuna.

800 behaketeko lagin bati buruzko hurrengo informazioa daukagu:

$$\begin{array}{llll} \sum_i X_i = 330 & \sum_i X_i^2 = 144 & \sum_i \frac{1}{X_i} = 2058 & \sum_i \frac{1}{X_i^2} = 5683 \\ \sum_i \frac{1}{\sqrt{X_i}} = 1273 & \sum_i Y_i = 2672 & \sum_i Y_i^2 = 9576 & \\ \sum_i X_i Y_i = 1108 & \sum_i \frac{Y_i}{X_i} = 6835 & \sum_i \frac{Y_i}{X_i^2} = 18755 & \sum_i \frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = 4239 \\ \sum_i \hat{u}_i^2 = 660 & \sum_i \hat{u}_i^2 X_i^2 = 160 & \sum_i \hat{u}_i^2 X_i = 309 & \end{array}$$

non  $\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$   $\beta_1$  eta  $\beta_2$  parametroak Karratu Txikien Arrunten bidez estimatu ondoren lortutako hondarrak diren.

- Lor itzazu  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren KTA bidezko estimazioak.
- Whiten estimatzailea erabili bada, zelan lortu da  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren KTA bidezko hurrengo bariantza eta kobariantzen matrizearen estimazioa? Azal itzazu zehazki jarraitutako pausu guztiak emaitza hau lortzeko.

$$\widehat{Var}_{WHITE}(\hat{\beta}_{KTA}) = \begin{bmatrix} 0,04 & -0,11 \\ -0,11 & 0,28 \end{bmatrix}$$

- c) eta d) ataletan lortutako estimazioetan oinarrituz, kontrasta ezazu  $H_0 : \beta_2 = 0$   $H_a : \beta_2 \neq 0$ -ren aurka.
- $\sigma_i^2 = 4X_i^2$  suposatuz, nola lortuko zenuke  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ -ren estimatzaile efiziente bat? Azal ezazu zehaztasunez estimazioaren prozedimendua.
- Kalkula itzazu  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ -ren estimazioak estimatzaile efizientea erabiliz. Lor ezazu bere bariantza eta kobariantzen matrizea.
- Kontrasta ezazu  $H_0 : \beta_2 = 0$   $H_a : \beta_2 \neq 0$ -ren aurka,  $\beta_2$ ren estimatzaile efizientea erabiliz.

i) d) eta g) ataletan burututako kontrasteek ondorio desberdinak ekar litzakete? Zergatik?

### ARIKETA 13 (EL-2004.5)

224 etxebizitzez osatutako datu-base bat daukagu. Hauek Kaliforniako *Orange* konderriko bi bizitegi gunetan daude: *Dove Canyon* eta *Coto de Caza*-n. Hauen salmenta prezioa eta ezaugarri ezberdinei buruzko datuak ditugu.<sup>1</sup> *Dove Canyon* etxebizitza nahiko txikiko gunea da, golf zelai baten inguruan eraikita. *Coto de Caza* bizi maila altuagoko gunea da, baina baita herrikoia ere, etxebizitza handiagoekin. Kontuan hartzen diren aldagaiak hurrengoak dira:

- *salepric*: etxebizitzaren salmenta prezioa, mila dolarretan.
- *sqft*: etxebizitzaren tamaina, oin karratutan.
- *age*: etxebizitzaren antzinatasuna, urtetan.
- *city*: 1 *Coto de Cazan* badago, 0 *Dove Canyonen* badago.

Jarraian, dauzkagun datuekin, etxebizitzaren salmentarako eredu batentzat Karratu Txikien Arrunten (KTA) bidezko estimazioa aurkezten da:

A EMAITZAK Aldagai dependentea: *salepric*

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB.TIP.	T ESTAT.
konst	-440,312	35,3203	-12,466
sqft	0,252069	0,00815634	30,905
age	3,69805	3,02416	1,223
city	91,8038	21,7494	4,221

Ald. dependentearen batezbestekoa = 642,929

Ald. dependentearen D.T. = 371,376

Hondar Karratuen Batura (HKB\_A) = 4,27804e+006

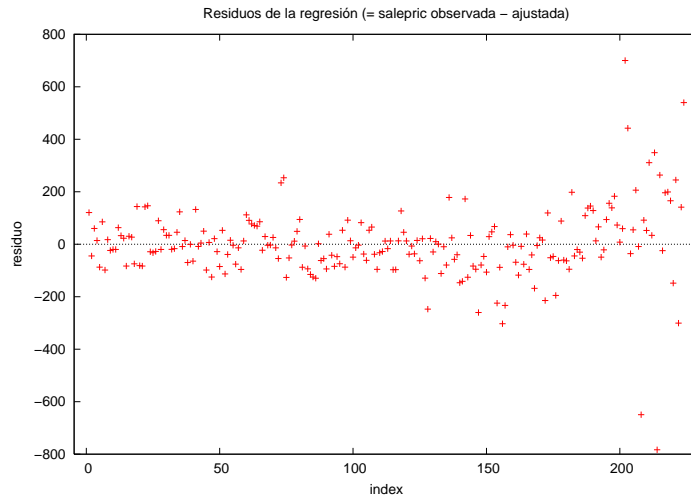
R-karratua = 0,860905

Zuzendutako R-karratua = 0,859008

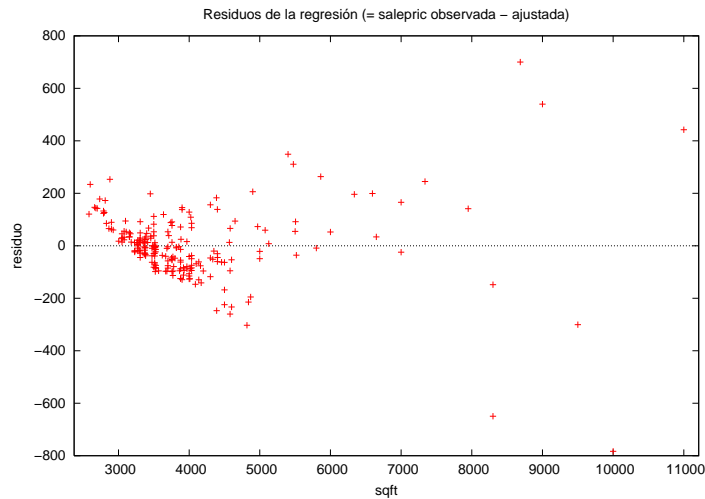
F Estatistikoa (3, 220) = 453,884

- a) Idatz ezazu estimatu den eredu teorikoa eta komenta itzazu lortutako emaitzak, doikuntza, esanguratasuna eta estimatutako koefizienteen zeinuen arabera.
- b) Azter ezazu arrazonatuz zer aurkezten duten hurrengo grafikoek eta erregresio auxiliarra. Kontrasteren bat burutzen baduzu, zehaz itzazu bere elementu guztiak. Bi grafikoetatik zeinek eskaintzen du informazio interesgarriagoa eta zergatik?

Irudia 2: KTA hondarren grafikoa  $i = 1, \dots, 224$  behaketen aurrean



Irudia 3: KTA hondarren grafikoa  $sqft$  aldagaiaren aurrean



$$\frac{\widehat{u}_i^2}{HKB_A/224} = -5,94184 + 0,00172457sqft_i$$

$$\begin{matrix} & & (-10,387) & (12,727) \end{matrix}$$

$$N = 224 \quad R^2 = 0,421826 \quad HKB = 1478,52$$

Jarraian KTA estimazioaren emaitzak aurkezten dira, koefizienteen bariantza eta kobariantzen matrizearen estimatzaile bezala heterozedastizitatearen pean tinkoa den estimatzaile bat erabiliz.

<sup>1</sup>Iturria: Ramanthan, Ramu (1992) *Introductory econometrics with applications*

B EMAITZAK Aldagai dependentea: salepric

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB.TIP.	T ESTAT.
konst	-440,312	110,631	-3,980
sqft	0,252069	0,0279076	9,032
age	3,69805	5,15553	0,717
city	91,8038	26,3404	3,485

Ald. dependentearen batezbestekoa = 642,929

Ald. dependentearen D.T. = 371,376

Hondar Karratuen Batura = 4,27804e+006

R-karratua = 0,860905

Zuzendutako R-karratua= 0,859008

- c) Zertan aldatzen dira oraingo emaitzak (B emaitzak) aurreko emaitzekin (A emaitzekin) konparatuz? Zergatik? Zeintzuk dira fidagarriak eta zertarako? Azal ezazu arrazonatuz.

Azkenik, Karratu Txikien Zabalduen edo Ponderatuen emaitzak aurkezten dira, ponderazio aldagai bezala etxebizitzaren tamainaren alderantzizkoa erabiliz, hau da,  $\frac{1}{sqft}$ .

C EMAITZAK. KT.Ponderatuen estimazioak 224 behaketak erabiliz. Ponderazio bezala erabilitako aldagaia:  $inversqf = 1/sqft^2$

Aldagai dependentea: salepric

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB.TIP.	T ESTAT.
konst	-285,205	37,2121	-7,664
sqft	0,215569	0,00959143	22,475
age	-0,549288	2,28001	-0,241
city	110,780	15,6896	7,061

Ponderatutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar Karratuen Batura = 0,150742

Hondarren desbidazio tipikoa = 0,0261762

R-karratua = 0,798817

Zuzendutako R-karratua = 0,796073

F (3, 220) estatistikoa = 291,177

Datu originaletan oinarritutako estatistikoak:

Ald. dependentearen batezbestekoa = 642,929

Ald. dependentearen D.T. = 371,376

Hondar Karratuen Batura = 4,73514e+006

Hondarren desbidazio tipikoa = 146,708

- d) Zer esan nahi du datu originalak eta datu ponderatuak izateak? Zergatik erabiltzen da ponderazio aldagai bezela sqft-ren alderantzizkoa? Azal ezazu arrazonatuz.
- e) A, B eta C emaitzetatik, zein deritzozu onena? Zergatik?

**ARIKETA 14** (EL-2005.1)

Osasun gastu agregatua,  $Y_i$ , eta errenta agregatuaren,  $X_i$ , arteko erlazioa aztertu nahi da, biak bilioi dolarretan neurtuta, 51 Ipar Amerikako estatuentzat <sup>2</sup>:

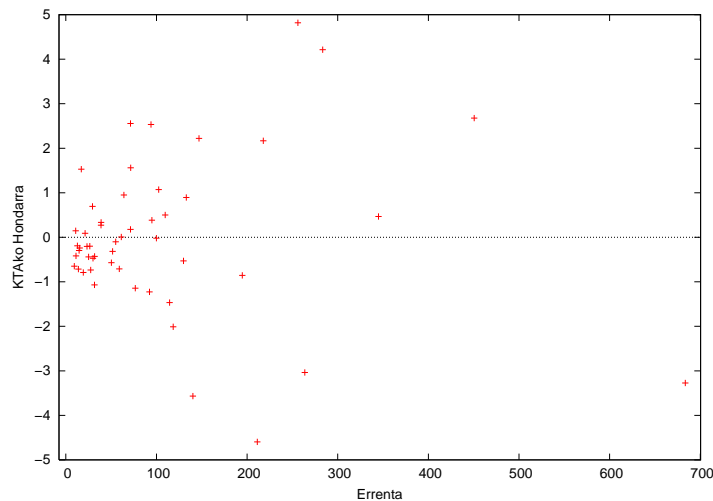
$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad (16)$$

Karratu Txikien Arrunten bidezko estimazioa hurrengoa da:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= 0,3256 + 0,1420 X_i & R^2 &= 0,999 & (17) \\ (\widehat{desb}(\hat{\beta}_i)) & & (0,3197) & (0,0019) & \\ (\widehat{desb}(\hat{\beta}_i)_{White}) & & (0,2577) & (0,0031) & \\ \frac{\hat{u}_i^2}{\hat{u}'\hat{u}} &= 0,113 + 0,008X_i + \hat{\epsilon}_i & R^2 &= 0,3269 & KAB = 55,89 & (18) \end{aligned}$$

Ondoren hondarrak errenta agregatuaren aurrean irudikatzen dira (4 Irudia).

Irudia 4: (16) ereduaren KTA hondarrak errentaren aurrean



- a) Azal ezazu nola uste duzun kalkulatu direla hondarrak eta zertarako irudikatu den 4 Irudia. Interpreta ezazu.

<sup>2</sup>Rammanathan, R. (2002), *Introductory econometrics with applications*, data 3-2.

- b) 4 Irudia kontuan hartuz, buru ezazu egokia deritzozun kontrastea.
- c) Azal ezazu, zure erantzuna arrazonatuz, zer estatistiko erabiliko zenukeen errenta aldagaiaren esanguratasuna kontrastatzeko. Buru ezazu kontrastea bere elementu guztiak zehaztuz.
- d) (16) ereduko estimazioaren emaitzetan oinarrituz, ikertzaileak eredua berriro estimatzen du, perturbazioaren bariantzarentzat hurrengo egitura suposatuz:  $Bar(u_i) = \sigma^2 X_i$ . Hurrengo emaitzak lortzen dira:

2 Eredua: Karratu Txikien Ponderatuak 51  
 behaketak erabiliz 1-51 Aldagai dependentea: Gastua

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB.TIP.	T. ESTAT	2Prob(t >  T )
konst	0,104510	0,162476	0,643	0,523069
errenta	0,144202	0,00259765	55,513	< 0,00001 ***

Ponderatutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar Karratuen Batura = 1,14534                      R-karratu = 0,984348  
 Hondarren desbidazio tipikoa = 0,152887              Zuzendutako R-karratua = 0,984029

- d.1) Arrazona ezazu perturbazioaren bariantzarentzat aukeratutako forma funtzionala. Azal ezazu nola uste duzun lortu direla estimazioak.
- d.2) Perturbazioan normalitatea suposatuz, kontrasta ezazu errenta aldagaiaren esanguratasuna.
- e) Ikertzaileak ez dago konforme  $Bar(u_i)$ -rentzat aukeratutako forma funtzionalarekin, eta (16) eredua berrestimatzea pentsatzen du hurrengo suposatuz:  $Bar(u_i) = a + bX_i$ , non  $a$  eta  $b$  ezezagunak diren.
- e.1) Azal ezazu zehaztasunez nola estimatuko zenituzkeen (16) ereduko koefizienteak hipotesi honen pean.
- e.2)  $\hat{\sigma}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$  suposatuz, buru ezazu estimazio hori hurrengo lagin informazioarekin:
- $$\begin{array}{llll} \sum \hat{u}_i^2 = 148,699 & \sum \hat{u}_i^2 X_i = 34945,67 & \sum (X_i/\hat{\sigma}_i)^2 = 196420,998 & \sum (X_i/\hat{\sigma}_i^2) = 1608,337 \\ \sum (1/\hat{\sigma}_i)^2 = 34,738 & \sum (Y_i/\hat{\sigma}_i^2) = 236,139 & \sum (Y_i X_i/\hat{\sigma}_i^2) = 28484,578 & \sum (Y_i^2/\hat{\sigma}_i^2) = 4168,919 \end{array}$$
- e.3) Kontrasta ezazu aldagai azaltzailearen esanguratasuna.
- f) Zer komentatuko zenuke c), d.2) eta e.iii) ataletan egindako kontrasteen fidagarritasunari buruz?

### ARIKETA 15 (EL-2005.5)

Ondorengo ereduan

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_i^2) \quad (19)$$

non  $\sigma_i^2 = a + bX_i^2$  den.

- a) Lor ezazu Karratu Txikien Zabaldu Eginkorren bidezko estimazioa hurrengo lagin informazioa erabiliz, non  $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{a} + \hat{b}X_i^2$   $u_i$ -ren bariantzaren estimatzaile tinkoa den:

$$\begin{aligned} \sum \hat{u}_i^2 &= 148,699 & \sum \hat{u}_i^2 X_i &= 34945,67 & \sum (X_i/\hat{\sigma}_i)^2 &= 196420,99 & \sum (X_i/\hat{\sigma}_i^2) &= 1608,34 \\ \sum (1/\hat{\sigma}_i)^2 &= 34,74 & \sum (Y_i/\hat{\sigma}_i^2) &= 236,14 & \sum (Y_i X_i/\hat{\sigma}_i^2) &= 28484,58 & \sum (Y_i^2/\hat{\sigma}_i^2) &= 4168,92 \end{aligned}$$

- b) Azal ezazu zer abantail aurkezten duen estimatzaile honek Karratu Txikien Arrunten aurrean. Arrazona ezazu zure erantzuna.
- c) Kontrasta ezazu aldagai azaltzailearen esanguratasuna. Azal itzazu kontrastearen elementu guztiak.

### ARIKETA 16 (EAZL-2005.1)

1950 urtetik eta 1985 urte bitarteko EEBBetako kontsumoaren ( $C_t$ ) eta errentaren ( $R_t$ ) urteroko datuak ditugu. Kontsumora esleitzen den errentaren proportzioa ikertzeko  $C_t = \alpha + \beta R_t + u_t$  eredia zehazten da, non  $u_t$  perturbazioek banaketa normala jarraitzen duten. Eredua KTA bitartez estimatuz ondorengo emaitzak lortu dira:

$$\hat{C}_t = 11,374 + 0,898 R_t$$

(1,181)      (153,603)

$$T = 36 \quad \bar{R}^2 = 0,998 \quad \sum \hat{u}_t^2 = 12044,2$$

(parentesi artean  $t$ -estatistikoak)

- a) Denboran zehar perturbazioen sakabanatzea konstante mantendu dela analizatzeko hurrengo bi erregresioak burutu dira:

$$\begin{aligned} \hat{C}_t &= 6,719 + 0,909R_t & \sum \hat{u}_t^2 &= 405,369 & t &= 1950, \dots, 1963 \\ \hat{C}_t &= -187,162 + 0,99R_t & \sum \hat{u}_t^2 &= 3709,55 & t &= 1972, \dots, 1985 \end{aligned}$$

Erabili itzazu emaitza hauek ea ereduko perturbazioek sakabanatzea konstante mantentzen duten kontrastatzeko. Azal itzazu zehazki kontrastearen pauso guztiak.

b) Era berean, perturbazioen sakabanatzea  $R_t$  aldagaiaren funtzio bat den kontrastatu nahi da. Erabil ezazu ondorengo erregresio laguntzaileetako bat kontraste hori egiteko. Azal itzazu zehatz mehatz egindako kontrasteko elementu guztiak.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\hat{u}_t^2}{334,561} &= 1,345 + 0,345R_t + 0,581C_t + \hat{w}_t; & R^2 &= 0,890; & \sum \hat{w}_t^2 &= 12,838 \\
 (2) \quad \hat{u}_t &= 7,205 + 0,014R_t + 0,546\hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t; & R^2 &= 0,329; & \sum \hat{w}_t^2 &= 19,455 \\
 (3) \quad \hat{u}_t^2 &= -425,562 + 0,335R_t + \hat{w}_t; & R^2 &= 0,189; & \sum \hat{w}_t^2 &= 10594387,02 \\
 (4) \quad \frac{\hat{u}_t^2}{334,561} &= -1,272 + 0,001R_t + \hat{w}_t; & R^2 &= 0,189; & \sum \hat{w}_t^2 &= 94,651
 \end{aligned}$$

c) Hartutako lagineko urteetan errentak joera gorakorra izan duela eta aurreko bi ataletako emaitzak kontsideratuz, marraz ezazu KTA hondarrek  $R_t$ rekiko izango duten esperotako portaera jasotzen duen grafiko bat.

d)  $Bar(u_t) = \sigma^2 R_t^4$  dela suposatuz, azal ezazu zehazki nola estimatuko zenituzkeen era hobereanean ereduko  $\alpha$  eta  $\beta$  parametroak. Arrazona ezazu proposatutako estimatzailearen propietateak.

e) Suposa ezazu orain  $Bar(u_t) = \gamma_0 + \gamma_1 R_t$  dela, non  $\gamma_0$  eta  $\gamma_1$  konstante ezezagunak diren. Azal ezazu xeheki nola kontrastatuko zenukeen errenta dolar batean handitzen denean 90 zentimo kontsumora esleitzen delaren hipotesia.

## **ARIKETA 17** (EAZL-2005.5)

Hiri bateko jatetxeen publizitate gastuek ( $X_i$ ) sarrerren gain ( $Y_i$ ) duten eragina aztertzeke, hurrengo erregresio eredu proposatzen da:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad (20)$$

166 jatetxe ditugu. Jatetxeak taldekatuta dauzkagu dauden auzoaren arabera, eta talde bakoitzaren hileko sarrerren batezbestekoa (mila eurotan) eta hileko publizitate gastuen batezbestekoa (ehun eurotan) dauzkagu.

Auzoa	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{Y}_j$	10	12	14	18	17	18	20
$\bar{X}_j$	3	5	9	12	15	17	19
$n_j$	9	4	36	16	81	4	16



non  $\bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in B_j} X_i$ ,  $\bar{Y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in B_j} Y_i$  eta  $n_j$   $B_j$  auzo bakoitzeko jatetxe kopurua den,  $j = 1, 2, \dots, 7$ .

Gainera, hurrengo informazioa daukagu:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^7 \sqrt{n_j} \bar{X}_j &= 366; \sum_{j=1}^7 \sqrt{n_j} \bar{Y}_j = 479; \sum_{j=1}^7 \sqrt{n_j} \bar{X}_j^2 = 5186; \sum_{j=1}^7 \sqrt{n_j} \bar{Y}_j^2 = 7909; \sum_{j=1}^7 \sqrt{n_j} \bar{X}_j \bar{Y}_j = 6257 \\ \sum_{j=1}^7 \frac{\bar{X}_j}{n_j} &= 8, 21; \sum_{j=1}^7 \frac{\bar{Y}_j}{n_j} = 11, 59; \sum_{j=1}^7 \frac{\bar{X}_j^2}{n_j} = 116, 09; \sum_{j=1}^7 \frac{\bar{Y}_j^2}{n_j} = 182, 37; \sum_{j=1}^7 \frac{\bar{X}_j \bar{Y}_j}{n_j} = 138, 73 \\ \sum_{j=1}^7 n_j \bar{X}_j &= 2150; \sum_{j=1}^7 n_j \bar{Y}_j = 2699; \sum_{j=1}^7 n_j \bar{X}_j^2 = 30558; \sum_{j=1}^7 n_j \bar{Y}_j^2 = 44821; \sum_{j=1}^7 n_j \bar{X}_j \bar{Y}_j = 36461 \end{aligned}$$

- Batezbestekoei buruzko datuak baino ez daukazunez, zer eredutan estima litzakezu  $\alpha$  eta  $\beta$  parametroak? Zehaz itzazu eredu honen perturbazioaren propietateak.
- Estima itzazu efizienteki ereduaren parametroak eta deskriba ezazu zehazki erabilitako estimatzailea eta bere propietateak.
- Kontrasta ezazu publizitate gastuak sarreren gain eragin marjinal positiboa duen ala ez.
- Jatorrizko (20) ereduaren perturbazioaren bariantza publizitate gastuekiko hurrengo moduan igoko balitz:  $\text{Bar}(u_i) = \sigma_u^2 X_i$ , nola estimatuko zenuke a) atalean proposatu duzun eredia? (ez egin kalkuluak, bakarrik azaldu)

## **ARIKETA 18** (EAZL-2006.1)

San Diegoko etxebizitzaren prezioa ( $Y_i$ , mila dolarretan) etxebizitzaren azaleraren ( $A_i$ , oin karratutan) eta gela kopuruaren ( $H_i$ ) funtzioan aztertzeko, 1990 urtean jasotako 14 etxebizitzetaz osaturiko lagin bat dugu. Ondorengo erregresio linealaren eredu orokorra zehaztu da:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 A_i + \beta_3 H_i + u_i \quad i = 1, \dots, 14.$$

Eredua KTA bitartez estimatzean hurrengo emaitzak lortu dira:

$$\hat{Y}_i = 146.730 + 0.138 A_i - 25.957 H_i \quad R^2 = 0.7749 \quad HKB = 21000.44$$

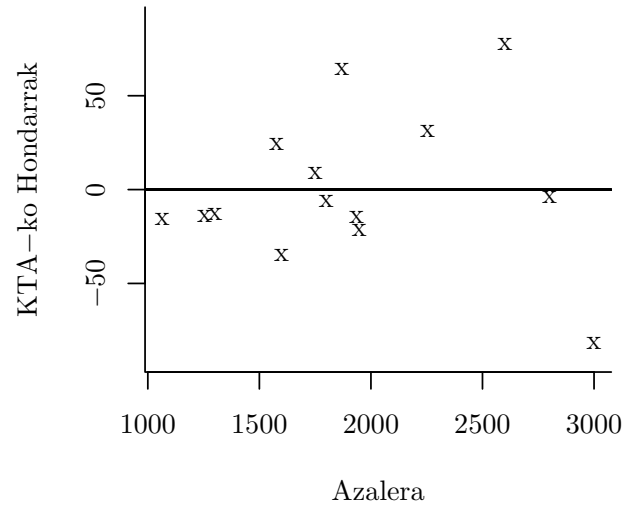
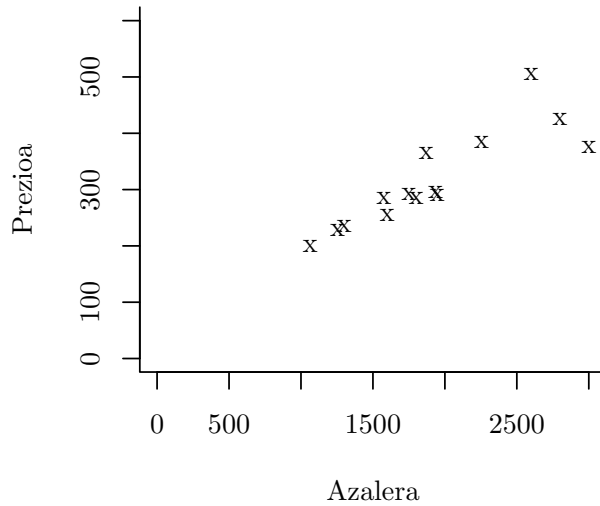
(desb)            (89.564)            (0.024)            (27.527)

Baita erregresio laguntzaile hauek ere:

$$\frac{\hat{u}_i^2}{1500.03} = -2.106 + 0.002 A_i + \hat{\omega}_i \quad R^2 = 0.3727 \quad HKB = 19.294$$

$$\frac{\hat{u}_i^2}{21000.44} = -0.150 + 0.001 A_i + \hat{\omega}_i \quad R^2 = 0.3727 \quad HKB = 0.098$$

eta ondoko grafikoak:



- Interpreta ezazu  $\hat{\beta}_2$ .
- Ba al duzu perturbazioaren hipotesiren bat betetzen ez delaren lagin ebidentziarik? Eran-tzun ezazu erregresio laguntzailetako informazioan eta grafikoetan oinarrituz.
- Zer esan dezakezu **aurkeztutako** estimatutako desbiderapen tipikoen fidagarritasunari buruz?
- Demagun  $Bar(u_i) = \sigma^2 A_i$  dela eta ereduia KTZ bitartez estimatuz lortutako estimazioak honakoak direla:

$$\hat{Y}_i = 104.029 + 0.141 A_i - 15.625 H_i$$

(estat. t)
(1.414)
(6.000)
(-0.634)

Azal ezazu zehazki nola lortu den  $\tilde{\beta}_{KTZ}$ .

- Etxebizitzaren azalera aldagai azaltzailea esanguratsua al da? Eta gela kopurua? Burutu itzazu kontrasteak, elementu guztiak zehaztuz. (Balizkoa:  $u_i \sim N$ )

### 3 GAIA: Autokorrelazioa

#### ARIKETA 19 (PZ-E44)

Hurrengo taulan enpresa batean lan egiten duten langileen soldatei buruzko datuak ( $Y$ ) eta lan egindako orduen buruzko datuak ( $X$ ) ditugu. Gainera, langilea gizonezkoa ( $G$ ) ala emakumezkoa ( $E$ ) den ezagutzen da:

Y	170	180	165	165	105	95	100	90	$\sum Y_i^2 = 153900$	$\sum Y_i = 1070$
X	40	50	30	40	50	35	40	35	$\sum X_i = 320$	$\sum X_i^2 = 13150$
Sexua	G	G	G	G	E	E	E	E	$\sum X_i Y_i = 43075$	

Enpresako langileen soldatak azaltzeko, ikertzaile batek hurrengo eredua proposatzen du

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2)$$

- Estima itzazu ereduaren parametroak KTA bidez, eta kontrasta ezazu  $X$  aldagaiaren esanguratasuna.
- AR(1) motako autokorrelaziorik existitzen al da ereduko perturbazioetan?
- Beste ikertzaile batek, soldata zehazterakoan, sexua aldagai esanguratsua dela pentsatzen du. Proposa eta estima ezazu hipotesi hau kontuan hartzen duen eredu bat. Kontrasta ezazu aurreko hipotesia.
- Durbin eta Watsonen estatistikoak eredu honetan hartzen duen balioa  $d = 2,2$  dela kontuan izanik, existitzen al da AR(1) motako autokorrelaziorik eredu honen perturbazioetan? Nola erlazionatzen da emaitza hau b) atalean lortutakoarekin?
- $X$  aldagaia esanguratsua al da? Nola azaltzen da emaitza hau a) atalean aurkitutakoa kontuan izanik?

#### ARIKETA 20 (EAZL-1998.5)

Produktu baten salmentak ( $Y$ ) eta bere prezioaren ( $X$ ) arteko erlazioa aztertzeko hurrengo eredua zehaztu da:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \tag{21}$$

Hurrengo datuak ditugu:

t	1	2	3	4	5	6
Y	27	32	25	31	30	32
X	9	12	8	10	12	11
$\hat{u}$	-0,5	0	-1	2	-2	1,5

$$\hat{u} = Y - X\hat{\beta}_{KTA} \quad \hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1}X'Y$$

- a) (21) ereduan lehen ordenako autokorrelazioa al dago? Oinarritu zaitez kontrasterako estatistiko batean.

Hurrengo eredua estimatu da:

$$Y_t - \rho^*Y_{t-1} = \alpha(1 - \rho^*) + \beta(X_t - \rho^*X_{t-1}) + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (22)$$

$\rho^*$ -ren balio desberdinentzat hurrengo Hondar Karratuen Baturak (HKB) lortu dira:

$\rho^*$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
HKB	34,2	30,9	27,8	24,9	22,2	19,6	17,2	15,1	13,0	11,1

$\rho^*$	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-0,99
HKB	9,4	7,8	6,5	5,3	4,2	3,3	2,6	2,1	1,7	2,1

- b) Aurreko informazioa izanik, kalkula itzazu  $\rho$ ,  $\alpha$  eta  $\beta$ ren estimazioak Hildreth-Luren metodoaren bitartez.
- c) Zeintzuk dira aurreko ataleko estimatzaileen propietateak?

## **ARIKETA 21** (EAZL-1999.2)

Ondorengo ereduko KTA emaitzak

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \quad t = 2, \dots, 33$$

hauek dira:

$$\hat{Y}_t = 0,5 + \frac{3}{(1,25)} X_{2t} - \frac{0,59}{(-8,61)} Y_{t-1} \quad (23)$$

$$R^2 = 0,57 \quad DW = 3,24$$

- a) Kontrasta ezazu korrelazio ezaren hipotesia perturbazioetan.
- b) Aurreko kontrastearen emaitzak emanik, erabaki ezazu ea aurreko emaitzak baliagarriak diren zure arrazoiak zehaztasun osoz aipatuz. Erantzuna ezezkoa izatekotan, azal ezazu zehetasunez nola estimatuko zenukeen eredua.

## ARIKETA 22 (EL-2001.1)

Enpresa batek bi teknikariri (A teknikaria eta B teknikaria) enpresaren sarrerak ( $Y$ , mila milioi pesetatan neurtuta), gasolinaren prezioa ( $X$ , peseta/litrotan) eta garraio publikoaren prezioaren ( $Z$  pesetatan) arteko erlazioa aztertzeko eskatu die. Horretarako 90 behaketa dituzte. A teknikariak KTA bidez estimatzen du eta hurrengo emaitzak lortzen ditu:

$$\hat{Y}_t = 12 + 1,5 X_t + 0,8 Z_t \quad DW = 1,64 \quad (24)$$

(desb)                      (0,4)                      (0,5)

Emaitzen arabera, A teknikariak autokorrelaziorik ez dagoela ondorioztatu eta hurrengoa **baieztatzen du**:

- (1) Gasolinaren prezioaren peseta bateko igoera batek enpresaren sarrerak 1500 milioi pesetatan handitzea dakar.
  - (2) Garraio publikoaren prezioen aldakuntzek ez dute eraginik enpresaren sarreretan.
- a)  $DW$  balioaren arabera, A teknikariak emandako ondorioa, autokorrelaziorik ez dagoela hain zuzen ere, egokia dela deritzozu? Azal ezazu eta erlazioa ezazu zure erantzuna (1) eta (2) baieztapenekin.

B teknikariak perturbazioetan AR(2) prozesua dagoela susmatzen du eta Karratu Txikien Zabaldu Eginkorren bidez estimatzen du, hurrengo emaitzak lortuz:

$$\hat{Y}_t = 12,8 + 1,2 X_t + 1,0 Z_t \quad (25)$$

(desb)                      (0,5)                      (0,52)

- b) **Deskriba ezazu zehaztasunez** zer prozedura jarraitu duen B teknikariak perturbazioetan AR(2) prozesua dagoelaren ondorioa lortzeko.
- c) Demagun AR(2) prozesua badaukagula. (25) ekuazioaren arabera, **alda itzazu (1) eta (2) baieztapenak** era egokian. Burutu itzazu beharrezkoak diren kontrasteak aldaketak egiteko. **Aipa itzazu** erabilitako estimatzaileen propietateak **zure** baieztapenak egiteko.

## ARIKETA 23 (EAZL-2001.2)

Auto konkretu baten salmenten egitura ikertzeko hurrengo ereduak zehaztu da:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Q_t + \beta_4 X_t + u_t \quad (26)$$

non  $Y_t$  auto horren salmenten sarrerak den,  $P_t$  autoaren prezioa den,  $Q_t$  antzeko ezaugarriko beste autoen batezbesteko prezioa den eta  $X_t$  per capita errenta den.

100 behaketez osaturiko lagin batekin eredua KTA bitartez estimatu da, hurrengo emaitzak lortuz:

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_t &= 1,5 + 0,1P_t - 0,5Q_t + 0,7X_t & (27) \\ \text{(desb)} & \quad (0,2) \quad (0,3) \quad (0,15) \quad (0,05) \\ R^2 &= 0,87 & HKB = 215 \end{aligned}$$

- a) Kontrasta ezazu  $P_t$  aldagaiaren esanguratasuna,  $u_t \overset{ibb}{\sim} (0, \sigma_u^2)$  suposiziopean. Komenta ezazu lorturiko emaitza.
- b) Hurrengo erregresioetako bat erabiliz, kontrasta ezazu perturbazioetan lehen ordenako autokorrelazioaren existentzia.

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= 0,2 + 0,3\hat{u}_{t-1} + 0,15P_t + 0,12Q_t + 0,01X_t + \hat{v}_{1t} & R^2 = 0,15 & KAB = 75 \\ \hat{u}_t &= 0,35\hat{u}_{t-1} + 0,22\hat{u}_{t-2} + 0,1P_t + 0,16Q_t + 0,04X_t + \hat{v}_{2t} & R^2 = 0,18 & KAB = 90 \\ \hat{u}_t &= 0,3 + 0,24\hat{u}_{t-1} + \hat{v}_{3t} & R^2 = 0,05 & KAB = 25 \\ \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}^2} &= 0,06 + 0,3\frac{\hat{u}_{t-1}}{\hat{\sigma}^2} + 0,07P_t + 0,06Q_t + 0,005X_t + \hat{v}_{4t} & R^2 = 15 & KAB = 16,225 \end{aligned}$$

Kontraste honen emaitzak nolabait **eragiten** al du a) atalean egindako kontrasteetan?

- c)  $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$  bada, non  $\varepsilon_t \overset{ibb}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$  den eta  $|\rho| < 1$  eta ezezaguna den, azal ezazu zehatz-mehatz nola estimatuko zenukeen, ahalik eta ondoen, (26) ereduko parametroak.
- d) Aurreko c) atalean deskribaturiko barrutian, nola egingo zenuke  $P_t$  aldagaiaren esanguratasunaren kontrastea? Azal ezazu.

#### ARIKETA 24 (EAZL-2001.4)

Izan bedi  $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$  eredua, zeinarentzat hurrengo datuak ezagutzen diren:

t	Y	X
1	2	-3
2	10,2	5
3	17,9	13
4	2,3	-3
5	10	5
6	18,2	13
7	-5,7	-11
8	-14,1	-19
Baturak	40,8	0

KTA bitartezko estimazioan ondorengoa lortu da:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum X_t \\ - & \sum X_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 888 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40,8 \\ 888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Erabil ezazu metodo grafikoren bat autokorrelazioaren aztarnarik dagoen ikusteko. Komenta itzazu emaitzak.
- b) Kontrasta ezazu  $u_t$  perturbazioek lehen ordenako prozesu autorregresiboa jarraitzen duten edo ez. Plantea ezazu zehaztasunez hipotesi hutsa, alternatiboa, kontrasterako estatistikoa eta erabaki araua.
- c) Estima ezazu  $\rho$  parametroa perturbazioek lehen ordenako prozesu autorregresiboa jarraitzen dutela suposatuz, hau da,  $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$  non  $\varepsilon_t \stackrel{ibb}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$  eta  $|\rho| < 1$  diren.
- d) Aurreko emaitza kontuan izanik, estima itzazu ereduko  $\alpha$  eta  $\beta$  parametroak KTZE bitartez.
- e)  $X$  aldagaia nabaria al da  $Y$  azaltzeko? Egin ezazu kontrastea hipotesi hutsa, alternatiboa eta kontrasterako estatistikoa banaketa argi zehaztuz.

### ARIKETA 25 (EL-2002.5)

Herrialde bateko Kontsumo ( $K_t$ ) eta Errenta ( $R_t$ )ri buruzko urteroko datuak dauzkagu. Datuak hurrengo taulako lehenengo zutabetan aurkezten dira:

Beha.	$K$	$R$	$\hat{K}$	$\hat{u}$
1	8,547	11,0	8,0483680	0,498632
2	8,942	13,5	9,7986580	-0,856658
3	10,497	14,0	10,148716	0,348284
4	10,173	14,9	10,778820	-0,605820
5	11,997	15,1	10,918843	1,078157
6	10,729	18,0	12,949180	-2,220180
7	12,750	18,8	13,509273	-0,759273
8	15,611	19,1	13,719307	1,891693
9	13,545	21,0	15,049528	-1,504528
10	17,843	21,2	15,189551	
11	21,610	34,0	24,151036	
12	25,473	34,3	24,361070	
13	24,434	35,0	24,851152	
14	28,274	38,0	26,951500	

Jarraian

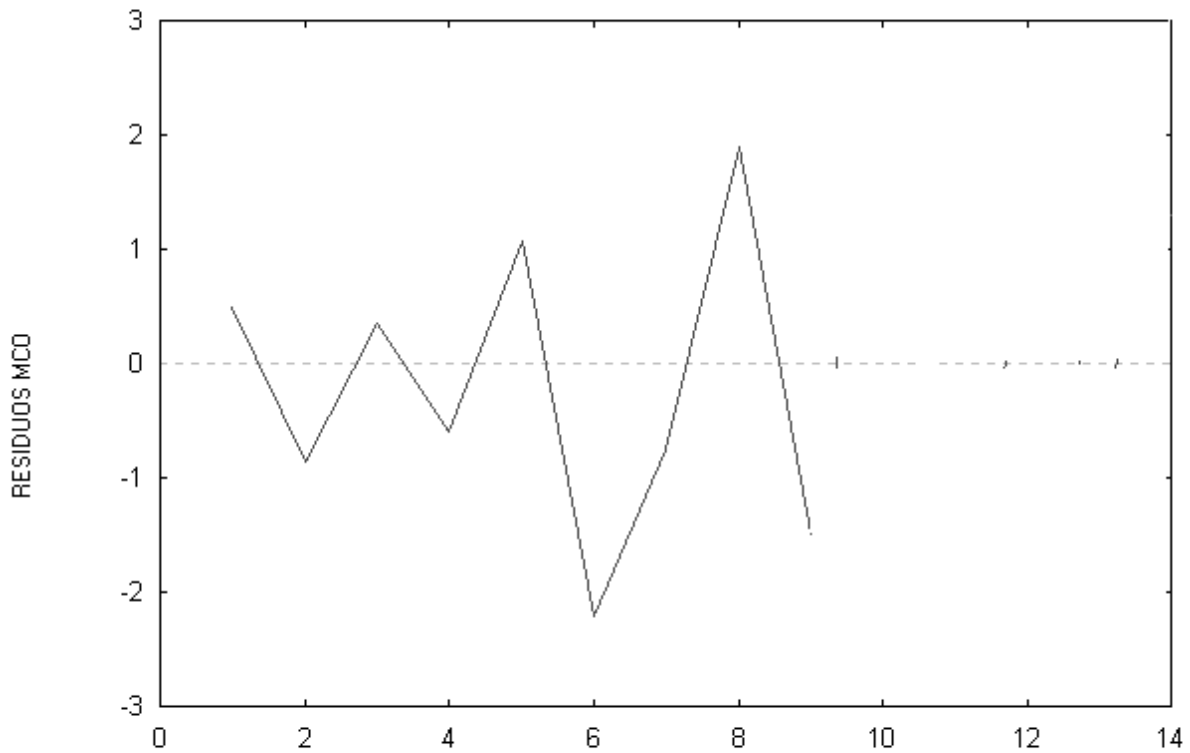
$$K_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + u_t$$

kontsumo funtzioaren KTA estimazioaren emaitzak aurkezten dira:

$$\hat{K}_t = 0,347092 + 0,700116 R_t \quad (28)$$

(t - estat.)
(0,31)
(14,61)

$$\bar{R}^2 = 0,942 \quad HKB = 30,6381$$



- b) Lor ezazu **Durbin eta Watsonen** estatistikoaren balioa eta egin ezazu kontrastea. Zehaz itzazu kontrastearen elementu guztiak, hipotesi hutsa eta alternatiboa barne.
- c) Hurrengo informazioa erabiliz, egin ezazu **Breusch eta Godfreyren** kontrastea. Zehaz itzazu kontrastearen elementu guztiak, hipotesi hutsa eta alternatiboa barne.

$$\hat{u}_t = -0,5679 + 0,0198 R_t + -0,75 \hat{u}_{t-1} + \hat{\omega}_t \quad R^2 = 0,433 \quad (29)$$

(t - estat.)
(-0,603)
(0,0385)
(-3,338)



- d) Aurreko ataletan lortutakoaren arabera, zer ondorio ditu:
- d.1) Ereduaren koefizienteen estimatzailearen lagin txikietako propietateetan. Arrazona eta froga ezazu zure erantzuna.
- d.2) (28) ekuazioan aurkezten diren t estatistikoekin egindako inferentzian. Arrazona ezazu zure erantzuna.
- e) Aurreko ataleko erantzuna aldatuko litzateke arazoaren jatorria esanguratsua den aldagai baten omisioa balitz? Arrazona ezazu zure erantzuna.
- f) Har ezazu hurrengo informazioa eta **bete ezazu falta dena**, (puntuekin adierazita dago).

$\hat{\rho}$	-0,99	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1
$HKB^*$	15,9	14,8	14,2	14,1	14,7	15,8	17,5	19,9	22,8	26,2	30,3	34,9

non

$$HKB^* = \sum_{t=\dots}^{t=\dots} \{Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^*\}^2 \quad (30)$$

$$Y_t^* = K_t - \hat{\rho}K_{t-1}; \quad X_{1t}^* = \dots\dots\dots; \quad X_{2t}^* = \dots\dots\dots$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

- f.1) Zer estimazio metodo erabiltzen ari da?
- f.2) Metodo hau jarraituz, nola lortuko zenituzke  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren azken estimazioak? Esan ezazu, arrazonatuz, zein den  $\hat{\rho}$ ren aukeratutako balioa eta  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren estimatzailea lortzeko formula. Zer propietate dituzte parametro hauen lorturiko estimatzaileak?
- f.3) Nola kontrastatuko zenuke  $H_0 : \beta_2 = 1$ ? Zehaz itzazu kontrasterako estatistikoaren elementu guztiak, baita erabaki araua ere.

**ARIKETA 26** (EL-2003.5)

Blangadesheko azukre-kanabera eskaintza aztertzeko hurrengo eredua proposatzen da:

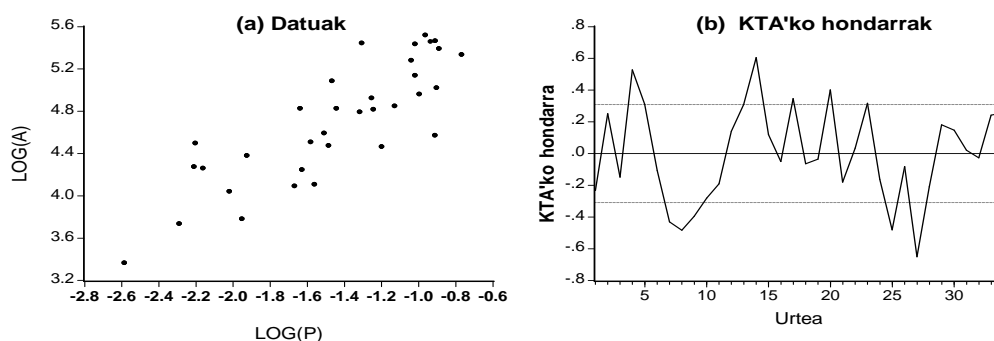
$$\ln(A_t) = \alpha + \beta \ln(P_t) + u_t \quad (31)$$

non  $A$  kanaberaren landaketari dagokion azalera eta  $P$  produktuaren merkatuko prezioa diren.  $A$  eta  $P$ ren 34 urteroko behaketa dauzkagu. KTA estimazioa hurrengoa da:

$$\ln(\widehat{A}_t) = 6,11 + 0,97 \ln(P_t) \quad R^2 = 0,706 \quad (2)$$

$(\widehat{des})$                        $(0,17)$                        $(0,11)$

Gainera, hurrengo grafikoak egin dira:



eta hurrengo erregresioak KTA hondarretan,  $\hat{u}$ , oinarrituta:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= -0,02 + 0,012 \ln(P_t) + 0,34\hat{u}_{t-1} & R^2 &= 0,116 & HKB &= 2,7 \\ \hat{u}_t &= -0,38 + 0,01t - 0,18 \ln(P_t) + 0,32\hat{u}_{t-1} & R^2 &= 0,13 & HKB &= 2,61 \\ \hat{e}_t^2 &= 1,32 - 0,02t & R^2 &= 0,023 & HKB &= 46,48 \\ \hat{e}_t^2 &= 5,20 - 0,1t + 1,74 \ln(P_t) & R^2 &= 0,10 & HKB &= 42,76 \\ \hat{e}_t^2 &= 5,74 - 0,11t + 1,87 \ln(P_t) - 0,18v_{t-1} & R^2 &= 0,13 & HKB &= 41,21 \\ \hat{e}_t &= -0,22 + 0,01t & R^2 &= 0,001 & HKB &= 378,62 \\ \hat{e}_t &= -3,59 + 0,08t - 1,51 \ln(P_t) & R^2 &= 0,009 & HKB &= 375,82 \\ \hat{e}_t &= 0,51 - 0,009t + 0,17 \ln(P_t) - 0,18e_{t-1} & R^2 &= 0,13 & HKB &= 323,73 \end{aligned}$$

non  $\hat{e}_t = \hat{u}_t / \tilde{\sigma}$  eta  $\tilde{\sigma}^2 = \sum_t \hat{u}_t^2 / 34$  diren.

- a) Zer informazio eskaintzen du a) grafikoak?
- b) Zer informazio eskaintzen du b) grafikoak?
- c) Bariantza ea denboran zehar aldatu den aztertu nahi da. Enuntziatuan emandako informazioan oinarrituz, egin ezazu kontrastea, elementu guztiak zehaztuz.

d) Kontrasta ezazu ereduari autokorrelaziorik dagoen ala ez.

Geroago, hurrengo estimazioak lortu dira KTZE bidez:

$$\ln(\widehat{A}_t) = 6,12 + 0,97 \ln(P_t) \quad HKB = 3,052 \quad \hat{\sigma}_t = 0,30/\sqrt{t} \quad (3)$$

$(\widehat{desb}) \quad (0,18) \quad (0,14)$

$$\ln(\widehat{A}_t) = 6,82 + 1,31 \ln(P_t) \quad HKB = 5,620 \quad \hat{\sigma}_t = 5,066 \times t \quad (4)$$

$(\widehat{desb}) \quad (0,29) \quad (0,12)$

$$\ln(\widehat{A}_t) = 6,09 + 0,94 \ln(P_t) \quad HKB = 2,642 \quad \hat{u}_t = 0,34\hat{u}_{t-1} + e_t \quad (5)$$

$(\widehat{desb}) \quad (0,24) \quad (0,16)$

$$\ln(\widehat{A}_t) = 6,13 + 0,98 \ln(P_t) \quad HKB = 2,532 \quad \hat{u}_t = 0,36\hat{u}_{t-1} + 0,002\hat{u}_{t-2} + e_t \quad (6)$$

$(\widehat{desb}) \quad (0,25) \quad (0,17)$

e) Interesgarria da prezio-elasticitatea ea zero den jakitea. Azal ezazu nola kontrastatuko zenukeen, erabiltzen duzun estimatzailea eta bere lorpena argi eta garbi zehaztuz. Erabil ezazu aurreko informazioa kontrastea burutzeko.

## ARIKETA 27 (EL-2005.4)

Estatu Batuetako nekazal eta abeltzaintza produkzio sektorerako Cobb-Douglas produkzio funtzio bat estimatu nahi da. Horretarako 1948tik 1993rako hurrengo indizeei buruzko urteroko datuak ditugu <sup>3</sup>, 1982 urtea oinarritzat hartuz:

- $Y_t$  = Nekazal eta abeltzaintza produkzioaren indizea (logaritmoetan)
- $L_t$  = Lan faktorearen erabilpenaren indizea (logaritmoetan)
- $EX_t$  = Ustiapen tamainaren indizea (logaritmoetan)
- $K_t$  = Makinetan egindako gastuen indizea (logaritmoetan)

Hurrengo ereduari zehazten da:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + \beta_3 EX_t + \beta_4 K_t + u_t \quad (32)$$

Karratu Txikien Arrunten bidezko estimazioaren emaitzak hurrengoak dira:

<sup>3</sup>Rammanathan, R. (2002), *Introductory econometrics with applications*, data 9-5.gdt

$$\begin{array}{l} \hat{Y}_t \\ (\widehat{desb}(\hat{\beta}_i)) \end{array} = \begin{array}{l} 4,112 - 0,739 L_t + 1,063 EX_t - 0,233 K_t \\ (1,286) \quad (0,039) \quad (0,377) \quad (0,077) \end{array} \quad (33)$$

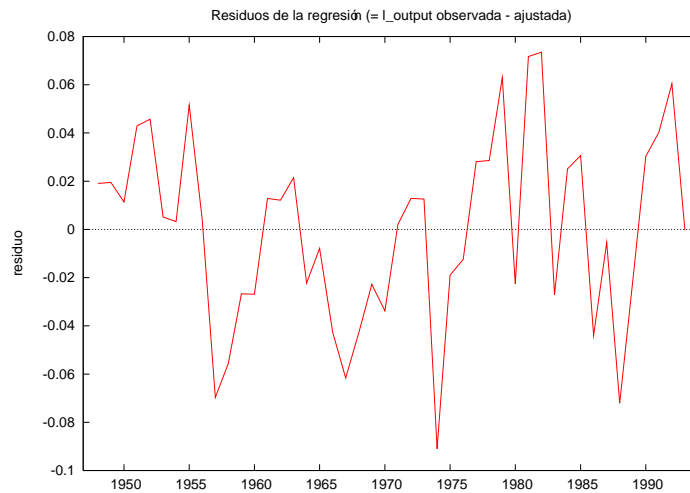
$$R^2 = 0,974 \quad DW = 1,304$$

$$\hat{u}_t = -0,3215 - 0,0068L_t + 0,084EX_t - 0,007K_t + 0,349\hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t \quad (34)$$

$$R^2 = 0,1225$$

Hondarren denbora seriea lortzen da (5 Irudia).

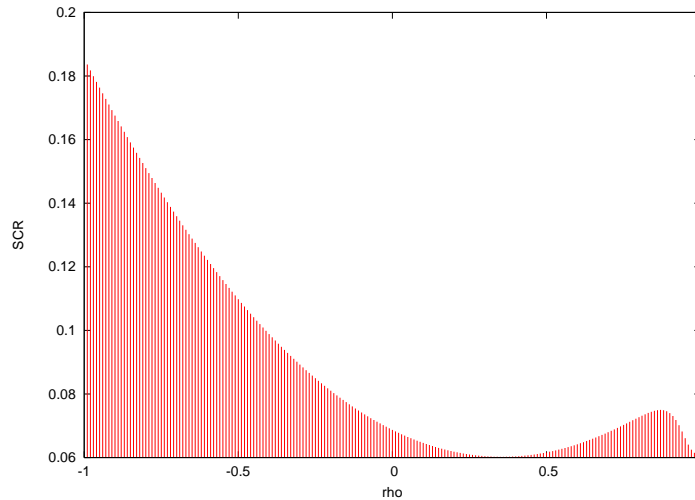
Irudia 5: (32) Ereduko KTA hondarrak



- Azal ezazu nola uste duzun lortu direla hondarrak eta zertarako irudikatu den 5 Irudia. Interpreta ezazu grafikoa eta komenta ezazu arazoren bat antzematen duzun ala ez.
- Emandako informazio guztia kontuan hartuz, buru itzazu komenigarriak deritzozun autokorrelazio kontrasteak. Azal ezazu zehaztasunez egindakoa.
- Azal ezazu, (33)-n emandako informazioa kontuan hartuz eta zure erantzuna arrazonatuz, lan faktorearen esanguratasuna kontrastatzea fidagarria den ala ez.  $\beta_2$  koefizientea estimatu nahi bada, nola aldatu beharko genuke estatistikoa KTA estimatzailea erabiltzen jarraitzeko?

(32) ereduko estimazioaren emaitzetan oinarrituz, ikertzaileak produkzio funtzioa estimatzen du berriro Hildreth eta Lu metodoaren bidez. GRETL programa erabiliz hurrengo emaitzak ditugu:

Irudia 6: Hildreth-Lu. HKB minimoa da rho = 0,35-entzat



Hildreth-Lu estimazioak 1993-1949rako 45 behaketak erabiliz  
Aldagai dependentea: Y

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB.TIP.	T ESTAT.	2Prob(t >  T )
konst	3,70258	1,30555	2,836	0,007064 ***
L	-0,741430	0,0434648	-17,058	0,00001 ***
EX	1,14724	0,378590	3,030	0,004219 ***
K	-0,224659	0,0906423	-2,479	0,017399 **

- d) Azal ezazu arrazonatuz zer aurkezten duen 6 Irudiak. Zer esan nahi du HKB minimoa dela rho = 0,35-entzat?
- e) Azal ezazu nola lortu diren koefizienteen estimazioak.
- f) Hildreth eta Lu-ren estimazioaren emaitzak erabiliz eta koefizienteen kobariantzen matrizearen estimazioa hurrengoa dela jakinik:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{HL}) = \begin{bmatrix} 1,70446 & 0,03642 & -0,47824 & 0,07057 \\ 0,03642 & 0,00189 & -0,012883 & 0,00307 \\ -0,47824 & -0,01283 & 0,143331 & -0,02647 \\ 0,07057 & 0,00307 & -0,02647 & 0,00827 \end{bmatrix}$$

Kontrasta ezazu hurrengo hipotesi hutsa:  $H_0 : \beta_3 = 2\beta_4$ . Azal itzazu kontrastearen elementu guztiak.

## 4 GAIA: Erregresore estokastikoak eta eredu dinamikoak

### ARIKETA 28 (PZ-O18)

Herri bateko ardo eskariarentzat ondorengo zehazpena proposatu da:

$$Q_t = \beta_1 P_t + u_t$$

non  $u_t \sim ibb(0, 0.0921)$  den. Beste aldetik, prezioa ( $P_t$ ) kantitatearekin ( $Q_t$ ) batera determinatzen denez,  $P_t$   $u_t$ rekin korrelatuta egon daitekeela susmatzen da. Gainera, gordeketa kostu indizearen,  $S_t$ , balioak dauzkagu, zeintzuk exogenoki determinatzen diren. Beraz  $u_t$ rekiko independentea dela kontsideratu daiteke. 1955-1975 urtetako ondorengo hiruhilabeteko datuak emanik:

$$\begin{array}{ll} \sum P_t Q_t = 1,78 & \sum S_t^2 = 2,1417 \\ \sum P_t^2 = 0,507 & \sum P_t S_t = 0,50 \\ \sum S_t Q_t = 2,754 & \end{array}$$

- Erabil ezazu Hausmanen kontrastea susmo hori kontrastatzeko, kontrastearen funtzionamendua azalduz.
- Kontrastearen emaitzak emanik, zein estimatzaile aukeratuko zenuke? Zergatik?

### ARIKETA 29 (PZ-O22)

Demagun ondorengo eredu:

$$Y_t = \beta X_t + u_t \quad u_t \sim ibb(0, \sigma_u^2)$$

non  $X_t$  ez estokastikoa den. Ekonometrak ez du  $X_t$  aldagaia behatzen, baina  $X_t$ -ri hurbiltzen zaion  $X_t^*$  beste aldagai baten behaketak dauzka :

$$X_t^* = X_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim ibb(0, \sigma_\epsilon^2)$$

non

$$E(\epsilon_t u_t) = 0 \quad \forall t$$

- Froga ezazu,  $X_t$ -ren ordez  $X_t^*$  erabiltzean, ondorengo ereduko  $\hat{\beta}_{KTA}$  estimatzailea ez tin-koa dela.

$$Y_t = \beta X_t^* + v_t \quad t = 1, \dots, T$$

- b) Zein estimazio metodo erabil dezakezu  $\beta$ ren estimatzaile tinko bat lortzeko? Idatz ezazu proposatu duzun estimatzailearen formula eta baita tinkoa izateko behar dituzun baldintzak ere.

**ARIKETA 30** (EL-1998.6)

Ikertzaile batek herri bateko perfume merkatua prezioa ( $P$ ) eta egindako publizitate gastuen ( $A$ ) funtzioan analizatu nahi du.

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 A_t^* + u_t \quad u_t \sim ibb(0, \sigma^2) \quad t = 1, \dots, 100 \quad (35)$$

non  $S_t$  saldutako perfume kantitatea den  $t$  hiruhilabetean.

- a) Enpresek datuak estaltzen dituztenez, (36) eredian erabilitako “publizitate gastua” aldagaia benetako publizitate gastuaren,  $A^*$ , hurbilketa bat dela ohartarazten da, hau da,  $A_t = A_t^* + \epsilon_t$   $\epsilon_t \sim ibb(0, \sigma_\epsilon^2)$ ,  $\epsilon_t$  eta  $u_t$  independienteak. Arrazoi honengatik ereduaren Karratu Txikiaren estimazioa honela dago emanda:

$$\widehat{S}_t = \underset{(9871)}{25727} - \underset{(0,33)}{0,96} P_t + \underset{(0,4)}{1,36} A_t \quad (36)$$

Zer esan genezake (36) ekuazioan aurkezten diren emaitzetaz?

- b) Demagun aurreko atalekoa benetan ematen dela, baina behatzen ez diren publizitate gastu errealak,  $A_t^*$ , denboraren funtzio gorakor bat direlaren **ziurtasuna** dagoela. Hain zuzen ere:

$$A_t^* = 0,05 t + \eta_t \quad \eta_t \sim ibb(0, \sigma_\eta^2)$$

non  $\eta_t$  eta  $u_t$  independienteak diren. Informazio hau kontuan hartzen bada, zein izango litzateke estimatu beharreko eredu? Eredu berri honetan oinarrituz, zein propietate ditu  $KTA$  estimatzaileak?

**ARIKETA 31** (EAZL-1998.3)

Izan bedi hurrengo eredu:

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (37)$$

non  $u_t \sim ibb(0, \sigma_u^2)$   
 $X_{2t}$  eta  $Z_t$  aldagai finakoak diren.  
 $X_{1t} = \gamma Z_t + \eta_t \quad \eta_t \sim ibb(0, \sigma_\eta^2)$

- a) Noiz estimatuko zenuke eredua Ordezko Aldagaien metodoaren bidez,  $Z_t$  aldagaia  $X_{1t}$ -ren ordezko aldagai bezala erabiliz? Zergatik?  $X_{2t}$  aldagaiak arazorik sortarazten du? Zergatik?

52 behaketeko lagin batetik hurrengo gurutzatutako biderdurak lortu dira:

	$Y_t$	$X_{1t}$	$X_{2t}$	$Z_t$	
$Y_t$	100	80	-60	60	adibidez $\sum X_{1t}X_{2t} = -40$
$X_{1t}$		100	-40	-10	
$X_{2t}$			80	50	
$Z_t$				40	

- b)  $Z_t$   $X_{1t}$ -rentzako ordezko aldagaia delarik, estima itzazu ereduaren  $\beta_1$  eta  $\beta_2$  parametroak ordezko aldagaien metodoa erabiliz.

Eredua KTA bidez estimatzean lortzen diren emaitzak ondorengoak dira:

$$\widehat{Y}_t = 0,625 X_{1t} - 0,4375 X_{2t} \quad (38)$$

( $\widehat{d\hat{\beta}_i}$ )
(0,077)
(0,086)

- c) Kontrasta ezazu  $H_0 : E(X_{1t}u_t) = 0$  hurrengoa dakizularik:

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}_{OA}) = \begin{pmatrix} 2,1166 & 1,0583 \\ 1,0583 & 1,2254 \end{pmatrix}$$

- d) Kontrastearen emaitzaren ondorioz, zein da (37) eredua estimatzeko metodorik egokiena? Zer propietate ditu estimatzaile horrek?

### **ARIKETA 32** (EAZL-1999.3)

Ondorengo eredua estimatu nahi da:

$$Y_t = \beta X_{1t} + u_t \quad u_t \sim \text{ibb}(0, \sigma^2) \quad (39)$$

non  $X_{1t}$   $Y_t$ rekin determinatzen den,  $X_{1t} = Y_t + X_{2t}$  da eta,  $E(X_{2t}u_t) = 0 \forall t$  izanik.

- a) Froga ezazu  $E(X_{1t}u_t) = (1 - \beta)^{-1}\sigma^2$  dela.  $\beta \neq 1$  dela suposatzen da.
- b) Zein ondorio dakartza aurrekoak (39) ereduko  $\beta$ ren Karratu Txikien Arrunten (KTA) estimatzailearen gain? Arrazona ezazu erantzuna.
- c) Idatz ezazu  $\beta$ ren estimatzaile alternatiboren baten formula eredu honentzako, eta **arrazonatu** ezazu zergatik aukeratu duzun.



60 behaketa biltzen dituen lagin batekin ondorengo gurutzatutako biderkadurak lortu dira:

	$Y_t$	$X_{1t}$	$X_{2t}$
$Y_t$	100	40	-60
$X_{1t}$		80	40
$X_{2t}$			100

adibidez  $\sum Y_t X_{2t} = -60$ .

- d) Lor ezazu  $\beta$ ren estimazioa c) atalean proposatu duzun metodoa erabiliz eta baita KTA metodoa erabiliz ere.
- e) Kontrasta ezazu  $H_0 : \beta = 0$  hipotesia %5eko esangura mailarekin. Suposa ezazu  $\sigma^2 = 1$  dela.
- f) Ikertzaileak  $X_{1t} = Y_t + X_{2t}$  dela ez badu kontuan hartzen, nola ohartu daiteke  $E(X_{1t}u_t) \neq 0$  dela? **Azal** eta egin ezazu kontrastea. Suposa ezazu  $\sigma^2 = 1$  dela.

### ARIKETA 33 (EL-1999.3)

Agronomo batek gariaren errendimenduaren ( $Y_i$ ) eta erabilitako ongarri kopuruaren ( $X_i^*$ ) arteko erlazioa estimatu nahi du. Horretarako dauzkan datuak errendimenduarenak eta ekoizleak deklaraturako ongarri kopuruarenak ( $X_i$ ) dira, baina azken hau ez da zertan benetan erabilitakoarekin bat etorri behar. Bestalde, ongarria erosterakoan egindako gastua ( $Z_i$ ) ezagutzen du. Hau exogenoki dago determinatuta, deklaraturako ongarri kopuruaren neurketa erroreakerikiko independentea da eta, aldi berean, erabilitako ongarri kantitatearekin korrelatuta dago. Dauzkan 20 behaketekin, ondorengo balioak lortzen ditu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{20} X_i &= 492,78 & \sum_{i=1}^{20} Z_i &= 284,4 & \sum_{i=1}^{20} Z_i X_i &= 7369,5 \\ \sum_{i=1}^{20} Y_i &= 434,94 & \sum_{i=1}^{20} Z_i Y_i &= 6472,8 & & \end{aligned}$$

- a) Idatz ezazu eredu egokiren bat eta azal ezazu argitasun osoz erabili beharreko estimazio metodoa eta aukeraketa horren zergatia.
- b) Estima ezazu  $Y$  eta  $X^*$ ren arteko erlazioa metodo tinko baten bitartez.

### ARIKETA 34 (EL-2000.3)

$Y_t = \beta X_t + u_t$  estimatu nahi da eta  $u_t$ -ren barnean  $X_t$ -rekiko korrelatuta dauden eta behargarriak ez diren aldagaiak egon daitezkeelaren susmoa dago.

- a) Susmo hau egiazkoa balitz, zein ondorio lituzke  $\beta$ ren KTA estimatzailearen gain? Arrazona ezazu zure erantzuna **behar den bezala**.

- b) Zein baldintzapean izango da  $X_{t-1}$  ordezeko aldagai egokia  $\beta$ ren ordezeko aldagaien estimatzailea lortzeko? Arrazona ezazu zure erantzuna **behar den bezala**.

60 behaketaz osaturiko laginarekin ondorengo gurutzatutako biderkadurak lortu dira:

	$Y_t$	$X_t$	$X_{t-1}$
$Y_t$	50	20	-30
$X_t$		40	20
$X_{t-1}$			50

adibidez,  $\sum Y_t X_{t-1} = -30$ .

- c)  $X_t$ -ren ordezeko aldagai bezala  $X_{t-1}$  erabiliz, lor ezazu  $\beta$ ren estimazioa ordezeko aldagaien metodoaren bitartez.
- d) Zer gertatuko litzateke  $\sum X_t X_{t-1} = 0$  balitz?
- e)  $u_t \sim iib(0, 1)$  dela suposatuz, kontrasta ezazu  $H_o : E(X_t u_t) = 0$  hipotesia erabili duzun kontrastearen prozedura guztia **zehazki** azalduz.

### ARIKETA 35 (EL-2001.5)

Izan bedi ondorengo eredia:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (40)$$

non  $u_t \sim iib(0, \sigma_u^2)$ ,  $X_t = \gamma Z_t + \eta_t$   $\eta_t \sim iib(0, \sigma_\eta^2)$  diren.

- a) Noiz estimatuko zenuke eredia ordezeko aldagaien bidez  $X_t$  aldagaiarentzat  $Z_t$  ordezeko aldagai bezala erabiliz? Zergatik?

52 behaketeko lagin batetik hurrengo datuak lortu ditugu:

$$\begin{array}{lll} \sum X_t = 20 & \sum X_t Y_t = 70 & \sum X_t^2 = 1300 \\ \sum Y_t = 50 & \sum Z_t Y_t = 90 & \sum Z_t^2 = 1000 \\ \sum Z_t = 30 & \sum X_t Z_t = 40 & \end{array}$$

- b)  $Z_t$   $X_t$ -ren ordezeko aldagaia izanik, estima itzazu ereduako  $\beta_1$  eta  $\beta_2$  parametroak ordezeko aldagaien metodoa erabiliz.

Eredua KTA bidez estimatzearen emaitzak hurrengoak izan dira:

$$\widehat{Y}_t = 0,946 + 0,039 X_t \quad (41)$$

$(\widehat{des}(\widehat{\beta}_i))$        $(0,43)$        $(0,027)$

c) Kontrasta ezazu  $H_0 : E(X_t u_t) = 0$  hurrengoak dakizularik:

$$\widehat{Bar}(\widehat{\beta}_{OA}) = \begin{pmatrix} 0,018 & -0,44 \\ -0,44 & 1,20 \end{pmatrix}$$

Kontrastearen emaitzaren ondorio bezala, zein da (40) eredua estimatzeko metodo egokia? Zer propietate dituzte estimatzaile horiek?

### ARIKETA 36 (EL-2001.6)

Hurrengo ereduari:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (42)$$

non  $X_{2t}$  aldagai ez estokastikoa den,  $X_{3t}$  aldagai estokastikoa baina  $u_t$ -rekiko independentea den, eta  $u_t \sim ibb(0, \sigma_u^2)$  den.

- a) Azal ezazu Mann eta Wald-en teorema (42) ekuazioari aplikatuz. Gogora ezazu aplikagarria izateko bete beharreko baldintzak esan behar dituzula, eta zehaz ezazu **argi eta garbi** zer ondorio dituen. **Froga itzazu** teorema honen ondorioak ereduako parametroen KTA estimatzailearentzat.
- b) (42) ekuazioan, esan ezazu nola kontrastatuko zenukeen erregresoreen baterako esanguratasunaren hipotesia. Idatz itzazu hipotesi hutsa, alternatiboa, kontrastearen estatistikoa eta bere banaketa, baita erabaki araua ere. Zehaz ezazu argi eta garbi nola lortzen den kontrastearen estatistikoaren **elementu bakoitza**.

### ARIKETA 37 (EAZL-2001.3)

$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + u_t \quad t = 1, 2, \dots, T$  ereduari, non  $u_t \stackrel{ibb}{\sim} (0, \frac{1}{b} \frac{1}{20})$  den, hurrengo behaketak

ditugu:

	$Y_t$	$X_t^*$
	5,0	6,0
	4,0	7,0
	3,5	6,0
	4,0	7,0
	4,5	8,0
	5,0	8,0
Batura	26,0	42,0

- Zer gertatzen da  $X_t^*$  aldagaiak neurketa erroreadun aldagaia bada, non  $X_t^* = X_t + \varepsilon_t$  den? (Laguntza:  $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + w_t$  eredutik hasita,  $X_t$  aldagaia ez litzateke behargarria izango eta  $w_t$  eta  $\varepsilon_t$  perturbazio independenteak lirateke).
- $X_t^*$  aldagaiak neurketa errorea duelaren susmoa badaukagu soilik, nola kontrastatuko zenuke KTA estimatzailea tinkoa den? Egin ezazu kontrastea  $X_t^*$  eta  $X_{t-1}^*$  aldagaien arteko korrelazioa 0,429 dela jakinik, eta  $X_{t-1}^*$   $u_t$  rekin korrelaturik ez dagoela kontuan hartuz.
- Aurreko b) ataletik KTA estimatzailea ez tinkoa dela ondorioztatzen baduzu, kontrasta ezazu (ez kontuan hartu  $T$  txikia dela)  $X_t$  aldagaia esanguratsua den edo ez.

### **ARIKETA 38** (EL-2002.2)

Hurrengo ereduan,

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad u_t \sim \text{ibb}(0, \sigma^2)$$

non  $X_{2t}$  aldagai finkoa den,  $X_{3t}$  aldagai estokastikoa den eta  $\beta$  parametro ezezagunen bektorea den.

- Zergatik ez da lineala  $\beta$  ren KTA estimatzailea?
- Zer hipotesik bermatzen dizu  $\beta$  ren KTA estimatzailea alboragabea izatea? Froga ezazu.
- $X_{3t}$  estokastikoa bada eta  $u_t$  rekiko ez independentea, baina  $E(X_{3t}u_t) = 0, \forall t$ .  $\beta$  ren KTA estimatzailea tinkoa al da? Froga ezazu eta eman itzazu beharrezkoak zaizkizun hipotesi gehigarri guztiak.
- $X_{3t}$  estokastikoa bada baina Mann eta Wald-en teorema betetzen bada, nahiz eta  $u_t$  ren banaketa ez ezagutu, posiblea al da  $\beta$  ri buruzko inferentzia egitea? Arrazona ezazu zure erantzuna.

**ARIKETA 39** (EL-2002.7)

Hurrengo erlazioa daukagu

$$Y_{1t} = \beta_1 Y_{2t} + \beta_2 X_{1t} + u_t \quad (43)$$

non  $X_{1t}$  aldagai finkoa den.  $Y_{2t}$  aldagaia perturbazioarekin,  $u_t$ , korrelatuta egon daitekeela uste da,  $u_t \sim ibb(0, \sigma_u^2)$  suposatzen delarik. Bestalde, hurrengoa dakigu

$$Y_{2t} = \gamma X_{2t} + \varepsilon_t \quad (44)$$

non  $X_{2t}$  erregresore finkoa den eta  $\varepsilon_t \sim ibb(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

25 behaketeko lagin batek **karratuen eta produktu gurutzatuen baturak** ematen ditu:

	$Y_{1t}$	$Y_{2t}$	$X_{1t}$	$X_{2t}$
$Y_{1t}$	100	80	-60	60
$Y_{2t}$	80	100	-40	-10
$X_{1t}$	-60	-40	80	50
$X_{2t}$	60	-10	50	40

non, adibidez,  $\sum Y_{1t}X_{1t} = -60$  eta  $\sum Y_{1t}^2 = 100$

- Lor ezazu (43) ekuazioko  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren estimazioa Karratu Txikien Arrunten bidez.
- $E(Y_{2t}u_t) \neq 0$  hipotesiaren pean, zehaz ezazu  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren estimatzaile tinko bat. Idatz itzazu, formalki, propietate honen betetzea bermatzen dizuten baldintzak, eta arrazona ezazu ea kasu honetan ematen diren ala ez.
- Lor ezazu  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren estimazioa aurreko atalean proposatutako estimatzailearekin.
- $\sigma_u^2 = 1$  hipotesiaren pean, erabil ezazu Hausmanen kontrastea  $Y_{2t}$  eta  $u_t$  korrelatuak dauden ala ez kontrastatzeko. Azal ezazu kontrastearen prozedura, hipotesi hutsa eta alternatiboa barneratuz.
- Aurreko ataleko kontrastearen emaitza kontuan hartuz, zer estimatzaile aukeratuko zenuke kasu honetan? Zergatik?

**ARIKETA 40** (EL-2003.3)

Suposa ezazu pertsona baten aurrezkoa bere *errenta iraunkorraren* menpe dagoela, hurrengo erlazioaren bidez:

$$Y_i = \alpha + \beta R_i + v_i \quad (45)$$

$Y_i$  langile baten urteroko aurrezkoa delarik, eta  $R_i$  urteroko errenta iraunkorra. Ez da posible errenta iraunkorra,  $R$ , behatzea. Hau dela eta, praktikan, erabilitako erregresio eredu hurrengoa da:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad (46)$$

non  $X_i$  langile baten urteroko errenta den,  $R$ -ren hurbilketa moduan erabiltzen dena. 1999 urterako 50 gizabanakoekin egindako KTA estimazioaren emaitzak hurrengoak dira:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}_{KTA} = \begin{pmatrix} 4,34 \\ -0,856 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_{KTA}^2 (X'X)^{-1} = 1,023 \times \begin{pmatrix} 0,7165 & -0,009 \\ 0,0001 & \end{pmatrix}$$

- a) Teoria ekonomikoak dio errenta iraunkorra eta aurrezkiaren artean harreman positiboa dagoela. Hala ere,  $\beta$  maldaren KTA estimazioa negatiboa da. Uste duzu arazoren bat egon litekeela kontraesan hau eman dadin? Arrazona ezazu zure erantzuna.

Geroago (46) eredu berrestimatzeko da Ordezko Aldagaien bidez. Erabilitako ordezko aldagai aurreko 10 urtetan (1989-1998) lortutako sarreraren batezbestekoa da. Honek, noski, errenta iraunkorarekin erlazio handia du eta baita oraingo urteroko errentarekin ere. Emaitzak hurrengoak dira:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix}_{OA} = \begin{pmatrix} 0,988 \\ 0,039 \end{pmatrix} \quad \tilde{\sigma}_{OA}^2 (Z'X)^{-1} Z'Z (X'Z)^{-1} = 1,3595 \times \begin{pmatrix} 1,7088 & -0,0223 \\ 0,0003 & \end{pmatrix}$$

- b) Zein da  $\tilde{\beta}_{OA}$ -ren formula? Eta  $\tilde{\sigma}_{OA}^2$ -rena?
- c) Egin ezazu Hausmanen kontrastea. Erlaziona itzazu emaitza berri hauek a) atalean eman duzun erantzunarekin.

## **ARIKETA 41** (EL-2003.4)

Hezkuntzaren errendimendua aztertu nahi da hurrengo ereduaren arabera

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 HEZ_i + w_i \quad i = 1, \dots, N$$

non  $Y_i$  eta  $HEZ_i$  urteko soldatak (hamar mila eurotan) eta gizabanakoaren hezkuntza maila diren, hurrenez hurren. Gainera,  $E(HEZ_i w_i) = 0$  edozein  $i$ rako eta  $w_i$  zarata zuria da.

1000 indibiduo osatutako lagin bat daukagu. Hala ere, hezkuntza maila behatzen dugun beste aldagai baten bidez neurtzen da: ikasitako urteak,  $S_i$ , erroreaz neurtuta dagoena hurrengo moduan:  $S_i = HEZ_i + \varepsilon_i$ , non  $\varepsilon_i$  zarata zuria den,  $HEZ_i$  eta  $w_i$ rekiko independentea.

Karratu Txikien Arrunten (KTA) metodoa erabiliz, hurrengo lagin informazioarekin, emaitza hauek lortu dira:

$$\widehat{Y}_i = 2,431 + 0,03332 S_i$$

(desb.)            (0,078)            (0,0046)

- a) Interpreta ezazu zer jasotzen duen  $\beta_2$  parametroaren estimazioak.
- b)  $HEZ_i$  erabili beharrean, ereduan eskuragarri dagoen hezkuntza mailaren neurria,  $S_i$ , erabili bada, azal ezazu zehaztasunez zer propietate izango dituen  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren KTA estimatzaileak. Arrazona ezazu zure erantzuna.

Beste aldagai bat daukagu,  $P_i$ ,  $i$  indibiduo horren aitaren ikasketa urteak neurtzen dituen. 1000 indibiduen laginarako, hurrengo informazioa daukagu:

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i &= 2988,232 & \sum_i S_i &= 16707 & \sum_i Y_i S_i &= 50071,6 & \sum_i S_i^2 &= 283539 \\ \sum_i P_i &= 14343 & \sum_i Y_i P_i &= 42914,7 & \sum_i P_i S_i &= 240466 & \sum_i P_i^2 &= 206469 \\ \sum_i Y_i^2 &= 9028,9 & & & & & & \end{aligned}$$

- c) Proposa ezazu KTA ez den estimatzaile alternatibo bat, zer baldintzaren pean tinkoa izango den arrazonatuz eta bere banaketa asintotikoa zehaztuz. Arrazona ezazu zure erantzuna.
- d) Kalkula itzazu  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ ren estimazioak aurreko atalean proposatutako estimatzailean oinarrituz.
- e) Tinkoa den estimatzaile bat erabili bada, zelan lortu da c) atalean proposatutako estimatzailearen bariantza-kobariantza matrize asintotikoaren estimazioa? Idatz itzazu jarraitutako pausuak emaitza hau lortu arte.

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}) = \frac{98,88}{998} \begin{bmatrix} 0,2984084 & -0,0178 \\ -0,0178 & 0,001065 \end{bmatrix}$$

- f) c) atalean proposatutako estimatzailea erabiliz, kontrasta ezazu hurrengo hipotesia: hezkuntza urte gehiagarri batean areagotzen bada, lortutako batezbesteko urteko soldata 720 eurotan igotzen da. Idatz itzazu hipotesi hutsa, alternatiboa eta kontrastearen elementu guztiak.
- g) Burutu ezazu Hausmanen kontrastea neurketa errorearen arazoa garrantzitsua den ala ez ikusteko. Idatz itzazu hipotesi hutsa, alternatiboa eta kontrastearen elementu guztiak.
- h) Hausmanen kontrastearen emaitza kontuan hartuz, arrazona ezazu bi estimatzaileetatik zein aukeratuko zenukeen.

### **ARIKETA 42** (EL-2004.3)

$\beta$  parametroa estimatu nahi dugu ondorengo ekuazioan

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \quad u_{1t} \sim NIB(0, \sigma_1^2) \quad (47)$$

Hurrengo erlazioa daukagunez:

$$y_{2t} = \alpha_1 y_{1t} + \alpha_2 X_t + u_{2t} \quad u_{2t} \sim NIB(0, \sigma_2^2) \quad (48)$$

$y_{1t}$  eta  $y_{2t}$  batera zehazten direla dakigu, non  $X_t$  aldagai exogenoa den,  $u_{1s}$  eta  $u_{2s}$ -rekiko independentea edozein  $t$  eta  $s$ -rako.

- $X_t$  ordezeko aldagai bezala erabiliz, lor ezazu  $\beta$ ren Ordezko Aldagaien (OA) estimatzailearen adierazpena.
- Estimatzaile hau lineala al da? Alboragabea al da? Zergatik?
- Tinkoa al da? Zergatik?
- Bere banaketa ezagutzen al duzu? Eta asintotikoa? Zergatik?
- $\alpha_2 = 0$  izango balitz, aurreko ataletako erantzunen bat aldatuko litzateke? Arrazona ezazu zure erantzuna.

$T = 1000$  tamainako lagin batentzat, hurrengo lagin informazioa daukagu:

$$\sum_t y_{2t}^2 = 42 \quad \sum_t y_{1t}y_{2t} = 5 \quad \sum_t y_{2t}X_t = 12 \quad \sum_t X_t^2 = 10 \quad \sum_t X_t y_{1t} = 3 \quad \sum_t y_{1t}^2 = 11$$

- Gainera  $\sigma_1^2$ -ren estimatzaile tinko bat daukagu, bere estimazioa  $\hat{\sigma}_1^2 = 0,01$  izanik. Erabil ezazu Hausman-en kontrastea  $y_{2t}$  aldagai endogenoa den ala ez zehazteko. Azal ezazu zehaztasunez prozesu osoa.

### **ARIKETA 43** (EAZL-2004.4)

Herrialde bateko kontsumoa ikertzeko hurrengo eredua zehaztu da:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, 100$$

non  $Y_t$ ,  $X_{1t}$  eta  $X_{2t}$  aldagaiek  $t$  denboraldiko kontsumoaren hazkunde tasa, interes tasa eta inflazioa adierazten duten, hurrenez hurren. Bestalde  $u_t \sim ibb(0, \sigma^2)$  eta  $X_{1t}$  ez estokastikoa suposatzen da. Inflazioa, berriz, kontsumo eskaerarekin zehazten denez, estokastikoa da. Gainera ez estokastikoa kontsideratzen den produkzio kostuen hazkunde tasaren,  $P_t$ , informazioa daukagu.

Eredua KTA bitartez estimatu da ondorengo emaitzak lortuz:

$$\hat{Y}_t = 0.046 - 0.021X_{1t} - 0.055X_{2t} \quad (49)$$



a) Noiz izango da (49) ekuazioko estimatzailea ez tinkoa?

b) Hurrengo lagin informazioa izanik,

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,010 & 0,012 & 0,000 \\ 0,012 & 0,011 & -0,033 \\ 0,000 & -0,033 & 0,022 \end{pmatrix} \quad (Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,011 & 0,000 & 0,003 \\ -0,034 & -0,012 & 0,000 \\ -0,023 & 0,000 & -0,032 \end{pmatrix}$$

$$(Z'X)^{-1}Z'Z[(Z'X)^{-1}]' = \begin{pmatrix} 0,012 & -0,033 & -0,033 \\ -0,033 & 0,118 & 0,051 \\ -0,033 & 0,051 & 0,188 \end{pmatrix} \quad Z'Y = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 3,0 \\ 1,8 \end{pmatrix} \quad X'Y = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 3,0 \\ 2,0 \end{pmatrix}$$

$$Z'Z = \begin{pmatrix} 100 & -14 & -16 \\ -14 & 95 & -15 \\ -16 & -15 & 155 \end{pmatrix} \quad (X'Z)^{-1}Z'Z[(X'Z)^{-1}]' = \begin{pmatrix} 0,012 & -0,030 & 0,059 \\ 0,002 & 0,008 & -0,010 \\ -0,006 & -0,033 & 0,142 \end{pmatrix}$$

Estima ezazu eredia Ordezko Aldagaien metodoaren bitartez,  $Z$  ordezkoen matrizea delarik. Idatz ezazu  $Z$  matrizea eta erabiltzen den ordezkoa, bere hautaketaren arrazoiak argudiatuz. Zeintzuk dira estimatzaile honen propietateak?

c) Gainera,  $\sum \hat{u}_{t,OA}^2 = 2.037$  izango balitz, nola kontrasta lezakezu KTA estimatzailea tinkoa den ala ez? Azaldu eta burutu ezazu kontrastea. Emaitza kontuan izanik, zein estimazio metodo aukeratuko zenuke? Zergatik?

#### **ARIKETA 44** (EAZL-2005.8)

BBVaren akzioen hegazkortasunak ( $X_{1t}$ ) bere errendimenduan ( $Y_t$ ) eragina duen ala ez aztertu nahi da. Horretarako hurrengo eredia proposatzen da:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \quad t = 1, 2, \dots, 100$$

non  $u_t \sim ibb(0, \sigma^2)$  eta  $X_{2t}$  urte baterako tesoro tasa den. Ikertzaile batek eredia KTA bidez estimatzen du hurrengo emaitza lortuz:

$$\hat{Y}_t = 0,7 - 0,3X_{1t} - 0,1X_{2t} \quad (50)$$

non

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = 0,17 \begin{pmatrix} 0,31 & 0,12 & -0,15 \\ 0,12 & 0,31 & 0,07 \\ -0,15 & 0,07 & 0,13 \end{pmatrix}$$

a) Kontrasta ezazu hegazkortasunak BBVaren akzioen errendimenduan eragina duen ala ez.

- b) Beste ikertzaile batek pentsatzen du, nahiz eta  $X_{2t}$  ez estokastikoa izan, hegazkortasuna eta errendimendua zehazten duten faktoreak berdinak direla eta, beraz,  $u_t$  eta  $X_{1t}$  korrelatuta egongo direla. Zer ondorio ekarriko luke honek (50) ekuazioan egindako ereduko KTA estimazioan?
- c) Bigarren ikertzaile honek eredia OA bidez estimatzea erabakitzen du, ordezeko aldagai bezala Ibex35-en hegazkortasuna erabiliz, hurrengo emaitzak lortuz:

$$\hat{Y}_t = 1,3 - 0,7X_{1t} - 0,2X_{2t} \quad (51)$$

non

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}_{VI}) = 0,21 \begin{pmatrix} 0,41 & 0,23 & -0,25 \\ 0,23 & 0,33 & 0,09 \\ -0,25 & 0,09 & 0,16 \end{pmatrix}$$

Azal ezazu **zehaztasunez** nola lortu diren  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  eta  $\beta_2$ -ren estimazioak eta komentatu itzazu estimatzaile hauen propietateak. Zer baldintza bete behar ditu Ibex35-en hegazkortasunak ordezeko aldagai egokia izan dadin?

- d) Azal ezazu nola lortu den  $\widehat{Bar}(\hat{\beta}_{OA})$ .
- e) Kontrasta ezazu, OA bidez lortutako emaitzetan oinarrituz, hegazkortasunak BBVaren akzioen errendimenduan eragina duen ala ez.
- f) Burutu ezazu kontrasteren bat, estimatu eta kontrastatzeko orduan, bi ikertzaileen artean zeinek jokatzen duen modu egokian frogatzeko. Azal ezazu zehaztasunez zure ondorioak.

## ARIKETA 45 (PZ-E42)

Madrileko burtsaren dependentzia New York eta Londreseko burtsekiko aztertu nahi da. Honetarako hurrengo eredua definitzen dugu

$$MAD_t = \beta_0 + \beta_1 LON_{t-1} + \beta_2 NY_{t-1} + u_t \quad t : 2, \dots, 30.$$

KTA bidezko estimazioak hurrengo emaitza ematen digu:

$$\widehat{MAD}_t = 0,0095 + 0,4990 LON_{t-1} + 0,1800 NY_{t-1} \quad DW = 0,82 \quad R^2 = 0,88 \quad (52)$$

(Desb. tipikoak →)      (0,0032)      (0,1200)      (0,1900)

- a) Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako esanguratasuna.
- b) Kontrasta ezazu AR(1) motako autokorrelazioaren existentzia. Zehaz itzazu hipotesi hutsa eta alternatiboa, kontrastearen estatistikoa eta erabakitze araua.

Geroago  $MAD_{t-1}$  aldagai azaltzailea barneratzen dugu ereduan eta datu berdinekin estimatzen da, hurrengo emaitza lortuz:

$$MAD_t = 0,0031 + 0,1910 MAD_{t-1} + 0,8400 LON_{t-1} + 0,0600 NY_{t-1} + \hat{v}_t \quad (53)$$

(0,0012)      (0,0800)      (0,2460)      (0,0120)

$DW = 1,9$  izanik eta

$$\hat{v}_t = 0,0001 + 0,03 \hat{v}_{t-1} + 0,009 MAD_{t-1} + 0,04 LON_{t-1} + 0,006 NY_{t-1} + \hat{e}_t \quad R^2 = 0,09$$

(0,002)      (0,09)      (0,3)      (0,1)      (0,03)

- c) Kontrasta ezazu AR(1) autokorrelazioaren existentzia  $v_t$ -n.
- d) Aurreko b) eta c) atalen emaitzen ondorioak kontuan hartuz, zer esan dezakezu (52) eta (53) ereduen baliogarritasunari buruz?

## ARIKETA 46 (EAZL-1998.6)

Hiru ikertzailek hurrengo eredua estimatu behar dute:

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t \quad (54)$$

non  $Y_t$   $t$  uneko etxebizitza berri baten salmenta prezioa den, eta  $X_t$   $t$  uneko interes tasa den.

Ereduari buruzko hurrengo informazioa dugu:

- Eredua ondo zehazturik dago.

- $u_t$  perturbazioak banaketa normala jarraitzen du, non  $E(u_t) = 0 \quad \forall t$  den.

Hiru ikertzaileak ez dira ados jartzen estimazio metodoarekin, eta 3 estimazio desberdin aurkeztea erabaki dute:

**1. ikertzailea:**  $t = 2, \dots, 101$  erabiliz hurrengo emaitzak azaltzen ditu:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}^2 & \sum Y_{t-1}X_t \\ \sum Y_{t-1}X_t & \sum X_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}Y_t \\ \sum X_tY_t \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\begin{pmatrix} 0,831371 \\ 0,882068 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00046 & -0,00134 \\ -0,00134 & 0,0076 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4442,139 \\ 903,487 \end{pmatrix} \quad (56)$$

non gainera  $BG = 23,24$   $HKB = 157,43$

- a) Zein estimazio metodo erabiltzen ari da? Arrazona ezazu.
- b) Zein propietate dituzte bere estimatzaileek? Beharrezkoa baderitzozu, egin ezazu kontrasteren bat.

**2. ikertzailea:**  $t = 2, \dots, 101$  erabiliz hurrengo emaitzak azaltzen ditu:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum X_{t-1}Y_{t-1} & \sum X_{t-1}X_t \\ \sum X_tY_{t-1} & \sum X_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum X_{t-1}Y_t \\ \sum X_tY_t \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$\begin{pmatrix} 0,770343 \\ 1,060368 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,003809 & -0,00291 \\ -0,01112 & 0,012178 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,770343 \\ 903,0487 \end{pmatrix} \quad (58)$$

non gainera  $BG = 27,66$   $HKB = 165,5112$

- c) Zein estimazio metodo erabiltzen ari da? Arrazona ezazu.
- d) Zein propietate dituzte bere estimatzaileek? Beharrezkoa baderitzozu, egin ezazu kontrasteren bat.

**3. ikertzailea:**  $t = 3, \dots, 101$  erabiliz hurrengo emaitzak azaltzen ditu:

Izan bitez  $Y_t^* = (Y_t - \rho^*Y_{t-1})$ ,  $X_t^* = (X_t - \rho^*X_{t-1})$ ,

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}^{*2} & \sum Y_{t-1}^*X_t^* \\ \sum Y_{t-1}^*X_t^* & \sum X_t^{*2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}^*Y_t^* \\ \sum X_t^*Y_t^* \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$\begin{pmatrix} 0,775642 \\ 1,090742 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,001035 & -0,00117 \\ -0,00117 & 0,00938 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1014,806 \\ 245,7676 \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\rho^* = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_{t-1}^2} = 0,5387823 \quad (61)$$

non gainera  $\hat{u}_t = Y - X\hat{\beta}_{OA}$   $BG = 0,27$   $HKB = 118,0408$

- e) Zein estimazio metodo erabiltzen ari da? Arrazona ezazu.
- f) Aurreko ataletan azaldu duzunarekin, zein ikertzailek erabili du estimatzaile onena? Arrazona ezazu zure erantzuna.

### ARIKETA 47 (EL-2000.1)

Lan batean gasolinaren eboluzioa aztertzeke asmoz eredu posible bi proposatzen dira. Ondorengo aldagaien **hiruhileroko** datuak dauzkagu 1959tik eta 1990rarte (urte biak barne):

- $Y$ : Gasolinaren per capita gastu erreal (logaritmoetan).
- $X_2$ : Gasolinaren prezio erreal (logaritmoetan). Aldagai ez estokastikoa.
- $X_3$ : Per capita errenta erreal erabilgarria (logaritmoetan). Aldagai ez estokastikoa.
- $X_4$ : Gasolina galoiko milak (logaritmoetan). Aldagai ez estokastikoa.

**Lehen eredu:**

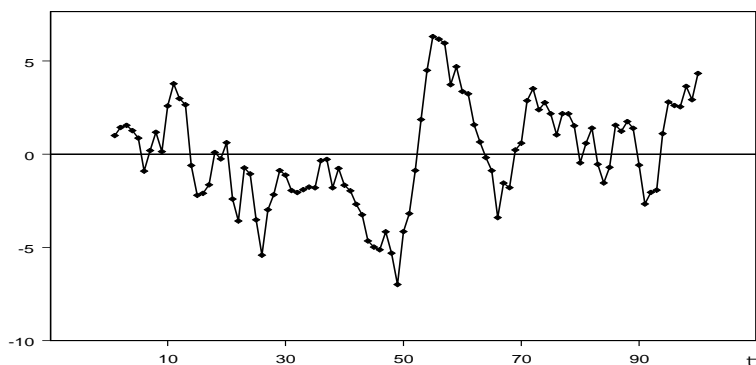
$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \quad (62)$$

Bere KTA estimazioaren emaitzak:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= -1,51 - 0,14 X_{2t} + 0,998 X_{3t} - 0,52 X_{4t} \\ (\widehat{desb}) & \quad (0,12) \quad (0,01) \quad (0,015) \quad (0,02) \\ R^2 &= 0,97 \quad \quad \quad DW = 0,74 \\ \hat{u}_t &= -0,01 - 0,003 X_{2t} - 0,004 X_{3t} + 0,004 X_{4t} + 0,62 \hat{u}_{t-1} - 0,007 \hat{u}_{t-2} \\ (\widehat{desb}) & \quad (0,09) \quad (0,008) \quad (0,012) \quad (0,004) \quad (0,09) \quad (0,107) \\ & \quad + 0,005 \hat{u}_{t-3} + 0,087 \hat{u}_{t-4} + \hat{e}_{1t} \\ & \quad (0,107) \quad (0,09) \\ R^2 &= 0,42 \quad \quad \quad DW = 2,03 \end{aligned}$$



Irudia 7: KTA hondarrak



- a) Komenta ezazu hondarren irudia, oinarrizko hipotesiren baten ez betetzearen seinalerik aurkitzen al duzun azalduz.
- b) Hondarren ondorengo emaitzak izanik, kontrasta ezazu perturbazioek AR(1) autokorrelazio prozedura jarraitzen duten.

$$\sum_{t=1}^{100} \hat{u}_t^2 = 739,3073 \quad , \quad \sum_{t=2}^{100} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 194,3556 \quad , \quad \sum_{t=2}^{100} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 632,2639$$

- c) Azken urteetan inflazioaren sakabanatzea txikiago dela uste da. Kontrasta ezazu hipotesi hau, hasierako 32 behaketekin eta azken 32 behaketekin egindako datozen bi erregresioak erabiliz.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= 12,83 - 0,58 X_t & HKB &= 126,62 & t &= 1, 2, \dots, 32, \\ \underset{(desb)}{\hat{Y}_t} & \quad \underset{(1,05)}{\quad} & \underset{(0,17)}{\quad} & & & \\ \hat{Y}_t &= 9,85 - 0,35 X_t & HKB &= 96,22 & t &= 73, 74, \dots, 100. \\ \underset{(desb)}{\hat{Y}_t} & \quad \underset{(1,20)}{\quad} & \underset{(0,19)}{\quad} & & & \end{aligned}$$

- d) Aurreko b) eta c) ataletako emaitzak kontuan izanik, komenta itzazu (64) ereduko koefizienteen KTA estimatzailearen propietateak zeintzuk diren.
- e) Beste ikertzaile batek, interes tasa eta inflazioaren arteko erlazioa ikertzeko, eredu egokiena azken aldagai honen dinamikotasuna kontuan hartzen duena dela dio. Horregatik aurreko hilabeteko inflazioa erregresoretzat barneratzea erabaki du, KTA bitartez estimatutako ondorengo erregresioa lortuz:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= 4,84 - 0,66 X_t + 0,88 Y_{t-1} & t &= 2, 3, \dots, 100. & (65) \\ \underset{(desb)}{\hat{Y}_t} & \quad \underset{(0,36)}{\quad} & \underset{(0,04)}{\quad} & \underset{(0,03)}{\quad} & \\ R^2 &= 0,91 \quad , \quad DW &= 1,70 & & \end{aligned}$$

Ondorengo erregresio laguntzaileak ere lortu dira:

$$\begin{aligned}
 i) \quad \hat{u}_t &= 0,09 + 0,16\hat{u}_{t-1} + 0,004X_t - 0,01Y_{t-1} + \hat{v}_{1t} & R^2 = 0,024, & KTB = 738,3 \\
 ii) \quad \hat{u}_t &= 0,35\hat{u}_{t-1} + 0,1X_t + 0,06Y_{t-1} + \hat{v}_{2t} & R^2 = 0,018, & KTB = 738,3 \\
 iii) \quad \hat{u}_t &= 0,3 + 0,24\hat{u}_{t-1} + \hat{v}_{3t} & R^2 = 0,005, & KTB = 738,3 \\
 iv) \quad \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}^2} &= 0,13 + 0,2\frac{\hat{u}_{t-1}}{\hat{\sigma}^2} + 0,19X_t + 0,02Y_{t-1} + \hat{v}_{4t} & R^2 = 0,354, & KTB = 98,7
 \end{aligned}$$

Kontrasta ezazu, era egoki batean, perturbazioek lehen ordenako autokorrelazioa jarraitzen duten.

- f) Aurreko e) atalean lortutakoa kontuan izanik, komenta itzazu (65) ekuazioko KTA estimatzaileen propietateak. Aurreko d) ataleko ondorioak aldatzen al dira?

### **ARIKETA 49** (EAZL-2002.6)

Oinarrizko makroekonomiari jarraituz, badakigu diru eskaintzan emandako aldaketek interes tasen aldakuntzak dakartzatela. Hala ere, aldaketak denboraldi batzuetan zehar ematea espero da. Suposa dezagun beste aldagai batzuek, gastu publikoa bezala, ez dutela eragin nabaria interes tasetan. Hurrengo ereduari, hiruhilabeteko datuekin, bost dendoralditan zehar emandako eragina suposatzen da:

$$R_t = \alpha + \beta_0 M_t + \beta_1 M_{t-1} + \beta_2 M_{t-2} + \beta_3 M_{t-3} + \beta_4 M_{t-4} + u_t$$

non  $R_t$  interes tasa den eta  $M_t$  diru eskaintza den (ez estokastikoa dela suposatzen da).

- Eredua KTA bidez estimatu da 100 datuekin, eta bere hondarren lehen ordenako lagin autokorrelazio koefizientearen balioa  $\hat{\rho} = 0,75$  da. Balio hau kontuan hartuz, kontrasta ezazu AR(1) motako autokorrelazioa ereduaren perturbazioetan.
- Zer propietate ditu KTA estimatzaileak eredu honetan?
- Diru eskaintzan emandako aldaketek interes tasetan eraginik ez dutelaren hipotesia kontrastatzeko eskatzen badizute, nola egingo zenuke?

### **ARIKETA 50** (EL-2004.4)

1948tik 1989rako urteroko datuekin, Britaina Handiarentzat hurrengo kontsumo funtzioa estimatu da:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + u_t \tag{66}$$

non  $C$  per capita kontsumoa den eta  $RD$  per capita errenta erabilgarria den (libratan). Bi aldagaiak terminu errealean daude neurtuta. Estimazioaren emaitzak hurrengoak izan dira:

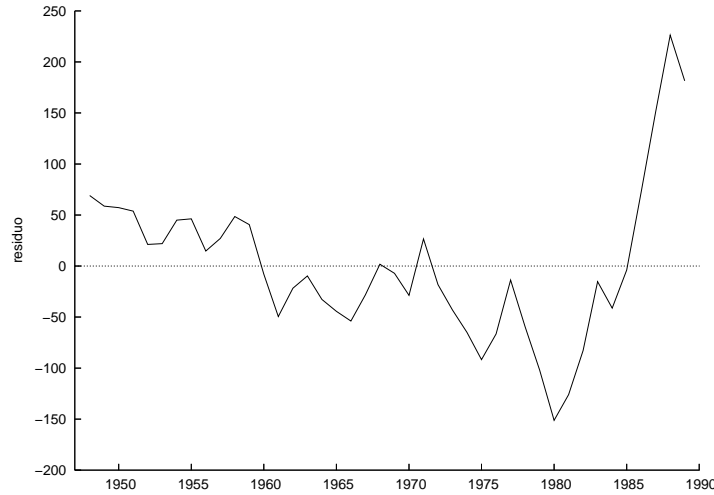


66 Eredua: KTA, 1948-1989rako 42 behaketak erabiliz.  
 Aldagai dependentea: C

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB.TIP.	T.ESTAT
Konst	168,315	43,2796	3,889
RD	0,864323	0,0133004	64,985

A. dependentearen batezbestekoa = 2876,55  
 R-karratua = 0,990617  
 A. dependentearen D.T. = 771,61  
 Zuzendutako R-karratua = 0,990382  
 Hondar karratuen batura = 229045  
 Askatasun graduak = 40  
 Hondarren desbidazio tipikoa = 75,6711  
 Durbin-Watson estatistikoa = 0,247444  
 Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea = 0,927294

Irudia 8: (66) Ereduko hondarren grafikoa



- Zer esan nahi du aldagaiak terminu errealetan neurtuta daudela?
- Emaitzak aztertu ondoren, ikertzaileak eredu honetan zehazpen errorea egon daitekeela uste du. Zein izan daiteke baieztapen honen arrazoia? Estimazioaren emaitzak eta grafikoa erabiliz, errepika itzazu jarraitu dituen pausuak ondorio hau lortzeko.

Ondoren, kontsumo funtzioarentzat bi zehazpen hartzen ditu kontuan. Lehen proposamena eta bere estimazioaren emaitzak hurrengoak dira:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_{t-1} + \beta_4 C_{t-1} + u_t \quad (67)$$

67 Eredua: KTA estimazioak, 1949-1989rako 41 behaketak erabiliz.  
 Aldagai dependentea: C

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB. TIP.	t ESTATISTIKOA
Konst	-56,094	29,936	-1,874
RD{t}	0,684	0,085	8,048
RD{t-1}	-0,723	0,080	-9,002
C{t-1}	1,068	0,097	10,980

Hondar karratuen batura = 45682,2

R-karratua = 0,998043

Hondarren Desb. tipikoa = 35,1376

Zuzendutako R-karratua = 0,997885

Durbin-Watson estatistikoa = 1,59545

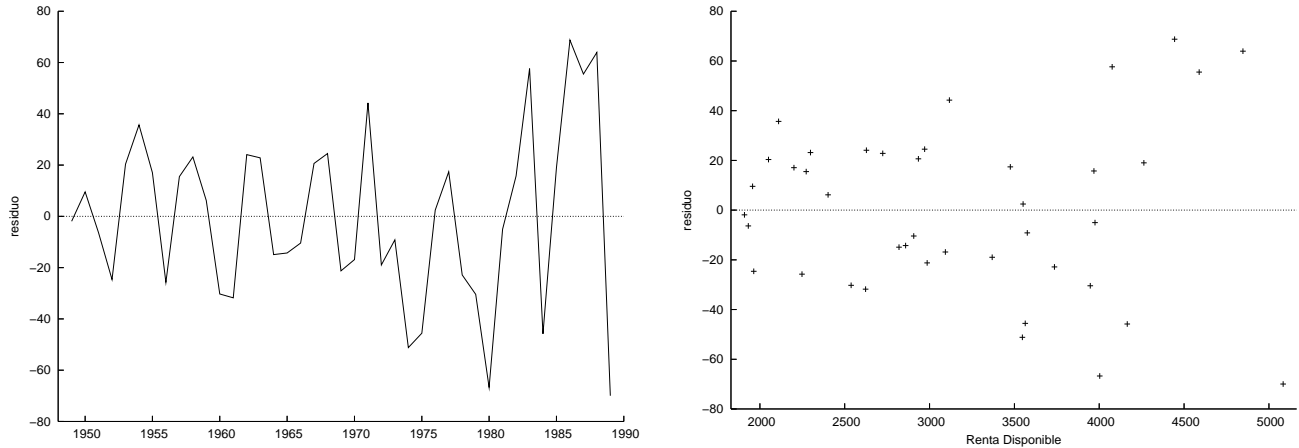
F estatistikoa (3, 37)= 6291,16

Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea = 0,166491

Bigarren ordenako autokorrelaziorako Breusch-Godfreyren estatistikoa = 2,97

Breusch-Paganen estatistikoa RD eta denboraren funtzioan dagoen bariantzarako = 17,9

Irudia 9: (67) Ereduko hondarren grafikoak



c) Zer neurtzen du (67) ereduko  $\beta_2$  koefizienteak?

d) Azter itzazu (67) ereduko estimazioaren emaitzak. Aurkitu duzunaren arabera, azal ezazu zeintzuk diren KTA koefizienteen estimatzailearen gaineko ondorioak eta aurkezten diren desbiderapen tipiko estimatuak fidagarriak diren ala ez.

Jarraian bigarren proposamena eta dagokion estimazioa aurkezten dira:

$$\ln(C_t) = \alpha_1 + \alpha_2 \ln(RD_t) + \alpha_3 \ln(RD_{t-1}) + \alpha_4 \ln(C_{t-1}) + v_t \quad (68)$$

68 Eredua: KTA estimazioak, 1949-1989rako 41 behaketak erabiliz.  
 Aldagai dependentea:  $\ln(C)$

ALDAGAIA	KOEFIZIENTEA	DESB. TIP.	t ESTATISTIKOA
const	-0,116	0,080	-1,453
$\ln(RD\{t\})$	0,741	0,083	8,968
$\ln(RD\{t-1\})$	-0,744	0,087	-8,531
$\ln(C\{t-1\})$	1,018	0,090	11,355

A. dependentearen batezbestekoa = 7,94001

R-karratua = 0,998389

A. dependentearen D.T.= 0,258946

Zuzendutako R-karratua = 0,998259

Hondar karratuen batura = 0,004320

F estatistikoa (3, 37) = 7644,56

Hondarren desb. tipikoa = 0,0108057

Durbin-Watson estatistikoa = 1,65215

Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea = 0,158247

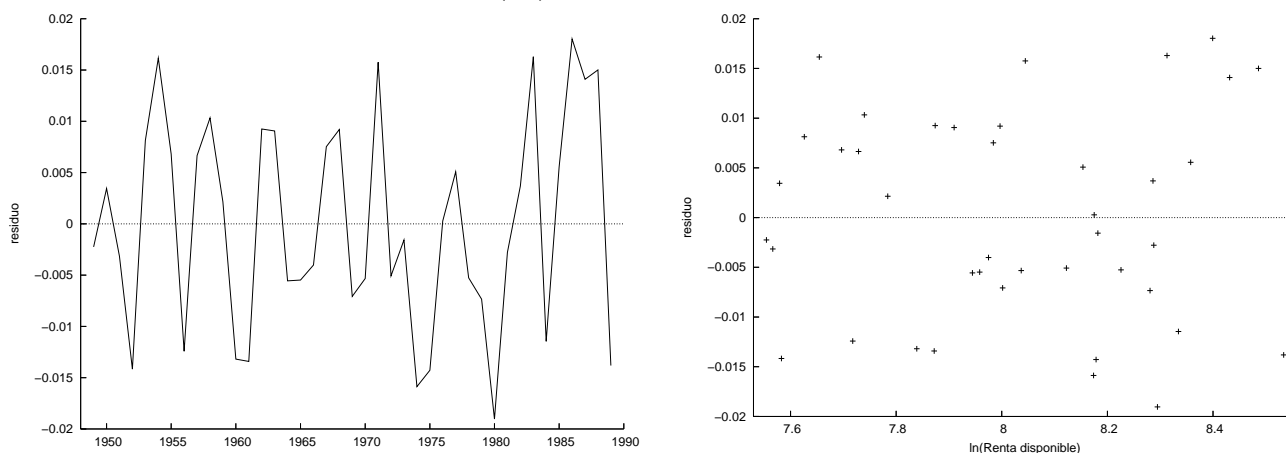
Bigarren ordenako autokorrelaziorako Breusch-Godfreyren estatistikoa = 3,2

Breusch-Paganen estat. RD eta denboraren funtzioan dagoen heterozedastizitaterako= 1,5

#### KOEFIZIENTEEN BARIANTZA KOBARIANTZA MATRIZEAREN ESTIMAZIOA

Konst	$\ln(RD\{t\})$	$\ln(RD\{t-1\})$	$\ln(C\{t-1\})$
0,00641	0,0023	0,0024	-0,0056
	0,0068	-0,0039	-0,0032
		0,0076	-0,0040
			0,0080

Irudia 10: (68) Ereduko hondarren grafikoa



e) Zer neurtzen du (68) ereduko  $\alpha_2$  parametroak?

f) Azter itzazu (68) ereduko estimazioen emaitzak. Berrestimatuko zenituzke ereduaren parametroak? Arrazona ezazu zure erantzuna.

- g) Zer eredu deritzozu onena dela kontsumoaren portaera azaltzeko? Zergatik? Arrazona ezazu zure erantzuna.

Azkenik, (68) eredia aztertu ondoren, ikertzaileak hurrengo eredia proposatzen du:

$$\ln(C_t) = \delta_1 + \delta_2[\ln(RD_t) - \ln(RD_{t-1})] + \delta_3 \ln(C_{t-1}) + v_t \quad (69)$$

- h) Zer kontraste burutu du ondorio hau lortzeko? (68) ereduko estimazioaren emaitzak erabiliz, errepika itzazu jarraitu dituen pausuak ondorio hau lortzeko. Suposa ezazu  $v_t \sim NIB(0, \sigma_v^2)$  dela.

### **ARIKETA 51** (EAZL-2004.6)

Izan bedi ondorengo eredia:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \quad t = 1, \dots, T \quad (70)$$

non  $X_t$  erregresore ez estokastikoa den. Eredua KTA bidez estimatu da, hurrengoa lortuz:

$$\hat{Y}_t = 17.86 + 0.27X_t - 0.79Y_{t-1} \quad t = 2, \dots, 51$$

Hurrengo taulan  $Y_t$ ,  $X_t$  eta  $\hat{u}_{t,KTA}$  aldagaien lehen 8 behaketak jasotzen dira.

$t$	$Y_t$	$X_t$	$\hat{u}_{t,KTA}$
1	8,5	11	
2	8,9	13	
3	16	14	
4	7,8	14,9	
5	16,4	15,1	0,625
6	7,9	18	-1,864
7	18	18,8	1,304
8	8	19,1	-0,797
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- a) Aurreko taulan emandako behaketak erabiliz, lor itzazu falta diren KTA hondarrak. Azter ezazu grafikoki lehen ordenako autokorrelazioaren existentzia perturbazioetan. Azal ezazu zehaztasunez nola kontrastatuko zenukeen formalki balizko hau.

- b) Aurreko ataleko hipotesi hutsa baztertzekotan, eta perturbazioek AR(1) jarraitzen dutela suposatuz, hau da,  $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$   $\epsilon_t \sim \text{ibb}(0, \sigma_\epsilon^2)$ , froga itzazu (70) erlazioko parametroen KTA estimatzailearen propietateak.

Hurrengo lagin informazioa daukagu:

$$\begin{array}{lll} \sum_{t=2}^{51} X_t = 3323,4 & \sum_{t=2}^{51} Y_t = 1022 & \sum_{t=2}^{51} Y_{t-1} = 998,5 \\ \sum_{t=2}^{51} X_t Y_t = 77268,38 & \sum_{t=2}^{51} Y_t Y_{t-1} = 14146,83 & \sum_{t=2}^{51} X_t Y_{t-1} = 75652,8 \\ \sum_{t=2}^{51} (X_t)^2 = 281168,2 & \sum_{t=2}^{51} X_t X_{t-1} = 272614,67 & \sum_{t=2}^{51} (Y_{t-1})^2 = 31068,07 \\ \sum_{t=2}^{51} X_{t-1} = 3205,4 & \sum_{t=2}^{51} X_{t-1} Y_{t-1} = 73233,88 & \sum_{t=2}^{51} X_{t-1} Y_t = 74499,05 \end{array}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,103060 & -0,000948 & -0,001003 \\ -0,000948 & 0,000019 & -0,000015 \\ -0,001003 & -0,000015 & 0,000103 \end{pmatrix}$$

$$(Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0,233 & 0,203 & -0,207 \\ -0,0062 & 0,0032 & -0,0032 \\ 0,033 & -0,021 & 0,021 \end{pmatrix} \quad (X'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} -0,233 & -0,0062 & 0,033 \\ 0,203 & 0,0032 & -0,021 \\ -0,207 & -0,0032 & 0,021 \end{pmatrix}$$

- c)  $Z$  ordeko aldagaien matrizea bada, estima ezazu eredua Ordezko Aldagaien bidez, non  $X_{t-1}$   $Y_{t-1}$  en ordeko aldagaia den. **Arrazona** itzazu estimatzaile horren propietateak.
- d) Uste duzu aurreko estimazioarekin autokorrelazio arazoa konpondu dela? Arrazona ezazu zure erantzuna.

Gainera, hurrengo informazioa ere badaukagu:

$$\begin{array}{lll} \sum \hat{u}_{t-1,KTA}^2 = 3353,54 & \sum X_t^* = 4627,25 & \sum X_t^* Y_{t-1}^* = 148191,84 \\ \sum \hat{u}_{t,KTA} \hat{u}_{t-1,KTA} = 1331,60 & \sum Y_t^* = 1421,21 & \sum X_t^* Y_t^* = 151394,54 \\ \sum \hat{u}_{t-1,OA}^2 = 477634,63 & \sum Y_{t-1}^* = 1388,42 & \sum Y_t^* Y_{t-1}^* = 41014,33 \\ \sum \hat{u}_{t,OA} \hat{u}_{t-1,OA} = -196899,12 & \sum (X_t^*)^2 = 550599,31 & \sum (Y_{t-1}^*)^2 = 46920,97 \end{array}$$

non  $Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$ ,  $X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$ ,  $Y_{t-1}^* = Y_{t-1} - \hat{\rho} Y_{t-2}$  diren,  $\hat{\rho}$  lehen ordenako prozesu autorregresiboaren parametroaren estimatzaile tinko bat izanik.

- e) Zein da  $\rho$  parametroaren estimazio tinkoa goiko adierazpenetan  $Y_t^*$ ,  $X_t^*$  eta  $Y_{t-1}^*$  lortzeko?
- f) Aurreko informazioarekin, posiblea al da (70) erlazioaren parametroak estimatzea OA estimatzailearen propietateak hobetuz? Deskriba ezazu proposatzen duzun metodoa eta ordeka itzazu aurreko batukariak dagokion estimatzailearen formulatan. (Ez dituzu estimazioak kalkulatu behar)
- g) Nola kontrastatuko zenuke  $H_0 : \beta_2 = 1$  hipotesi hutsa? Zehaz itzazu kontrastearen parte hartzen duten elementu guztiak.

## ARIKETA 52 (EAZL-2005.3)

Argitaletxe bateko nagusiak liburuen salmentak ondorengo ereduaren bitartez azaltzea proposatu du:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 G_t + \beta_4 V_{t-1} + u_t \quad t = 1992 : 1, \dots, 2001 : 4 \quad (71)$$

non  $V_t$  salmentak diren,  $P_t$  liburuen batezbesteko prezioa, eta  $G_t$  publizitatean egindako gastuak. Gainera,  $P_t$  eta  $G_t$  aldagaiak ez estokastikoak kontsideratzen dira. Eredua KTA bitartez estimatuz hurrengoa lortu da:

$$\hat{V}_t = 259,42 - 2,14 P_t + 0,097 G_t + 0,091 V_{t-1} \quad (72)$$

(44,64)      (0,40)      (0,005)      (0,04)

$$R^2 = 0,9366 \quad DW = 1,8998 \quad HKB = 9608,8056$$

Bere semeak aurreko eredu KTA bitartez estimatzea ez dela egokiena pentsatzen du. Horregatik ondoko erregresio laguntzailea egitea erabaki du

$$\hat{V}_{t-1} = 313,53 - 2,09 P_{t-1} + 0,10 G_{t-1} \quad (73)$$

eta bertatik lortzen diren emaitzak erabiliz (71) eredu Ordezko Aldagaien bitartez estimatu du. Estimazio honen emaitza honakoa da:

$$\hat{V}_t = 260,54 - 2,15 P_t + 0,097 G_t + 0,086 V_{t-1} \quad (74)$$

(45,21)      (0,40)      (0,005)      (0,05)

$$R^2 = 0,9354 \quad DW = 1,7101 \quad HKB = 9790,8944$$

- a) Azal ezazu zergatik erabili den (73) erregresio laguntzailea (74) eredu Ordezko Aldagaien estimatzaileak lortzeko. Idatz itzazu, eredu honentzat, Ordezko Aldagaien estimatzailearen eta bere bariantza eta kobariantzen matrizearen estimatzailearen adierazpenak, erabilitako matrize bakoitza zehaztuz.
- b) Egin ezazu Hausmanen kontrastea eta, lortutako emaitzan oinarrituz, erabaki ezazu aitak erabilitako estimazio metodoa baliogarria den. Arrazona ezazu erantzuna.
- c) Aurreko ataleko emaitza izanik, eredu perturbazioek oinarritzko hipotesiak betetzen dituzten edo ez komenta dezakezu? Arrazona ezazu zure erantzuna.

# Azterketen bilduma

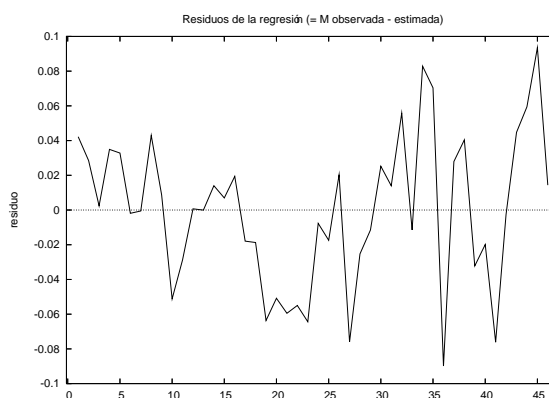
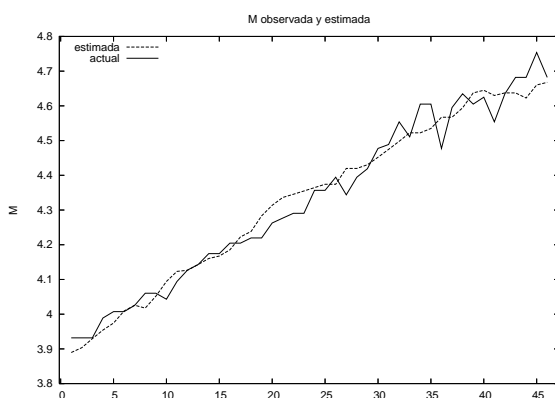
## ARIKETA EL-2006. 1 (2006-Ekaina)

Istripuz jotako autoak konpontzen dituen enpresa familiar batek azken 46 urteetan izan duen langile kopuruaren,  $L$ , eta lortutako urteroko mozkinaren (mila eurotan neurtua),  $M$ , arteko erlazioa ikertzeko agindu dio gestoretza bati. Gestoreak hurrengo erlazioa proposatzen dio:

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 L_t + u_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

non  $L_t$  aldagaia ez estokastikoa den eta perturbazioak zero batezbestekodun banaketa normala jarraitzen duen. KTA estimazioaren emaitzak ondorengoak dira:

$$\begin{array}{l} \widehat{M}_t \\ (\widehat{desb}(\widehat{\beta}_i)) \end{array} = \begin{array}{l} 7,4408 - 0,6310 L_t \\ (0,0843) \quad (0,0170) \end{array} \quad R^2 = 0,968 \quad DW = 1,333 \quad t = 1, \dots, 46 \quad (2)$$



Gainera ondorengo erregresio laguntzaileak eskuragarriak dira:

$$\frac{\hat{u}_t^2}{\hat{u}'\hat{u}} = 0,0038 + 0,0008L_t + \hat{\xi}_{1t} \quad HKB = 0,0314 \quad R^2 = 0,0609$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/46)} = 0,1740 + 0,0351 t + \hat{\xi}_{2t} \quad HKB = 60,5979 \quad R^2 = 0,1418$$

$$\frac{\hat{u}_t}{(\hat{u}'\hat{u}/46)} = 0,2232 - 0,3517 t + 2,4571L_t + \hat{\xi}_{3t} \quad HKB = 36,3244 \quad R^2 = 0,2187$$

$$\hat{u}_t = 0,2992\hat{u}_{t-1} + 0,0464\hat{u}_{t-2} + \hat{\xi}_{4t} \quad HKB = 0,0733 \quad R^2 = 0,1010$$

1. Interpreta ezazu  $\alpha_2$  koefizientea, zein da espero duzun zeinua?

2. Komenta itzazu grafikoak. (1) **ereduak** oinarrizko hipotesi guztiak betetzen dituela uste al duzu?
3. Emandako informazioan oinarrituz, perturbazioari buruzko zein balizko kontrastatu ditzakezu? Burutu itzazu kontraste posible guztiak horretarako behar dituzun elementu guztiak azalduz.

Gestorea lortutako emaitzekin pozik ez dagoenez, ondoko ereduaren estimazioa du:

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + \beta_3 L_t^2 + v_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

bere emaitzak ondorengo taulan agertzen direlarik:

**Eredua 2:** KTA estimazioak, 46 behaketak erabiliz (1-46)  
Aldagai azaldua: M

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	421,905	21,0849	20,0098	0,0000
$L$	-72,228	4,71511	-15,3185	0,0000
$L^2$	0,000484685	8,99453e-05	5,3887	0,0000
Aldagai azalduaren batezbestekoa		78,0652	$R^2$	0,962685
Aldagai azalduaren Desb. Tip.		18,9975	$\bar{R}^2$ zuzendua	0,960949
Hondar karratuen batura		606,028	$F(2, 43)$	554,674

4. Zer da elementu berri honekin jaso nahi dena?

Gainera, hurrengo emaitzak ditugu:

**Eredua A:** KTA estimazioak 46 behaketak erabiliz (1-46)

$$\text{Aldagai azaldua: } \frac{\hat{v}_t^2}{(\hat{\sigma}^2 \hat{v})/46}$$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	-0,132741	0,391608	-0,3390	0,7362
t	0,0482018	0,0145090	3,3222	0,0018
Aldagai azalduaren batezbestekoa		1,00000	$R^2$	0,200538
Aldagai azalduaren Desb. Tip.		1,44478	$\bar{R}^2$ zuzendua	0,182368
Hondar karratuen batura		75,0956	Askatasun graduak	44
Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )		1,30641	Durbin-Watson estatistikoa	2,08620



**Eredua B:** KTA estimazioak, 45 behaketak erabiliz (2-46)

Aldagai azaldua:  $\hat{v}_t$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	-0,144956	1,26964	-0,1142	0,9097
$L$	0,0583956	0,513785	0,1137	0,9101
$L^2$	-0,00585360	0,0517415	-0,1131	0,9105
$\hat{v}_{t-1}$	0,194001	0,153777	1,2616	0,2142

Aldagai azalduaren batezbestekoa	-8,41529e-05	$R^2$		0,0374139
Aldagai azalduaren Desb. Tip.	0,0400752	$\bar{R}^2$ zuzendua		-0,0330193
Hondar karratuen batura	0,0680212	F(3,41)		0,531197
Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )	0,0407315	Durbin-Watson estatistikoa		1,97476

5. Aurreko bi tauletan ematen den informazioan oinarrituz:

5.1. Zer deritzozu perturbazioaren ezaugarriei buruz?

5.2. Zeri dagokio 3 eta 5.1. atalen artean ematen den kontraesana?

6. (3) ereduko estimazioan lorturiko emaitzetan oinarrituz, zeintzuk dira KTA estimatzailearen gain eta erakusten diren desbiderazio estimatuen gaineko ondorioak?

Gestoretzako beste bazkide batek estimatzaile alternatibo batekin lortu dituen emaitzak aurkezten ditu:

**Eredua 3:** KT.Ponderatuen estimazioak 45 behaketak erabiliz (2-46)

Aldagai azaldua:  $M$

Ponderatzeko erabilitako aldagaia:  $\frac{1}{t^2}$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	147,113	4,21100	34,9355	0,0000
$L$	-0,666136	0,0404821	-16,4551	0,0000
$L^2$	0,00115263	9,35801e-05	12,3170	0,0000

7. Idatz ezazu estimatzen ari den populazioaren erregresio funtzioa eta adieraz itzazu kon-tuan hartu dituen perturbazioaren balizkoak. Zein da erabili duen estimazio metodoa? Idatz ezazu bere formula matritzialki eta baita bere osagai guztiak ere.

8. Aurreko ataleko  $u_t$ -ren bariantzari buruzko balizkoa emanik, zein da perturbazio esferi-koak dituen eraldatutako eredua? Froga ezazu. Adieraz ezazu koefizienteak estimatzeko jarraitu beharreko pausuak zeintzuk diren eta baita bere balioak zeintzuk diren ere.

9. Nola kontrastatuko zenuke langile kopuruak urteroko batezbesteko mozkinazaltzeko nabaria den?

## ARIKETA EL-2006. 2 (2006-Ekaina)

Alaskan 1969-1978 epean izandako lurrikarei buruzko hurrengo ezaugarrien 62 behaketa esku-  
ragarri daude <sup>4</sup>:

$Y_t$  metro segunduko (m/sg) uhin-anplitudearen logaritmoa.

$X_t^*$  uhinaren gorputz luzaeraren anplitudearen (m/sg) logaritmoa.

$W_t$  distantzia laburrean uhin-anplitudearen arrasto maximoaren (m/sg) logaritmoa.

Honako ereduaren bitartez lurrikara baten uhin-luzaeraren gorputz anplitudeak ( $X_t$ ),  $Y_t$ -ren gain duen eragina aztertu nahi da:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + v_t \quad v_t \sim NIB(0, \sigma_v^2) \quad (1)$$

Gaur eguneko teknologiarekin ezin dira  $X_t$  aldagai ez estokastikoaren balioak zuzenean neurtu. Ondorioz,  $X_t^* = X_t + e_t$  bidez hurbiltzen da, non  $X_t^*$  behatzen den aldagaia den eta  $e_t \sim NIB(0, \sigma_e^2)$  neurketa errorea den. Gainera  $v$  perturbazioa eta  $e$  neurketa errorea independenteak dira. Karratu Txikien Arrunten (KTA) estimatzailea erabiliz lortu diren estimazio emaitzak ondorengoak dira:

$$\underset{(\widehat{desb}(\hat{\beta}_i))}{Y_t} = \underset{(0.780)}{-1.491} + \underset{(0.149)}{1.261} X_t^* + \hat{u}_t, \quad HKB = 17.242.$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,118 & -0,403 \\ -0,403 & 0,077 \end{bmatrix}^{-1}$$

1. Lor itzazu hurrengo balioak pausu-pausuz:

$$u_t =$$

$$E(u_t) =$$

$$Bar(u_t) =$$

$$Kob(u_t, u_s) =$$

---

<sup>4</sup>Iturria: Fuller, W.A. (1987). *Measurement Error Models*. Wiley, New York.

$$E(X_t^* u_t) =$$

2. Arrazona itzazu KTA estimatzailearen lagin txikietako eta handietako propietateak.

Aurreko eredia Ordezko Aldagaien (OA) bitartez estimatu da. Horretarako,  $X_t^*$  aldagaiarentzat erabilitako ordezko aldagaia  $W_t$  izan da, zeina zehazki neurtzen den. Ondorengo emaitzak lortu dira:

$$\underset{(\widehat{desb}(\hat{\beta}_{i,OA}))}{Y_t} = \underset{(1.114)}{-4.287} + \underset{(0.213)}{1.797} X_t^* + \hat{u}_t, \quad HKB = 20.961.$$

3. Idatz ezazu **xehetasunez** OA estimatzailearen formula matriziala batukarien funtzioan.
4. Idatz ezazu xehetasunez OA estimatzailea tinkoa izateko beharrezkoak diren baldintzak.
5. Burutu ezazu Hausmanen kontrastea neurketa errorearen garrantzia analizatzeko. Idatz itzazu hipotesi hutsa, alternatiboa, kontrasterako behar dituzun elementu guztiak eta baita konklusioa ere.
6. Kontrasta ezazu sismografoak neurtzen duen uhin-luzaeraren gorputz anplitudearen nabaritasuna batezbesteko uhin anplitudearen gain.

## ARIKETA EL-2006. 3 (2006-Iraila)

EEBBetako Osasun Sailak osasun gastu agregatua (exphlth, bilioi dolarretan), errenta pertsonal erabilgarri agregatua (income, bilioi dolarretan), 65 urte baino gehiagoko populazioaren portzentaia (seniors) eta populazioaren (pop, milioetan) arteko erlazioa analizatu nahi du 2005 urterako. Hau dela eta Harvard-eko Ekonomia Fakultateko bi bekaduni ikerketa enkargua egin die, 51 amerikar estatuei dagozkien 2005 urteko datuak eta ondorengo emaitzak emanik:

Eredua 1: KTA estimazioak, 51 behaketak erabiliz (1-51)

Aldagai azaldua: exphlth

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t estat.	p-balioa
const	-3,55153	1,40710	-2,524	0,014965 **
income	0,142035	0,00184017	77,186	< 0,00001 ***
seniors	0,305816	0,108449	2,820	0,006962 ***

Aldagai azalduaren batezbestekoa = 15,2649

Aldagai azalduaren Desb. Tip. = 17,8877

Hondar karratuen batura = 127,565

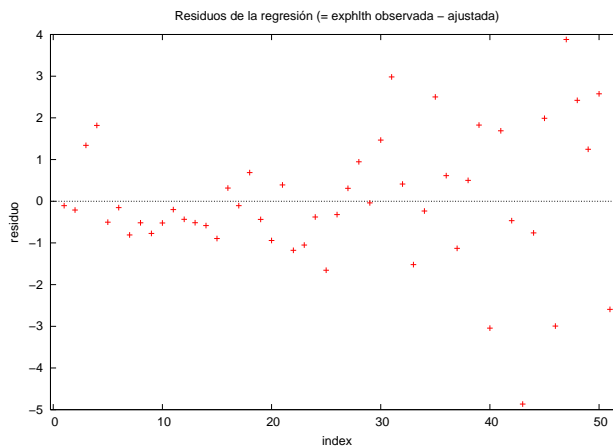
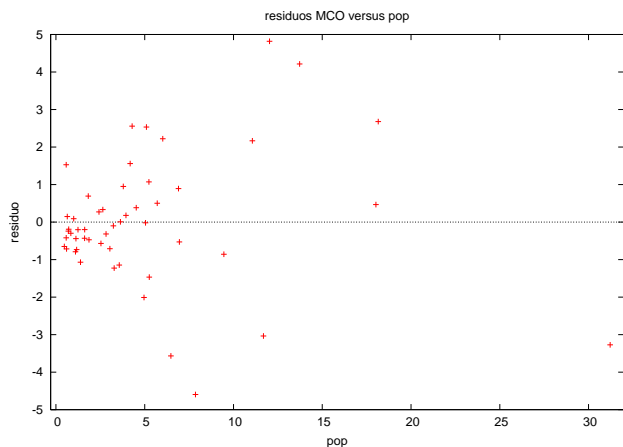
Hondarren desbiderapen tipikoa = 1,63022

R karratua = 0,992026

R karratu zuzendua = 0,991694

F (2, 48) = 2985,94 (p-balioa < 0,00001)

Breusch-Pagan estatistikoa bariantzarentzat, POP aldagaiaren funtzioan = 15,13



**A bekadunak** income, seniors eta pop aldagaiak ez estokastikoak direla eta perturbazioak banaketa normala jarraitzen duela suposatuz *bai errenta eta baita 65 urte baino gehiagoko populazioaren portzentaia aldagaiak banaka esanguratsuak direla ondorioztatzen du* eta hurrengo emaitzak aurkezten ditu:

A bekadunaren eredua: KTA estimazioak, 51 behaketak erabiliz (1-51)

Aldagai azaldua: explhth

Desbiderapen tipiko sendoak heterozedastizitatearekiko, HC3 aldaera

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t estat.	p-balioa
const	-3,55153	1,57010	-2,262	0,028265 **
income	0,142035	0,00264576	53,684	< 0,00001 ***
seniors	0,305816	0,121408	2,519	0,015157 **

Aldagai azalduaren batezbestekoa = 15,2649

Aldagai azalduaren Desb. Tip. = 17,8877

Hondar karratuen batura = 127,565

Hondarren desbiderapen tipikoa = 1,63022

R karratua = 0,992026

R karratu zuzendua = 0,991694

F (2, 48) = 1451,55 (p-balioa < 0,00001)

1. Zein da A bekaduna estimatzen ari den eredua? Analiza ezazu grafikoek eskaintzen duten informazioa eta burutu itzazu egokiak deritzozun kontrasteak.
2. Perturbazioaren batezbestekoa, bariantza eta kobariantzei buruz zein balizko egiten ari da?, zer estimazio metodo erabiltzen ari da?
3. Aldagaien banakako esanguratasunari buruzko ondorioekin ados al zaude? Burutu itzazu egokiak iruditzen zaizkizun kontrasteak zure erantzuna arrazonatzean.

Era berean **B bekaduna**, income, seniors eta pop aldagaiak ez estokastikoak direla eta perturbazioak banaketa normala jarraitzen duela suposatuz, aldagaien banakako esanguratasunari buruzko ondorio berdinerara heldu da. Honako emaitzak aurkezten ditu:

B bekadunaren eredua: KT. Ponderatuen estimazioak, 51 behaketak erabiliz (1-51)  
Aldagai azaldua: explhth

Ponderatzeko erabilitako aldagaia:  $1/\text{pop}^2$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t estat.	p-balioa
const	-1,12626	0,408314	-2,758	0,008196 ***
income	0,142343	0,00493399	28,849	< 0,00001 ***
seniors	0,106763	0,0330614	3,229	0,002242 ***

Datu ponderatuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar karratuen batura = 12,3508  
Hondarren desbiderapen tipikoa = 0,507256  
R karratua = 0,947736  
R karratu zuzendua = 0,945558  
F (2, 48) = 435,207 (p-balioa < 0,00001)

4. Zein da B bekaduna estimatzen ari den eredua? Perturbazioaren bariantzari buruz zein balizko egiten ari da? Zer estimazio metodo erabiltzen ari da?
5. Aldagaien banakako esanguratasunari buruzko ondorioekin ados al zaude? Burutu itzazu egokiak iruditzen zaizkizun kontrasteak zure erantzuna arrazonatzean.
6. Balioetsi ezazu bekadun bien jokaera. Zein deritzozu egokiena?

## ARIKETA EL-2006. 4 (2006-Iraila)

Nekazari batek bere lursailetan bildutako mailuki kantitatea kilogramoetan neurtua ( $Q$ ) eta jornalari kopuruaren ( $L$ ) arteko erlazioa ezagutu nahi du. Horretarako, aldagai bien arteko

erlazioaren ikerketa ekonometrialari bati agintzen dio eta honek hurrengo eredua zehazten du:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + u_t \quad t = 1970, \dots, 2004 \quad (1)$$

non  $L_t$  ez estokastikoa den eta  $u_t$  perturbazioak banaketa normala jarraitzen duen. KTA estimazioak honako emaitzak aurkezten ditu:

$$\begin{array}{l} \hat{Q}_t = 1115,93 - 2,4462L_t \quad R^2 = 0,8594 \quad DW = 0,3210 \quad T = 35 \quad (2) \\ \text{(t-estat)} \quad (36,62) \quad (-14,20) \end{array}$$

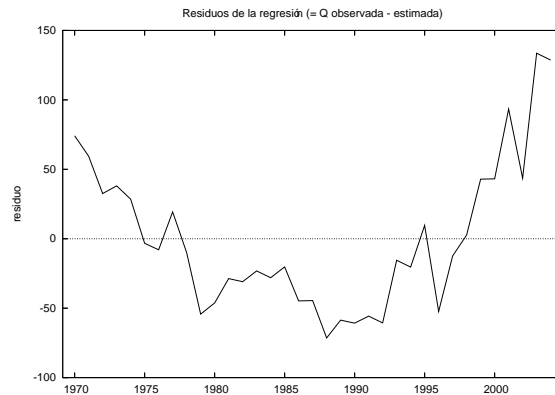
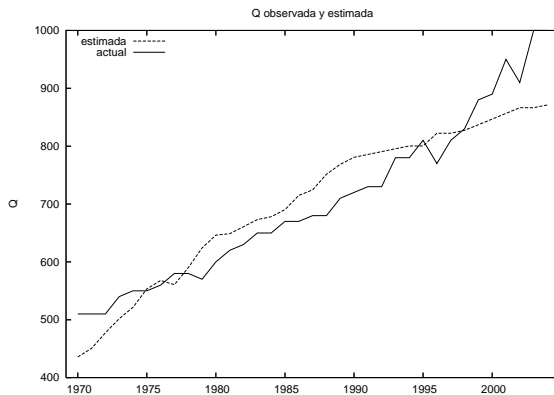
Bestalde, hurrengo erregresio laguntzaileak eta grafikoak eskuragarri dira, non  $\hat{u}_t$  (2) eredutik lorturiko hondarrak diren:

$$\hat{u}_t = 31,25 - 0,1814L_t + 0,8958\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{1t} \quad HKB = 26981,8 \quad R^2 = 0,7041$$

$$\hat{u}_t = 1,1397 + 0,8958\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{2t} \quad HKB = 29807,6 \quad R^2 = 0,6731$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/35)} = 0,4432 + 2,2378L_t + \hat{\zeta}_{3t} \quad HKB = 70,4985 \quad R^2 = 0,0427$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/35)} = 1,7899 + 0,9955\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{4t} \quad HKB = 55,2297 \quad R^2 = 0,0577$$



1. Laginako datuak gurutzatutako datuak edo denbora segidako datuak dira?, zergatik?
2. Interpreta ezazu  $\beta_2$  koefizientea. Zein da espero duzun zeinua?
3. Komenta ezazu aldagai endogenoaren benetako eta estimatutako balioak irudikatzen dituen grafikoa. Doikuntza ona dela uste al duzu? Komenta ezazu hondarren grafikoa. Grafiko biak begiratu, **ereduak** oinarritzko hipotesi guztiak betetzen al ditu?
4. Emandako informazioan oinarrituz, egiazta ezazu ea **perturbazioek** oinarritzko hipotesiak betetzen dituzten.

5. Dagoen lagin ebidentzian oinarrituz, azal ezazu zeintzuk diren koefizienteen KTA estimatzailearen gaineko ondorioak eta erakutsitako estatistikoen fidagarritasuna.

Aurreko kontrasteetan ateratako emaitzetan oinarrituz, ekonometrialariak bere ustez testuinguruarekiko egokiagoa den beste estimatzaile batekin estimatzen du (1) zehazpena. Lortu dituen emaitzak honakoak dira:

Eredua 2: Cochrane–Orcutt estimazioak, 34 behaketak erabiliz (1971-2004)

Aldagai azaldua: Q				
azken iterazioa $\hat{\rho} = 0,976619$				
Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	t estat.	p-balioa
const	1456,54	186,561	7,8073	0,0000
$L$	2,7420	1,1365	2,4126	0,0217

6. Zein da erabili duen estimazio metodoa? Zehaz itzazu aurreko estimazio guztiak lortzeko jarraitu beharreko pausu guztiak. Zergatik da aurrekoa baino egokiagoa? Arrazona ezazu zure erantzuna estimatzailearen propietateetan oinarrituz.

Nekazariarekin hitz egitean, honek zera komentatzen dio: orokorrean uzta on baten ondorengo uztak ere onak izaten dira eta, uzta txar bat izatekotan, ondorengo uztak ere txarrak izan ohi dira. Gertaera honek aurreko denboraldian bildutako mailuki kopuruak oraingo uztaren gain eragina izan dezakeela pentsarazten dio ekonometrialariari. Bere susmoan oinarrituz, ondorengo eredia zehaztu eta estimatzen du:

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 L_t + \alpha_3 Q_{t-1} + w_t \quad (3)$$

Estimazio emaitzak:

Eredua 3: KTA estimazioak, 34 behaketak erabiliz (1971-2004)

Aldagai azaldua: Q				
Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	t estat.	p-balioa
const	90,9866	99,9536	0,9103	0,3697
$L$	-0,230355	0,0115477	-1,9948	0,0470
$Q_{t-1}$	0,944638	0,0898926	10,5085	0,0000

Durbin-Watson estatistikoa = 3,10304

Gainera, ondorengo erregresio laguntzaileak eskuragarri ditugu:

$$\begin{aligned} \hat{w}_t &= 21,32 - 0,1766L_t + 0,8788\hat{w}_{t-1} + \hat{\eta}_{1t} & HKB &= 25671,3 & R^2 &= 0,4734 \\ \hat{w}_t &= 1,7943 + 0,2398\hat{w}_{t-1} + 0,5647Q_{t-1} + \hat{\eta}_{2t} & HKB &= 23398,1 & R^2 &= 0,4767 \\ \hat{w}_t &= -255,47 + 0,579406L_t + 0,231059Q_{t-1} - 0,804475\hat{w}_{t-1} + \hat{\eta}_{3t} & HKB &= 10958,4 & R^2 &= 0,4869 \\ \frac{\hat{w}_t^2}{(\hat{w}'\hat{w}/35)} &= 0,4432 + 2,2378L_t + \hat{\eta}_{4t} & HKB &= 77,8328 & R^2 &= 0,05665 \\ \frac{\hat{w}_t}{(\hat{w}'\hat{w}/35)} &= 3,9229 + 2,2552\hat{w}_{t-1} + 0,3463Q_{t-1} + \hat{\eta}_{5t} & HKB &= 50,0805 & R^2 &= 0,0064 \end{aligned}$$

7. Burutu itzazu aproposak deritzozun kontrasteak eta kalkula edota arrazona itzazu ondorengo berdintzak:

$$E(w_t) =$$

$$E(w_t^2) =$$

$$Kob(w_t, w_s) =$$

$$E(L_t w_t) =$$

$$E(Q_{t-1} w_t) =$$

$$E(\hat{\beta}_{KTA}) =$$

8. Zer esan dezakezu Mann eta Walden teoremaz eta KTA estimatzailearen tinkotasunetaz?

9. Aurreko denboraldiko uztak oraingoan eragiten duela konprobatzeko, tinkoa, asintotikoki efizientea eta (3) ereduan inferentzia egiteko baliagarria den estimatzaile batekin hurrengo estimazioak lortu dira:

$$\begin{aligned} \widehat{Q_t - \hat{\rho}Q_{t-1}} &= 25,28(1 - \hat{\rho}) + \underset{(0,125)}{0,064} (L_t - \hat{\rho}L_{t-1}) + \underset{(0,048)}{1,067} (Q_{t-1} - \hat{\rho}Q_{t-2}) + \hat{\epsilon}_t & (4) \\ & & R^2 &= 0,981 & DW &= 1,98 \end{aligned}$$

non  $\epsilon_t$  zarata zuria den eta  $w_t$  (3) ereduko perturbazioa den.

Osatu edota atera itzazu honakoak:

9.1.  $\epsilon_t \sim ( \quad , \quad )$



9.2.

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,28 \\ 0,064 \\ 1,067 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

- 9.3. Zein da erabili den  $\rho$  estimatzaile tinkoa? Azal itzazu  $\rho$  estimatzailearen tinkotasuna bermatzeko behar dituzun elementu eta baldintza guztiak.
- 9.4. Egia al da aurreko urteko uztak aurtengo uzta zehazteko aldagai bat dela? Zeintzuk dira emaitza honen ondorioak?

## ARIKETA EL-2007. 1 (2007-Ekaina)

Amerikar aholkularitza batek Estatu Batuetan Ikerkuntza eta Garapenean (RD) egindako gastua eta patente kopuruaren arteko erlazioa ikertzeko kontratu bat sinatu du. Horretarako 1960-1993 bitarteko urteroko datuak ditu ondorengo aldagaiatzat<sup>5</sup>:

- PATENTS: patente kopurua, mila unitatetan (lagin ibiltartea 84,5etik 189,4ra).
- RD: ikerkuntza eta garapenean egindako gastua, 1992ko bilioi dolarretan (lagin ibiltartea 57,94tik 166,7ra)

Hasiera batean eredu bakun bat estimatzea kontsideratzen du:

$$PATENTS_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + u_t \quad t = 1, \dots, 34 \quad (1)$$

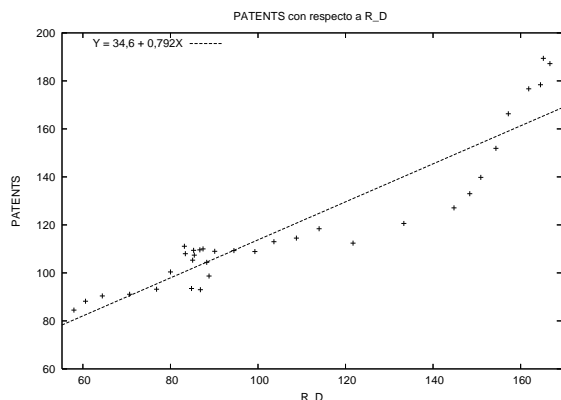
Aldagai azaldua: PATENTS

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	t estatistikoa	p-balioa
const	34,5711	6,35787	5,4375	0,0000
RD	0,791935	0,0567036	13,9662	0,0000
	Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )		11,1724	
	$R^2$		0,859065	
	Durbin-Watson estatistikoa		0,233951	

1. Interpreta ezazu  $RD$  aldagaiari laguntzen dion koefiziente estimatua. Esperotako zeinua du? Aldagaia esanguratsua da?
2. Komenta itzau ondorengo **hiru** grafikoak.

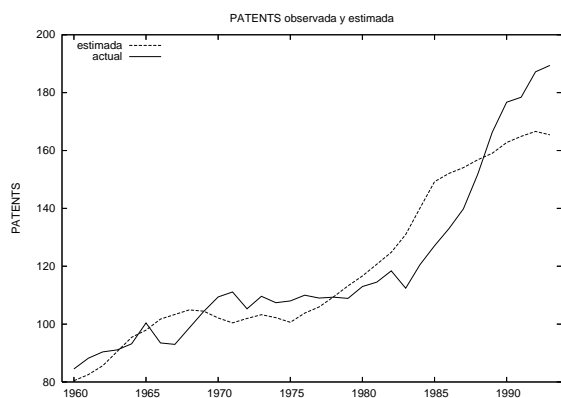
<sup>5</sup>Iturria: Ramanathan, DATA3-3 fitxategia.

*PATENTS RD-rekiko.*



**Grafikoaren iruzkina:**

*PATENTS behatutakoa eta estimatutakoa.*



**Grafikoaren iruzkina:**

Zure ustez zein da dagoen arazoa? Arrazona ezazu zehaztasunez eta komenta itzazu dituen ondorioak erakutsitako estimazio emaitzen eta baita aurreko atalean lorturiko emaitzen gain.

Ondoren eta zehazpen desberdinekin saiatu ondoren, aholkularitzak ondorengo bietatik bat aukeratzea erabakitzen du:

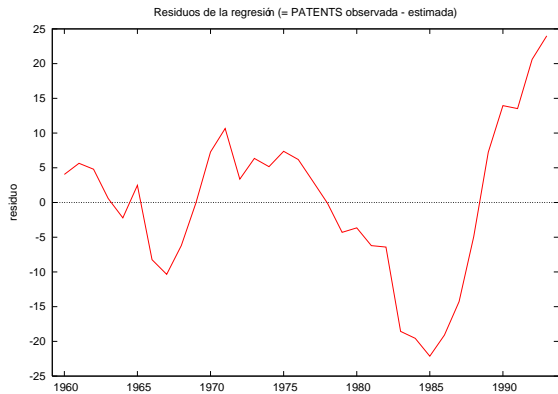
$$PATENTS_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + u_{1t} \quad (2)$$

$$PATENTS_t = \alpha_1 + \alpha_2 RD_t + \alpha_3 RD_{t-4} + \alpha_4 RD_t^2 + u_{2t} \quad (3)$$

3. Eredu bi hauek linealak dira?, zergatik? Eredu dinamikoak al dira biak?, zergatik?
4. Idatz ezazu eredu bakoitzari dagokion datu matrizea.

KTA hondarrak denboran zehar

Grafikoaren iruzkina:



$$X_{(2)} = \left[ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right] \quad \left( \begin{array}{l} \times \\ \end{array} \right)$$

$$X_{(3)} = \left[ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right] \quad \left( \begin{array}{l} \times \\ \end{array} \right)$$

Zehazpen posible biak estimatzean lortzen diren emaitzak ondorengoak dira:

**A EREDUA:** 
$$\widehat{PATENTS}_t = 121,575 - 0,852 RD_t + 0,00706 RD_t^2$$

(desb) 
$$\widehat{PATENTS}_t = 121,575 - 0,852 RD_t + 0,00706 RD_t^2$$

(desb)<sub>N-West</sub> 
$$\widehat{PATENTS}_t = 121,575 - 0,852 RD_t + 0,00706 RD_t^2$$

$R^2 = 0,904 \quad DW = 0,284 \quad BG(4) = 27,171$

**B EREDUA:** 
$$\widehat{PATENTS}_t = 135,887 - 1,789 RD_t + 0,813 RD_{t-4} + 0,00790 RD_t^2$$

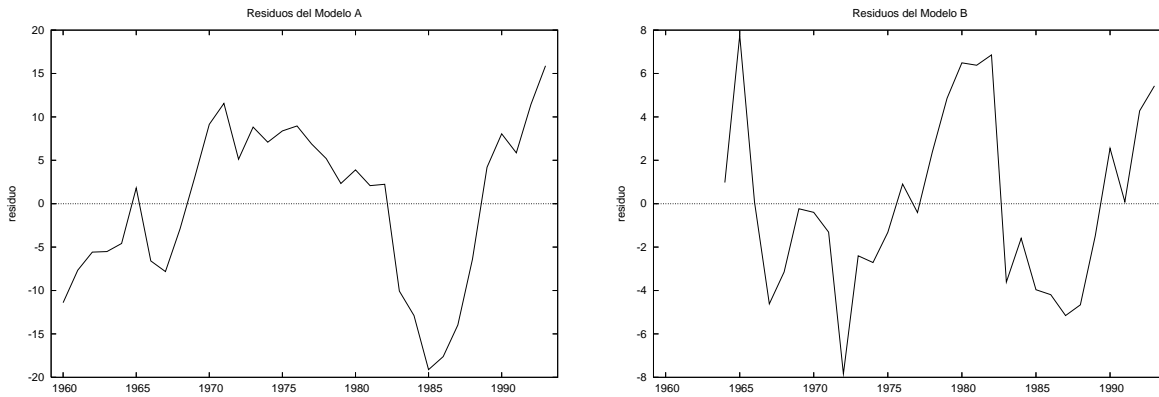
(desb) 
$$\widehat{PATENTS}_t = 135,887 - 1,789 RD_t + 0,813 RD_{t-4} + 0,00790 RD_t^2$$

(desb)<sub>N-West</sub> 
$$\widehat{PATENTS}_t = 135,887 - 1,789 RD_t + 0,813 RD_{t-4} + 0,00790 RD_t^2$$

$R^2 = 0,979 \quad DW = 0,842 \quad BG(4) = 11,974$

5. Zure ustez hondarren grafikoek arazoren bat islatzen dute? Kontrasta ezazu.
6. Zergatik uste duzu Newey-Westen estimatzailea erabili dela desbiderapenak estimatzeko? Estimatzaile honen erabilera zehazpen bietan arrazoizkoa dela iruditzen al zaizu?
7. Emandako informazio guztia erabiliz, zure ustez patente kopurua azaltzeko zein da zehazpenik onena? Arrazona ezazu zure erantzuna. Aukeratu duzun eredua dinamikoa da?

Irudia 1: A eta B ereduen hondarren grafikoak



8. Aukeratu duzun eredia emanik, urte batean ikerkuntzan eta garapenean egiten den gas-tua bilioi batean handitzen bada beste guztia konstante mantenduz, lor ezazu patente kopuruaren gain dakarren batezbesteko gehikuntza. Aldagaien lagin ibiltartea emanik, estimatutako gehikuntza positiboa da?

## ARIKETA EL-2007. 2 (2007-Ekaina)

Enpresa batek herrialde bateko etxebizitzaren prezioa ( $P$ ) zehaztu nahi du interes tasa ( $I$ ) eta Barne Produktu Gordinarean ( $BPG$ ) funtzioan. Horretarako 1963-1985 bitarteko hiruhilabeteko datuak eskuragarri ditu. Estimazioaren emaitzak hurrengoak dira:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_t &= -5,3174 + 1,864 BPG_t - 0,890 I_t & (1) \\ (\widehat{desb}) & \quad (3,128) \quad (0,469) \quad (0,295) \\ & HKB = 0,516 \quad R^2 = 0,478 \end{aligned}$$

Enpresako analistak hondarrak begiratu ondoren, perturbazioaren bariantza lagin hasieran laginaren amaieran baino txikiagoa dela susmatzen du. Hau dela eta, bariantzaren bi egitura posible zehazten ditu:

$$Bar(u_t) = \delta t^4 \quad \delta > 0 \quad (2)$$

$$Bar(u_t) = \gamma_1 + \gamma_2 D_t \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0 \quad (3)$$

non  $D_t$  aldagai fiktizioak bat balioa hartzen duen baldin eta behaketa 1963-1975 tartekoa bada eta zero bestela.

1. Zer adierazten dute (2) eta (3) ekuazioek? Zertan desberdintzen dira? Idatz ezazu proposamen bakoitzari dagokion perturbazioaren bariantza eta kobariantzen matrizea (suposa ezazu  $E(u_t u_s) = 0$  dela  $t \neq s$ -rentzat).

2. Analistak duen susmoa egiazta dezakezu Hausmanen kontrastearekin? Arrazona ezazu.

Azkenik, analistak egitura bietatik bat aukeratzen du ondorengo estimazio emaitzak lortuz:

Eredua: KT. Ponderatuen estimazioak, 1976:1–1985:4 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua: P

Ponderatzeko erabilitako aldagaia:  $1/t^4$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	t estatistikoa	p-balioa
const	-9,3955	3,83947	-2,4471	0,0443
BPG	2,42845	0,511158	4,7509	0,0021
I	-1,0789	0,182560	-5,9103	0,0006

Datu ponderatuetan oinarritutako datuak:

Hondar karratuen batura	0,000142049
Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )	0,00450474
$R^2$	0,837967
$\bar{R}^2$ zuzendua	0,791671

3. Idatz ezazu analistak estimatu duen populazioaren erregresio funtzioa. Zehaz itzazu perturbazioaren hipotesiak erabilitako ponderazioa egokia izan dadin. Froga itzazu zure baieztapenak.

4. Idatz ezazu estimatzailearen adierazpena bere elementuak zehaztuz.

$$\hat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-1} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]$$

5. Bariantzari dagokion zehazpen egokia (3) balitz, zein ondorio izango lituzke erakutsitako Karratu Txikien Ponderatuen estimazioen gain? Kasu honetan, nola estimatuko zenituzke ereduaren koefizienteak? Zergatik?

## ARIKETA EL-2007. 3 (2007-Iraila)

Enpresa bateko zuzendariak hornidurak eraikitzeke erabiltzen den silikonaren eskari funtzioa analizatu nahi du. Horretarako produzitutako silikona,  $Q$ , (galoietan) eta galoiko prezioaren,  $P$ , (dolarretan) 1983:1 eta 1990:5 bitarteko hileroko behaketak dituen lagin bat du<sup>6</sup>. Datu hauekin ondorengo eredua estimatzen du:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t \quad (1)$$

Lortzen diren emaitzak hauek dira:

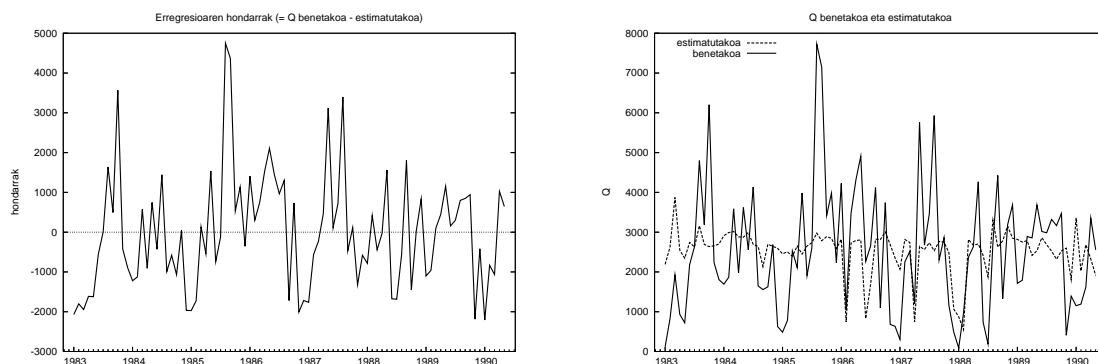
Eredua 1: KTA estimazioak, 89 behaketak erabiliz (1983:01-1990:05)  
Aldagai azaldua:  $Q$

Aldagaia	Coeficiente	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	5962,05	955,810	6,2377	0,0000
P	-381,09	104,766	-3,6376	0,0005
Aldagai azalduaren batezbestekoa			2531,49	
Aldagai azalduaren desbiderapen tipikoa			1564,67	
Hondar karratuen batura			1,87000e+08	
Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )			1466,09	
$R^2$			0,132013	
$\bar{R}^2$ zuzendua			0,122036	
Askatasun graduak			87	
Durbin-Watson estatistikoa			1,32875	
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea			0,323783	
Breusch-Godfrey estatistikoa, BG(1)			9,52	

- Ereduko perturbarioari dagokionez, zein hipotesi betetzen direla suposatzen ari da aurreko  $t$ -estatistikoak baliagarriak izan daitezen? Eta aldagai azaltzaileei dagokienez? Arrazonatu.
- Adieraz ezazu nola eta zertarako kalkulatu den “Durbin-Watsonen estatistikoa = 1,32875”. Estatistiko honen balioa emanik, aurreko atalean perturbazioari buruz suposatu diren hipotesiak sinesgarriak dira?

<sup>6</sup>Iturria: Ramanathaneko, data3-5 datu-fitxategia.

Gainera ondorengo grafikoak ere ditu:



Zuzendariak, eskuragarri dauden estimazio emaitzak eta grafikoak analizatu ondoren, honako eredu berria proposatzen du:

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 Q_{t-1} + v_t \quad (2)$$

- c) Zeintzuk dira eredu berri hau proposatzearen arrazoiak? Arrazona ezazu zure erantzuna grafikoetan eta eskuragarri dituzun emaitza **guztietan** oinarrituz.

Zuzendariak, ekonometriari buruzko ezaguera mugatuak dituenek, ondorengo bi aukeren artean estimazio metodorik egokiena zein den erabakitzean zalantzak ditu. Lehen aukeraren emaitzak honakoak dira:

Eredua 2: KTA2E estimazioak, 88 behaketak erabiliz (1983:02–1990:05)

Aldagai azaldua: Q

Ordezkoak: P\_1

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	t estatistikoa	p-balioa
const	6056,46	1363,59	4,4415	0,0000
P	-375,74	109,814	-3,4216	0,0006
Q_1	-0,0470207	0,285300	-0,1648	0,8691

Aldagai azalduaren batezbestekoa 2558,90

Aldagai azalduaren desbiderapen tipikoa 1552,01

Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ ) 1489,92

$R^2$  0,101437

Durbin-Watson estatistikoa 1,26492

Hausman estatistikoa 1,7694

- d) Lehen aukerako emaitzak emanik:

- d.1) Zein estimazio metodo erabiltzen ari da? Zure ustez zergatik proposatu du estimatzaile hau? Zein propietate ditu erabilitako estimatzaileak? Azal itzazu zure baieztapenak zehaztasunez.
- d.2) Idatz ezazu estimatzailearen formula zehaztasunez.

$$\hat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[ \dots \right]^{-1} \left[ \dots \right]$$

Bigarren aukeraren emaitzak ondorengoak da:

Eredua 3: KTA estimazioak, 88 behaketak erabiliz (1983:02–1990:05)  
Aldagai azaldua: Q

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	t estatistikoa	p-balioa
const	4971,54	967,433	5,1389	0,0000
P	-346,23	100,532	-3,4440	0,0009
Q_1	0,276772	0,0956479	2,8937	0,0048
	Aldagai azalduaren batezbestekoa		2558,90	
	Aldagai azalduaren desbiderapen tipikoa		1552,01	
	Hondar karratuen batura		1,66272e+08	
	Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )		1398,62	
	$R^2$		0,206563	
	$\bar{R}^2$ zuzendua		0,187894	
	$F(2, 85)$		11,0645	
	Durbin-Watson estatistikoa		2,00214	
	Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea		-0,00538456	
	Breusch-Godfrey estatistikoa, BG(1)		0,04984	

e) Bigarren aukerako emaitzak emanik:

- e.1) Zein estimazio metodo erabiltzen ari da? Idatz ezazu bere formula zehaztasunez.



$$\hat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[ \dots \right]^{-1} \left[ \dots \right]$$

e.2) Idatz ezazu Mann eta Walden teorema eta egiazta ezazu ea bere baldintzak betetzen diren kasu honetan. Adieraz itzazu estimatzailearen propietateak. Estimazio metodo bietatik, zein deritzozu egokiena?, zergatik?

f) Kontrasta ezazu ea silikona produkzioa zehazten duen eredua estatikoa den.

## ARIKETA EL-2007. 4 (2007-Iraila)

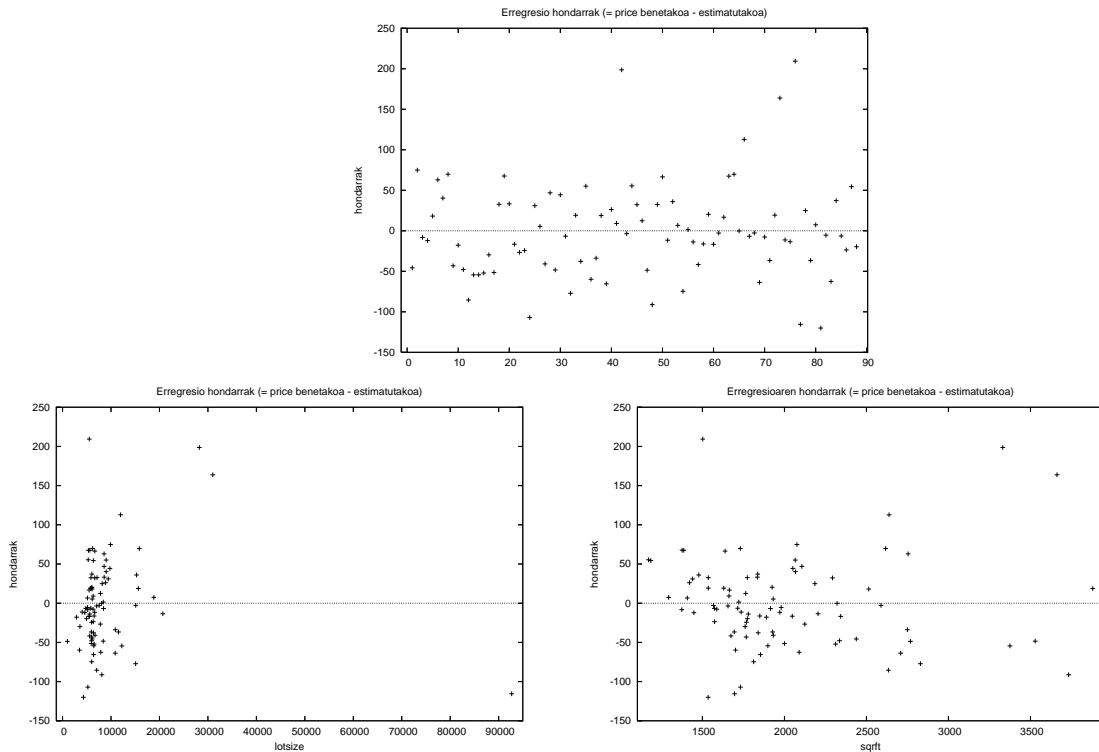
BOSHOUSE higiezin-agentziak etxebizitzaren prezioa finkatzeko jarraitu beharreko politikari buruz aholkatzeko kudeatzaile bat kontratatzen du. Horretarako Boston eta ingurunean dauden 88 etxebizitzari buruzko informazioa aurkezten zaio. Eskuragarriak diren aldagaiak honakoak dira: etxebizitzaren prezioa mila dolarretan (**price**), lursailaren tamaina oin karratutan (**lotsize**), etxebizitzaren tamaina oin karratutan (**sqft**) eta logelen kopurua (**bdrms**). Kudeatzaileak zehazpen bi proposatzen ditu etxebizitzaren prezioa finkatzeko. Lehen zehazpenaren emaitzak ondorengoak dira:

Eredua 1: KTA estimazioak, 88 behaketak erabiliz (1-88)

Aldagai azaldua: price

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	<i>t</i> estatistikoa	p-balioa
const	-21,770	29,4750	-0,7386	0,4622
lotsize	0,00206771	0,000642126	3,2201	0,0018
sqft	0,122778	0,0132374	9,2751	0,0000
bdrms	13,8525	9,01015	1,5374	0,1279

Aldagai azalduaren batezbestekoa	293,546
Aldagai azalduaren desbiderapen tipikoa	102,713
Hondar karratuen batura	300724
Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )	59,8335
$R^2$	0,672362
$F(3, 84)$	57,4602
Breusch-Pagan: $h(\gamma_0 + \gamma_1 \text{lotsize} + \gamma_2 \text{sqft})$	27,97



1. Zein da kudeatzailea estimatzen ari den eredua? Interpreta itzazu ereduko lehen bi koefiziente estimatuak.
2. Interpreta ezazu grafikoetan agertzen den informazioa eta burutu itzazu egokiak derituzun kontrasteak. Zeintzuk dira KTA estimatzailearen propietateak? Arrazona itzazu zure baieztapenak.
3. Lortutako emaitzak kontuan izanik, proposa ezazu perturbazioaren bariantza eta kobariantza matrizearen egituraren bat. Nola estimatuko zenuke?

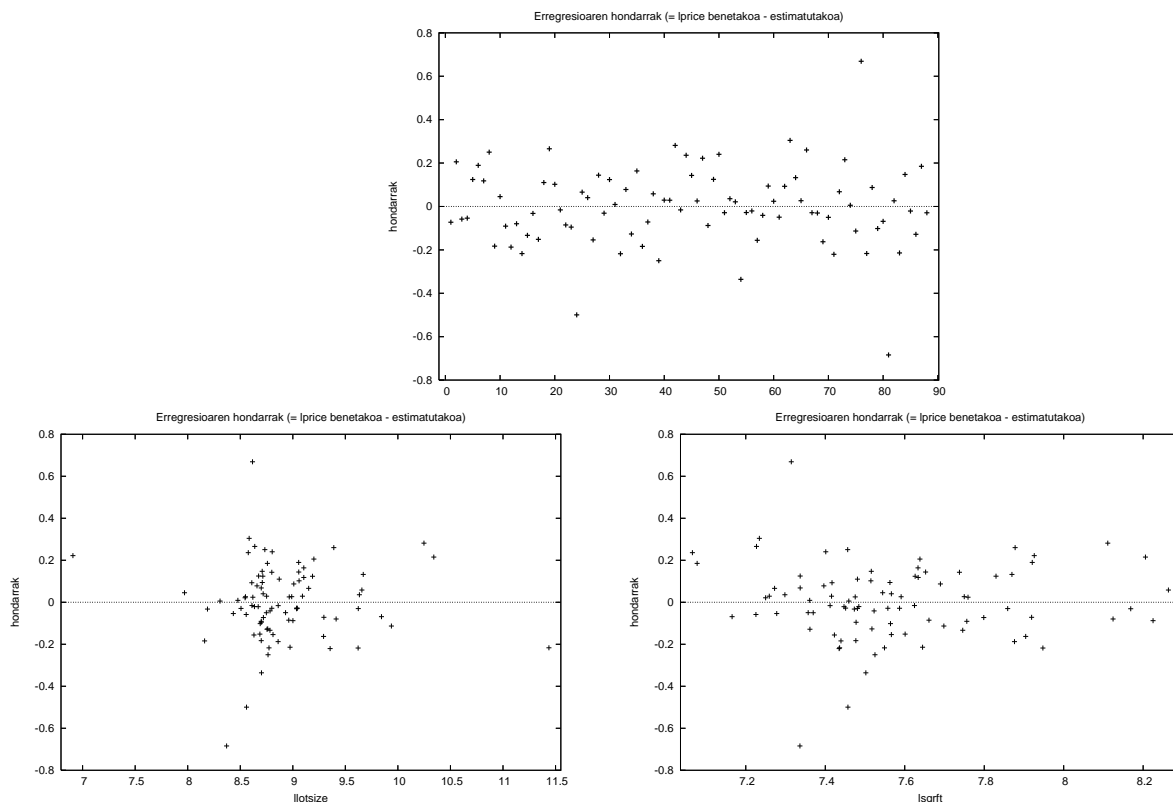
Bigarren aukeraren emaitzak ondoren erakusten dira:

Eredua 2: KTA estimazioak, 88 behaketak erabiliz (1-88)

Aldagai azaldua:  $\ln(\text{price})$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	-1,2970	0,651284	-1,9915	0,0497
$\ln(\text{lotsize})$	0,167967	0,0382811	4,3877	0,0000
$\ln(\text{sqrft})$	0,700232	0,0928652	7,5403	0,0000
bdrms	0,0369583	0,0275313	1,3424	0,1831

Aldagai azalduaren batezbestekoa	5,63318
Aldagai azalduaren desbiderapen tipikoa	0,303573
Hondar karratuen batura	2,86256
$R^2$	0,642965
$F(3, 84)$	50,4237
Breusch-Pagan: $h(\gamma_0 + \gamma_1 \ln(\text{lotsize}) + \gamma_2 \ln(\text{sqrft}))$	4,66



4. Zein da kudeatzailea estimatzen ari den eredua? Eredu honetako koefizienteek aurreko zehazpenean agertzen direnekiko esanahi berdina dute. Arrazona ezazu zure erantzuna.

5. Interpreta ezazu grafikoetan agertzen den informazioa eta burutu itzazu egokiak derituzun kontrasteak. Zeintzuk dira KTA estimatzailearen propietateak? Arrazona itzazu zure baieztapenak.
6. Lortutako emaitzetan oinarrituz, proposa ezazu perturbazioaren bariantza eta kobariantza matrizearen egituraren bat. Nola estimatuko zenuke?
7. Etxebizitzen prezioa azaltzeko, zehazpen bietatik zein da zure ustez egokiena?, zergatik?

## ARIKETA EL-2008. 1 (2008-Ekaina (jarraia))

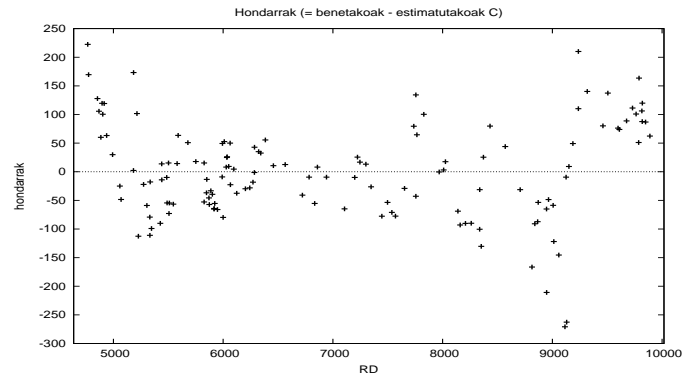
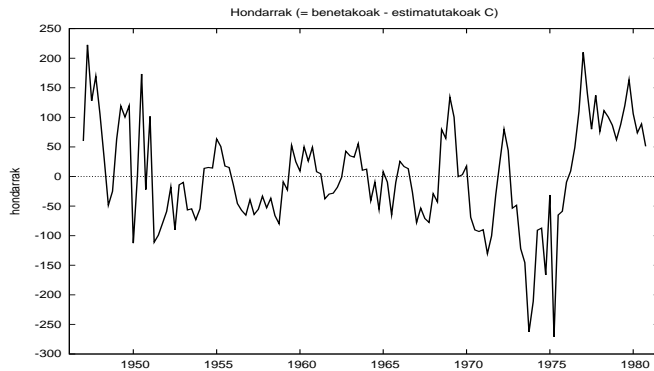
Ikasle batek EEBBetako kontsumoa eta errentaren arteko erlazioa neurtu nahi du. Horretarako per capita kontsumo ( $C$ , dolarretan neurtua eta oinarri urtea 1982 izanik) eta per capita errenta erabilgarria ( $RD$ , dolarretan neurtua eta oinarri urtea 1982 izanik) aldagaien 1947:01-1980:4 epeari dagozkion hiruhilabeteroko datuak ditu<sup>7</sup>.

Ikaslea analisiarekin hasterakoan, aldagai bi hauek erlazionatzen dituen eredu bakun bat estimatzen du honako estimazio emaitzak lortuz:

**1 Eredua:** KTA estimazioak 136 behaketak erabiliz 1947:1–1980:4  
Aldagai azaldua:  $C$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	325,972	32,8874	9,9117	0,0000
RD	0,861635	0,00454809	189,4498	0,0000
	Hondar Karratuen Batura		966548	
	Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )		84,9297	
	$R^2$		0,996280	
	Durbin–Watson estatistikoa		0,630575	

<sup>7</sup>Datuen iturria: Undergraduate Econometrics (2001), Hill, Griffiths eta Judge, John Wiley and Sons.



## LEHEN ZATIA

- 1.a) Idatz itzazu proposatu duen eredua eta lagin erregresio zuzena.
- 1.b) Interpreta ezazu 0,861635 koefiziente estimatua.
- 1.c) Komenta itzazu eskeinitako grafikoak.

Lortu dituen emaitzetan oinarrituz, ikasleak bigarren zehazpen bat analizatzea erabaki du:

### 2 Eredua: KTA estimazioak 136 behaketak erabiliz 1947:1–1980:4 Aldagai azaldua: C

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	1203,56	176,573	6,8162	0,0000
RD	0,609486	0,0501581	12,1513	0,0000
sq_RD	1,72209e-05	3,41370e-06	5,0446	0,0000

Hondar Karratuen Batura	811311
Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )	78,1030
$R^2$	0,996878
Durbin–Watson estatistikoa	0,744390

- 1.d) Idatz ezazu proposatu duen erregresio eredu orokorra. Eredua dinamikoa da?
- 1.e) Azal ezazu zehazki zein den **1 Eredua** eta **2 Eredua** zehazpenen arteko desberdintasuna. Zure ustez, zergatik estimatu du bigarren eredu hau?
- 1.f) Errenta erabilgarria dolar batean handituko balitz, zein izango litzateke per capita kontsumoaren aldakuntza estimatua?
- 1.g) Perturbazioei dagozkenez, zein balizko dira beharrezkoak KTA estimatzailea bariantza minimoduna izan dadin? Balizko hauek betetzen dira?

## BIGARREN ZATIA

Ikaslea, interesatzen zaizkion aldagaien arteko erlazioan pentsatzerakoan, gaur egungo kontsumoa aurreko epean egindako kontsumoaren menpekoa izan daitetekeelaren konklusiora heldu da:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + \beta_4 C_{t-1} + u_t \quad (1)$$

Lortzen dituen estimazio emaitzak honakoak dira:

### 3 Eredua: KTA estimazioak 135 behaketak erabiliz 1947:2–1980:4 Aldagai azaldua: C

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	<i>t</i> -estatistikoa	p-balioa
const	120,419	141,412	0,8515	0,3960
RD	0,211371	0,0442917	4,7723	0,0000
sq_RD	7,63071e-07	2,55460e-06	0,2987	0,7656
C_1	0,745746	0,0551728	13,5165	0,0000
	Hondar Karratuen Batura	338799		
	$R^2$	0,998679		
	Durbin–Watson estatistikoa	1,57884		

2.a) Eredua dinamikoa da?

2.b) Aldagai azaltzaileei dagozkenez, zein balizko dira beharrezkoak KTA estimatzailea albo-ragabea izan dadin? Balizko hauek betetzen dira? Arrazona ezazu zure erantzuna.

Ikasleak, **3 Ereduan** lorturiko emaitzak sakonago aztertu nahi dituenek, honako erregresio laguntzailea estimatzen du:

### Erregresio laguntzailea: KTA estimazioak 131 behaketak erabiliz 1948:2–1980:4 Aldagai azaldua: uhat

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	<i>t</i> -estatistikoa	p-balioa
const	133,639	140,457	0,9515	0,3432
RD	0,0812303	0,0472794	1,7181	0,0883
sq_RD	1,92833e-06	2,51581e-06	0,7665	0,4449
C_1	-0,126831	0,0581626	-2,1806	0,0311
uhat_1	0,173421	0,0906443	1,9132	0,0580
uhat_2	0,345921	0,0933133	3,7071	0,0003
uhat_3	0,112459	0,0949148	1,1848	0,2384
uhat_4	-0,106228	0,0933740	-1,1377	0,2575

Hondar Karratuen Batura	277978
$R^2$	0,161219
Durbin–Watson estatistikoa	1,93769

- 2.c) Zertarako balio diote ikasleari erregresio laguntzaile honen estimazio emaitzek? Zer kontrastatu nahi du? Zein da lortzen duen konklusioa? Kontrasta ezazu.
- 2.d) Erregresio laguntzaileko emaitzak emanik, zeintzuk dira **3 Ereduan** erabilitako estimatzailearen propietateak? Arrazona ezazu zure erantzuna.

## HIRUGARREN ZATIA

Ikasleak 2 ZATIAN aztertu duen zehazpena estimatu nahi duela argi dauka, hau da:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + \beta_4 C_{t-1} + u_t$$

hala ere, ez du argi zein den erabili beharreko estimatzailea. Ondoren, estimazio metodo desberdin birekin lortzen dituen estimazio emaitzak aurkezten ditu:

**1 Zehazpena:** Hildreth–Lu estimazioak 134 behaketak erabiliz 1947:3–1980:4

Aldagai azaldua: C

$$\hat{\rho} = 0,301631$$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-estatistikoa	p-balioa
const	270,821	130,222	2,0797	0,0395
RD	0,289589	0,0601967	4,8107	0,0000
sq_RD	3,01632e-06	3,40140e-06	0,8868	0,3768
C_1	0,616906	0,0670038	9,2070	0,0000

rho-atzeratutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar Karratuen Batura	311219
$R^2$	0,998772

- 3.a) Zein da erabili duen estimazio metodoa? Idatz ezazu zehatz mehatz estimatzailearen adierazpena eraldatutako eremuan oinarrituz.

$$HKB^* = \sum_{t=\dots}^{t=\dots} \left( Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^* - \hat{\beta}_3 X_{3t}^* - \hat{\beta}_4 X_{4t}^* \right)^2$$

$$Y_t^* = \dots\dots\dots; \quad X_{1t}^* = \dots\dots\dots; \quad X_{2t}^* = \dots\dots\dots$$

$$X_{3t}^* = \dots\dots\dots; \quad X_{4t}^* = \dots\dots\dots$$

$$\hat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[ \dots \right]^{-1} \left[ \dots \right]$$

Idatz ezazu perturbazioaren dinamika zehazteko aukeratu duen prozesua:

3.b) Aurkeztutako estimazio emaitzak emanik, zein da perturbazioaren bariantza eta kobariantza matrizearentzat proposatzen ari den egitura **1 Zehazpenean**?

$$E(uu') = \left[ \dots \right]$$

3.c) Aurretiko 2.c) ataleko kontrastearen emaitza emanik, **1 Zehazpenerako** proposatu duen perturbazioaren bariantza eta kobariantza matrizearen egitura egokia iruditzen zaizu? Ondorioz, zeintzuk dira erabilitako estimatzailearen propietateak?

**2 Zehazpena:** KTA2E estimazioak 135 behaketak erabiliz 1947:2–1980:4

Aldagai azaldua: C

Ordezkoak: RD\_1 sq\_RD\_1

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-estatistikoa	p-balioa
const	710,641	247,667	2,8693	0,0041
RD	0,428764	0,0851963	5,0327	0,0000
sq_RD	9,73003e-06	4,10624e-06	2,3696	0,0178
C_1	0,338883	0,141450	2,3958	0,0166

Hondar Karratuen Batura 479442

Durbin–Watson estatistikoa 0,950370

Hausman kontrastea – Hipotesi hutsa: KTA estimatzaileak tinkoak dira

Kontrasterako estatistiko asintotikoa:  $\chi^2_1 = 17,3525$  p-balioarekin = 3,10497e-005



- 3.d) Azal ezazu ondorengoaren esanahia: “Ordezkoak: RD\_1 sq\_RD\_1”
- 3.e) Burutu ezazu Hausmanen kontrastea. Lortzen duzun emaitza esperotakoa da? BIGARREN ZATIAN lortutako emaitzekin bat dator? zergatik?
- 3.f) Zein da erabili duen estimatzailea? Idatz ezazu bere adierazpena eta Lagin Erregresio Funtzioa (LEF).

$$\hat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[ \dots \right]^{-1} \left[ \dots \right]$$

**LEF:** \_\_\_\_\_

- 3.g) Zeintzuk dira erabilitako estimatzailearen propietateak? Zein baldintza dira beharrezkoak estimatzaile hau tinkoa izan dadin?
- 3.h) (1) eredia estimatzeko erabili dituen estimazio metodo guztietatik bat aukeratu beharra bazenu, zein aukeratuko zenuke? Arrazona ezazu zure erantzuna.

## ARIKETA EL-2008. 1 (2008-Ekaina)

ALIMENTAX S.A. supermerkatu kateak bere hedapen-politika zehaztu nahi du Autonomia Erkidegoaren barnean. Horretarako Erkidegoaren kontsumoaren ikerketa bat egiteko agindu dio bere kudeatzaileari. Ikerketa burutzeko, ondorengo aldagaien 1959-1994 epeari dagokion urteroko datuen<sup>8</sup> lagin bat du:

- C*: Kontsumo erreala, bilioi dolarretan.  
*W*: Soldata erreala, bilioi dolarretan.  
*P*: Bestelako errentak (soldataz gain), bilioi dolarretan eta termino errealetan.

<sup>8</sup>Datuen iturria: Ramanathan, R. (2002), Introductory Econometrics with applications, ed. South-Western

Kudeatzaileak honako eredua KTA bidez estimatzen du

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 W_t + \beta_3 P_t + u_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

ondorengo emaitzak lortuz:

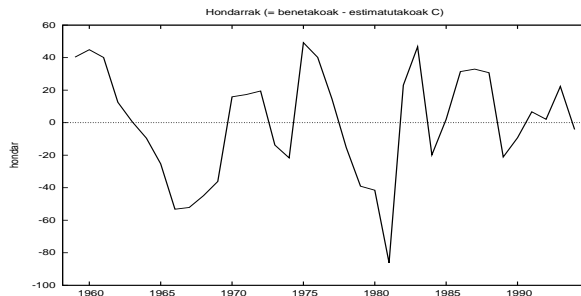
**Eredua 1:** KTA estimazioak 36 behaketak erabiliz 1959–1994  
Aldagai azaldua: C

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-222,15	19,5527	-11,3620	0,0000
W	0,693262	0,0326064	21,2615	0,0000
P	0,735916	0,0488218	15,0735	0,0000

Hondar Karratuen Batura	38976,5
$R^2$	0,998754
$F(2, 33)$	13230,3
Durbin–Watson estatistikoa	0,969426
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea	0,494451
BG(1)=9,621	

## LEHEN ZATIA.

- Zer esan nahi du aldagaiak terminu errealetan neurtuta daudela?
- Interpreta ezazu  $\beta_2$  koefizientea.
- Komenta ezazu ondoko hondarren grafikoa.



- Perturbazioei dagozkien oinarrizko hipotesi guztiak betetzen dira? Analiza itzazu aurkeztutako emaitza guztiak eta egokiak deritzozun kontrasteen emaitzak kontuan izanik, bete itzazu jarraian dituzun matrizeak:

$$E(u) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad E(uu') = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

e)  $W$  eta  $P$  aldagai ez estokastikoak direlara suposatuz, arrazona itzazu (1) ereduko koefizienteen KTA estimatzailearen propietateak.

### BIGARREN ZATIA.

Kudeatzailea ereduaren zehazpenarekin arduratuta dagoenez, beste zehazpen alternatibo bi ikertzea erabakitzen du.

#### • A Zehazpena:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 W_t + \beta_3 W_{t-1} + \beta_4 P_t + u_t \quad t = 1, \dots, T$$

Zehazpen honentzat lortzen dituen emaitzak ondorengoak dira:

**A Zehazpena:** KTA estimazioak 35 behaketak erabiliz 1960–1994  
Aldagai azaldua: C

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-223,32	21,9777	-10,1613	0,0000
W	0,618833	0,113718	5,4418	0,0000
W_1	0,0839831	0,108643	0,7730	0,4454
P	0,725303	0,0494033	14,6813	0,0000
Hondar Karratuen Batura			36407,3	
$R^2$			0,998754	
$F(3, 31)$			8284,44	
Durbin–Watson estatistikoa			0,949518	
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea			0,493482	

f) Komenta eta arrazona ezazu ondorengo baieztapenak egiazkoak ala gezurrezkoak diren:

f.1) “A Zehazpenean erabilitako KTA estimatzailea ez da lineala”.

f.2) “A Zehazpenean estimatutako koefizienteen KTA estimatzailearen bariantza eta kobariantza matrizea  $Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$  da”. Burutu ezazu egokiak deritzozun kontrasteak.

• **B Zehazpena:**

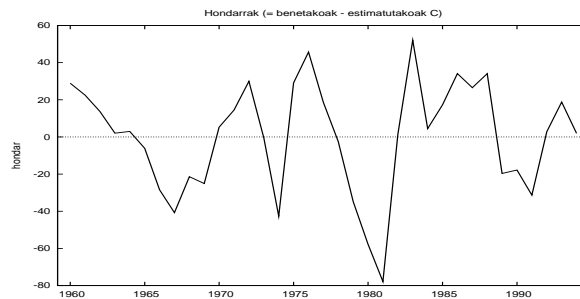
$$C_t = \beta_1 + \beta_2 W_t + \beta_3 P_t + \beta_4 C_{t-1} + u_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

Zehazpen honi dagozkion estimazio emaitzak honakoak dira:

**1 Emaitza:** KTA estimazioak 35 behaketak erabiliz 1960–1994  
Aldagai azaldua: C

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-estatistikoa	p-balioa
const	-155,77	33,1278	-4,7021	0,0001
W	0,513348	0,0766851	6,6942	0,0000
P	0,535774	0,0835316	6,4140	0,0000
Ct_1	0,270081	0,100359	2,6911	0,0114

Hondar Karratuen Batura	30081,4
$R^2$	0,998971
Durbin–Watson estatistikoa	1,00858
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea	0,481818
BG(1)	8,704344
BG(4)	12,040592
Hausman	11,7299



g) Aurreko estimazio emaitza **guztiak** emanik, zer esan dezakezu aurkeztutako banakako esanguratasun kontrasteen baliaagarritasunari buruz?

**HIRUGARREN ZATIA.**

Bigarren zatiko **1 Emaitzak** ikusi ondoren, kudeatzaileak (2) eredua berestimatzeko du ondorengo emaitzak lortuz:

**2 Emaitza:** KTA2E estimazioak 35 behaketak erabiliz 1960–1994  
Aldagai azaldua: C  
Ordezkoak: W\_1



j) Azal ezazu zehaztasunez ondorengoak zer adierazten duen:

Ordezkoak: W\_1 P\_1

- k) Deskriba ezazu **pausoz pauso** emaitza hauek lortzeko kudeatzaileak jarraitu duen prozesua. Estimatzailer hau zertan desberdintzen da **Emaitza 2**-an erabilitako estimatzailearekin?
- l) (2) ereduaren estimatzeko erakutsi diren emaitza guztiak emanik, zeinekin geratuko zinateke? Arrazona ezazu zure erantzuna.

## ARIKETA EL-2008. 2 (2008-Ekaina)

Proba hau egiteko behar duzuen datu-fitxategia Gretl lagindegian aurkitzen den Ramanathan karpetakako data8-2.gdt da. Fitxategi honetan aurkituko duzun informazioa hurrengoa da:

Errenta pertsonal bateratua eta hiri-garraioan egindako gastua (1993) EEBBetako estatuetan.

*EXPTRAV*: Garraioan egindako gastua, bilioi dolarretan (Ibiltartea 0,708 - 42,48).

*INCOME*: Errenta pertsonala, bilioi dolarretan (Ibiltartea 9,3 - 683,5).

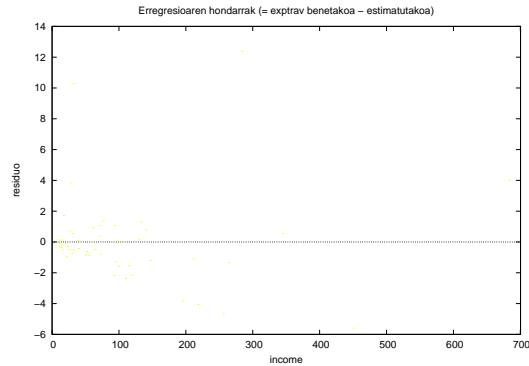
*POP*: Populazioa, milioitan (Ibiltartea 0,47 - 31,217).

- a) Estima ezazu garraioan egindako gastua errenta pertsonalarekin erlazionatzen eta termino konstantea barneratzen duen eredu bat KTA bidez.
- a.1) Estimatu behar duzun ereduaren honakoa da:
- a.2) Estimazio emaitzak ondorengoak dira:

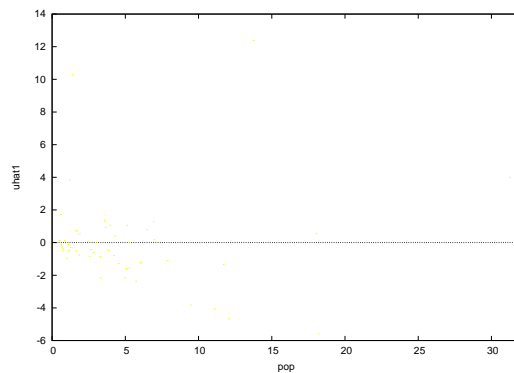
$$\widehat{exptrav}_i = (\widehat{desb}(\hat{\beta}_{KTA})) \left( \quad \right) + \left( \quad \right)$$

	$R^2 =$	$HKB =$	$N =$	
i	1	2	3	4
$\hat{u}_{KTA,i}$				

- a.3) Irudikatu eta interpreta itzazu ondorengo grafikoak:  
 - KTA hondarrak INCOME aldagaiarekiko.



- KTA hondarrak POP aldagaiarekiko.



b) Demagun  $Bar(u_i) = \sigma^2 POP_i$  dela susmatzen dugula. Kontrasta ezazu:

- b.1) Idatz ezazu hipotesi hutsa, alternatiboa eta kontrasterako estatistikoa bere banaketarekin. Azal ezazu zehaztasunez estatistikoaren elementu bakoitza nola ateratzen den.
- b.2) Aplika ezazu eta bete itzazu:  
 Estatistikoaren lagin balioa =  
 $\alpha = \%5$  esangura mailari dagokion balio kritikoa=  
 Erabaki arauaren gauzatzea:
- b.3) Aurreko kontrasteko emaitza kontuan izanik, perturbazioak esferikoak dira? Idatz ezazu perturbazioen bariantza eta kobariantza matrizea.
- b.4) Bete ezazu a.1) atalean proposatzen den eredu koefizienteen estimatzaile efizien-

tearen ondorengo adierazpena,  $\text{bar}(u_i) = \sigma^2 \text{POP}_i$  izatearen kasuan:

$$\hat{\beta}_{\dots} = \left[ \dots \right]^{-1} \left[ \dots \right]$$

c) Aplikatu ezazu aurreko atalean proposatu duzun estimazio metodoa.

- c.1) Idatz ezazu lortu duzun lagin erregresio funtzioa.
- c.2) Kontrasta ezazu errenta aldagaiaren esanguratasuna.

d) Estima itzazu efizienteki ondorengo eredu koefizienteak:

$$\text{EXPTRAV}_i = \beta_1 + \beta_2 \text{INCOME}_i + u_i \quad u_i \sim (0, \alpha_1 + \alpha_2 \text{POP}_i^2 + \alpha_3 \text{POP}_i^3)$$

d.1) Estimazio emaitzak:

$$\widehat{\text{exptrav}}_i = \widehat{\text{desb}}(\hat{\beta}) \left( \dots \right) + \left( \dots \right)$$

$$\widehat{\text{Bar}}(u_i) = \dots + \dots$$

- d.2) Kontrasta ezazu errenta aldagaiaren esanguratasuna.
- d.3) Azal ezazu c.2) eta d.2) ataletan egindako kontrasteen arteko desberdintasuna.

## ARIKETA EL-2008. 3 (2008-Iraila)

Kontsidera ezazu hurrengo erregresio eredu:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

non  $X_i$  estokastikoa den,  $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $E(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j$  eta  $E(X_i u_i) = 0, 9$  den.



- a) Zein da aurreko ereduan dagoen arazoa? Nola hauteman daiteke? Azal ezazu zehaztasunez proposatzen duzun kontrastea eta baita hipotesi hutsa baztertzeak edo ez baztertzeak dituen ondorioak.
- b) Zeintzuk dira KTA eta OA estimatzaileen erabilpenek dakartzaten ondorioak  $\beta_1$  eta  $\beta_2$  koefizienteen hipotesi kontrasteen gain? Arrazona ezazu kasu bakoitzaren erantzuna.

500 behaketako lagin batek<sup>9</sup> honako **karratuen baturak eta gurutzatutako baturak** ematen ditu:

	1	$Y_i$	$X_i$	$Z_{1i}$
1	500	1530,17	14,48	-0,23
$Y_i$		7163,54	1551,83	448,79
$X_i$			1037,57	451,24
$Z_{1i}$				509,40

non adibidez  $\sum Y_i X_i = 1551,83$  eta  $\sum Y_i = 1530,17$  diren.

- c) Emandako lagin informazioa erabiliz, bete itzazu  $\beta_1$  eta  $\beta_2$  koefizienteak OAren bidez estimatzeko beharrezkoak diren matrizeak,  $Z_1$  ordeko bakarria dela kontsideratuz:

$$\widehat{\beta}_{OA} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,03 \\ 0,996 \end{bmatrix}$$

$\beta_1$  eta  $\beta_2$  koefizienteen OA estimatzailearen bariantza eta kobariantza matrize estimatua ondorengoa izanik:

$$\widehat{Bar}(\widehat{\beta}_{OA}) = \begin{bmatrix} 0,00203608 & -0,000074 \\ & 0,00254410 \end{bmatrix}$$

Bete ezazu estimatutako erdua:

$$\frac{\widehat{Y}_t}{(\widehat{desb}(\widehat{\beta}_{OA}))} = \dots$$

<sup>9</sup>Iturria: Hill, Griffiths eta Judge (2001), *Undergraduate Econometrics*.

d) Zein baldintzapean izango da tinkoa aurreko ataleko OA estimatzailea? Estimatzailer hau asintotikoki efizientea da? Arrazona ezazu.

e)  $H_0 : \beta_1 = 3 \quad \beta_2 = 1$  kontrastea burutzeko:

Idatz ezazu kontrasterako estatistikoa eta bere banaketa:

Zehaz itzazu aurreko estatistikoaren elementu guztiak:

Ondoren ematen den informazioarekin burutu ezazu c) ataleko kontrastea:

Murrizketa multzoa

1:  $b[\text{const}] = 3$

2:  $b[x] = 1$

Kontrasterako estatistikoa:  $\chi^2(2) = 0,490224$ , p-balioarekin = 0,782617

Aurreko c) atalean erabilitako estimatzailearen beste estimatzaile alternatibo bat erabili da. Gretl erabiliz lortzen diren estimazio emaitzak hauek dira:

Eredua 2: KTA2E estimazioak 500 behaketak erabiliz 1–500

Aldagai azaldEua: Y

Ordezkoak:  $Z_1 \quad Z_2$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-estatistikoa	p-balioa
const	3,03113	0,0445796	67,9936	0,0000
X	1,00899	0,0448997	22,4721	0,0000

f) Azal itzazu estimatzaile hau lortzeko pauso guztiak. Aurrekoa baino hobea da? Arrazona ezazu.

## ARIKETA EL-2008. 4 (2008-Iraila)

Chicagoko bidai-agentzia batek familien opor-lekuaren hautaketak (bizi lekutik hurbil edo urrunago), seme-alaba txikien kopuruarekiko menpekotasuna nabaria den ala ez aztertu nahi du. Horretarako duen lagina<sup>10</sup> 2007 urtean hirian elkarrizketatutako 200 familiaz osoturik dago. Zehazten den eredua honakoa da:

$$Miles_i = \beta_1 + \beta_2 Income_i + \beta_3 age_i + \beta_4 kids_i + u_i \quad i = 1, \dots, 200 \quad (1)$$

<sup>10</sup>Iturria: Hill, Griffiths eta Judge (2001), *Undergraduate Econometrics*

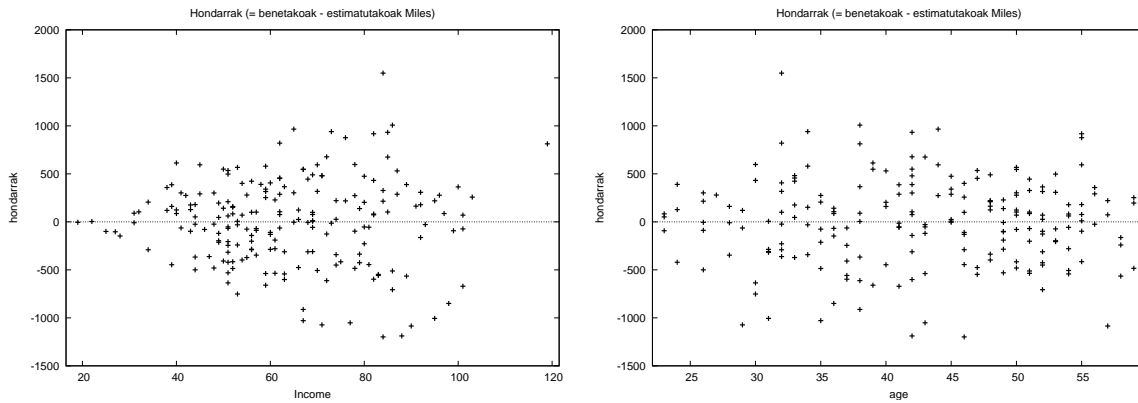
non *Miles* urte horretan familiak oporretan egindako milia kopurua, *Income* familiaren urteroko errenta mila dolarretan, *age* familiako kide helduen batezbesteko adina eta *kids* 16 urte baino gutxiago dituen ume kopurua diren.

Eredua KTA bidez estimatzen du ondorengo emaitzak lortuz:

$$\begin{aligned} \widehat{Miles}_i &= -391,55 + 14,201 Income_i + 15,741 age_i - 81,826 kids_i & (2) \\ (\widehat{desb}(\hat{\beta}_{KTA})) & \quad (169,8) \quad (1,80) \quad (3,757) \quad (27,13) \\ R^2 &= 0,340605 \quad HKB = 40099000 \end{aligned}$$

- a) Ondorengo grafikoez zer eramaten dute aditzera? Komenta ezazu grafiko bakoitza zehaztasunez.

Irudia 1: KTA hondarrak *Income* eta *Age* aldagaiekiko



- b) Lagin guztia *Income* aldagaiekin ordenaketa beherakorra egin ondoren muturreko azpilagin biak finkatzen dira. Azpilagin bakoitzarekin (1) eredua KTA bidez estimatzean lortzen diren estimazio emaitzak ondorengoak dira:

Lehen azpilagina: KTA estimazioak 80 behaketak erabiliz 1–80  
Aldagai azaldua: Miles

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	<i>t</i> -estatistikoa	p-balioa
const	-129,22	615,610	-0,2099	0,8343
Income	13,1490	6,14562	2,1396	0,0356
age	13,3666	7,59215	1,7606	0,0823
kids	-114,18	52,9888	-2,1549	0,0343

Hondar Karratuen Batura 2,42765e+07  
 $R^2$  0,116112

Bigarren azpilagina: KTA estimazioak 80 behaketak erabiliz 121–200

Aldagai azaldua: Miles

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-339,64	220,160	-1,5427	0,1271
Income	9,68801	4,01043	2,4157	0,0181
age	18,6511	3,87408	4,8143	0,0000
kids	-66,026	29,8963	-2,2085	0,0302

Hondar Karratuen Batura 7,04816e+06  
 $R^2$  0,308962

Burutu ezazu grafikoek adierazten dutena estatistikoki esanguratsua den ala ez baieztatzeko kontraste bat. Zehaztu itzazu hipotesi hutsa, alternatiboa eta kontrasterako elementu guztiak.

- c) Egindako kontrasteen hipotesi hutsa baztertuko balitz eta koefizienteen estimazio metodoa ez bazenu aldatu nahi izango, zer aldatuko zenuke (2) taulan aurkeztutako emaitzetan? Zergatik eta zertarako egingo zenuke? Azal ezazu zehaztasunez.

Efizientzian hobetu nahian,  $\beta$  koefizienteak estimatzeko KTA estimatzailea erabili beharrean, beste estimatzaile alternatibo bat erabili da. Gretl erabiliz lortzen diren emaitzak ondorengoak dira:

KTP estimazioak 200 behaketak erabiliz 1-200

Aldagai azaldua: Miles

Ponderatzeko erabilitako aldagaia:  $\frac{1}{Income}$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-408,37	145,717	-2,8025	0,0056
Income	13,9705	1,64821	8,4762	0,0000
age	16,3483	3,42222	4,7771	0,0000
kids	-78,363	24,7355	-3,1680	0,0018

Ponderatutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar Karratuen Batura 580616,  
 Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ ) 54,4272  
 $R^2$  0,390722  
 $F(3, 196)$  41,8975

Jatorrizko datuetan oinarritutako estatistikoak:

Aldagai azalduaren batezbestekoa	1054,23
Aldagai azalduaren Desb. Tip.	552,799
Hondar Karratuen Batura	4,01134e+07
Hondarren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )	452,394

d) Bete itzazu ereduko perturbazioari eta erabilitako estimazio metodoari dagozkien ondorengo adierazpenak:

$$\begin{array}{ccc}
 E(u_i) = & E(u_i^2) = & E(u_i u_j) = \\
 & & \\
 \underbrace{E(uu')}_{(\dots \times \dots)} = & & \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]
 \end{array}$$

Estimazio irizpidea:.....  $HKB = \sum_{i=\dots}^{i=\dots} \left( Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \hat{\beta}_3 X_{3i}^* - \hat{\beta}_4 X_{4i}^* \right)^2$

$Y_i^* = \dots\dots\dots$ ;       $X_{1i}^* = \dots\dots\dots$ ;       $X_{2i}^* = \dots\dots\dots$ ;

$X_{3i}^* = \dots\dots\dots$ ;       $X_{4i}^* = \dots\dots\dots$ ;

$$\hat{\beta}_{\dots} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]^{-1} \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

e)  $H_0 : \beta_2 = 10$  kontrastatu beharra bazenu, nola egingo zenuke? Arrazona eta azal ezazu zure erantzuna.

## ARIKETA EL-2008. 5 (2008-Iraila)

Proba hau egiteko beharrezkoak diren datuak **eKASI**n dagoen **inbertsioa.gdt**<sup>11</sup> datu-fitxategian dituzue, bertan ondorengo aldagaien 1974-2003 epeko urteroko datuak dituzue:

I : Inbertsio erreala bilioi dolarretan (Ibiltartea 11,53 - 31,18).

GNP : Nazio Produktu Gordin erreala bilioi dolarretan (Ibiltartea 8,58 - 33,86).

R : Interes tasa (Ibiltartea 18,12 - 15,82).

a) Estima ezazu KTA bidez inbertsioa, Nazio Produktu Gordin erreala eta interes tasarekin erlazionatzen duen eredu bat, termino konstantea barneratuz. Bete itzazu:

a.1) Estimatu behar den eredu honakoa da:

a.2) Estimazio emaitzak ondorengoak dira:

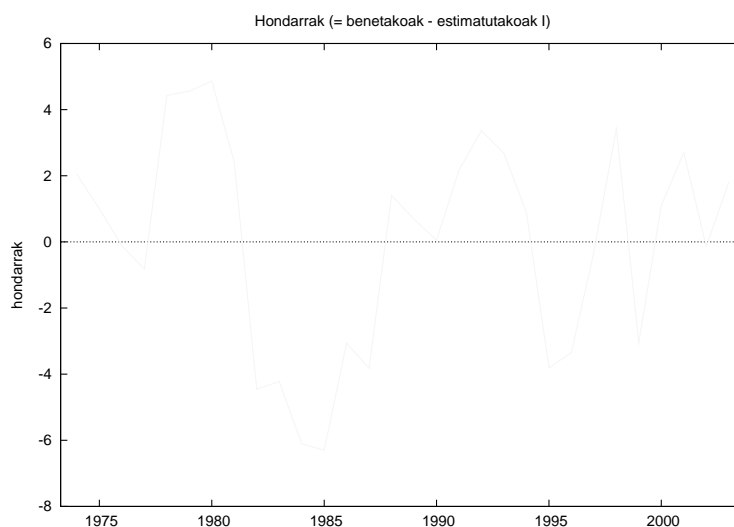
$$\widehat{I}_t = (\widehat{desb}(\hat{\beta}_{KTA})) \dots \dots \dots$$

$$R^2 = \quad HKB = \quad T =$$

t	2000	2001	2002	2003
$\hat{u}_{KTA,t}$				

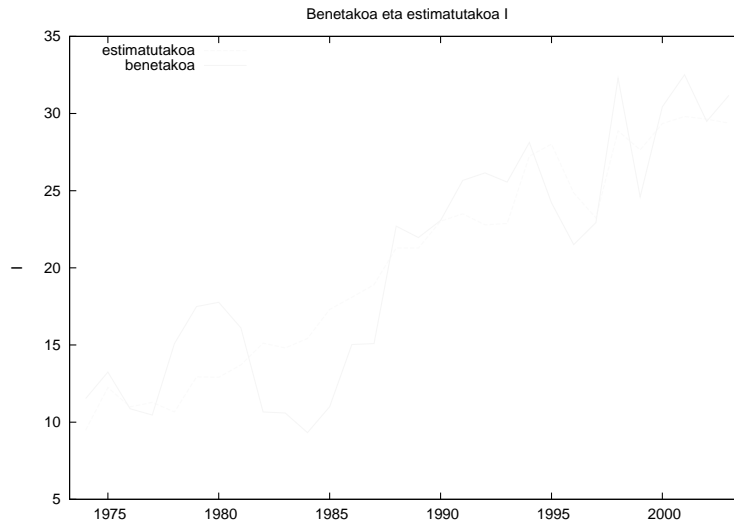
a.3) Irudikatu eta interpreta itzazu ondorengo grafikoak:

- KTA hondarrak.



<sup>11</sup>Iturria: *Undergraduate Econometrics* de Hill, Griffiths eta Judge.

- Benetakoa eta estimatutako inbertsio serieak.



b) Perturbazioak ( $u_t$ ) AR(p) edo MA(p) prozedura jarraitu dezakeela pentsatzen da, non  $p$  bigarren ordenarte izan daitekeen. Burutu ezazu dagokion kontrastea.

b.1) Idatz itzazu hipotesi hutsa, alternatiboa eta kontrasterako estatistikoa hipotesi hutsaren pean dagokion banaketarekin batera. Azal ezazu zehaztasunez estatistikoaren elementu guztiak nola ateratzen diren.

b.2) Aplika ezazu eta bete itzazu:

Estimatutako erregresio laguntzailea:

..... = .....

$$R^2 =$$

Estatistikoaren lagin balioa =

$\alpha = \%5$  esangura mailari dagokion balio kritikoa =

Erabaki arauaren gauzatzea:

b.3) Aurreko kontrastearen emaitza emanik, perturbazioak esferikoak dira? Zergatik?

c) Kontsidera ezazu Hildreth-Lu metodoa  $u_t$ -k AR(1) prozedura jarraitzen duelaren balizkopian.

c.1) Bete itzazu ondorengo adierazpenak.

$$u_t = \quad + \quad \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim \text{.....}(\quad, \quad)$$

$$\underbrace{E(uu')}_{(\dots \times \dots)} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

“Estimazio irizpidea” : ..... HKB =  $\sum_{t=\dots}^{t=\dots} (Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^* - \hat{\beta}_3 X_{3t}^*)^2$

$Y_t^* = \dots\dots\dots$ ;       $X_{1t}^* = \dots\dots\dots$ ;

$X_{2t}^* = \dots\dots\dots$ ;       $X_{3t}^* = \dots\dots\dots$ ;

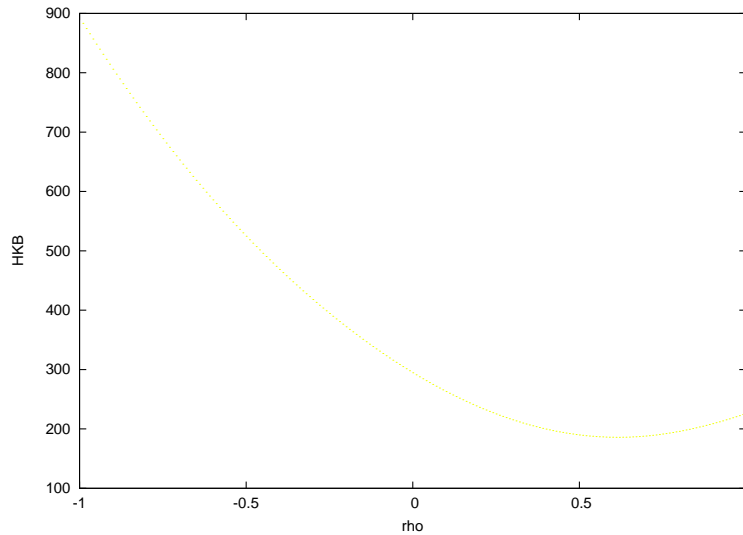
$$\hat{\beta}_{\dots} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]^{-1} \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

c.2) Irudikatu ezazu HKBren grafikoa eta bete itzazu lortutako lagin erregresio funtzioa,  $\rho$ -ren estimazioa eta helburu funtzioaren balio minimoa.

$\hat{\rho} =$                                   HKB – ren “balio minimoa” =

$(\widehat{desb}(\hat{\beta}_{HL})) =$       (                                  )      (                                  )      (                                  )





- c.3) Kontrasta ezazu interes tasa aldagaiaren esanguratasuna.
- d) Lor itzazu koefizienteen KTA estimatzailearen autokorrelazioarekiko sendoak diren desbideratze tipikoak.
  - d.1) Idatz itzazu estimazio emaitzak:

$$(\widehat{desb}_{sendoak}(\hat{\beta}_{KTA})) \hat{I}_t = ( \quad ) \dots ( \quad ) \dots ( \quad )$$

Zertarako balio dute? Azal ezazu xehetasunez.

- d.2) Kontrasta ezazu interes tasa aldagaiaren esanguratasuna.
- d.3) Azal ezazu c.3) atalean eta d.2) atalean egindako kontrasteen arteko desberdintasuna. Emaitza aldatzen da? Zeinekin geldituko zinateke? Arrazona ezazu zure aukera zehaztasunez.

## ARIKETA EL-2009. 1 (2009-Ekaina (jarraia))

Ikasle baten asmoa 1950 eta 1991 urte bitartean, bi urteok barne, EEBBetako inbentarioen eta manufaktura-industriaren salmenten arteko erlazioa neurtzea da. Honetarako *SALMENTAK* eta *INBENTARIOAK* aldagaien urteroko datuak<sup>12</sup> dauzka eskura, biak ere milioi dolarretan neurtuak. *SALMENTAK* aldagaia ez-estokastikoa dela kontsideratzen da. Ikasleak ondoko zehaztapena proposatu du:

$$INBENTARIOAK_t = \beta_1 + \beta_2 SALMENTAK_t + \beta_3 time + u_t \quad t = 1, \dots, 42 \quad (1)$$

<sup>12</sup>Iturria: Ramanathan, Ramu (2002): *Introductory Econometrics with Applications*, Gujarati datu bilduma, Table12.9.gdt fitxategia.

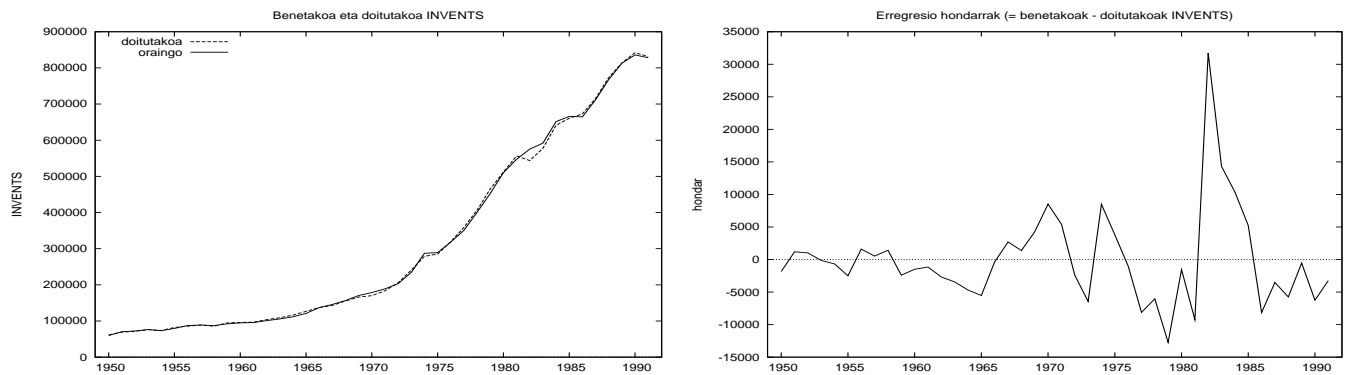
Aurreko ereduaren KTA bidezko estimazioak ondoko emaitzak eskaintzen ditu:

$$\widehat{INBENTARIOAK}_t = 433,951 + 1,543SALMENTAK_t + 158,805time$$

$(\hat{d}sb(\hat{\beta}_i))$                        $(2774,17)$        $(0,019)$                        $(269,107)$

$$R^2 = 0,9992 \quad HKB = 2,202257e+09 \quad DW = 1,3755 \quad BG(1) = 4,061$$

ondoko grafikoekin batera:



- 1) Interpretatu erakutsitako **bi** grafikoak.
- 2) Ereduaren perturbazioak arazoren bat aurkez dezakeela uste al duzu? Egin egoki deritzozun kontrastea edo kontrasteak. (Ez ahaztu aukeratutako kontraste guztietarako hipotesi hutsa nahiz alternatiboa, kontrasterako estatistikoa eta honen banaketa idaztea.)
- 3) Zergatik uste duzu ikasleak tendentzia edo joera (*time*) erregresore moduan gehitu duela bere eredura?

• Aurreko zehaztapenaren estimazioan lortutako emaitzekin arduratuta, ikasleak estimazio metodo alternatibo batekin probatzea erabaki du, ondoko emaitzak lortu dituelarik:

Rho-ren kalkulu iteratiboa eginez ...

ITERAZIOA	RHO	HKB
1	0,31149	1,9874e+009
2	0,31600	1,98735e+009
azkena	0,31616	

Cochrane–Orcutt estimazioak 1951–1991 bitarteko 41 behaketak erabiliz

Aldagai dependentea: INBENTARIOAK

$$\hat{\rho} = 0,316161$$

	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	34,3714	4413,71	0,0078	0,9938
SALMENTAK	1,53759	0,0289188	53,1693	0,0000
time	229,763	410,642	0,5595	0,5791
Hondar karratuen baturak			1,98735e+09	
Erregresioaren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )			7231,79	
$\bar{R}^2$ zuzendua			0,999222	
$F(2, 38)$			12476,9	
Durbin–Watson estatistikoa			2,05018	
Lehenengo ordenako autokorrelazio koefizientea			-0,0275288	

- 4) (1) zehaztapenaren bi estimazioen artean aukeratzen lagundu iezaiozu ikasleari. Bietako zein aukeratuko zenuke eta zergatik? Zehaztasunez arrazonatu zure erantzuna, estimatzaileen propietateetan eta 2) atalean egindako inferentzian oinarrituz.

- Ondoren ikasleak  $INBENTARIOAK_{t-1}$  aldagaia erduan sartzea pentsatu du eta ondoko ekuazioa estimatu du:

$$INBENTARIOAK_t = \beta_1 + \beta_2 SALMENTAK_t + \beta_3 time + \beta_4 INBENTARIOAK_{t-1} + u_t \quad t = 2, \dots, 42 \quad (2)$$

non  $u_t$  banaketa normala duen aldagai aleatorioa den. (2) ekuazioaren estimazioaren emaitzak ondo-koak dira:

KTA estimazioak 1951–1991 bitarteko 41 behaketak erabiliz

Aldagai dependentea: INBENTARIOAK

	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	-156,95	2750,01	-0,0571	0,9548
SALMENTAK	1,24389	0,0950961	13,0803	0,0000
time	320,931	265,446	1,2090	0,2343
INBENTARIOAK_1	0,193747	0,0602567	3,2154	0,0027
Hondar karratuen batura			1,72144e+09	
Erregresioaren desbiderapen tipikoa ( $\hat{\sigma}$ )			6820,94	
$\bar{R}^2$ zuzendua			0,999308	
$F(3, 37)$			19248,1	
Durbin–Watson estatistikoa			1,59811	
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea			0,172087	
BG(1)			1,285206	

- 5) Idatzi estimatutako ereduaren erregresoreen matrizea.
- 6) Perturbazioan lehen ordeneko prozesu autoerregresibo baten existentzia kontrastatu. Idatzi hipotesi hutsa eta alternatiboa, kontrasterako estatistikoa eta bere banaketa, elementu bakoitza **nondik lortzen den adieraziz**.

- 7) Ordezko aldagaien estimatzailea erabiliz estimatu beharko ote luke ikasleak (2) zehaztapena, *INBENTARIOAK*<sub>t-1</sub> aldagaiaren ordezko aldagai bezala *SALMENTAK*<sub>t-1</sub> aldagaia erabiltita? Arrazonatu zure erantzuna.
- 8) Zer esan dezakezu *SALMENTAK* aldagaiaren esanguratasunaz?
- 9) (1) eta (2) ekuazioetan kontsideratutako bi zehaztapenetatik zein aukeratuko zenuke zuk *INBENTARIOAK* aldagaiaren eboluzioa aztertzeko? Nola estimatuko zenuke aukeratutako zehaztapena?

## ARIKETA EL-2009. 2 (2009-Ekaina (jarraia))

Izan bedi hurrengo eredua:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad i = 1, \dots, 51 \quad (1)$$

non  $X_i$  ez-estokastikoa den,  $E(u_i) = 0 \forall i$ ,  $E(u_i^2) = \sigma^2 Z_i \forall i$  eta  $E(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j$

- a) Perturbazio bektorearen bariantza eta kobariantza matrizea idatzi.
- b) Idatzi dagokion perturbazio esferikodun eredu transformatuaren ekuazioa, perturbazio esferikoekin. Frogatu perturbazio berriak homozedastikoak direla.
- c) Osatu aurreko atalean erabilitako estimazio irizpidearen adierazpena:

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{51} \dots \dots (Y_i - \dots \dots)^2$$

- d) Estimatu ereduko koefizienteak ondoko lagin informazioarekin, estimatzaile efizientea erabiliz:

$$\begin{array}{lll} \sum(X_i^2/Z_i) = 196420,998 & \sum(X_i/Z_i) = 1608,337 & \sum(1/Z_i) = 34,738 \\ \sum(Y_i^2/Z_i) = 4168,919 & \sum(Y_i X_i/Z_i) = 28484,578 & \sum(Y_i/Z_i) = 236,139 \end{array}$$

## ARIKETA EL-2009. 3 (2009-Ekaina)

Aholkulari batek herrialde jakin batean etxebizitza alorrean egindako inbertsioa (INB) aztertu nahi du, interes tasaren (I) eta Barne Produktu Gordinaren (BPG) funtzioan. Horretarako 1963-1985 urte bitarteko hiruhileroko datuak dauzka. Estimazioaren emaitzak ondokoak dira:

$$\widehat{INB}_t = -5,3174 + 1,864 BPG_t - 0,890 I_t \quad (1)$$

(desb)            (3,128)            (0,469)            (0,295)

Enpresako analistak, hondarrak ikusita, perturbazioen bariantza laginaren hasieran amaieran baino txikiago den susmoa hartu du. Hori dela eta bi zehaztapen posible proposatu ditu:

$$\text{Bar}(u_t) = \delta t^2 \quad \delta > 0 \quad (2)$$

$$\text{Bar}(u_t) = \gamma_1 + \gamma_2 D_t \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0 \quad (3)$$

non  $t = 1, 2, 3 \dots$  eta  $D_t$  aldagai fiktizioak bat balioa hartzen duen 1963-1975 bitarteko behaketentzat eta zero gainontzekoentzat.

1. 1.a) Zer jasotzen dute (2) eta (3) ekuazioek? Bietako zeinek jasotzen du hobeto analistaren susmoa?
- 1.b) Osatu proposamen bakoitzari erlazioatutako perturbazioaren bariantza eta kobariantza matrizea, edozein  $t \neq s$   $E(u_t u_s) = 0$  izanik.

$$E(uu')_{(2)} = \Sigma_{(2)} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

$$E(uu')_{(3)} = \Sigma_{(3)} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Analistak perturbazioaren bariantza eta kobariantzen matrizearentzat bi zehaztapenetako bat hobetsi, estimazio metodo bat aukeratu eta ondoko emaitzak lortu ditu:

Eredua: KT. Ponderatuen estimazioak 1963:1–1985:4 behaketak erabiliz  
 Aldagai dependentea: INB  
 Ponderazio bezala erabilitako aldagaia:  $1/t^2$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	-9,3955	3,83947	-2,4471	0,0443
BPG	2,42845	0,511158	4,7509	0,0021
I	-1,0789	0,182560	-5,9103	0,0006

2. Zer estimazio irizpide erabili du analistak? Zergatik? Erabilitako ponderazioa egokia izan dadin, perturbazioaren gainean egin beharreko hipotesiak zehaztu. Frogatu zure baieztapenak.

3. Erabilitako estimatzailearen formulari dagozkion matrizeak osatu.

$$\hat{\beta} \dots = \left[ \dots \right]^{-1} \left[ \dots \right]$$

4. Bariantzarentzako zehaztapen egokia (3) ekuazioan jasotakoa izango balitz:

- 4.a) Zer eragin izango luke erakutsitako Karratu Txikien Ponderatuen estimatzailearen propietateetan? Frogatu zure baieztapenak.
- 4.b) Kasu horretan,  $\gamma_1$  eta  $\gamma_2$  parametroak ezezagunak izanda, nola estimatuko zenituzke ereduko koefizienteak? Zergatik?

## ARIKETA EL-2009. 4 (2009-Ekaina)

Ikasle batek New Yorken duela 150 urtetik lanean diharduen Fulton Fish Market merkatuko arrain eskariaren inguruko karrera amaierako proiektua egiten dihardu. Horretarako 1991ko otsailaren 2tik 1992ko maiatzaren 8rako ondoko aldagaien eguneroko behaketen datuez osatutako lagina dauka, 111 eguneko datuak hain zuzen ere, aldagi bakoitzeko:

- *lquan*: saldutako legatz kantitatea, libratan (logaritmoak)
- *lprice*: Legatzaren prezioa, librako (logaritmoak)
- *mon*: 1 astelehenetan, 0 bestela
- *tue*: 1 asteartetan, 0 bestela
- *wed*: 1 asteazkenetan, 0 bestela
- *thu*: 1 ostegunetan, 0 bestela
- *stormy*: 1 haize eta olatu handiak ibili baziren egun horretan, 0 bestela

Eskariaren ekuaziorako zehaztapena ondokoa da:

$$lquan_t = \beta_1 + \beta_2 lprice_t + \beta_3 mon_t + \beta_4 tue_t + \beta_5 wed_t + \beta_6 thu_t + u_t$$

eta KTA bidezko estimazioaren emaitzak segidan emandako hauek:

Eskariaren ekuazioa: KTA estimazioak

Aldagaia	Aldagai dependentea: lquan			
	Koefizientea	Desb. tipikoa	<i>t</i> estatistikoa	p-balioa
const	8,60689	0,143043	60,1698	0,0000
lprice	-0,562550	0,168213	-3,3443	0,0011
mon	0,0143165	0,202647	0,0706	0,9438
tue	-0,516242	0,197690	-2,6114	0,0103
wed	-0,555373	0,202319	-2,7450	0,0071
thu	0,0816213	0,197817	0,4126	0,6807
	Hondarren karratuen batura		47,1672	
	$R^2$		0,220486	

Prezioa eta kantitatea eskaintza eta eskariaren arteko orekan batera determinatzen direnez, ikasleak bere buruari galdetzen dio *lprice* aldagaia endogenoa izan daitekeen, eta ekuazioaren errorearekin korrelazionatua egon. Hori dela eta ondoko estimazioa egin du:

Eskariaren ekuazioa: KTA2E estimazioak

Aldagaia	Aldagai dependentea: lquan			
	Koefizientea	Desb. tipikoa	<i>t</i> estatistikoa	p-balioa
const	8,50591	0,166167	51,1890	0,0000
lprice	-1,1194	0,428645	-2,6115	0,0090
mon	-0,0254022	0,214774	-0,1183	0,9059
tue	-0,530769	0,208000	-2,5518	0,0107
wed	-0,566351	0,212755	-2,6620	0,0078
thu	0,109267	0,208787	0,5233	0,6007

1. Azaldu zehaztasunez erakutsitako KTA2E estimazioak nola lortu diren. Idatzi modu esplizituan estimatzailearen adierazpenean parte hartzen duen matrize bakoitza.
2. Idatzi eta azaldu bai KTA2E estimatzailea lortu ahal izateko eta bai hau tinkoa izateko baldintzak zeintzuk diren.
3. Kontrastatu ikaslearen susmoa. Idatzi hipotesi hutsa, alternatiboa, kontrasterako estatistikoa eta honek hipotesi hutsaren pean duen banaketa.
4. Kontrasteen lortutako emaitza ikusita, zer estimatzaile aukeratuko zenuke? Arrazoitu zure erantzuna estimatzaileen propietateak erabiliz.
5. Legatzaren prezioan ehuneko bateko aldakuntzak, merkatu horretako legatz eskariaren kantitatea ehuneko batean aldatzea dakarrela dioen hipotesi hutsa kontrastatu.

## ARIKETA EL-2009. 5 (2009-Ekaina)

Proba hau egin ahal izateko beharrezko datu fitxategia Gretleko lagindegia fitxategian aurkitu ahal izango duzu: Gujarati Table 12-9.gdt izango da, hain zuzen ere. 1950etik 1991rako ondoko aldagaien datuak daukazue bertan:

SALES = EEBBetako manufaktura-industriaren salmentak, milioi dolarretan.

INVENTS = EEBBetako manufaktura-industriaren inbentarioak, milioi dolarretan.

1. Estimatu KTA bidez hurrengo eredua eta osatu Gretlen lortutako emaitzak erabilita:

$$\widehat{INVENTS}_t = \underbrace{(\widehat{desb}(\hat{\beta}_{KTA}))}_{( )} + \underbrace{(\quad)}_{( )} SALES_t$$

$$R^2 = \quad HKB = \quad T =$$

$$DW = \quad \widehat{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) =$$

INVENTS eta SALESen arteko korrelazio koefizientea =

t urtea	1950	1951	1952
$\hat{u}_t$ hondarra			

2.  $u_t$ -k AR(p) edo MA(p) prozesu bat jarrai dezakeela kontsideratzen da,  $p$  bi ordenerainokoa izan daitekeelarik. Egin Breusch-Godfreyren kontrastea.

2.a Idatzi kontrastearen hipotesi hutsa eta alternatiboa.

2.b Aplikatu kontrastea eta osatu:

Lortutako erregresio laguntzailea:

$$\dots = \dots$$

$$R^2 =$$

Estatistikoa eta bere banaketa hipotesi hutsaren pean:

Estatistikoaren lagin balioa =

Aplikatu erabaki araua  $\alpha = \%5$ eko esangura mailarako

3. Estimatu berriro ere ereduko koefizienteak KTA bidez, baina estimatutako koefizienteen desbiderapen tipikoak autokorrelazio existentzia posiblearekiko sendoak izanik.

$$\widehat{INVENTS}_t = \underbrace{(\widehat{desb}(\dots)(\hat{\beta}_{KTA}))}_{( )} \dots \underbrace{(\quad)}_{( )} SALES_t$$

Zertarako balio dute horrela lortutako desbiderapen tipikoek? Noiz dira erabilgarriak? Azaldu zehaztasunez.



- Kontrastatu batezbesteko salmentak zero badira inbentariarik ez dagoelako, eta salmentak milioi dolar batean handitzeak inbentarioak 2.5 milioi dolarretan handituko lituzkeelako hipotesi bateratua. Idatzi hipotesi hutsa, alternatiboa, kontrasterako estatistikoa eta honen banaketa hipotesi hutsaren pean.
- Kontsideratu Cochran-Orcutt metodoa  $u_t$ -k AR(1) prozesu bat jarraitzen duen hipotesipean. Osatu lortutako lagin erregresio funtzioa,  $\rho$ ren estimazioa eta irizpide funtzioaren balio minimoa. Azaldu zehaztasunez estimazioak nola lortu diren.

$$\hat{\rho} = \text{HKBren balio minimoa} =$$

$$\left( \widehat{desb}(\hat{\beta}_{C-O}) \right) = \left( \dots \right) \left( \dots \right) \left( \dots \right) \left( \dots \right)$$

## ARIKETA EL-2009. 6 (2009-Ekaina)

Ikasleak aurreko zehaztapenaren estimazioan lortutako emaitzekin arduratuta, zehaztapen alternatiboekin probatzea erabakitzen du.

### • A ZEHAZTAPENA:

Ikasleak ereduari  $time = 1, 2, \dots, 42$  aldagaia barneratzea erabaki ostean ondoko ekuazioa estimatzen du:

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + \beta_3 time + u_t \quad t = 1, \dots, 42$$

eta ondoko estimazioak lortzen ditu:

### A ZEHAZTAPENAREN lehenbiziko estimazioa:

A ereduari: KTA estimazioak 1950–1991 bitarteko 42 behaketak erabilia

Aldagai dependentea: INVENTS

	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	433,951	2774,17	0,1564	0,8765
SALES	1,54340	0,0198097	77,9117	0,0000
time	158,805	269,107	0,5901	0,5585
Hondar karratuen batura			2,20257e+09	
$R^2$			0,999200	
$\bar{R}^2$ zuzendua			0,999159	
$F(2, 39)$			24356,1	
Durbin–Watson estatistikoa			1,37559	
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea			0,311486	

A eredia: KTA estimazioak 1950–1991 bitarteko 42 behaketak erabilia  
 Aldagai dependentea: INVENTS  
 Autokorrelazioarekiko desbiderapen tipiko sendoak

Aldagaia	Koefizientea	Desb. tipikoa	<i>t</i> estatistikoa	p-balioa
const	433,951	1143,38	0,3795	0,7064
SALES	1,54340	0,0136139	113,3700	0,0000
time	158,805	169,225	0,9384	0,3538
Hondar karratuen batura			2,20257e+09	
$R^2$			0,999200	
$\bar{R}^2$ zuzendua			0,999159	
$F(2, 39)$			18497,7	
Durbin–Watson estatistikoa			1,37559	
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea			0,311486	

1. Zergatik uste duzu ikasleak joera aldagaia (*time*) erregresore bezala barneratu duela eredian? Garrantzitsua (errelebantea) al da barneratzea? Zergatik uste duzu lortzen dela emaitza hori? Lortu eta erabil itzazu egoki deritzozun grafiko eta kontrasteak. Arrazonatu zure erantzuna.

#### A ZEHAZTAPENAREN bigarren estimazioa:

rho-ren kalkulu iteratiboa eginez...

ITERAZIOA	RHO	HKB
1	0,31149	1,9874e+009
2	0,31600	1,98735e+009
azkena	0,31616	

A eredia: Cochrane–Orcutt estimazioak 1951–1991 bitarteko 41 behaketak erabilia  
 Aldagai dependentea: INVENTS  
 $\hat{\rho} = 0,316161$

	Koefizientea	Desb. tipikoa	<i>t</i> estatistikoa	p-balioa
const	34,3714	4413,71	0,0078	0,9938
SALES	1,53759	0,0289188	53,1693	0,0000
time	229,763	410,642	0,5595	0,5791

estatistikoak:

Hondar karratuen batura	1,98735e+09
$R^2$	0,999261
$\bar{R}^2$ zuzendua	0,999222
$F(2, 38)$	12476,9
Durbin–Watson estatistikoa	2,05018
Lehen ordenako korrelazio koefizientea	-0,0275288

2. Lagundu ikasleari erakutsitako A zehaztapenaren estimazio emaitza desberdinen fidagarritasunaz erabakitzen. Arrazonatu zure erantzuna emandako informazioaren arabera.

- **B ZEHAZTAPENA:** Ikasleak denbora,  $time$ , eta  $INVENTS_{t-1}$  aldagaiak ereduari gehitzea pentsatuta ondoko ekuazioa estimatzen du:

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + \beta_3 time + \beta_4 INVENTS_{t-1} + u_t \quad t = 2, \dots, 42$$

hurrengo emaitzak lortuz:

- **B ZEHAZTAPENAREN estimazioa:**

B eredu: KTA estimazioak 1951–1991 bitarteko 41 behaketak erabilita

Aldagai dependentea: INVENTS

	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	-156,95	2750,01	-0,0571	0,9548
SALES	1,24389	0,0950961	13,0803	0,0000
time	320,931	265,446	1,2090	0,2343
INVENTS_1	0,193747	0,0602567	3,2154	0,0027
Hondar karratuen batura			1,72144e+09	
$R^2$			0,999360	
$\bar{R}^2$ zuzendua			0,999308	
$F(3, 37)$			19248,1	
Durbin–Watson estatistikoa			1,59811	
Lehen ordenako autokorrelazio koefizientea			0,172087	
BG(1)			1,285206	

3. Estimaturako ereduaren erregresore matrizea idatzi.

- **C ZEHAZTAPENA:** Azkenik ikasleak ondoko eredu hartzen du kontuan

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + \beta_3 SALES_{t-1} + u_t \quad t = 2, \dots, 42$$

4. Estimatu zehaztapen hau KTA bidez eta osatu Gretlekin lortutako emaitzak erabilita:

$$\widehat{INVENTS}_t = \underbrace{\quad}_{(\widehat{desb}(\hat{\beta}_{KTA}))} + \underbrace{\quad}_{(\quad)} SALES_t + \underbrace{\quad}_{(\quad)} SALES_{t-1}$$

$$R^2 = \quad \quad \quad DW = \quad \quad \quad T =$$

5. Kontrastatu  $SALES$  aldagaiaren esanguratasuna A, B edo C zehaztapenen artean egokiena erabiliz. Justifikatu kontrastea egiteko aukeratutako zehaztapena eta emaitzak, emandako eta lortutako informazio guztia erabiliz. Azaldu, bide batez, kontrasteko elementu guztiak.

## ARIKETA EL-2009. 7 (2009-Iraila)

Ikerlari batek 1948tik 1993rako EEBBetako ondoko nekazal indizeen (1982 oinarriarekin) urteroko datuak jasotzen dituen datu base bat dauka<sup>13</sup>:

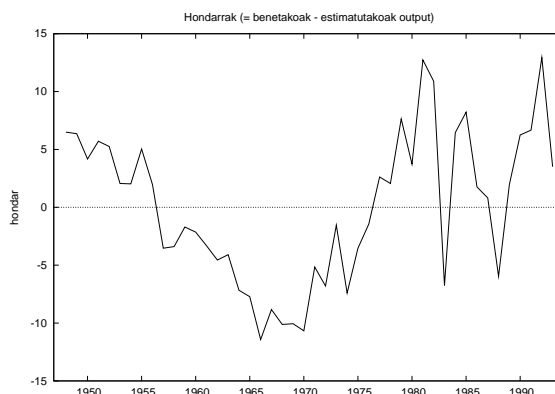
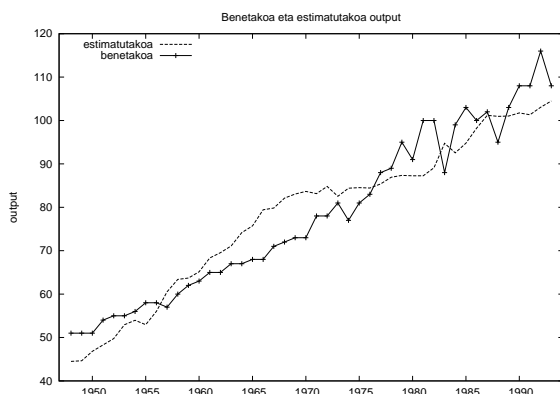
- *output*: nekazal ekoizpena (Ibiltartea 51 - 116)
- *labor*: nekazal eskulana (Ibiltartea 81 - 278)
- *land*: nekazal ekoizpenerako erabilitako azalera (Ibiltartea 89 - 102)
- *machines*: makinaria (iraunkorra) (Ibiltartea 38 - 102)

Nekazal ekoizpenaren funtzioa determinatu nahi du ikerlariak, horretarako ondoko erregresio linealeko eredua zehaztu du:

$$output_t = \beta_1 + \beta_2 labor_t + \beta_3 land_t + \beta_4 machines_t + u_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

erregresoreak ez-estokastikoak kontsideratzen direlarik. KTA estimazioaren bidez lortutako emaitzak dira segidan ematen direnak:

$$\begin{aligned} \widehat{output}_t &= 181.201 - 0.307 labor_t - 0.517 land_t - 0.096 machines_t \\ (\widehat{desb}) & \quad (40.194) \quad (0.038) \quad (0.564) \quad (0.169) \\ R^2 &= 0.884 \quad DW = 0.612 \quad HKB = 1885.08 \quad T = 46 \end{aligned}$$



1. Azaldu hondarrak nola kalkulatu diren eta grafikoek zertarako balio duten. Interpretatu bi grafikoak eta esan eredu perturbazioak oinarriko hipotesiren bat ez duela betetzen uste izateko ebidentziarik dagoen, zure erantzuna arrazonatuz.
2. Eskura daukazu informazioa erabilia, egin kontrasteren bat aurreko atalean antzemandako edozein arazotarako. Azaldu zehaztasunez parte hartzen duten elementu guztiak.

<sup>13</sup>Iturria: Ramanathan, Ramu (2002): *Introductory Econometrics with Applications*, data 9-5.gdt

3. (1) ereduko aldagai azaltzaileen banakako esanguratasun kontrastei dagokienez:
  - 3.a Daukagun informazioa izanda, fidagarria al da kontraste hauek egitea? Zergatik?
  - 3.b Ereduko koefizienteak KTA bidez estimatu beste aukerarik izango ez bagenu, posible izango al litzateke kontraste hauek egitea? Azaldu nola egingo zenukeen baiezko kasuan.

Lortutako emaitzak ikusita, ikerlariak eredu bera Cochran-Orcutt (CO) metodoa erabiliz estimatzea erabaki du. Hona hemen lortutako emaitzak:

Cochran-Orcutt estimazioak, 1949–1993 bitarteko 45 behaketak erabilita  
 Aldagai dependentea: output  
 $\hat{\rho} = 0.791585$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p balioa
const	54.3902	30.3065	1.7947	0.0801
labor	-0.404683	0.0649742	-6.2284	0.0000
land	1.07276	0.374129	2.8673	0.0065
machines	-0.287436	0.200003	-1.4372	0.1583

estatistikoak:

$R^2$	0.957590	$R^2$ zuzendua	0.954487
$F(3, 41)$	12.99460	p balioa ( $F$ -rena)	4.18e-06
$\hat{\rho}$	-0.184791	Durbin-Watson	2.339505

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}_{CO}) = \begin{pmatrix} 918.486 & 0.175515 & -9.59451 & -0.06293 \\ 0.175515 & 0.00422165 & -0.00963229 & 0.00270274 \\ -9.59451 & -0.00963229 & 0.139972 & -0.034905 \\ -0.06293 & 0.00270274 & -0.034905 & 0.0400013 \end{pmatrix}$$

4. Noiz erabiliko zenuke estimazio metodo hau? Egoki al deritzozu estimazio metodo hau erabiltzea dauzkagun baldintzekin? Erantzun arrazonatuz.
5. Deskribatu zehaztasunez (1) ereduko koefizienteen estimazioak nola lortuko zenituzkeen, aurreko ataleko metodoa erabilita.
6. Daukagun informazioa erabilia egin hurrengo kontrastea:  $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ . Idatzi hipotesi hutsa, alternatiboa, kontrasterako estatistikoa bere banaketarekin eta egin ezazu kontrastea. Nola interpretatuko zenuke emaitza?

Jarraian ikerlariak aldagai endogenoaren atzerapen bat gehitzen dio aldagai azaltzaile moduan hasierako ereduari, aurreko urteko nekazal ekoizpenaren eragina jaso asmotan:

$$output_t = \beta_1 + \beta_2 labor_t + \beta_3 land_t + \beta_4 machines_t + \beta_5 output_{t-1} + v_t \quad t = 2, \dots, T \quad (2)$$

Eredua KTA bidez estimatuta ondoko emaitzak lortzen dira:

KTA estimazioak, 1949–1993 bitarteko behaketak erabilia

Aldagai dependentea: output

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p balioa
const	-26.6869	33.4166	-0.7986	0.4292
labor	-0.0868185	0.0356710	-2.4339	0.0195
land	0.669440	0.364984	1.8342	0.0741
machines	-0.171581	0.101356	-1.6929	0.0983
output_1	0.853551	0.0979678	8.7126	0.0000
$R^2$	0.959224	$R^2$ zuzendua		0.955146
$F(4, 40)$	235.2394	p balioa ( $F$ -rena)		3.26e-27
$\hat{\rho}$	-0.299970	Durbinen $h$		-2.617899
$BG(1)$	6.199	p balioa ( $BG(1)$ -ena)		0.0128

7. Informazio hau erabilia, azaldu zehaztasunez ondoko kontrasterako estatistikoa egokia den ala ez aldagai endogenoaren atzerapena aldagai azaltzaile bezala erudian barneratzearen alde argudiatzeko.

$$\frac{\hat{\beta}_{5,KTA} - 0}{\widehat{desb}(\hat{\beta}_{5,KTA})} \xrightarrow{H_0,b} N(0, 1)$$

Modu alternatiboan, (2) ereduko koefizienteen ondoko estimazio tinkoa eta asintotikoki efizientea lortu da:

$$\begin{aligned} \underbrace{output_t - \hat{\rho} output_{t-1}}_{Q_t^*} &= -27,47 \underbrace{(1 - \hat{\rho})}_{X_t^*} - 0,058 \underbrace{(labor_t - \hat{\rho} labor_{t-1})}_{LB_t^*} \\ &+ 0,546 \underbrace{(land_t - \hat{\rho} land_{t-1})}_{LN_t^*} - 0,130 \underbrace{(machines_t - \hat{\rho} machines_{t-1})}_{MA_t^*} \\ &+ 0,925 \underbrace{(output_{t-1} - \hat{\rho} output_{t-2})}_{Q_{t-1}^*} + \hat{\epsilon}_t \end{aligned} \quad (3)$$

$R^2 = 0,976 \quad DW = 2,30$

non  $\epsilon_t$  zarata zuri bat den,  $\epsilon_t = v_t - \rho v_{t-1}$  izanik, eta  $v_t$  (2) ereduko perturbazioa izanik.

8. Osatu eta/edo burutu ondokoa::

8.a  $\epsilon_t \sim \dots\dots ( \quad , \quad )$

8.b Zein da erabili den estimazio metodoa?

8.c Idatzi erabilitako estimatzailearen adierazpen matritziala:

$$\begin{bmatrix} -27,47 \\ -0,058 \\ 0,546 \\ -0,130 \\ 0,925 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

8.d Zein da erabili den  $\rho$ -ren estimatzaile tinkoa? Deskribatu estimatutako  $\rho$  parametroaren tinkotasuna ziurtatzen duten elementu eta baldintza guztiak.

9. (3) ekuazioan datorren informazioa erabilia, azaldu zehaztasunez ondoko kontrasterako estatistikoa egokia den ala ez aldagai endogenoaren atzerapena aldagi azaltzaile bezala eredian barneratzearen alde argudiatzeko:

$$\frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\widehat{des}(\hat{\beta}_5)} \xrightarrow{H_{0,b}} N(0, 1)$$

Azkenik, barneratuko al zenuke aldagai hori eredian?

10. Daukazu informazio guztia kontuan hartuta, zein da (2) ekuazioko parametroentzako estimatzaile optimoa? Arrazoitu zure erantzuna zehaztasunez, alternatiba posible guztiekin erlazionatuz.

## ARIKETA EL-2009. 8 (2009-Irila)

Proba hau egin ahal izateko beharrezko datu fitxategia eKasiko web orrian aurki dezakezuen *earnings.gdt* fitxategian dago. Hezkuntza, lana, diru sarrerak eta bestelako ezaugarri pertsonalei buruzko 540 indibiduori dagokion informazioa jasotzen da bertan. Besteak beste, ondoko aldagaiak dauzkagu:

- *EARN*: Lan orduko diru sarrerak, dolarretan.
- *FEM*: 1 indibidua emakumezkoa bada, 0 gizonezkoa bada.
- *S*: Eskolatutako urte kopurua.
- *EX*: Lan esperientzia, urtetan.
- *H*: Asteko lan ordu kopurua.

1. Estimatu KTA bidez diru sarrerentzako ondoko eredua, Gretl-etik lortutako irteera erabilia hutsuneak betez:

$$EARN_i = \beta_1 + \beta_2 FEM_i + \beta_3 S_i + \beta_4 EX_i + \beta_5 H_i + u_i$$

$$\begin{aligned} \widehat{EARN}_i &= \dots FEM_i \dots S_i \\ (\widehat{des}(\hat{\beta}_{KTA})) & \left( \quad \right) \left( \quad \right) \left( \quad \right) \\ \dots & \left( \quad \right) EX_i \dots H_i \end{aligned} \tag{1}$$

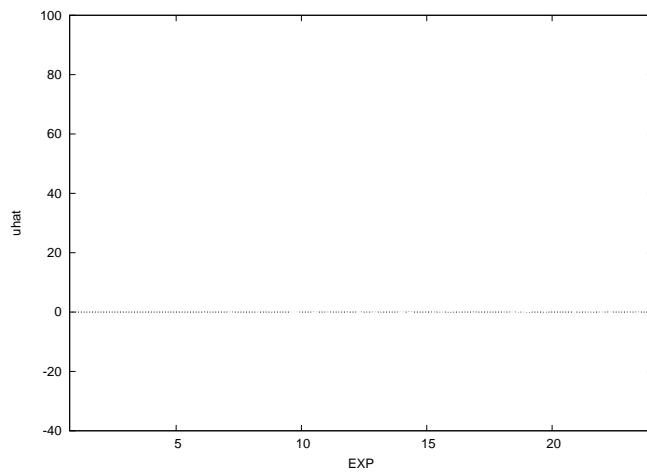
$$R^2 = \quad HKB = \quad \widehat{kob}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) =$$

	$EARN_i$	$\hat{u}_i$	$\widehat{EARN}_i$
$i = 1$			
$i = 2$			
$i = 3$			

2. Marraztu eta komentatu ondoko hondarren grafikoak:

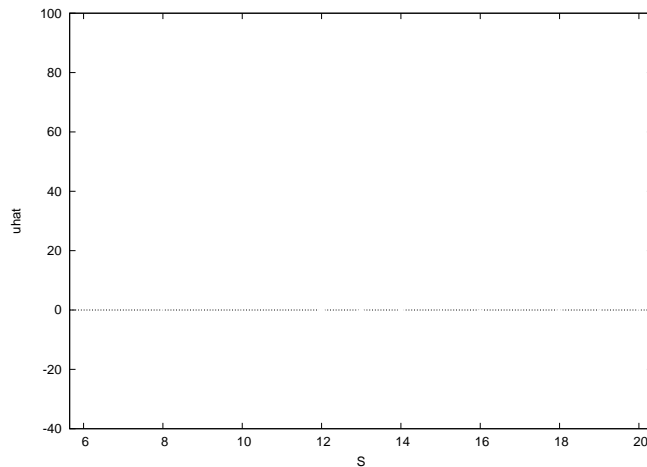
2.a Hondarrak ( $\hat{u}_i$ )  $EX_i$ -rekiko.

Iruzkina



2.b Hondarrak ( $\hat{u}_i$ )  $S_i$ -rekiko.

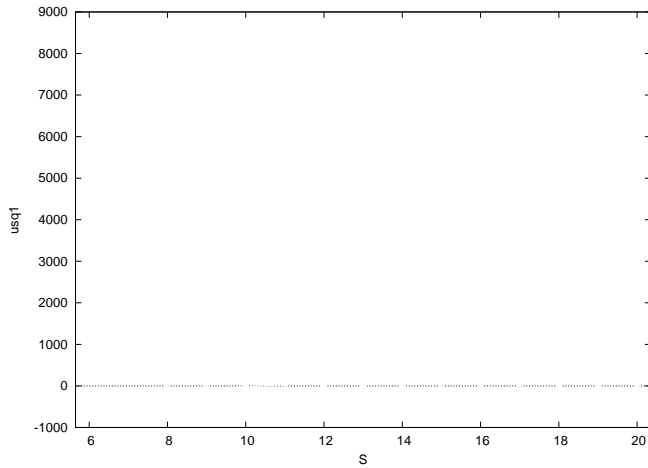
Iruzkina





2.c Hondar karratuak ( $\hat{u}_i^2$ )  $S_i$ -rekiko.

Iruzkina



3. Egin Goldfeld eta Quandt-en kontrastea,  $\widehat{Bar}(u_i) = f(S_i)$  den kasurako,  $f()$  funtzio gorakor bat dela kontuan hartuta. Horretarako, hautatu alde batetik, 13 baino hertsiki txikiagoak diren  $S_i$ -ren balioak, eta bestetik, 14 baino hertsiki handiagoak direnak, eta bete ondoko hutsuneak:

3.a Estimaturako erregresio laguntzailea ( $S_i < 13$ ):

$$HKB = \quad T = \quad K = \quad R^2 =$$

3.b Estimaturako erregresio laguntzailea ( $S_i > 14$ ):

$$HKB = \quad T = \quad K = \quad R^2 =$$

3.c Hipotesi hutsa eta alternatiboa:

3.d Kontrasterako estatistikoa eta honen banaketa hipotesi hutsaren pean:

3.e Estatistikoaren lagin balioa eta kontrastearen emaitza, esangura maila aipatuz:

3.f Komentatu kontrastearen emaitza eta arrazonatu (1)-en erabilitako estimatzailean dituen ondorioen inguruan.

4. Lortu planteaturako arazoarekiko desbiderapen tipiko sendoak dituen KTA estimazioa. Osatu White-ren estimatzailearen adierazpena:

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}_{KTA})_{\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

Osatu estimaturako ekuazioa:

$$\widehat{EARN}_i = \dots FEM_i \dots S_i$$

$$(\widehat{desb}(\hat{\beta}_{KTA})_{\dots\dots\dots}) \quad ( \quad ) \quad ( \quad ) \quad ( \quad )$$

$$\dots EX_i \dots H_i$$

$$( \quad ) \quad ( \quad )$$

5. Demagun  $E(u_i)^2 = aS_i^2$  dela,  $a > 0$  konstante bat izanik.

5.a Azaldu zehaztasunez nola kalkulatzen den (1) ereduko  $\beta_1, \dots, \beta_5$  koefizienteen estimatzaile efizientea.

5.b Osatu estimazio irizpidea:

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{\dots} \dots (EARN_i - \dots)^2$$

5.c Lortu 5.a ataleko estimatzaileari dagozkion (1) ereduko aldagaiei dagozkien ponderatutako datuak.

Aldagaiak						
$i = 1$						
$i = 2$						
$i = 540$						

5.d Estimatu proposatutako eredia aurreko irizpidea erabilita eta idatzi emaitzak:

$$\widehat{EARN}_i = \dots FEM_i \dots S_i$$

$$\text{(desb}(\hat{\beta}, \dots)) \quad ( \quad ) \quad ( \quad ) \quad ( \quad )$$

$$\dots EX_i \dots H_i$$

$$( \quad ) \quad ( \quad )$$

6. Estimaturako ondoko eredia emanda:

KT.Ponderatuen estimazioak 1-540 arteko 540 behaketak erabiliz

Aldagai dependentea: EARN

Ponderazio bezala erabilitako aldagaia:  $S^2$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p balioa
const	-13.3666	6.01825	-2.2210	0.0268
FEM	-8.47252	1.31630	-6.4366	0.0000
S	2.75142	0.256027	10.7466	0.0000
EX	0.399447	0.164085	2.4344	0.0152
H	-0.174695	0.0715119	-2.4429	0.0149
Hondar karratuen batura	21920498	Erregresioaren D.T.	202.4176	
$R^2$	0.244486	$F(4, 535)$	43.28177	

Egokia iruditzen al zaizu erabilitako ponderazioa? Zer esan dezakezu estimaturako koefizienteen fidagarritasunari buruz? Eta erakutsitako kontrasterako estatistikoei buruz? Arrazonatu.

7. Ondoko estimazio emaitzak lortu dira:

KT.Ponderatuen bidezko estimazioak, 1–540 arteko 540 behaketak erabilita  
Aldagai dependentea: EARN

Ponderazio bezala erabilitako aldagaia:  $\frac{1}{\hat{\sigma}_i^2}$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p balioa
const	-12.4753	3.91126	-3.1896	0.0015
FEM	-5.88712	1.05219	-5.5951	0.0000
S	2.16409	0.186623	11.5961	0.0000
EX	0.379889	0.109066	3.4831	0.0005
H	-0.0219005	0.0561073	-0.3903	0.6964

Non

$$\hat{\sigma}_i^2 = -\begin{pmatrix} 0.81621 \\ 1.36103 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.19953 \\ 0.693963 \end{pmatrix} \text{FEM}_i + \begin{pmatrix} 0.040627 \\ 0.252441 \end{pmatrix} \text{S}_i + \begin{pmatrix} 0.024420 \\ 0.0771288 \end{pmatrix} \text{EX}_i$$

Zein da erabilitako estimazio metodoa? Zein da 5) atalean erabilitako metodoarekiko desberdintasuna? Deskribatu pausuz pausu estimazioak lortzeko prozesua.

- (1) erdua estimatzeko erabilitako estimazioen artean aukeratu behar izango bazenu, zein aukeratu zenuke? Arrazonatu erantzuna.
- Kontrastatu lan esperientzia aldagaia diru sarrerak azaltzeko orduan ezinbestekoa delaren hipotesia. Gauza bera gertatzen al da astean lan egindako ordu kopuruarekin?

## ARIKETA EL-2010. 1 (2010-Ekaina (jarraia))

Ikasle batek EEBBetako gasolina kontsumoa zerk determinatzen duen aztertu nahi du. Horretarako ondoko aldagaien<sup>14</sup> 1960tik 1995erako urteroko datuak dauzka eskura:

- G: EEBBetako gasolina kontsumo totala, gastu totala bere prezioen indizeaz zatituta.
- Pg: Gasolina prezioaren indizea
- R: Per capita errenta eskuragarria
- Ps: Zerbitzuen kontsumo prezioen indize metatua

Pg, R eta Ps aldagaiak ez-estokastikoak direla kontsideratzen da. Ikasleak ondoko zehaztapena proposatzen du:

$$G_t = \beta_1 + \beta_2 P g_t + \beta_3 R_t + \beta_4 P s_t + \beta_5 G_{t-1} + u_t \quad t = 2, \dots, 36 \quad (1)$$

Aurreko erlazioaren KTA bidezko estimazioak ondoko emaitzak eman dizkigu:

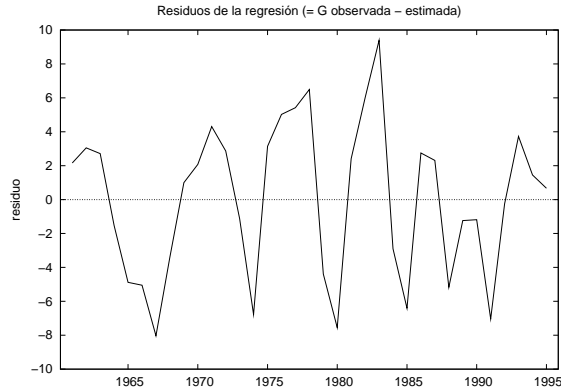
<sup>14</sup>Iturria: Greene, W. H. (1999): Análisis Económico, Prentice Hall ed. Gretl-eko Greene karpeta greene7-8.gdt fitxategia

KTA estimazioa 1961–1995 bitarteko (T=35) behaketak erabilita  
Aldagai dependentea: G

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t estatistikoa	p balioa
const	-74,0572	14,2697	-5,1898	0,0000
Pg	-10,4532	1,60320	-6,5202	0,0000
R	0,0288099	0,00417302	6,9039	0,0000
Ps	-13,6499	6,27697	-2,1746	0,0377
G.1	0,314807	0,0968464	3,2506	0,0028

Hondar Karratuen Batura	699,5137	$\hat{\rho}$	0,344683
$R^2$	0,991259	$R^2$ zuzendua	0,990093
$F(4, 30)$	850,5202	p balioa (F-rena)	2,11e-30
Durbin-Watson	0,8345	Breusch-Godfrey, BG(1)	4,34118

Gainera ondoko grafikoa ere badugu:



- Interpretatu erakutsitako grafikoa.
- Ereduko perturbazioak arazoren bat izan dezakeela uste al duzu? Burutu egoki deritzozun kontrastea/k elementu guztiak zehaztuz.
- Zergatik da ez-lineala erabilitako estimatzailea?
- Azaldu arrazoituz  $E(G_{t-1}u_t)$  zero den edo zeroren desberdina den.
- Zer esan dezakezu erabilitako estimatzailearen tinkotasunaren inguruan? Nolakoa da  $\text{plim } \hat{\beta}_{KTA}$ ?

Aurreko emaitzak aztertu ostean ikasleak (1) erdua metodo alternatibo bat erabiliz berrestimatzea erabaki du: Hauek dira lortu dituen emaitzak:

KT2E estimazioa, 1961–1995 bitarteko (T=35) behaketak erabiliz  
Aldagai dependentea: G  
Ordezko aldagaiak: const Pg Pg.1 R R.1 Ps Ps.1

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	-96,9409	17,3909	-5,5742	0,0000
Pg	-11,4022	1,75011	-6,5151	0,0000
R	0,0370230	0,00537234	6,8914	0,0000
Ps	-20,8719	7,21264	-2,8938	0,0038
G_1	0,112566	0,127079	0,8858	0,3757
$R^2$	0,989989	$R^2$ zuzendua		0,988654
$F(4, 30)$	740,4683	p-balioa ( $F$ -rena)		1,65e-29
$\hat{\rho}$	0,490485	Durbin-Watson		0,997536
		Hausman-en estatistikoa		6,0594

f) Zein estimazio metodo darabil ikasleak? Zer esan nahi du “Ordezko aldagaiak: const Pg Pg\_1 R R\_1 Ps Ps\_1” delakoak? Arrazoituz ordezko aldagaiak egokiak diren edo ez.

g) Nola lortu dira estimazioak?

Bestetik ondoko estimazioa lortu da:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{G_t - \hat{\rho} G_{t-1}}_{G_t^*} = & -87,41 \underbrace{(1 - \hat{\rho})}_{X_t^*} - \frac{12,51}{(2,227)} \underbrace{(Pg_t - \hat{\rho} Pg_{t-1})}_{Pg_t^*} + \frac{0,034}{(0,004)} \underbrace{(R_t - \hat{\rho} R_{t-1})}_{R_t^*} \\
 & - \frac{13,92}{(10,139)} \underbrace{(Ps_t - \hat{\rho} Ps_{t-1})}_{Ps_t^*} + \frac{0,175}{(0,103)} \underbrace{(G_{t-1} - \hat{\rho} G_{t-2})}_{G_{t-1}^*} + \hat{\epsilon}_t \quad (2)
 \end{aligned}$$

$R^2 = 0,968 \quad DW = 2,30$

non  $\epsilon_t$  zarata zuria den eta  $\epsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$ ,  $u_t$  (1) ereduko perturbazioak izanik.

h) Osatu eta/edo egin ondokoa:

h.1)  $\epsilon_t \sim \dots\dots ( \quad , \quad )$

h.2) Zein da (2)an erabilitako estimazio metodoa  $\beta$ ren estimatzailea tinkoa eta asintotikoki efizientea izan dadin? Arrazoituz zure erantzuna.

i) (2) ekuazioko informazioa erabilia, azaldu zehaztasunez ondoko kontrasterako estatistikoaren baliogarritasuna atzeratutako aldagai endogenoa aldagai azaltzaile moduan erudian barneratzearen alde argudiatzeko:

$$\frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\widehat{des}(\hat{\beta}_5)} \xrightarrow{H_0, b} N(0, 1)$$

Amaitzeko, barneratuko al zenuke aldagi hau erudian?

## ARIKETA EL-2010. 2 (2010-Ekaina (jarraia))

Irakasleen urteko soldataren (*SALARY*) eboluzioa aztertu nahi da doktore moduan duten aintzinasunaren (*YEARS*) funtzioan. Horretarako, 1995 urteko EEBBetako zazpi unibertsitatetako 222 irakasleri dagokion lagin<sup>15</sup> bat daukagu, eta ondoko ereduia zehaztu da:

$$SALARY_i = \beta_1 + \beta_2 YEARS_i + u_i \quad i = 1, \dots, 222 \quad (1)$$

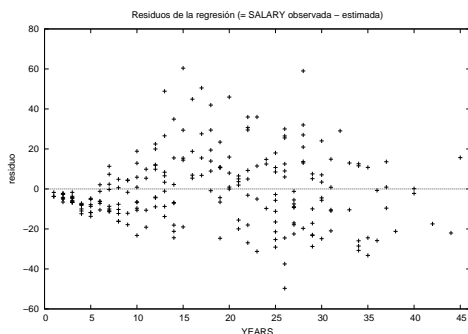
Ereduaren KTA bidezko lehen estimazio batek ondoko emaitzak eman ditu:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{SALARY}_i & = & 52,2375 + 1,4911 \text{ YEARS}_i \quad R^2 = 0,4393 \quad (2) \\ \widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO}) & & (2,3728) \quad (0,1135) \\ \widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})_{White} & & (1,6376) \quad (0,0958) \end{array}$$

$$\frac{\widehat{u}_i^2}{\widehat{u}'\widehat{u}} = 0,395 + 0,03335 \text{ YEARS}_i \quad KAB = 27,98 \quad (3)$$

KTA hondarren *YEARS* aldagaiarekiko grafikoarekin batera (1 Irudia).

Irudia 1: KTA hondarrak *YEARS* aldagaiarekiko



a) Kontrastatu modu egokian *YEARS* aldagaiaren esanguratasuna.

KTaren estimazio metodo alternatibo bat erabili da, zuzenak omen diren balizkoetan oinarrituta.

KT.Ponderatuen estimazioak 1–222 bitarteko behaketak erabilita  
Aldagai dependentea: *SALARY*  
Ponderazio moduan erabilitako aldagaia:  $1/YEARS^2$

	Koefizientea	Desb. tipikoa	<i>t</i> estatistikoa	p-balioa
const	47,5961	0,499967	95,1985	0,0000
YEARS	1,74686	0,0916906	19,0517	0,0000

<sup>15</sup>Iturria: Ramanathan, Ramu (2002): *Introductory Econometrics with Applications*, data3-11.gdt fitxategia.

Ponderatutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

HKB	261,1782	$R^2$	0,622621
$F(1, 220)$	362,9679	p-balioa ( $F$ -rena)	1,89e-48

- b) Arrazoizkoa iruditzen al zaizu erabilitako ponderazioa?
- c) Osatu ondoko matrizeak, analistak (1) ereduko perturbazioen jokaerari buruz egindako balizkoak kontuan hartuz.

$$E(u) = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad E(uu') = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

- d) Zer lortu nahi da estimazio metodo honekin? Lortutako estimatzailea zeren arabera izango da estimatzaile lineal eta alboragabeen artean efizientea dena? Arrazoitu zure erantzuna.

## ARIKETA EL-2010. 3 (2010-Ekaina/Iraila)

Vicente Ferrer fundazioak elikadurako gastuak gastu totalarekiko duen dependentzia aztertu nahi du Indiako 55 familiatan<sup>16</sup>. Horretarako analista bati eskatu dio azterketa egiteko. Analista honek ondoko aldagaien 1970eko behaketak erabil ditzake: *foodexp*, familiaren elikadura gastua errupiatan, eta *totexp*, familiaren gastu totala errupiatan. Analistak KTA bidez estimatu du hurrengo ekuazioa:

$$foodexp_i = \beta_1 + \beta_2 totexp_i + u_i \quad i = 1, \dots, 55 \quad (1)$$

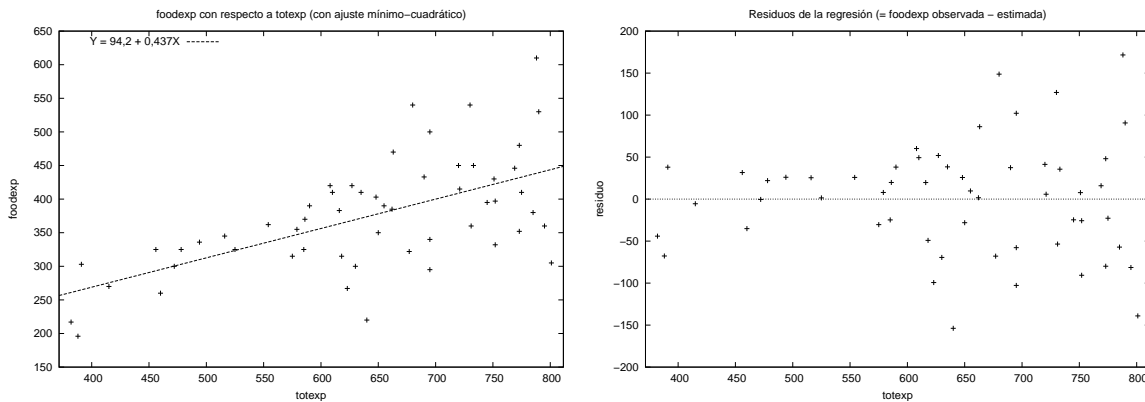
Honakoak dira estimazio honen emaitzak:

$$\widehat{foodexp_i} = 94,2088 + 0,4368 totexp_i \quad HKB = 236893,6 \quad R^2 = 0,3698 \quad (2)$$

$(\widehat{des}(\hat{\beta}_i)) \quad (50,8563) \quad (0,0783)$

Gainera lagineko datuak *totexp* aldagaiaren orden gorakorrekiko ordenatu ostean bi erregresio bereizi burutu dira (1)ekoa bezalakoak, lehenbiziko eta azkeneko 18 behaketak erabiliz. Ondoko hondar karratuen baturak lortu dira:  $HKB_1 = 16127,92$  eta  $HKB_2 = 103821,1$ .

<sup>16</sup>Iturria: Mukherjee, Ch.; White, H and M. Wuyts, (1998): *Econometrics and Data Analysis for Developing Countries*, Routledge, New York. Gretl, Gujarati karpeta, table2-8.gdt.



1. Interpretatu aurreko **bi** grafikoak. Ereduko perturbazioak oinarrizko hipotesi guztiak betetzen al ditu? Egokia deritzozun kontrastea edo kontrasteak burutu.
2. Baliogarria al da  $t$ -estatistikoa = 5,577 balioa  $totexp$  aldagaiaren esanguratasuna kontrastatzeko? Arrazoitu zure erantzuna.

Analistak estimazio alternatibo bat proposatu eta Gretl bidez lortutako ondoko emaitzak aurkeztu ditu:

KT. Ponderatuen estimazioak, 1–55 bitarteko 55 behaketak erabilita  
 Aldagai dependentea: foodexp  
 Ponderazio moduan erabilitako aldagaia: 1/totexp

	Koefizientea	Desb. tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
const	85,3217	43,7746	1,9491	0,0566
totexp	0,450716	0,0698476	6,4528	0,0000

Ponderatutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar karratuen batura	347,0674		
$R^2$	0,439979	$R^2$ zuzendua	0,429412
$F(1, 53)$	41,63923	p-balioa( $F$ )	3,42e-08

3. Idatzi dagokion eredu transformatua eta frogatu,  $Bar(u_i)$ -rentzako zehaztutako pisua adierazpen zuzenarekin bat datorrela suposatuz, perturbazioak esferikoak direla.
4. 4.a Arrazoizkoa iruditzen al zaizu erabilitako ponderazioa?  
 4.b Zer lortu nahi da estimazio metodo honekin? Zeren arabera izango da lortutako estimatzailea estimatzaile lineal eta alboragabeen artean efizientea dena? Arrazoitu zure erantzuna.

Analista ez dago pozik aurreko emaitzekin, eta aldagaien arteko erlazioa lineala izan beharrean esponentziala izateko aukera aztertu du, hau da,  $foodexp_i = \exp\{\alpha_1 + \alpha_2 totexp_i + v_i\}$  eta KTA bidez



estimatu du hurrengo eredua:

$$\text{Ln}(\text{foodexp})_i = \alpha_1 + \alpha_2 \text{totexp}_i + v_i \quad i = 1, \dots, 55 \quad (3)$$

Lortutako emaitzak hauek dira:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(\widehat{\text{foodexp}})_i &= 5,1080 + 0,0012 \text{totexp}_i & HKB = 1,7018 & R^2 = 0,3952 \\ (\widehat{\text{desb}}(\hat{\beta}_i)) & & (0,1363) & (0,0002) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{v}_i^2}{\widehat{v}'} &= -0,20739 + 0,00188 \text{totexp}_i \\ \frac{\widehat{v}'}{N} & & KTB = 115,31 & HKB = 112,7172 & R^2 = 0,022555 \end{aligned}$$

5. Aurkezten al du (3) ereduak (1) ereduak oinarritzko hipotesiak betetzeari dagokionean aurkezten zuen arazorik? Justifikatu zure erantzuna kontraste baten bidez. Azaldu zehaztasunez egin duzuna eta zergatik egin duzun.
6. Emaitza guztien gaineko hausnarketa bat egin ostean, analistak (3) ereduak KTA bidez estimatzea proposatu dio fundazioari. Zuzena al da egingako aukeraketa? Arrazoitu zure erantzuna.
7. Jasotzen al du  $\alpha_2$  koefizienteak (3) ereduak  $\beta_2$  koefizienteak (1) ereduak jasotzen zuten eragin bera? Zertan bereizten dira bi zehaztapenak?

## ARIKETA EL-2010. 4 (2010-Ekaina/Iraila)

Ondoko ereduak estimatu nahi da:

$$\text{Ln}(\text{wage})_i = \beta_1 + \beta_2 \text{exper}_i + v_i \quad v_i \sim NIB(0, \sigma_v^2) \quad E(\text{exper}_i v_i) = 0 \quad \forall i \quad (1)$$

non

*wage* orduko soldata, zentabotan, 1976an.  
*exper* lan esperientzia, 1976an (ez-estokastikoa).

Hala ere, esperientzia neurtzeko aldagai moduan *educ* aldagaia erabili da, indibiduo baten eskolatzeko urte kopurua 1976an. Aldagai hau behargarria da eta  $\text{educ}_i = \text{exper}_i + \epsilon_i$  erlazioa gordetzen du *exper* aldagaiekin, honen erroredun neurketatzat har dezakegularik.  $\epsilon_i$  zarata zuria izango da, *exper* eta  $v_i$  aldagaiekiko independentea. Eskura dagoen informazioan oinarrituta ondoko emaitzak lortu dira, 3010 indibiduoko lagin batekin Karatu Txikien Arrunten metodoa erabilia:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(\widehat{\text{wage}})_i &= 5,5708 + 0,0520 \text{educ}_i \\ (\widehat{\text{des}}(\hat{\beta}_k)) & & (0,0388) & (0,0028) \end{aligned} \quad (2)$$

1. Arrazoitu KTA estimatzailearen lagin finituetako propietateak eta propietate asintotikoak zeintzuk diren.

Gainera, *near* aldagai gehigarriaren gaineko informazioa ere badugu, *i* indibidua gutxienez 4 urtez unibertsitatetik hurbil bizi izan bazen 1 balioa hartzen duen aldagai fiktizioa. 3010 indibiduoko laginarentzat ondoko informazioa lortu da:

$$\begin{array}{lll} \sum near_i^2 = 2053 & \sum Ln(wage)_i educ_i = 251114,3746 & \sum educ_i^2 = 551079 \\ \sum educ_i = 39923 & \sum Ln(wage)_i near_i = 12957,3066 & \sum Ln(wage)_i^2 = 118616,3629 \\ \sum near_i = 2053 & \sum educ_i near_i = 27771 & \sum Ln(wage)_i = 18848,1140 \end{array}$$

2. Proposatu KTA estimatzailearen ordeko estimatzaile bat, tinkoa zein baldintzapean izango den arrazoituz. Eman bere banaketa asintotikoa.
3. Ebaluatu lagin gainean aurreko atalean proposatutako estimatzailea.

Ondoko matrizea 2. atalean proposatutako estimatzailearen bariantza eta kobariantza asintotikoen estimatzaile tinko bati dagokiona da. Osatu **teorikoki** hurrengo adierazpena:

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}) = \frac{932,7808}{3008} \begin{bmatrix} 0.3925 & -0.0296 \\ -0.0296 & 2.2291e - 03 \end{bmatrix}$$

4. Kontrastatu neurketa errorearen problemaren garrantzia, eta horren arabera azaldu arrazoituz proposatutako bi estimatzaileetatik zein aukeratuko zenukeen.
5. Kontrastatu modu egokian esperientzia aldagai esanguratsua ote den.

## ARIKETA EL-2010. 5 (2010-Ekaina/Iraila)

1960tik 1995erako ondoko aldagaien urteroko behaketak dauzkagu<sup>17</sup>:

- C*: EEBBetako gasolina kontsumo totala, gastu totala bere prezioen indizeaz zatituta.  
*Pg*: Gasolinaren prezioen indizeak.  
*R*: Per capita errenta eskuragarria.

*Pg* eta *R* aldagaiak ez-estokastikoak direla kontsideratzen da. **datosPO1.gdt** datu fitxategia **eKASIn** aurki daiteke.

Gasolinaren kontsumo funtzioaren ondoko zehaztapena proposatu da logaritmoak hartuta (L bidez denotatua):

$$LC_t = \beta_1 + \beta_2 LPg_t + \beta_3 LR_t + \beta_4 LC_{t-1} + u_t \quad t = 2, \dots, 36 \quad (1)$$

<sup>17</sup>Iturria: Greene, W. H. (1999): *Análisis Económico*, Prentice Hall ed. Gretl, Greene karpeta, greene7-8.gdt fitxategia.

1. Estimatu KTA bidez (1) eredu. Osatu:

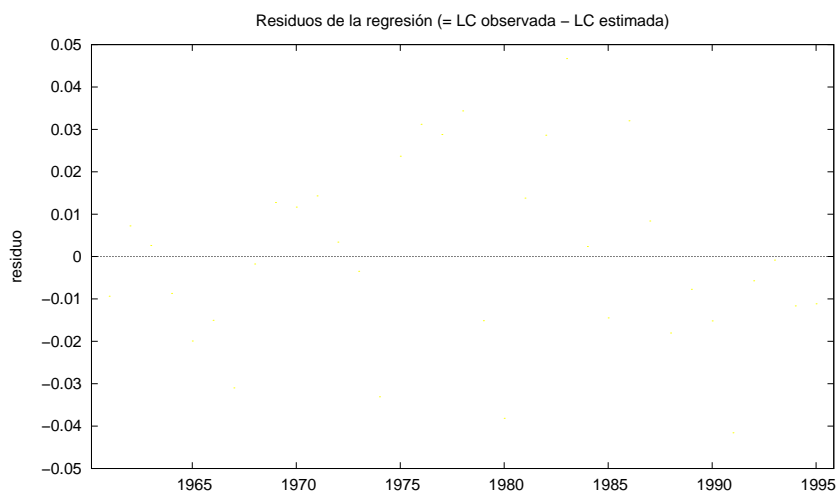
$$\widehat{LC}_t = (\widehat{desb}(\hat{\beta}_{KTA})) \left( \quad \right) \cdots \left( \quad \right) \cdots \left( \quad \right) \cdots \left( \quad \right)$$

2. Frogatu erabilitako estimatzailearen lagin finituetako propietateak. Testuinguru honetan, zer esan nahi du lagin finituak?

3. Marraztu eta komentatu hondarren grafikoa:

KTA hondarren grafikoa denborarekiko

Komentarioa:



4. Ereduko perturbazioak arazoren bat izan dezakeela uste al duzu? Egokia deritzozun kontrastea edo kontrasteak burutu bere elementu guztiak zehaztuz.

4.a Idatzi hipotesi hutsa, alternatiboa eta erabiliko duzun kontrasterako estatistikoa, honek hipotesi hutsaren pean duen banaketarekin batera. Argi azaldu estatistiko honen atal bakoitza nondik datorren.

4.b Fitxategiko datuei aplikatu eta osatu:

Lortutako erregresio laguntzailea:

..... = .....

Estatistikoaren lagin balioa =

( $\alpha = \%5$ ) esangura mailarako balio kritikoa =

Aplikatu erabaki araua:

5. Azaldu arrazoituz  $E(LC_{t-1}u_t)$  zeroren berdina den edo ez.

6. Nolakoa da plim  $\hat{\beta}_{KTA}$ ? Zer esan dezakezu erabilitako estimatzailearen tinkotasunaz? Eta bere banaketa asintotikoaz?

7. Berrestimatu (1) eredua ordezeko aldagaien metodoaren bidez, ordezeko aldagai moduan termino konstantea eta  $LR_t$  eta  $LPg_t$  aldagaiez gain,  $LPg_{t-1}$  eta  $LR_{t-1}$  aldagai atzeratuak ere erabiliz. Osatu:

$$\widehat{LC}_t = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{KT2E} \\ \dots \end{pmatrix}$$

- 7.a Nola konpontzen da beharrezko ordezeko aldagai kopurua baino gehiago edukitzearen arazoa? Azaldu gure kasuan egin dena.
- 7.b Osatu erabilitako ordezeko aldagaien matrizea eta erabilitako estimatzailearen formula:

$$Z = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\beta}_{\dots} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

- 7.c Erabilitako ordezeko aldagaiak egokiak direla uste al duzu? Arrazoitu zure erantzuna.
- 7.d Egokiak al dira erakutsitako desbiderapen tipikoak inferentzia baliagarria egiteko? Estimatzailer hau asintotikoki efizientea al da?
8. Hildreth-Lu-ren metodoa erabili ereduiko  $\beta$  parametroak estimatzeko. Osatu:

$$\widehat{LC}_t = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{HL} \\ \dots \end{pmatrix}$$

- 8.a Tinkoa eta asintotikoki efizientea al da estimatzaile hau? Cochrane-Orcutt-en estimatzaileak zuen arazo bera al dauka? Nola aldatuko zenuke azken hau? Arrazoitu zure erantzuna.
- 8.b Errenta elastizitatea unitate batekoa den hipotesia kontrastatu. Idatzi hipotesi hutsa, alternatiboa eta Gretl-ek erabiltzen duen kontrasterako estatistikoa erakutsitako emaitza lortzeko. Burutu kontrastea.

## ARIKETA EL-2010. 6 (2010-Ekaina/Iraila)

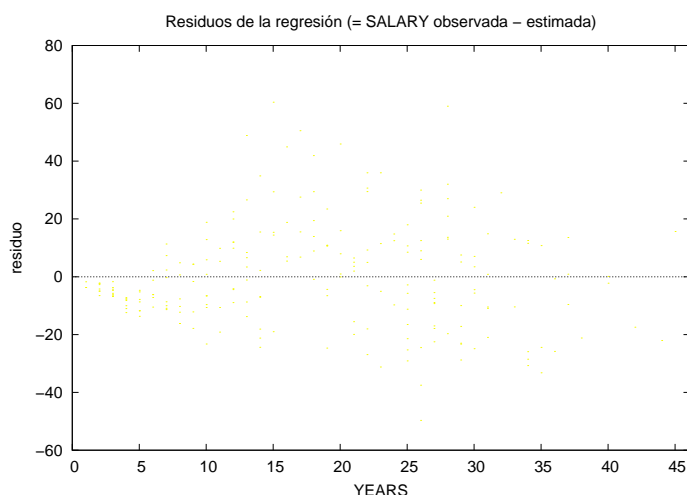
Irakasleen urteko soldataren eboluzioa aztertu nahi da, *SALARY*, doktore moduan duten aintzinatatunaren funtzioan, *YEARS*. Horretarako EEBB-etako zazpi unibertsitatetako 222 irakasleren 1995eko lagin bat daukagu. **datosPO2.gdt** izeneko datu fitxategia **eKASIn** aurki daiteke eta ondoko eredu zehaztu da<sup>18</sup>:

$$SALARY_i = \beta_1 + \beta_2 YEARS_i + u_i \quad i = 1, \dots, 222$$

1. Estimatu eredu KTA bidez. Marraztu eta komentatu *YEARS* aldagaiarekiko hondarren grafikoa:

Hondarrak *YEARS* aldagaiaren aurka

Komentarioa:



2. Kontrastatu modu egokian *YEARS* aldagaiaren esanguratasuna KTA estimatzailea erabilita. Aurrez egokia deritzozun azterketa egin eta idatzi kontrastea egiteko erabilitako emaitza guztiak, baita erabilitako estatistikoen adierazpena eta  $H_0$  hipotesipean duten banaketa ere.

$$\widehat{SALARY}_i = \underset{(\widehat{desb} \dots \dots \dots (\hat{\beta}_{KTA}))}{=} \quad ( \quad ) \quad \dots \quad ( \quad )$$

3. Perturbazioen bariantza *YEARS* aldagaiaren funtzioa den hipotesipean, honen modelizazio eta estimazio bat eskatuko lituzkeen, eta efizientzia asintotikoa lortzeko balioko ligukeen KTAren estimazio metodo alternatibo bat erabili. Idatzi hurrengo emaitzak:

3.a Proposatutako forma funtzionala  $Bar(u_i) = \dots \dots \dots$

<sup>18</sup>Iturria: Ramanathan, Ramu (2002): *Introductory Econometrics with Applications*, data3-11.gdt fitxategia.

3.b

Estimazio irizpidea:.....  $\sum_{i=1}^n (Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^*)^2$

$Y_i^* = \dots\dots\dots$ ;       $X_{1i}^* = \dots\dots\dots$ ;

$X_{2i}^* = \dots\dots\dots$

$$\hat{\beta} \dots = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

3.c Erregresio laguntzailea:

$\hat{\sigma}_i^2 = \dots\dots\dots$

3.d Lortutako lagin erregresio funtzioa:

$\widehat{SALARY}_i = (\widehat{\beta_{KTZE}}) ( \quad ) \dots ( \quad )$

## ARIKETA 2014. 1 (2014-Maiatza)

GKE bateko ikertzaile talde batek munduko lurraren temperaturaren beroketa efektuan eragiten duten faktoreak aztertu nahi ditu. Horretarako, honako eredu hau proposatu dute:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \tag{1}$$

non

- $Y_t$ :  $t$  momentuan leku konkretu batean dagoen tenperatura.
- $X_{1t}$ :  $t$  momentuko eguzki-mantxa kopurua (ez estokastikoa).
- $X_{2t}$ :  $t$  momentuan atmosferara igorritako  $CO_2$ ren indizea (ez estokastikoa).

Hileroko 100 behaketa erabiliz, eredu KTA bidez estimatu da, honako emaitza hauek lortuz <sup>19</sup>:

$$\hat{Y}_t = 10.97 + 0.41 X_{1t} + 0.03 X_{2t} \quad (2)$$

(1.11)      (0.04)      (0.01)

(desbiderapen tipikoak parentesi artean)

$$T = 100 \quad R^2 = 0.253 \quad \sum_{t=1}^{100} \hat{u}_t^2 = 34.20 \quad \sum_{t=2}^{100} \hat{u}_t^2 = 33.32 \quad \sum_{t=2}^{100} \hat{u}_{t-1}^2 = 32.87$$

$$\sum_{t=2}^{100} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 24.20 \quad \sum_{t=2}^{100} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 4.23$$

- $X_{1t}$  and  $X_{2t}$  aldagaiak banakako esanguratsuak dira beroketa efektua azaltzeko?
- $u_t$  perturbazioek oinarritzko hipotesi guztiak betetzen dituztela uste duzu? Egin ezazu kontraste bat.
- Aurreko ataleko zure erantzunean oinarrituz, komenta itzazu a) ataleko zure erantzunaren baliozkotasuna eta (1) ereduko KTA estimatzailearen propietateak.

Ikertzaileetako batek uste du tenperatura aldagaiak denborarekiko menpekotasunen bat izan dezakeela eta honako eredu dinamiko hau proposatu du:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 Y_{t-1} + v_t \quad (3)$$

Eredua KTA bidez estimatuz honako emaitza hauek lortu dira:

$$\hat{Y}_t = 8.97 + 0.36 X_{1t} + 0.14 X_{2t} + 0.37 Y_{t-1} \quad (4)$$

(2.11)      (0.11)      (0.12)      (0.04)

(desbiderapen tipikoak parentesi artean)

$$T = 99 \quad R^2 = 0.503 \quad DW = 2.03$$

eta erregresio laguntzaile hau:

$$\hat{v}_t = 0.004 + 0.001 X_{1t} - 0.012 X_{2t} + 0.32 Y_{t-1} + 0.055 \hat{v}_{t-1} + \hat{\epsilon}_t \quad (5)$$

$$R^2 = 0.022 \quad KAB = 0.003 \quad DW = 1.97$$

<sup>19</sup>Gezurrezko emaitzak, ez dira datu errealetan oinarritzen.

- d) (3) ereduaren perturbazioen oinarriko hipotesiak betetzen dira? Zer esan dezakezu honi buruz? Zure erantzuna zehaztasun osoz azal ezazu.
- e) Estimazio berri hau kontuan harturik, a) and c) ataletako zure erantzunak aldatuko al zenituzke? Zehaztasunez azal ezazu.

## ARIKETA 2014. 2 (2014-Maiatza)

Gizabanakoen soldatan eragiten duten faktoreak aztertzeko honako eredu hau proposatu da:

$$lw_i = \beta_0 + \beta_1 Edu_i + \beta_2 age_i + u_i \quad (1)$$

non

- $lw_i$ :  $i$  indibiduoaren orduko soldataren (zentimotan) **logaritmoa**,
- $Edu_i$ :  $i$  indibiduoaren hezkuntza urteak,
- $age_i$ :  $i$  indibiduoaren adina.

1976. urtean bildutako 3010 indibiduoaren datuak erabiliz eredu KTA bidez estimatu da, honako emaitza hauek lortuz:

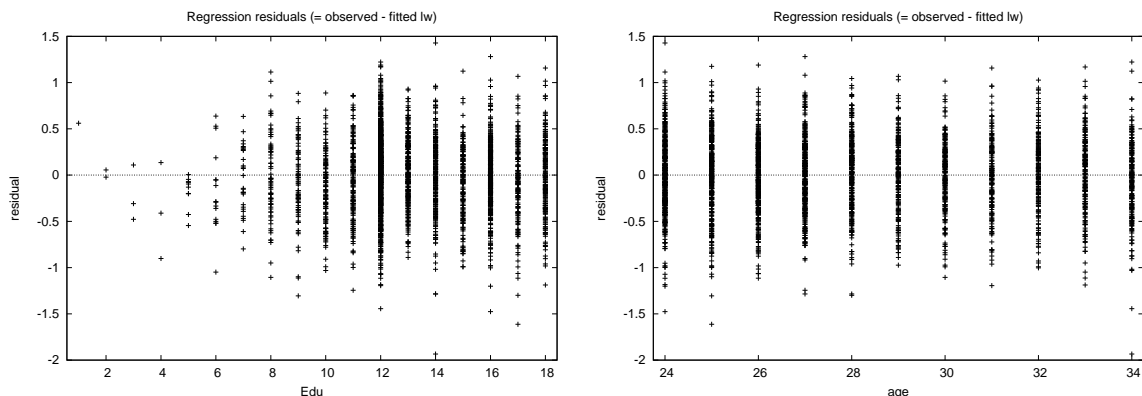
$$\widehat{lw}_i = 4.422 + 0.052 Edu_i + 0.041 age_i$$

(0.076)
(0.003)
(0.002)

$$T = 3010 \quad R^2 = 0.1808 \quad \hat{\sigma} = 0.40169$$

(desbiderapen tipikoak parentesi artean)

KTA hondarren,  $\hat{u}_i$ , adierazpen grafikoak Edu eta age aldagaiekiko honako hauek dira:





Honako erregresio laguntzaile hau ere KTA bidez estimatu da:

$$\frac{\hat{u}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = 1.072 - 0.011 \text{ Edu}_i + 0.002 \text{ age}_i + \hat{w}_i$$

(0.289)
(0.010)
(0.009)

$$T = 3010 \quad KAB = 2.606 \quad \hat{\sigma}^2 = \sum \hat{u}_i^2 / 3010$$

- a) Perturbazioen oinarrizko hipotesiren bat betetzen ez delaren ebidentziarik aurkitu al duzu? Erabili ezazu emandako informazio gutzia, baita grafikoak eta erregresio laguntzailea ere.
- b) Interpreta ezazu  $\hat{\beta}_1 = 0.052$ . a) ataleko zure erantzuna kontuan hartuz, zeintzuk dira  $\hat{\beta}_1$ ren propietateak, *Edu* eta *age* ez estokastikoak direla kontsideratuz?
- c) Beste ikertzaile batek uste du *Edu<sub>i</sub>* aldagaiak ez duela guztiz adierazten *i* indibiduoaren hezkuntza, baina benetako hezkuntza mailaren, *ed<sub>i</sub>*, hurbilketa bat dela, non  $Edu_i = ed_i + \varepsilon_i$  den eta neurketa errorea,  $\varepsilon_i$  eta *ed<sub>i</sub>* beraien artean independenteak diren. Soldatan eragiten duen faktorea *ed* baldin bada, zeintzuk dira (1) ereduko koefizienteen KTA estimatzailearen propietateak? Zehaztasunez azal ezazu.
- d) Ikertzaile honek eredia estimatzen du *Edu<sub>i</sub>*ren ordezeko aldagai gisa *Edu<sub>f</sub><sub>i</sub>* (*i* indibiduoaren aitaren hezkuntza urteak) eta *Edum<sub>i</sub>* (*i* indibiduoaren amaren hezkuntza urteak) erabiliz. Honako emaitzak lortu ditu:

$$\hat{\beta}_{OA} = \begin{pmatrix} 4.012 \\ 0.077 \\ 0.043 \end{pmatrix}, \quad \widehat{Bar}(\hat{\beta}_{OA}) = \begin{pmatrix} 0.01321 & 0.00852 & 0.00745 \\ & 0.00004 & 0.00003 \\ & & 0.00001 \end{pmatrix}$$

Zehaztasun osoz azal ezazu estimazio hauek nola lortu diren.

- e) Estimatzailer honen propietateak azal itzazu, propietate hauek betetzeko beharrezkoak diren balizkoak zeintzuk diren argi adieraziz.
- f) Egin ezazu kontraste bat ikertzaileak hezkuntza faktoreari buruz zuen susmoa egiazkoa den edo ez ikusteko.
- g) Aurreko galderetan emandako erantzun guztiak kontuan hartuz, kontrasta ezazu hezkuntza aldagaiak soldatan efektu positibo bat duen.

## ARIKETA 2014. 3 (2014-Ekaina)

Ikertzaile batek aztertu nahi du ekonomiaren globalizazio mailak langabezia ( $Y_t$ ) duen efektua. Globalizazio mailaren adierazle gisa euro/dolar kanbio-tasan oinarritzen den indikatzaile bat erabiltzen du,  $X_t$ , zein ez-estokastikoa dela kontsideratzen den.  $X$  eta  $Y$  hileroko datuak dira.

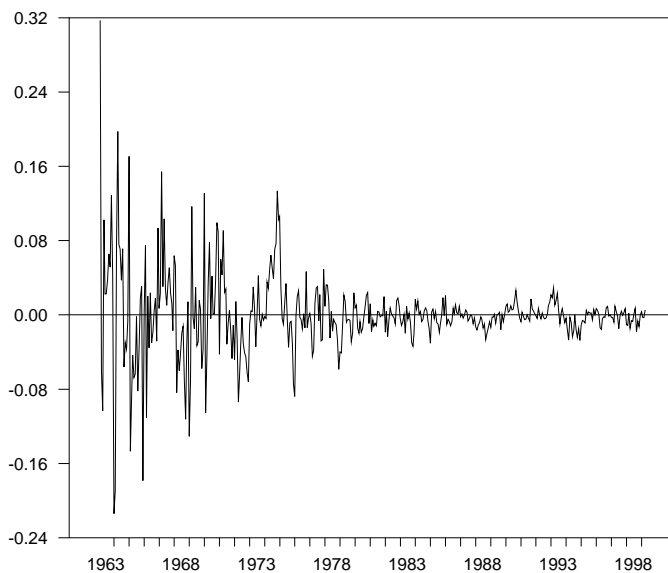
KTA bidezko estimazioak honako hauek dira:

$$\widehat{Y}_t = 0,0004 + 0,064 X_t \quad (1)$$

$(\widehat{desb}) \quad (0,002) \quad (0,066)$

$$R^2 = 0,002 \quad T = 435 \quad HKB = 0,820 \quad DW = 1,425$$

Irudia 1: KTA hondarrak



- a) Azter ezazu hondarren grafikoa. (1 Irudia)
- b) Egin ezazu kanbio-tasaren adierazlearen banakako esanguratasun kontrastea.
- c) Ondoren, ikertzaileak honako erregresio hauek egin ditu:

1962tik 1975era

$$\widehat{Y}_t = 0,005 - 0,102 X_t \quad (2)$$

$(\widehat{desb}) \quad (0,006) \quad (0,362)$

$$R^2 = 0,0005 \quad T_1 = 155 \quad HKB = 0,753 \quad DW = 1,441$$

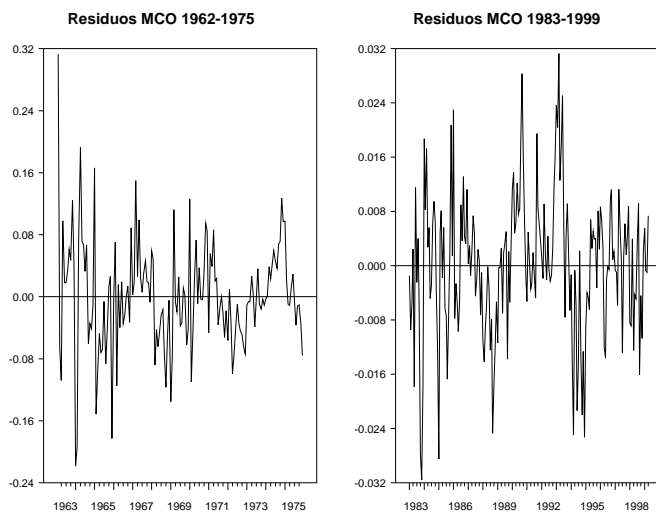
1983tik 1999ra

$$\widehat{Y}_t = -0,002 + 0,067 X_t \quad (3)$$

$(\widehat{desb}) \quad (0,0007) \quad (0,020)$

$$R^2 = 0,055 \quad T_2 = 196 \quad HKB = 0,021 \quad DW = 0,997$$

## Irudia 2: KTA hondarrak: (2) eta (3) ereduak



Zer ondorioztatuko zenuke (2) eta (3) ereduetako hondarren grafikoa ikusirik, 1 Irudiko lagin osoaren hondarrekin konparatuz? Kontrasta ezazu lagin osoan heterozedastizitaterik dagoen, kontrastearen elementu guztiak argi zehaztuz.

- d) (1) ereduan erabilitako KTA estimazioa egokia dela uste duzu? Eta b) ataleko kontrastea?
- e) **Bigarren azpilaginean: 1983-1999 denboraldian** autokorrelaziorik dagoen kontrasta ezazu. Zehaztasunez adieraz itzazu kontrastearen elementu guztiak.
- f) Ondoren, **1983-1999 denboraldirako** (196 behaketa), eredu berriz KTA bidez estimatzen da  $Y_{t-1}$  erregresore bezala sartuz.  $\hat{u}_t$  hondarrekin (5) erregresio laguntzailea lortu da.

$$\hat{Y}_t = -0,0009 + 0,047 X_t + 0,480 Y_{t-1} \quad R^2 = 0,281 \quad (4)$$

$(\widehat{desb})$       (0,0007)      (0,018)      (0,061)

$$\hat{u}_t = 0,0002 - 0,152 \hat{u}_{t-1} - 0,002 X_t + 0,116 Y_{t-1} \quad R^2 = 0,006 \quad (5)$$

$(\widehat{desb})$       (0,0007)      (0,136)      (0,018)      (0,117)

Konpara itzazu (3) eta (4) ereduak eta komenta itzazu bi ereduetako estimatzaileen propietateak. Egin itzazu beharrezkoak diren kontrasteak.

## ARIKETA 2014. 4 (2014-Ekaina)

Demagun honako eredu hau:

$$Y_t = \beta X_t + u_t \quad (1)$$

non  $u_t \sim \text{ibb}(0, \sigma_u^2)$  eta  $X_t$  aldagai ez estokastiko bat den baina **ez da behagarria**.

$Z_{1t}$  aldagaiaren behaketak ditugu, honako hau betetzen delarik:

$$Z_{1t} = X_t + \varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{1t} \sim \text{ibb}(0, \sigma_1^2) \quad (2)$$

non  $E(\varepsilon_{1t}u_t) = 0 \quad \forall t$  den.

a) (1) eredutik abiatuz, idatz ezazu  $Y_t$  eta  $Z_{1t}$ ren funtzioa den eredu estimagarri bat.

b) **Froga ezazu** honako eredu honetan,

$$Y_t = \beta Z_{1t} + v_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3)$$

$\beta$ ren KTA estimatzailea ez dela tinkoa.

c) Demagun  $Z_{1t}$ ekin erlazionatuta bi aldagai exogeno ditugula,  $Z_{2t}$  y  $Z_{3t}$ . Informazio hau kontuan harturik, nola estimatuko zenuke  $\beta$  estimazio tinko bat lortzeko? Nola estimatuko zenuke (3) ereduko perturbazioen bariantza?

d) (3) ereduko parametroaren estimazioan honako emaitza hauek lortu dira:

$$\hat{\beta}_{KTA} = 0,052 \quad \hat{\beta}_{OA} = 0,077 \quad \widehat{Bar}(\hat{\beta}_{KTA}) = 0,000009 \quad \widehat{Bar}(\hat{\beta}_{OA}) = 0,00004$$

Kontrasta ezazu neurketa errorea behar bezain handia den. Kontrastean lortutako emaitza kontuan hartuz, zein estimazio metodo da fidagarriagoa?

## ARIKETA 2015. 1 (2015-Maiatza)

Osasun Organizazio Mundiala kezkatuta dago munduko bizi esperantzan desberdintasun handiak daudelako eta ikertu nahi du desberdintasun hauen arrazoiak. Lehen pausu baten, honako eredua proposatzen du:

$$liffeex_i = \beta_0 + \beta_1 PopDoc_i + \beta_2 GDP_i + u_i \quad (1)$$

non

- *Liffeex*: jaiotzean daukaten bizi esperantza.
- *PopDoc*: populazioa mediku bakoitzeko (suposatu ez dela estokastikoa).
- *GDP*: per capita Barne Produktu Gordin erreala.

Eredua KTA bidez estimatzen da 119 herrialdeko lagin batekin, honako emaitzak lortzen direlarik:

$$\widehat{\text{lifex}}_i = 60.598 - 0.00030 \text{PopDoc}_i + 0.0010 \text{GDP}_i$$

(0.978)
(0.00004)
(0.00009)

$$N = 119 \quad R^2 = 0.706 \quad F(2, 116) = 139.59 \quad \hat{\sigma} = 5.7528$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Ikertzaileak ere uste du *GDP* aldagaia perturbazioarekin korrelatuta egon daitekeela. Horrela, eredua OA bidez estimatzen du, *GDP* aldagaiaren ordezkari bezala *TV* aldagaia (100 pertsonako telebista kopurua) erabiliz,

$$\widehat{\text{lifex}}_i = 59.4883 - 0.00027 \text{PopDoc}_i + 0.00113 \text{GDP}_i$$

(1.1238)
(0.00004)
(0.00012)

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

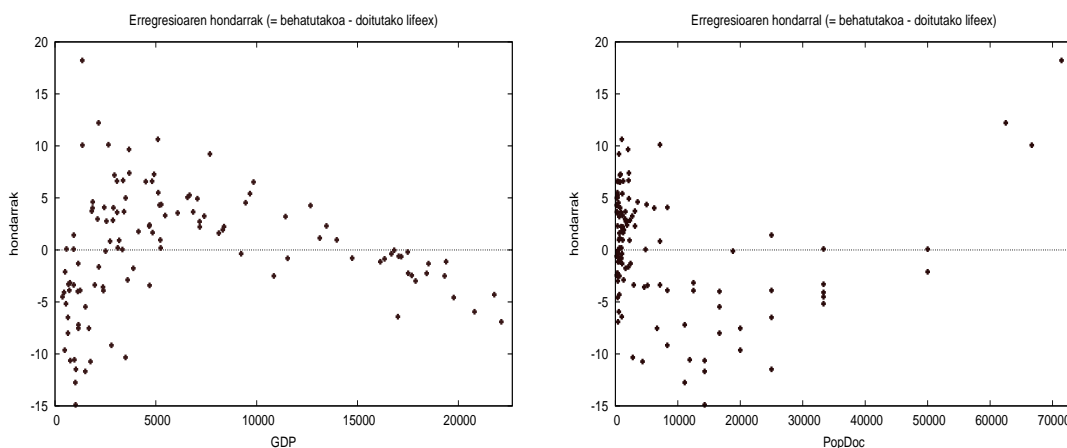
- a) Zeintzuk dira (1) Ereduko KTA estimatzailearen propietateak  $u_i \sim \text{ibb}(0, \sigma_u^2)$  bada? Justifika ezazu zure erantzuna kontraste fomal baten oinarrituz.
- b) Estimatuak koefizienteek badituzte esperotako ikurrak?

Suposatu, hemendik aurrera, *GDP* aldagai exogeno (ez estokastiko) bat dela. KTA hondarretan oinarritutako honako grafikoak ditugu:

Irudia 1: KTA hondarrak

(a) Per capita GDP

(b) PopDoc



- c) KTA hondarren grafikoetan oinarrituz, uste duzu  $u_i$  perturbazioek oinarritzko hipotesiak betetzen dituztela?

- d) Ikertzaileak erabakitzen du ere honako estimazioa egitea: alde batetik, eredia estimatu KTA bidez GDP txikiena duten 43 behaketekin eta bestetik, eredia estimatu KTA bidez GDP handienekin duten 43 behaketekin, honakoa lortuz:

**Lagina:** 43 herrialde GDP txikienekin

$$\widehat{\text{lifeex}}_i = 44.400 - 0.00006 \text{PopDoc}_i + 0.0076 \text{GDP}_i$$

(2.214)      (0.00004)      (0.0012)

$$N = 43 \quad R^2 = 0.573 \quad HKB = 979.859 \quad \hat{\sigma} = 4.9494$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

**Lagina:** 43 herrialde GDP handienekin

$$\widehat{\text{lifeex}}_i = 70.399 - 0.0013 \text{PopDoc}_i + 0.00036 \text{GDP}_i$$

(1.245)      (0.0007)      (0.00006)

$$N = 43 \quad R^2 = 0.537 \quad HKB = 167.218 \quad \hat{\sigma} = 2.045$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Informazio honekin, (1) Ereduko perturbazioaren oinarritzko hipotesien betetzeari buruzko zer-bait gehitu diezaiokezu c) ataleko erantzunari?

- e) KTA bidez lortatuko emaitzekin ez dagoenez konforme, (1) Ereduko parametroak estimatzeko, ikertzaileak proposatzen du KTA aplikatzea eraldatutako eredian. Eraldatutako eredia lortuko da aldagai dependentea eta aldagai azaltzaileak GDP aldagaiaren erro karratuagatik biderkatuz, honako emaitzak lortuz:

KTZ: KTP, 1–119 behaketak erabiliz

Aldagai dependentea: lifeex

Ponderazio aldagaia: GDP

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	<i>t</i> -ratioa	p-balioa
konst	65.0973	0.806408	80.7250	0.0000
PopDoc	-0.000366400	5.50281e-005	-6.6584	0.0000
GDP	0.000640313	5.56696e-005	11.5020	0.0000

Ponderatutako datuetan oinarritutako estatistikokoak:

HKB	10079013	Erregresioaren Des. Tipikoa	294.7678
$R^2$	0.698268	Zuzendutako $R^2$	0.693066
$F(2, 116)$	134.2236	P-balioa( $F$ )	6.58e-31

Azal ezazu zehaztasunez proposatutako estimazio metodoa. Noiz izango da estimazio metodo hau KTA bidez lortutakoa baino hobea? Zergatik?

- f) Honako erregresioa ere estimatzen da KTA hondarrekin eraldatutako eredian ( $\hat{u}_i^*$  bezala adierazita):

$$\widehat{e}_i^2 = 0,831 + 0,00003 \text{PopDoc}_i + 0,0000006 \text{GDP}_i$$

(0,236)      (0,00001)      (0,00002)

$$N = 119 \quad R^2 = 0,0418 \quad HKB = 224,17 \quad \hat{\sigma} = 1,3901$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

non  $e_i^2 = \hat{u}_i^{*2} / \hat{\sigma}^2$  eta  $\hat{\sigma}^2 = \sum \hat{u}_i^{*2} / 119$ . Kontuan izanda ikerketaren helburu nagusienetariko bat per capita mediku kopuruak bizi esperantzaz zer eragina daukan aztertzea dela, kontrasta ezazu *PopDoc* aldagaiaren esanguratasuna.

## ARIKETA 2015. 2 (2015-Maiatza)

Ikerketa talde batek freskagarrien kontsumoan eragina duten faktoreak ikertu nahi ditu. Honako eredu proposatzen dute:

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + u_t \tag{1}$$

non:

- $Q_t$ : freskagarri kontsumoaren hazkunde tasa  $t$  urtean,
- $I_t$ : per capita errentaren hazkunde tasa  $t$  urtean (suposatu exogenoa, ez-estokastikoa).

KTA bidez estimatutako honako eredu hau lortu da 1870tik 1938rako urteroko behaketen laginarekin<sup>20</sup>:

$$\widehat{Q}_t = -0.0144 + 0.8386 I_t$$

(0.0047)      (0.2512)

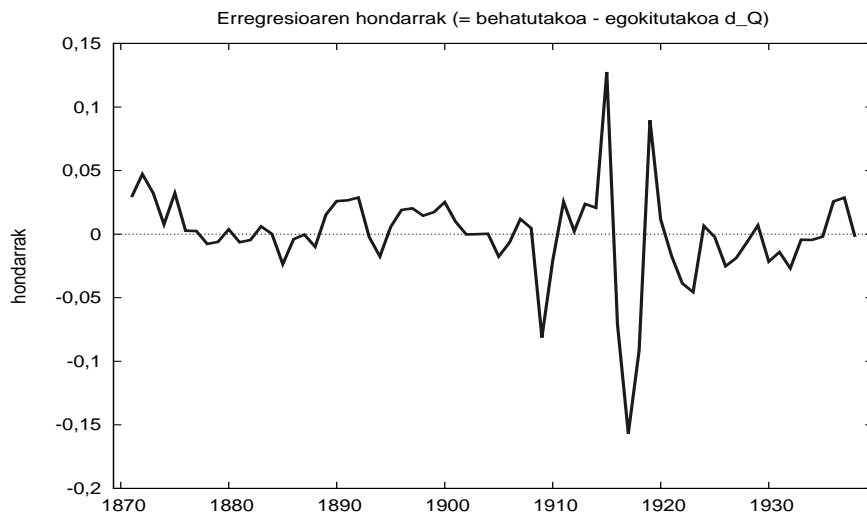
$$T = 68 \quad R^2 = 0.1444 \quad DW = 1.4584 \quad \hat{\sigma} = 0.0370$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

KTA hondarrak 1 Irudian aurkezten dira:

<sup>20</sup>Iturria: J. Durbin and G.S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, II," *Biometrika*, vol. 38. pp. 159-78.

### Irudia 1: KTA hondarrak



- a) Perturbazioen hipotesiak betetzen direla uste duzu? Erabil ezazu emandako informazio guztia, baita 1 Irudia ere.

Talde horren hiru ikertzaileek uste dute estimazioa hobetu daitekela modu ezberdinetan. Lehenengoak uste du perturbazioetan autokorrelazioa dagoela eta (1) Eredua estimatzea proposatzen du Cochrane-Orcutt erabiliz. Emaitzak honakoak dira

C-O: Cochrane–Orcutt, 1872–1938 ( $T = 67$ ) behaketak erabiliz  
 Aldagai dependentea: Q  
 $\hat{\rho} = 0.268254$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-ratioa	p-balioa
konst	-0.0152441	0.00609762	-2.5000	0.0150
I	0.886346	0.245357	3.6125	0.0006

Eraldatutako eredian oinarritutako estatistikoak:

Ald. Azaldu. Batezb.	-0.010557	Aldag. Azaldu. D. T.	0.039817
HKB	0.083146	Erregresioaren Des. Tipikoa	0.035766
$R^2$	0.212529	Zuzendutako $R^2$	0.200414
BG(1)	2.094274	Durbin–Watson	1.791301

- b) Deskriba ezazu zehaztasunez nola lortu den  $BG(1)$  (Breusch- Godfrey lehen ordenako autokorrelazioarentzat). (Kontura zaitetz estatistikoa lortu dela eraldatutako eredian).
- c) (1) Ereduko KTA estimatzailearen propietateak hobetu dira?



Bigarren ikertzaileak uste du freskagarrien prezioa ereduan egon beharko litzatekeela freskagarrien kontsumoa azaltzeko eta honako eredua proposatzen du

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \beta_2 P_t + v_t \quad (2)$$

non  $P_t$  freskagarrien hazkunde tasa den  $t$  urtean (suposatu ez-estokastikoa). KTA bidez estimatutako eredua honakoa da

$$\widehat{Q} = \underset{(0.0028)}{-0.0070} + \underset{(0.1462)}{0.7475} I_t - \underset{(0.0765)}{0.8740} P_t$$

$T = 68 \quad R^2 = 0.7155 \quad DW = 2.205 \quad BG(1) = 0.98$   
(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

d) Kontuan izanda informazio berri hau, aldatuko zenuke c) ataleko erantzuna?

Azkenik, hirugarren ikertzaileak uste du freskagarrien kontsumoaren dinamikotasuna honela barneratu beharko litzatekeela

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \beta_2 P_t + \beta_3 Q_{t-1} + w_t \quad (3)$$

KTA bidez estimatutako eredu berri hau honakoa da

$$\widehat{Q} = \underset{(0.0028)}{-0.0071} + \underset{(0.1584)}{0.7820} I_t - \underset{(0.0854)}{0.8479} P_t + \underset{(0.0776)}{0.0498} Q_{t-1}$$

$T = 67 \quad R^2 = 0.7158 \quad DW = 2.125 \quad BG(1) = 1.83$   
(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

e) Aukera ezazu zuretzat egokiena den estimatutako eredua eta azal ezazu zergatik aukeratu duzun eredu hori. Orduan kontrasta ezazu eredu horretan per capita errentaren hazkunde tasa nabaria den freskagarrien kontsumoaren hazkunde tasa azaltzeko.

## ARIKETA 2015. 3 (2015-Ekaina)

1991 urtean Estatu Batuetan lan merkatuari buruzko ikerketa bat egiteko, zehazki, ezkonduetako emakumeen soldatari buruzko ikerketa, honako aldagai hauek erabili ziren<sup>21</sup>:

<sup>21</sup>Wooldridge, J. (2006): Introductory Econometrics: A Modern Approach, Thomson/South-Western. Fichero de gretl cps91.gdt.

- $earn_{si}$ :  $i$  emakumearen asteko soldata, dolarretan.
- $educ_i$ :  $i$  emakumearen ikasketa urteak.
- $age_i$ :  $i$  emakumearen adina.
- $kidge6_i$ : 1 balioa hartzen du bere seme-alaba guztiek 6 urte baino gehiago badute.
- $kidlt6_i$ : 1 balioa hartzen du seme-alabaren batek 6 urte baino gutxiago badu.

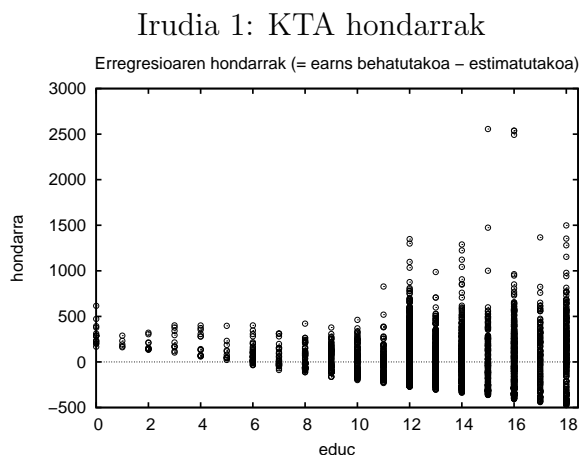
KTA bidez estimatutako honako ereduak lortzen dugu:

KTA, 1–5634 behaketekin  
Aldagai azaldua:  $earn$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ Estatistikoa	p balioa
const	-123,041	24,4701	-5,0282	0,0000
educ	35,5347	1,24570	28,5258	0,0000
age	-1,77105	0,386746	-4,5794	0,0000
kidge6	-25,3981	7,98506	-3,1807	0,0015
kidlt6	-99,7546	9,45624	-10,5491	0,0000

HKB 3,36e+08 Erregresioaren D. T. 244,2057  
 $R^2$  0,140563 Zuzendutako  $R^2$  0,139952

- Idatz ezazu laginaren erregresio funtzioa  $N$  lagin tamaina zehaztuz.
- Aurreko taula jarraituz eta ELOE-ko hipotesiak betetzen direla suposatuz, 6 urte baino txikiagoak diren seme-alabak izateak eragina dauka lagineko emakumeen soldatan?
- 1 Irudian KTA hondarren grafikoa  $educ$  aldagaiaren aurrean erakusten da.



- a) Zer arazo egon daitekeela antzematen da grafikoan? Azal ezazu.
- b) Azal ezazu zehaztasunez nola kontrastatuko zenukeen formalki aurreko atalean aurkezten den arazoa, kontrastearen elementu guztiak zehaztuz.
- d) Honako erregresioa daukagu:

KTA, 1-5634 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua  $\frac{\hat{u}_i^2}{59637.91}$ , non  $\hat{u}_i = \text{earns}_i - \widehat{\text{earns}}_i$  eta  $\frac{HKB}{N} = 59637.91$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p balioa
const	-1,80055	0,338151	-5,325	1,05e-07
educ	0,187365	0,0172143	10,88	2,56e-27
age	0,0118422	0,00534441	2,216	0,0267
kidge6	-0,174970	0,110345	-1,586	0,1129
kidlt6	-0,162081	0,130675	-1,240	0,2149

Karratu Azalduen Batura = 1469,4

- d.1) Zertarako balio du erregresio honek? Erabil ezazu ELOE-ko hipotesiren bat ez den betetzen aztertzeko.
- d.2) Erregresioaren emaitzak eta  $\text{Bar}(u_i)$  ezezaguna dela kontuan hartuta, uste duzu a) ataleko estimatzailea baino hobetagoa den beste estimatzailerik existitzen dela? Zergatik? Zehaz ezazu nola lortuko genukeen eta zer propietate izango lituzkeen.
- e) Honako KTA erregresioa daukagu:

$$\widehat{\text{earns}}_i = -123,041 + 35,5347 \text{educ}_i - 1,77105 \text{age}_i - 25,3981 \text{kidge6}_i - 99,7546 \text{kidlt6}_i$$

(25,539)
(1,4265)
(0,38620)
(8,1434)
(9,7634)

$$T = 5634 \quad R^2 = 0,1406 \quad \hat{\sigma} = 244,21$$

(Heterozedastizitatearekiko sendoak diren desbiderapen tipikoak parentesi artean)

- Seme-alaba txikiak izateak eraginik badu emakumeen soldatan? Arrazona ezazu zure erantzuna zehaztasunez, baita kontrastearen fidagarritasuna ere. Konpara ezazu b) atalean egindako kontrastearekin.
- f) Aurreko aldagai berdinak ditugu, baina senarrentzat. Honela,  $\text{husearns}_i$ ,  $i$  emakumearen senarrentaren soldata da,  $\text{huseduc}_i$  bere ikasketa urteak eta  $\text{husage}_i$  bere adina. Emakumearen soldata ( $\text{earns}_i$ ) bere senarrentaren soldataren ( $\text{husearns}_i$ ) menpe dagoela uste da eta alderantziz.

Honako KTA estimazioak ditugu:

$$\widehat{\text{earns}}_i = -121,142 + 33,4438 \text{educ}_i - 1,78987 \text{age}_i - 29,8467 \text{kidge6}_i - 102,056 \text{kidlt6}_i + 0,0617422 \text{husearns}_i$$

(24,351)
(1,2701)
(0,38484)
(7,9674)
(9,4145)

(0,0081764)

$$T = 5634 \quad R^2 = 0,1492 \quad \hat{\sigma} = 243,00$$

(Desbiderapen tipikoak parentesi artean)

Hausman-en kontrastea- Hipotesi hutsa: KTA estimatzailea tinkoa da  
 Kontraste asintotikoaren estatistikoa: Chi-karratu(1) = 4,36097 eta p-balioa = 0,0367713

$$\widehat{\text{husearns}}_i = 0,00633109 + 42,0318 \text{huseduc}_i - 2,33402 \text{husage}_i$$

(31,107)
(1,7298)
(0,45866)

$$T = 5634 \quad R^2 = 0,1007 \quad \hat{\sigma} = 386,02$$

(Desbiderapen tipikoak parentesi artean)

Azal ezazu zer harremana uste duzu (3) erregresioak duela (1) erregresioaren bukaeran agertzen den Hausman-en kontrastearekin. Egin ezazu Hausman-en kontraste hori, bere elementu guztiak zehaztuz. Zer ondorio dauzka kontrasteak (1) ekuazioaren KTA estimazioan?

## ARIKETA 2015. 4 (2015-Ekaina)

Greziako industrial produkzio funtzioari buruzko datuak ditugu<sup>22</sup> 1961-1987 epean:

- $OUTPUT_t$  = produkzio industrial, 1970 urteko bilioi drakma konstantetan.
- $CAPITAL_t$  = kapital faktorea.
- $LABOR_t$  = lan faktorea, urteko mila langileko.

eta KTA estimazioaren honako emaitzak:

$$\ln \widehat{OUTPUT}_t = -11,9366 + 0,139810 \ln CAPITAL_t + 2,32840 \ln LABOR_t$$

(3,2111)
(0,16539)
(0,59949)

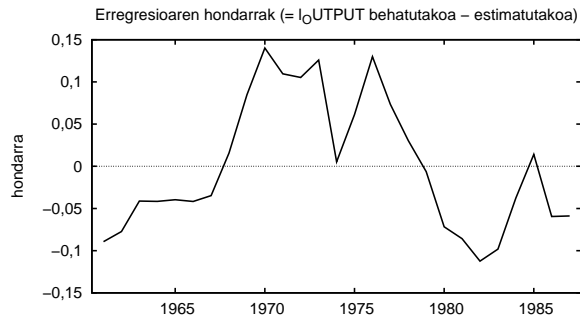
$$T = 27 \quad R^2 = 0,9714 \quad rho = 0.7944 \quad DW = 0.3738$$

(Desbiderapen tipikoak parentesi artean, ln = logaritmo nepertarra)

---

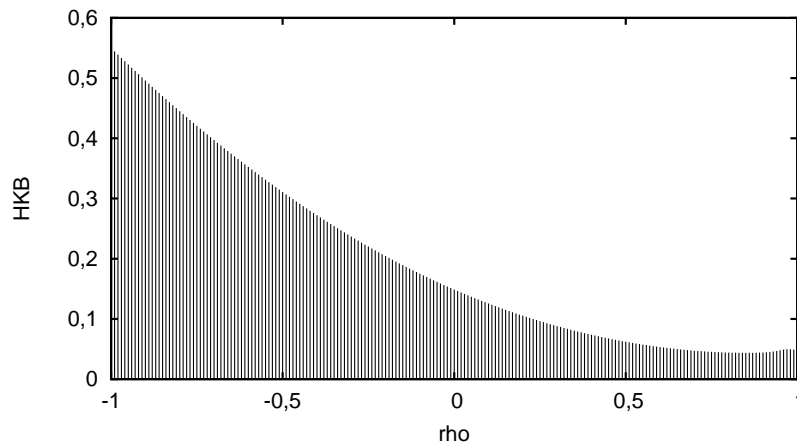
<sup>22</sup>Iturria: Gujarati, 7.11. fitxategia

Irudia 1: KTA hondarren denbora seriearen grafikoa



- a) 1 Irudian eta kontraste batean oinarrituz, uste duzu ELOE-ko oinarritzko hipotesi guztiak betetzen direla? Arrazona ezazu zure erantzuna.
- b) Honako informazioa KTZE estimazio baten emaitzari dagokio:

Irudia 2:



Hildreth–Lu, 1962–1987 behaketak erabiliz ( $T = 26$ )

Aldagai azaldua:  $\ln$  OUTPUT

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p balioa
const	-6,11840	2,73241	-2,2392	0,0351
$\ln$ CAPITAL	0,213504	0,173902	1,2277	0,2320
$\ln$ LABOR	1,42165	0,480354	2,9596	0,0070

Rho-diferentzietan oinarritutako estatistikoak:

HKB	0,043709	$R^2$	0,990664
$\hat{\rho}$	0,045520	Durbin–Watson	1,872358

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}_{HL}) = \begin{bmatrix} 7,4661 & 0,2202 & -1,2670 \\ & 0,0302 & -0,0567 \\ & & 0,2307 \end{bmatrix}$$

- b.1) Zer parametroari dagokio aurreko 2 Irudian agertzen den  $\rho$  terminua? Zein da, gutxi gorabehera, bere estimazioa? Azal ezazu 2 Irudian bertan adieraziz.
- b.2) Zer espero duzu hobetzea KTZE estimazio honekin hasierako ereduaren KTA estimazioarekin konparatuz? Zer bete behar dute hasierako ereduko perturbazioek benetan hobekuntza gerta dadin?
- b.3) Kontrasta ezazu produkzio funtzioak eskala errendimendu gorakorrek dituen ala ez (hau da, kapital faktorea eta lan faktorearen koefizienteen batura bat baino handiago den ala ez).

c) Honako estimazioa daukagu:

KTA, 1962–1987 behaketak erabiliz ( $T = 26$ )

Aldagai azaldua:  $\ln$  OUTPUT

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatiskoa	p Balioa
const	1,91978	2,45906	0,7807	0,4441
$\ln$ CAPITAL	1,56605	0,756414	2,0704	0,0516
$\ln$ CAPITAL_1	-1,25756	0,658399	-1,9100	0,0706
$\ln$ LABOR	1,23549	0,530538	2,3288	0,0305
$\ln$ LABOR_1	-1,60204	0,497884	-3,2177	0,0043
$\ln$ OUTPUT_1	0,753924	0,162858	4,6293	0,0002
HKB	0,034920	Erregresioaren D.T.	0,041785	
$R^2$	0,992519	$R^2$ zuzendua	0,990649	
$\hat{\rho}$	-0,074356	BG(1)	0,183176	

- c.1) Zeintzuk uste duzu direla hemen aurkeztutako KTA estimatzailearen propietateak? Arrazona ezazu.
- c.2) Eredu honen emaitzak ikusita, zeintzuk uste duzu izango direla hasierako ereduaren KTA estimatzailearen propietateak?

## ARIKETA 2015. 5 (2015-Ekaina)

2014 urterako telebista kateetan egindako publizitate ikerketa baten,  $i$  kateko publizitate sarrerak ( $Y_i$ ), milioi eurotan estimatu nahi dira,  $i$  kateko merkatu kuotaren (edo audientziaren) ( $X_i$ ) funtzioan, ehunekotan neurtuta. Honako eredu dugu:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad i = 1, \dots, N \quad N = \text{irekian emititzen diren kanalak.} \quad (1)$$

non  $u_i \overset{ibb}{\sim} (0, \sigma_u^2)$  den.

Merkatu kuota totala ez da ezagutzen eta aleatorioki aukeratzen diren 4625 etxebizitzetan instalatutako audimetroen bidez neurtzen da. Izan bedi  $A_i =$  audimetroen bidez lortutako merkatu kuota, hau telebista merkatuko kuotarekin erlazionatzen da honako ekuazioaren bidez:

$$A_i = X_i + v_i \quad \text{non } v_i \overset{ibb}{\sim} (0, \sigma_v^2) \quad u_i \text{ eta } v_i \text{ independenteak} \quad (2)$$

- a) Daukagun informazioa kontuan hartuta, idatz ezazu estimagarria den ereduaren ekuazioa. Eredu honek ELOE-aren oinarritzko hipotesiak betezen ditu? Arrazona ezazu.
- b) Zehaz eta azal itzazu estimagarria den ereduaren KTA estimatzailearen propietateak.

## ARIKETA 2016. 1 (2016-Maiatza)

Ikerlari batek Ameriketako Estatu Batuetako (AEB) soldata mailan eragiten duten eragileak aztertu nahi ditu. Helburu honekin, 1976. urteko 3010 gizonezko barneratzen dituen lagina eskuratu du, honako aldagaiak dituelarik:

- *lwage*: ordukako soldataren logaritmoa (zentimotan).
- *educ*: eskolatzeko urteak.
- *exper*: lan-esperientzia urteak.
- *black*: fikziozko aldagaia (dummy), 1 gizonezkoa beltza bada, 0 bestelako kasuan.
- *nearc4*: fikziozko aldagaia (dummy), 1 gizonezkoa unibertsitate baten ondoan hazi baldin bazen, 0 bestelako kasuan.

Honako eredu hau proposatu da:

$$lwage_i = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 exper_i + \beta_3 black_i + u_i \quad (1)$$

KTA estimazioak honakoak izanik:

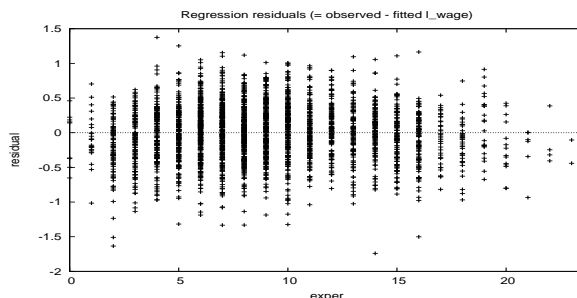
$$\widehat{lwage}_i = 4.885 + 0.082 educ_i + 0.039 exper_i - 0.232 black_i$$

$$T = 3010 \quad R^2 = 0.227 \quad F(3, 3006) = 293.56 \quad \hat{\sigma}_u = 0.390 \quad (2)$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

1. Irudiak KTA hondarrak islatzen ditu:

Irudia 1: KTA hondarrak esperientzia aldagaiaren kontra



- a) Arraza aldagaia soldata azaltzeko esanguratsua den kontrasta ezazu.
- b) KTA hondarrak nola lortu diren azal ezazu eta 1. Irudia komentatu.
- c) Ondorengo erregresio laguntzaile bat erabiliz, perturbazioek oinarritzko hipotesiak betetzen dituzten ala ez kontrasta ezazu:

1-  $\hat{\epsilon}_i^2 = 0.900 + 0.007educ_i + \hat{v}_i, R^2 = 0.0002, KTB = 7171,$

2-  $\hat{\epsilon}_i^2 = 1.021 + 0.002educ_i - 0.005exper_i + \hat{v}_i, R^2 = 0.0003, KTB = 7171,$

3-  $\hat{\epsilon}_i = 1.123 + 0.001educ_i + \hat{v}_i, R^2 = 0.023, KTB = 141,$

4-  $\hat{\epsilon}_i = 1.021 + 0.002educ_i - 0.005exper_i + \hat{\epsilon}_{i-1} + \hat{v}_i, R^2 = 0.312, KTB = 141.$

non  $\hat{\epsilon}_i = \hat{u}_i / \hat{\sigma}_u, \hat{u}_i$  KTA hondarrak diren eta  $\hat{\sigma}_u^2 = \sum \hat{u}_i^2 / 3010.$

Ikerlaria ez da gustora geratu emaitza honekin, eta eredia Karratu Txikiaren Ponderatuen (KTP) metodoa erabiliz estimatu du, honako emaitzak lortuz:

Eredua: KTP, 1–3010 behaketak erabilita

Aldagai azaldua: lwage

Ponderaziorako erabilitako aldagaia:  $1/educ^2$

	Koefizientea	Desbiderapen tipikoa	t estatistikoa	p-balioa
konst	5.108	0.056	90.51	0.000
educ	0.070	0.003	23.493	0.000
exper	0.033	0.002	14.908	0.000
black	-0.313	0.016	-20.067	0.000

Datuen ponderazioan oinarritutako estatistikoak:



Hondar karratuen batura	3.153	Erregresioaren des. tipikoa	0.032
$R^2$	0.290	Zuzendutako $R^2$	0.289
$F(3, 3006)$	409.551	P-balioa( $F$ )	4.8e-223

Breusch-Pagan, heterozedastizitate kontrastea -

Hipotesi hutsa: heterozedastizitate eza

Kontrastearen estatistikoak: LM = 2945.2 p-balioa = P(Chi-karratua(3) > 2945.2) = 0

- d) Azal ezazu KTP estimazioak nola lortu diren, eta KTA estimazioekin alderatuz espero den hobekuntza. Aipatu zein egoeratan lortuko genukeen hobekuntza hau.
- e) KTP estimatzailearen bitartez lortu diren emaitzak KTA bidez lortutakoak hobetzen dituela uste duzu?

Bigarren ikerlari batek hezkuntza eta soldata aldagaiei faktore berdinek eragiten dietela uste du, eta beraz, (1) ereduko *educ* aldagaia eta perturbazioak korrelatuta daudela deritzo. Ikerlariak eredu Ordezko Aldagaien metodoa erabiliz estimatzea erabaki du, *educ* aldagaia ordezkatzeko tresna gisa *nearc4* aldagaia erabiliz. Lortu dituen estimazioak honakoak dira:

$$\widehat{lwage}_i = 1.845 + 0.259 \text{educ}_i + 0.111 \text{exper}_i - 0.028 \text{black}_i$$

(0.663)
(0.039)
(0.016)
(0.050)

$$T = 3010 \quad R^2 = 0.185 \quad F(3, 3006) = 83.264 \quad \hat{\sigma}_u = 0.524 \quad (3)$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

- f) Zein propietate bete behar ditu *nearc4* aldagaiak *educ* aldagaia ordezkatzeko tresna egokia izan dadin? Propietate hauek beteko balira, zeintzuk izango lirarteke OA estimatzailearen propietateak?
- g) Erabil ezazu kontraste formal bat bigarren ikerlariaren susmoa zuzena den ala ez jakiteko.
- h) Aurreko informazioa kontuan hartuta, a) ataleko erantzuna aldatuko al zenuke?

## ARIKETA 2016. 2 (2016-Maiatza)

Phillipsen kurbak langabeziaren eta inflazioaren alderantzizko erlazioa islatzen du, hau da, langabezia tasa altuak inflazio baxua dakar berekin, eta alderantziz, langabezia tasa baxuak inflazio tasa altua dakar berekin. Erlazio hau aztertzeko honako eredu proposatu da:

$$inf_t = \beta_0 + \beta_1 unem_t + u_t \quad (1)$$

non:

- $inf_t$ :  $t$  urteko Inflazio Tasa,
- $unem_t$ :  $t$  urteko Langabezia Tasa.

1948. urtetik 2003. urtera bitarteko urteroko behaketen lagina daukagu, eta KTA bitartez lortutako eredu estimatua honakoa da:

$$\widehat{inf}_t = 1.0535 + 0.502 unem_t$$

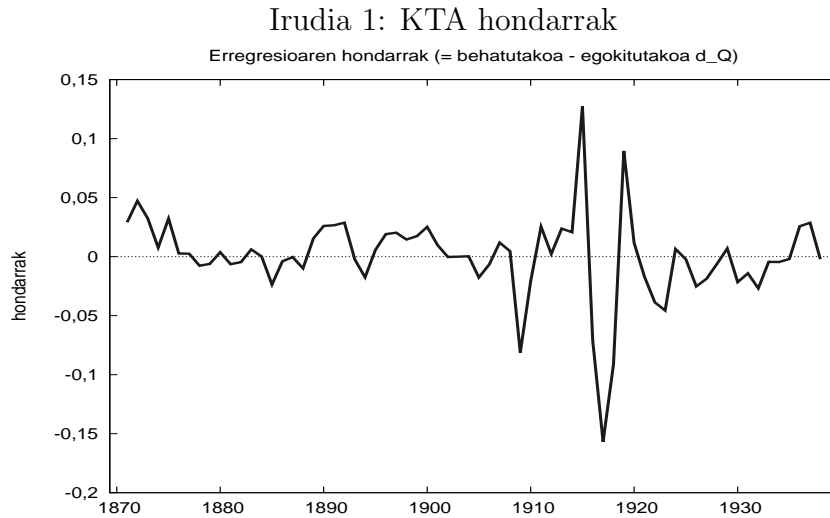
(1.548)      (0.266)

$$T = 56 \quad R^2 = 0.045 \quad BG(1) = 31.53 \quad DW = 0.801$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

(2)

KTA hondarrak 1. Irudian islatzen dira:



- a) Perturbazioek oinarritzko hipotesiren bat betetzen ez dutenaren ebidentziarik ba al duzu? Erabil ezazu horretarako daukazun informazio guztia, 1. Irudia barne.
- b) Ondorengo KTA hondarren baturak kontuan har itzazu:

$$\sum_{t=1}^{56} \hat{u}_t^2 = 476.82, \quad \sum_{t=2}^{56} \hat{u}_{t-1}^2 = 473.69,$$

$$\sum_{t=2}^{56} \hat{u}_t^2 = 474.25, \quad \sum_{t=2}^{56} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 270.98, \quad \sum_{t=2}^{56} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 7.76$$

$u_t \sim AR(1)$  suposatzen badugu, azal ezazu xehetasunez nola estimatuko zenukeen eredu asintotikoki efizientea den modu batean.

Orain, inflazioan denboran zeharreko dependentzia dagoela uste da; hori dela eta honako eredu hau suposatu da:

$$inf_t = \beta_0 + \beta_1 unem_t + \beta_2 inf_{t-1} + v_t \quad (3)$$

(3) eredu KTA bidez estimatu da honako emaitzak lortuz:

KTA, 1949–2003 bitarteko behaketak erabiliz ( $T = 55$ )

Aldagai azaldua: inf

	Koefizientea	desbiderapen tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
Konst	2.210	1.2099	1.826	0.073
unem	-0.224	0.239	-0.938	0.352
inf_1	0.733	0.117	6.251	0.000
Ald.Azaldu.Batezb.		3.807	Aldag.Azaldu D.T.	3.013
Hondar Karratuen Batura		256.453	Erregresioaren KA	2.221
$R^2$		0.477	Zuzendutako $R^2$	0.457
BG(1)		2.15	DW	1.87

- c) Azal ezazu  $BG(1) = 2.15$  balioa nola lortu den eta erabil ezazu kontraste formalen bat  $v_t$  perturbazioek oinarritzeko hipotesiak betetzen dituzten ala ez jakiteko.
- d) a) eta c) ataletan lortutako emaitzak kontuan hartuz, zer iritzi duzu Phillipen kurbak zehazten duen langabeziaren eta inflazioaren arteko erlazio negatiboaren inguruan? Erabil ezazu kontraste egoki bat zure erantzuna babesteko.

## ARIKETA 2016. 3 (2016-Ekaina)

Ikerlari batek Puerto Ricoko enplegu tasan eragiten duten faktoreak aztertu nahi ditu. Helburu honetarako 1950-1987 urteetako datu serieak erabiltzen ditu. Zehatzago adieraziz, honako adierazleen informazioa du:

- $lprepop$ : Puerto Ricoko enplegu tasaren logaritmoa.
- $lmincov$ : Puerto Ricoko gutxieneko soldata, batezbesteko soldadari dagokionean (logaritmoa).
- $lprgnp$ : Puerto Ricoko Nazio-Produktu Gordinareneko logaritmoa.

Honako eredu hau proposatu da:

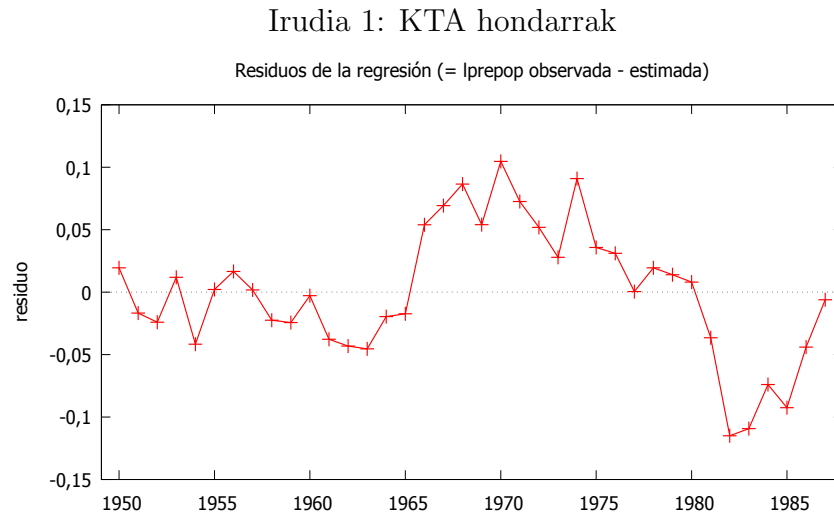
$$lprepop_t = \beta_1 + \beta_2 lmincov_t + \beta_3 lprgnp_t + u_t \quad (1)$$

KTA estimazioak honakoak izanik:

1. Eredua: KTA, 1950–1987 urteetako behaketak erabilia ( $T = 38$ )  
Aldagai endogenoa:  $lprepop$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
konst	-1,94966	0,522971	-3,7280	0,0007
$lmincov$	-0,257443	0,0653404	-3,9400	0,0004
$lprgnp$	0,0859111	0,0568042	1,5124	0,1394
Hondar Karratuen Batura	0,101993	Erregresioaren D.T.		0,053982
$R^2$	0,681129	Zuzendutako $R^2$		0,662908
$\hat{\rho}$	0,782173	Durbin-Watson		0,432131

1. Irudiak hondarren bilakaera islatzen du denboran zehar.



- Aurreko grafikoa kontuan hartuz eta kontraste formal bat erabiliz, zer ondoriozta dezakezu perturbazioen oinarrizko hipotesien betetzearen inguruan?
- Interpreta ezazu  $\beta_2$  koefizientearen estimazioa. Aurreko ataleko zure erantzuna kontuan hartuz, estimazioa fidagarria dela uste al duzu? Erabilitako estimatzailearen propietateetan oinarrituz, defenda ezazu zure erantzuna.
- $lmincov$  aldagaiaren esanguratasuna kontrasta ezazu. Kontraste honetan ateratako emaitza fidagarria dela uste al duzu? Azal ezazu zure erantzuna.

Ikerlariak autokorrelazioa existitzen dela susmatzen du, eta beraz, Hildreth eta Lu metodoa erabiltzea erabaki du, modu honetan eredia KTZE bidez estimatu ahal izateko. Ondoren, estimatzaile honen emaitzak adierazten dira.

1. Eredua: Hildreth–Lu, 1951–1987 urteetako behaketak erabilia ( $T = 37$ )

Aldagai endogenoa: lprepop

$$\hat{\rho} = 0,96$$

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
konst	-6,21215	1,37616	-4,5141	0,0001
lmincov	-0,0615490	0,0434592	-1,4162	0,1658
lprgnp	0,575888	0,155795	3,6965	0,0008

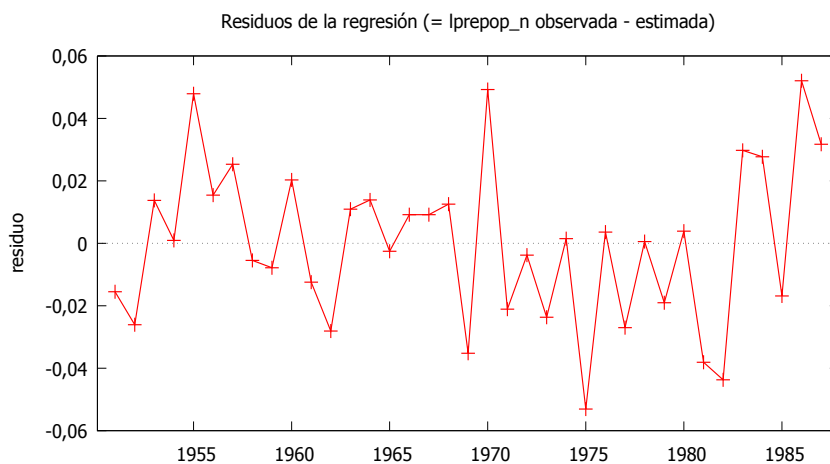
rho-atzeratutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar Karratuen Batura	0,024016	Erregresioaren D.T.	0,026577
$R^2$	0,917825	Zuzendutako $R^2$	0,912991
$\hat{\rho}$	-0,049555	Durbin–Watson	2,043080

- d) Ikertzaileak perturbazioek jarraitzen duten prozesu zehatz bat suposatu du. Zein da ikertzaileak suposatu duen prozesua? Azal ezazu xehetasunez estimazio metodo hau, eta zehaztu besteak beste: eraldatutako eredua, eta goikaldean aurkezten diren emaitzak lortu ahal izateko prozedura.

Ondoren ikus daitekeen 2. Irudian, eredu eraldatutako KTA hondarrak islatzen dira denboran zehar.

Irudia 2: KTA hondarrak eraldatutako ereduan



- e) Orain arte eskuragarri dagoen informazio guztia erabiliz, zer ondoriozta dezakezu eredu eraldatutako perturbazioen oinarritzko hipotesien betetzearen inguruan? Zure erantzuna justifika ezazu.

Beste ikerlari batek uste du (1). eredua ez dagoela ondo zehaztuta, izan ere, enplegu tasak inertzia moduko bat duela uste baitu, hau da, aurreko baloreen menpe dagoela hain zuzen ere. Horretarako, honako eredua zehaztu eta estimatzen du:

$$lprepop_t = \beta_1 + \beta_2 lmincov_t + \beta_3 lprgnp_t + \beta_4 lprepop_{t-1} + u_t \quad (2)$$

KTA estimazioak honakoak dira:

$$\widehat{lprepop}_t = -0,815 - 0,098 lmincov_t + 0,059 lprgnp_t + 0,764 lprepop_{t-1} \quad (3)$$

$T = 37 \quad R^2 = 0.896 \quad HKB = 0.030524$

Gainera, honako erregresio laguntzailea estimatu da:

$$\hat{u}_t = -0,010 + 0,302 \hat{u}_{t-1} - 0,002 lmincov_t - 0,006 lprgnp_t - 0,062 lprepop_{t-1} \quad (4)$$

$T = 37 \quad R^2 = 0.0695$

(Parentesi artean desbiderapen tipikoak)

- f) Aurreko erantzunetan oinarrituz, zeintzuk dira (1) ereduko KTA estimatzailearen propietateak? Eta (2) eredukoarenak? Zein eredu aukeratuko zenuke? Azal ezazu zure erantzuna.

## ARIKETA 2016. 4 (2016-Ekaina)

Demagun irakasgai baten azterketan ikasleek lortzen dituzten behin betiko emaitzetan eragiten duten faktoreak aztertu nahi ditugula. Azterketak 40 galdera ditu, eta galdera bakoitza ondo erantzuteak puntu bat lortzea suposatzen du. Honako eredu hau proposatzen da:

$$final_i = \beta_1 + \beta_2 atndrte_i + \beta_3 ACT_i + \beta_4 hwrte_i + u_i \quad (1)$$

non:

- $final_i$ :  $i$  ikasleak azterketan lortutako puntuazioa.
- $atndrte_i$ :  $i$  ikaslearen klaseetarako asistentzia (%tan).
- $ACT_i$ :  $i$  ikaslearen batezbesteko nota.
- $hwrte_i$ :  $i$  ikasleak egindako lanak (%tan)

674 ikasleen lagina erabiliz, eredia KTA bidez estimatu da:

(1) Eredua: KTA, 1–674 behaketak erabiliz ( $n = 674$ )  
 Aldagai endogenoa: final

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
konst	8,69467	1,49182	5,8282	0,0000
atndrte	0,0408583	0,0129489	3,1553	0,0017
ACT	0,527771	0,0480319	10,9879	0,0000
hwrte	0,0224737	0,0110316	2,0372	0,0420
Hondar Karratuen Batura	12390,73	Erregresioaren D.T.	4,300422	
$R^2$	0,175307	Zuzendutako $R^2$	0,171614	

Estimazio hau egin ostean, bigarren ikerlari batek kontsideratu du *atndrte* aldagaia aldagai endogeno moduan har daitekeela. Hori dela eta, aurreko eredia Ordezko Aldagaien metodoa erabiliz estimatzea proposatu du. Horretarako, campuserako distantzia aldagaia (*dist* aldagaia hain zuzen ere) *atndrte* ordezkatzeko tresna moduan proposatu du. Honakoak dira emaitzak:

(1) Eredua: KTA2E, 1–674 behaketak erabiliz ( $n = 674$ )  
 Aldagai endogenoa: final  
 Ordezkatutako aldagaia: *atndrte*  
 Ordezko matrizea: konst dist ACT hwrte

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ estatistikoa	p-balioa
konst	8,63433	1,66015	5,2009	0,0000
atndrte	0,0422318	0,0210375	2,0075	0,0447
ACT	0,528284	0,0484306	10,9081	0,0000
hwrte	0,0217456	0,0141040	1,5418	0,1231
Hondar Karratuen Batura	12390,94	Erregresioaren D.T.	4,300458	
$R^2$	0,175294	Zuzendutako $R^2$	0,171601	

- Bigarren ikerlariak proposatzen duen hipotesia zuzena dela uste al duzu? Kontraste baten bidez azal ezazu zure erantzuna.
- Aurreko emaitzak kontuan hartuz, zein estimazio metodo aukeratuko zenuke? Zergatik? Aukeratu duzun estimatzailearen propietateak zeintzuk dira?
- hwrte* aldagaiaren esanguratasuna kontrasta ezazu estimatzaile egokiena erabiliz.
- Azkenik, hirugarren ikerlari batek uste du perturbazioen bariantza *atndrte* eta *ACT* aldagaien arabera alda litekeela. Hori dela eta (1) ereduko perturbazioak homozedastikoak diren kontrastatu nahi du. Azal ezazu xehetasunez nola egingo zenukeen kontraste hau. Kontraste hau egiteko estatistikoaren balioa 3.86 baldin bada, hipotesi hutsa baztertu edo ez baztertu egingo zenuke?

- e) Aurreko ataleko emaitzak kontuan hartuz, b) ataleko zure erantzuna aldatuko al zenuke? Erantzuna aldatuko bazenu, zein estimatzaile proposatuko zenuke? Justifika ezazu zure erantzuna.

## ARIKETA 2016. 5 (2016-Ekaina)

Honako eredia suposa ezazu:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-2} + \beta_3 X_t + \beta_4 X_{t-1} + u_t \quad (1)$$

non  $X_t$  aldagai ez estokastikoa den eta  $u_t \stackrel{ibb}{\sim} (0, \sigma_u^2)$

- a) KTA estimatzailearen propietateak froga itzazu. Mann eta Walden teorema aplika al dezakezu?
- b) Imajina ezazu  $u_t$ -k honako prozesua jarraitzen duela,  $AR(2) : u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t$ , non  $\epsilon_t \stackrel{ibb}{\sim} (0, \sigma_\epsilon^2)$  eta  $\rho_1, \rho_2$  parametro ezagunak diren. KTA estimatzaileak propietate egokiak al ditu? Horrela ez baldin bada, zein izango litzateke aukeratuko zenukeen estimatzailea?

## ARIKETA 2017. 1 (2017-Maiatza)

Janari-gastuari esleitzen zaion errentaren portzentajea aztertu nahi da. Horretarako 235 familia belgikarren informazioa jaso da hurrengo aldagaiei buruz:

- $foodexp_i$ :  $i$  familiaren urteko janari-gastua, franko belgikarretan.
- $income_i$ :  $i$  familiaren urteko errenta, franko belgikarretan.

Ondoko eredia proposatzen da:

$$foodexp_i = \beta_0 + \beta_1 income_i + u_i \quad (1)$$

zeinen KTA estimazioa hurrengoa den:

$$\widehat{foodexp}_i = 147.475 + 0.4852 income_i \quad (2)$$

(15.957)      (0.0144)

$$T = 235 \quad R^2 = 0.830 \quad \hat{\sigma} = 114.11$$

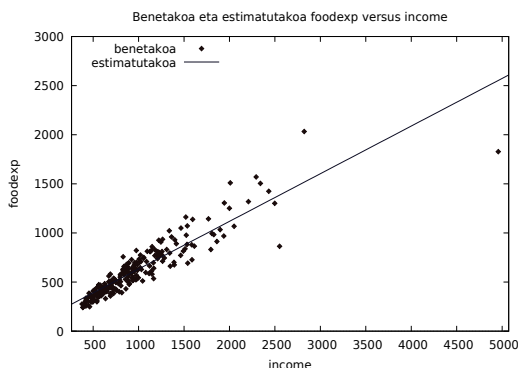
(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

estimatutako zuzena eta KTA hondarrak 1. Irudian erakusten dira:

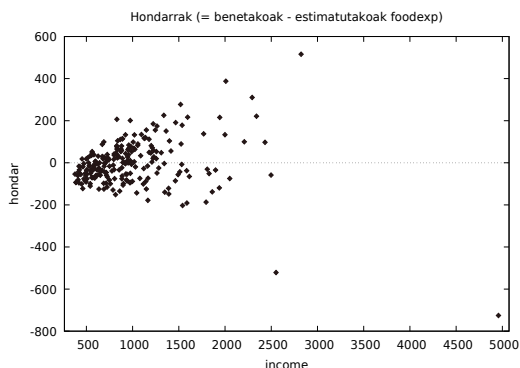


## Irudia 1: Emaitzak KTA estimazioarekin

(a) Benetako balioak eta estimatutako zuzena



(b) KTA hondarrak



a) Zer ondoriozta daiteke 1. Irudiko bi grafikoetatik?

b) Ondoko erregresio laguntzaileetako bat erabiliz, kontrasta ezazu oinarritzko hipotesien betetzea perturbazioetan:

$$1- \hat{u}_i^2 = -3871 + 52.007 foodexp_i + 0.014 \hat{u}_{i-1}^2 + \hat{v}_i, R^2 = 0.232, KTB = 455925640644.87,$$

$$2- \hat{u}_i^2 = -4401.2 + 57.967 income_i + \hat{v}_i, R^2 = 0.465, KTB = 455925640644.87,$$

$$3- \hat{u}_i = 0.0001 + 0.001 income_i + \hat{v}_i, R^2 = 0.023, KTB = 3033804.58,$$

$$4- \hat{u}_i = -105.88 + 0.169 foodexp_i + \hat{v}_i, R^2 = 0.169, KTB = 3033804.58.$$

non  $\hat{u}_i$  KTA hondarrak diren.

c) Ikertzaileak berriro estimatzen du eredua KTA bidez, baina orain bariantza eta kobariantzen matrizearen Whiten estimatzailea erabiliz. Emaitzak ondokoak dira:

$$\widehat{foodexp}_i = 147.475 + 0.4852 income_i \tag{3}$$

(46.648) (0.0520)

$$T = 235 \quad R^2 = 0.8296 \quad \hat{\sigma} = 114.11$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak -White-)

Zure ustez, zergatik erabili da Whiten estimazioa? Deskriba ezazu estimatzailea zehaztasunez.

Ikerlaria ez da gustora geratu emaitza hauekin, eta eredua Karratu Txikiaren Ponderatuen (KTP) bidez estimatzen du, non aldagai guztiak  $income_i$ -gatik zatituz ponderatu diren.

$$\widetilde{foodexp}_i = 66.1830 + 0.574002 income_i \tag{4}$$

(11.207) (0.014980)

$$T = 235 \quad R^2 = 0.863 \quad \hat{\sigma} = 0.087545$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Ponderatutako datuetan oinarritutako estatistikoak:

Hondar Karratuen Batura 1.785735  $R^2$  0.863050

Breusch-Paganen kontrasterako estatistikoa heterozedastizitatearentzat = 1.94603  
 p-balioarekin =  $P(\text{Chi-karratu}(1) > 1.94603) = 0.163016$

- d) Azal ezazu nola lortu diren KTP estimazioak. KTArekin alderatuz, zein hobekuntza espero da? Esan ezazu zein egoeratan lortzen den hobekuntza hori benetan.
- e) Zure ustez KTP estimazioak aipatutako hobekuntza lortzen du KTArekiko? Arrazoitu zure erantzuna kontrasteren bat erabiliz.
- f) Aurreko emaitza guztiak kontuan hartuz, kontrasta ezazu modu egokienean janari-gastuari esleitutako errentaren portzentajea erdi bat baino handiagoa den ala ez.

## ARIKETA 2017. 2 (2017-Maiatza)

XX. mendearen hasieratik AEBetako kontsumo agregatua azaltzen duen eredu baten bilaketa oso gai aktiboa izan da ikerkuntza ekonomikoan. Proposatutako lehenengo eruedetako bat ondokoa da:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 W_t + u_t \quad (1)$$

non:

- $C_t$ :  $t$  urteko kontsumo agregatua,
- $P_t$ :  $t$  urteko enpresen mozkinak,
- $W_t$ :  $t$  urteko soldata agregatuak.

1920. urtetik 1941. urtera bitarteko urteko behaketen lagin batekin KTA bidez estimatu da hurrengo eredia (1920. urtea  $t = 0$  kontsideratzen da):

$$\hat{C}_t = 16.2366 + 0.1929 P_t + 0.0899 P_{t-1} + 0.7962 W_t \quad t = 1, 2, \dots, 21, \quad (2)$$

(1.3027) (0.0912) (0.0906) (0.0399)

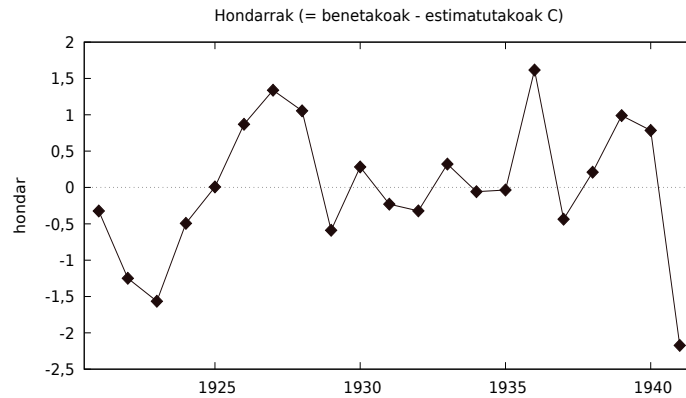
$$T = 21 \quad R^2 = 0.981 \quad \hat{\sigma} = 1.0255$$

$$\sum_{t=2}^{21} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 3.2402 \quad \sum_{t=2}^{21} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}) = -1.8496 \quad \sum_{t=2}^{21} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 24.4497$$

$$\sum_{t=1}^{21} \hat{u}_t^2 = 17.8794 \quad \sum_{t=2}^{21} \hat{u}_t^2 = 17.7750$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

## Irudia 1: KTA hondarrak



KTA hondarrak 1. Irudian erakusten dira:

- Perturbazioek oinarritzko hipotesiren bat betetzen ez dutenaren ebidentziarik aurkitzen duzu? Erabil ezazu emandako informazio gutzia, 1. Irudia eta kontraste formal bat barne.
- Geroago mozkinak eta kontsumoa batera zehazten direla pentsatzen da,  $P_t$  eta  $u_t$ ren artean denbora bereko korrelazioa sortaraziz (hala ere  $kob(P_{t-1}, u_t) = 0$ ). Zeintzuk dira korrelazio honen ondorioak aurreko KTA estimazioan? Azal ezazu zehaztasunez.
- $I_t$  aldagaia (hau da,  $t$  denboraldiko inbertsioa)  $P_t$ -ren instrumentu bezala erabiliz, eredu bera Ordezko Aldagaien bitartez estimatu da, ondokoa lortuz:

$$\hat{C}_t = 16.2341 + 0.1516 P_t + 0.1161 P_{t-1} + 0.8028 W_t \quad (3)$$

$(1.3105) \quad (0.1017) \quad (0.0953) \quad (0.0408)$   
 $T = 21 \quad R^2 = 0.9808 \quad \hat{\sigma} = 1.0317$   
 (parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Deskriba itzazu estimazio hauek (koefizienteak eta desbiderapen tipikoak) nola lortu diren, beren propietateak eta  $I_t$ -k bete behar dituen ezaugarriak propietate hauek bermatzeko.

- Kontrasta ezazu  $P_t$  eta  $u_t$ ren artean susmatutako korrelazioa dagoen.
- Beste ikertzaile baten iritziz ereduak kontsumoan existitzen den dinamikotasuna kontuan hartu beharko luke, eta KTA bidez estimatutako ondoko ereduaren proposatzen du:

$$\hat{C}_t = 10.1435 + 0.4337 P_t - 0.1700 P_{t-1} + 0.5377 W_t + 0.3267 C_{t-1} \quad (4)$$

$(2.5214) \quad (0.1186) \quad (0.1267) \quad (0.1019) \quad (0.1213)$   
 $T = 21 \quad R^2 = 0.987 \quad \hat{\sigma} = 0.87682 \quad BG(1) = 0.011$   
 (parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Azal ezazu nola lortu den  $BG(1) = 0.011$  balioa, eta erabil ezazu perturbazioek oinarritzko hipotesiak betetzen dituzten ala ez kontrastatzeko.

- f) e) galderan emandako erantzunean oinarrituz, zeintzuk dira KTA estimatzailearen propietateak eredu honetan? Azal ezazu xehetasunez.
- g) Ariketa honen emaitza guztiak kontuan hartuz, zure ustez zein da estimatutako eredurik onena  $C_t$  eragiten duten faktoreak azaltzeko? Justifika ezazu argi eta zehaztasunez.

## ARIKETA 2017. 3 (2017-Ekaina)

Demagun  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  eredua, non  $X_i$  aldagaia ez estokastikoa den eta  $u_i \sim (0, \sigma^2 X_i^2)$   $i = 1, \dots, 60$ -rentzat. Gainera, hurrengoa dakigu:  $E(u_i u_j) = 0 \forall i \neq j$ .

- a) Idatz ezazu perturbazioen bariantza eta kobariantzen matrizea. ELOE-ren oinarritzko hipotesiak betetzen dira? Arrazoitu zure erantzuna.

Ondoko lagin-informazioa dugu:

$$\begin{array}{llll}
 \sum Y_i = 1201,88 & \sum Y_i^2 = 26456,32 & & \\
 \sum X_i = 276,2 & \sum X_i^2 = 1603,98 & \sum X_i^3 = 10649,57 & \sum X_i^4 = 76704,71 \\
 \sum \frac{1}{X_i} = 18,66 & \sum \frac{1}{X_i^2} = 8,69 & \sum \frac{1}{X_i^3} = 5,54 & \sum \frac{1}{X_i^4} = 4,28 \\
 \sum X_i Y_i = 6372,93 & \sum X_i^2 Y_i = 40513,12 & \sum X_i^3 Y_i = 285095,50 & \sum X_i^4 Y_i = 2137825,06 \\
 \sum \frac{Y_i}{X_i} = 311,54 & \sum \frac{Y_i}{X_i^2} = 124,09 & \sum \frac{Y_i}{X_i^3} = 72,36 & \sum \frac{Y_i}{X_i^4} = 53,63
 \end{array}$$

- b) Nola estimatuko zenituzke ereduaren parametroak? Zer propietate ditu proposatutako estimatzaileak? Lor itzazu parametroen estimazioak.
- c) Ikertzaile batek dio eredua modu efiziente batean estimatu duela. Horretarako eredua transformatzea eta KTA bidez estimatzea erabaki du. Eredu transformatu honekin bi erregresio berri egin ditu: bat aldagai azaltzailearen balio txikienei dagozkien 20 behaketekin, eta bestea balio handienei dagozkien 20 behaketekin. Erregresio hauei dagozkien HKB-ak 2.73 eta 3.91 dira hurrenez hurren. Egiazkoa iruditzen al zaizu eredua modu efiziente batean estimatua izan delaren baieztapena?
- d) Perturbazioen bariantzaren forma ezezaguna eta estima ezina izango balitz, nola egin lezakezu  $X_i$ -ren gaineko banakako esanguratasun kontraste bat? Azal itzazu pausuak elementu bakoitza zehaztuz.

## ARIKETA 2017. 4 (2017-Ekaina)

Ikerketa-talde batek Espainiako interes-tasa nominala zehazten duten faktoreak ezagutu nahi ditu. Horretarako ondoko aldagaien hiruhilekoko datuak ditu:

- $int_t$ : interes-tasa nominala (%tan)
- $inf_t$ : inflazio-tasa (%tan)
- $def_t$ : defizit publikoa (BPG-ren %tan)

non  $inf_t$  eta  $def_t$  aldagaiak ez estokastikoak kontsideratzen diren eta  $t$  1980. urteko lehenengo hiruhilekotik 2000. urteko hirugarren hiruhilekora arte doan (83 behaketa).

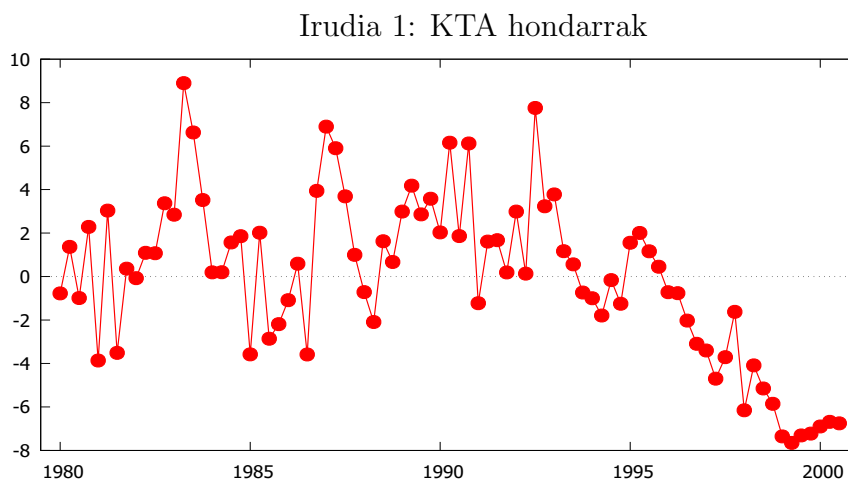
Lehenengo ikertzaile batek ondoko erregresio eredua proposatzen du:

$$int_t = \alpha_1 + \alpha_2 inf_t + \alpha_3 def_t + u_t \quad (1)$$

eta KTA bidez estimatzen du:

$$\begin{aligned} \widehat{int}_t &= 9.7832 + 2.1187 inf_t + 0.5144 def_t \\ (\widehat{desb}) & \quad (1.3175) \quad (0.4066) \quad (0.2483) \\ T &= 83 \quad R^2 = 0.3865 \quad DW = 0.6287 \end{aligned} \quad (2)$$

1. Irudiak KTA hondarren eboluzioa erakusten du.



Gainera, ondoko erregresio laguntzailea estimatzen da:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= 3.6501 - 1.3728 inf_t + 0.4488 def_t + 0.8667 \hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t \\ T &= 83 \quad R^2 = 0.5769 \end{aligned} \quad (3)$$

- a) Emandako informazio guztia erabiliz, perturbazioen gaineko hipotesiren bat betetzen ez dela uste duzu? Arrazoitu zure erantzuna.
- b) Aurreko ataleko emaitzak kontuan hartuz, zeintzuk dira KTA estimatzailearen propietateak? Justifika ezazu zure erantzuna.

Bigarren ikertzaile batek ondoko eredu alternatiboa proposatzen du:

$$int_t = \beta_1 + \beta_2 inf_t + \beta_3 def_t + \beta_4 int_{t-1} + v_t \quad (4)$$

eta bai KTA bidez:

$$\begin{aligned} \widehat{int}_t &= 0.8275 + 0.2101 inf_t + 0.1170 def_t + 0.9190 int_{t-1} \\ &\quad \begin{matrix} (desb) & (0.5633) & (0.1586) & (0.0842) & (0.0362) \end{matrix} \end{aligned} \quad (5)$$

$$T = 82 \quad R^2 = 0.9321 \quad DW = 1.2786$$

baita KTA2E bidez ere estimatzen du:

$$\begin{aligned} \widehat{int}_t &= 0.5353 + 0.1470 inf_t + 0.1039 def_t + 0.9490 int_{t-1} \\ &\quad \begin{matrix} (desb) & (0.7360) & (0.1889) & (0.0871) & (0.0605) \end{matrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$T = 82 \quad R^2 = 0.9319 \quad DW = 1.3017$$

- c) Azal ezazu nola uste duzun egin dela KTA2E bidezko estimazioa. Bereziki: identifika itzazu instrumentu egokiak eta komenta ezazu zehaztasunez zer pausu eman beharko liratekeen aurreko emaitza lortzeko.
- d) Bi estimatzaileetatik, zein iruditzen zaizu egokiena (4) eredu estimatzeko orduan? Justifika ezazu zure erantzuna.
- e) d) atalari emandako erantzuna kontuan hartuz, erregresoreen gaineko oinarritzko hipotesiren bat betetzen ez dela uste duzu? eta perturbazioen gain? Justifika ezazu zure erantzuna.

Azkenik, hirugarren ikertzaile batek ondorengo eredu proposatzen du:

$$int_t = \gamma_1 + \gamma_2 inf_t + \gamma_3 inf_{t-1} + \gamma_4 def_t + \gamma_5 def_{t-1} + \gamma_6 int_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7)$$

eta KTA bidez estimatzen du:

$$\begin{aligned} \widehat{int}_t &= 0.8596 + 0.2159 inf_t + 0.0839 inf_{t-1} - 0.0498 def_t + 0.1618 def_{t-1} + 0.9020 int_{t-1} \\ &\quad \begin{matrix} (desb) & (0.6399) & (0.1613) & (0.1598) & (0.4577) & (0.4706) & (0.0458) \end{matrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$$T = 82 \quad R^2 = 0.9325 \quad DW = 1.2658 \quad BG(1) = 2.1207$$

- f) Zein iruditzen zaizu eredu eta estimazio-metodoric egokiena? Arrazoitu zure erantzuna.

## ARIKETA 2017. 5 (2017-Ekaina)

Demagun ondoko erregresio eredua

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t, \quad u_t \overset{ibb}{\sim} (0, 1), \quad t = 1, \dots, T$$

non  $X_t$  zuzenean behatzen ez den aldagai ez estokastikoa den. Hau dela eta, horren ordez  $X_t^* = X_t + \varepsilon_t$  erabiltzen dugu,  $\varepsilon_t \overset{ibb}{\sim} (0, 1)$  izanik. Gainera hurrengoa dakigu:  $E(u_t \varepsilon_t) = 0.5\beta$  ( $\beta \neq 0$ ),  $E(u_t \varepsilon_s) = 0$   $\forall t \neq s$  eta  $\text{korr}(X_t^*, X_{t-1}^*) = 0.85$ .

- Idatz ezazu estimatuko zenukeen eredua. Zeintzuk dira bere perturbazioen batezbestekoa eta bariantza?
- Badago betetzen ez den oinarrizko hipotesiren bat? Justifika ezazu zure erantzuna.
- Aurreko atalari emandako erantzuna kontuan hartuz, zer estimazio metodo erabiliko zenuke a) ataleko eredua estimatzeko? Justifika ezazu zure hautaketa eta osatu aukeratutako estimatzaileari dagozkion hurrengo matrizeak.

$$\hat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

## ARIKETA 2018. 1 (2018-Maiatza)

Kreditu-erakunde batek gizabanakoek kreditu-txartelekin egindako gastuan eragiten duten faktoreak aztertu nahi ditu. 100 behaketaz osatutako lagin bat dago eskuragarri hurrengo aldagaien arabera:

- $Avge_{xp_i}$ :  $i$  gizabanakoak kreditu-txartelarekin egindako batezbesteko hileko gastua,
- $Income_i$ :  $i$  gizabanakoaren hileko errenta,
- $Age_i$ :  $i$  gizabanakoaren adina, urtetan.

Ondorengo eredia proposatzen da:

$$Avgexp_i = \beta_0 + \beta_1 Age_i + \beta_2 Income_i + u_i \quad (1)$$

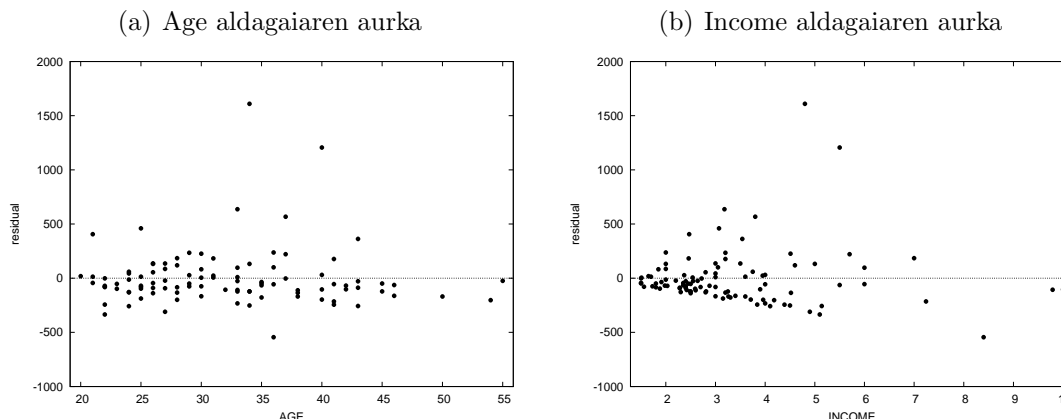
bere KTA estimazioa ondokoa izanik:

$$\widehat{Avgexp}_i = 11.4750 - 2.0547 Age_i + 72.2590 Income_i \quad (2)$$

$T = 100 \quad R^2 = 0.151 \quad \hat{\sigma} = 273.86$   
 (parentesi artean desbiderapen tipikoak)

KTA hondarrak 1. Irudian erakusten dira:

Irudia 1: KTA hondarrak



- a) Orain pentsatzen da *Income* eta *Avgexp* aldagaiak faktore berberengatik daudela zehaztuta, (1) ereduko  $Income_i$  eta  $u_i$  korrelatuta egonda. Susmo hau egiazkoa bada, zeintzuk dira efektuak aurreko KTA estimazioan?
- b) *Ownrent* aldagai fiktizioa sortu da, non  $Ownrent_i = 0$  den  $i$  gizabanakoa alokatutako etxebizitza batean bizi bada, eta  $Ownrent_i = 1$  den  $i$  gizabanakoak bere jabetzako etxebizitza batean bizi bada. Informazio horrekin ondoko OA estimatzailea lortu da:

$$\widehat{Avgexp}_i = -80.0032 - 5.29625 Age_i + 130.273 Income_i$$

$(157.60) \quad (5.1108) \quad (62.934)$   
 (parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Egin ezazu kontraste formal bat a) galderako susmoa egitzat hartu daitekeen ala ez aztertzeko.

- c) Zein ezaugarri izan behar ditu  $Ownrent_i$  aldagaiak  $Income_i$  aldagaiarentzako instrumentu egokia izateko? Ezaugarri horiek betetzekotan, zeintzuk dira OA estimatzailearen propietateak?



- d) KTA hondarrak 1 Irudian erakutsi dira. Zer informazio atera daiteke bi grafiko horietatik?
- e) 1. Irudian emandako informazioa kontuan hartuz, azal ezazu zehaztasunez kontraste formal bat (1) ereduko perturbazioek ELOE-ren oinarritzko hipotesiak betetzen dituzten ala ez aztertzeko.
- f) Ondorengo eredu estimatua ere KTA bidez lortu da:

$$\frac{\widehat{\text{Avgexp}}_i}{\text{Income}_i^2} = -23.8625 \frac{1}{(53.996) \text{Income}_i^2} - 2.6307 \frac{\text{Age}_i}{(1.6493) \text{Income}_i^2} + 89.2990 \frac{1}{(19.744) \text{Income}_i}$$

$$T = 100 \quad R^2 = 0.423 \quad \hat{\sigma} = 20.431$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Zein da eredu transformatu honen helburua? Zergatik estimatu da KTA bidez?

- g) Ondorengo erregresio laguntzailea ere KTA bidez lortu da:

$$\widehat{v}_i^2 = 0.179110 - 0.0498332 \text{Income}_i$$

$$(4.6888) \quad (1.2541)$$

$$T = 100 \quad R^2 = 0.000016 \quad \hat{\sigma} = 20.327$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

non  $\hat{v}_i$  f) galderako eredu transformatuko KTA hondarrak diren. Erabil ezazu erregresio laguntzaile hau eredu transformatuaren egokitasuna kontrastatzeko.

- h) Orain arte lortutako emaitza guztiak kontuan hartuz, kontrasta ezazu *Income* aldagaiaren banakako esanguratasuna *Avgexp* aldagaia azaltzeko. Justifika ezazu kontrastean erabilitako estimatzailearen hautaketa.

## ARIKETA 2018. 2 (2018-Maiatza)

Kontsidera ezazu ondoko eredua diru-eskaria azaltzeko:

$$\log M1_t = \beta_0 + \beta_1 \log GDP_t + \beta_2 \log CPI_t + u_t \quad (1)$$

non

- $M1_t$ : Diru-stock nominala  $t$  denboraldian,
- $GDP_t$ : Barne-Produktu Gordina Errealak  $t$  denboraldian,

- $CPI_t$ : Kontsumo-Prezioen Indizea  $t$  denboraldian.

1950Q1-2000Q4 denboraldiko hiruhileko behaketak erabiliz, ondoko eredua estimatu da KTA bidez,

$$\log \widehat{M1}_t = -1.6331 + 0.2871 \log GDP_t + 0.9718 \log CPI_t$$

(0.2286)
(0.0474)
(0.0338)

$$T = 204 \quad R^2 = 0.9895 \quad \hat{\sigma} = 0.0829 \quad (2)$$

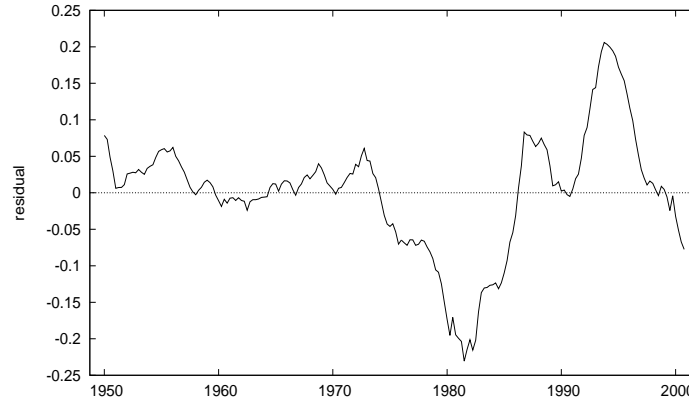
$$\sum_{t=2}^{204} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 1.357 \quad \sum_{t=2}^{204} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}) = -0.156 \quad \sum_{t=2}^{204} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 0.034$$

$$\sum_{t=1}^{204} \hat{u}_t^2 = 1.381 \quad \sum_{t=2}^{204} \hat{u}_t^2 = 1.374$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

KTA hondarrak 1. Irudian erakusten dira:

Irudia 1: KTA hondarrak



1. Irudiari erreparatuz, zer esan dezakezu perturbazioen oinarrizko hipotesien betetzeari buruz?
- Egin ezazu zenbait kontraste formal perturbazioek oinarrizko hipotesiak betetzen dituzten ala ez aztertzeko.
- Eredua berrestimatu ondoren ondokoa lortzen da:

$$\log \widehat{M1}_t = -1.6331 + 0.2871 \log GDP_t + 0.9718 \log CPI_t \quad (3)$$

(0.3116)
(0.0723)
(0.0608)

$$T = 204 \quad R^2 = 0.9895 \quad \hat{\sigma} = 0.0829$$

(HAC, parentesi artean Newey-West desbiderapen tipikoak)

Azal itzazu, egotekotan, eredu honen eta (2) ekuazioan estimatutako ereduaren arteko ezberdintasunak.

- d) Aldagai azalduaren lau atzerapen dituen eredu berri bat ere estimatu da KTA bidez, hurrengo emaitzak lortuz:

$$\begin{aligned} \widehat{\log M1}_t = & -0.0426 + 0.0081 \log \text{GDP}_t + 0.0226 \log \text{CPI}_t + 1.3462 \log \text{M1}_{t-1} \\ & - 0.1510 \log \text{M1}_{t-2} - 0.0968 \log \text{M1}_{t-3} - 0.1225 \log \text{M1}_{t-4} \\ & T = 200 \quad R^2 = 0.9999 \quad BG(4) = 6.2657 \quad \hat{\sigma} = 0.0088 \end{aligned} \quad (4)$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Zein da aldagai azalduaren lau atzerapenen barnerapenarekin espero den hobekuntza?

- e) Egin ezazu zenbait kontraste formal esperotako hobekuntza benetan lortzen den erabakitzeko. Azal itzazu zehaztasunez kontraste-prozeduraren elementu guztiak.
- f) Estimaturako hiru eruedetatik ((2), (3) edo (4)), zein erabili beharko litzatzeke diru-eskaria aztertzeko?

## ARIKETA 2018. 3 (2018-Ekaina)

Dolar amerikarrarekiko 5 dibisaren kanbio-tasen eguneko datuak ditugu:

- $bp_t$ : Dolar/Libera Esterlina.
- $cd_t$ : Dolar/Dolar kanadarra.
- $dy_t$ : Dolar/Yen japoniarra.
- $sf_t$ : Dolar/Franko suitzarra.
- $euro_t$ : Dolar/Euro.

Dolar/Euro kanbio-tasarako ondoko eredua proposatzen da:

$$euro_t = \beta_1 + \beta_2 bp_t + \beta_3 cd_t + \beta_4 dy_t + \beta_5 sf_t + u_t \quad (1)$$

non, kontrakoaren ebidentzia aurkitu ezean, ELOE-ren balizkoak betetzen direla suposatzen den. Bere KTA estimazioa hurrengoa da:

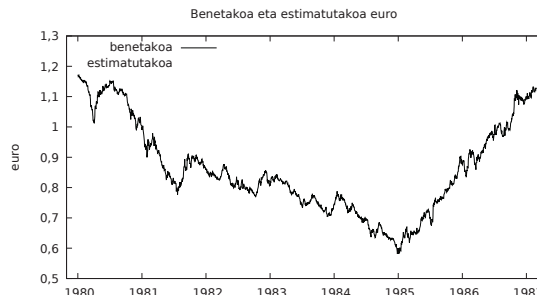
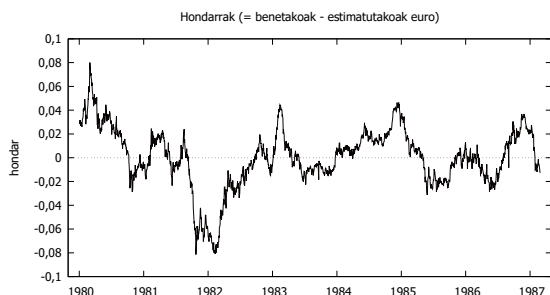
$$\begin{aligned} \widehat{euro}_t = & 0,2803 + 0,1434 bp_t - 0,5340 cd_t - 23,3073 dy_t + 1,7183 sf_t \\ & (0,0228) \quad (0,0037) \quad (0,0306) \quad (1,9689) \quad (0,0215) \\ & T = 1867 \quad R^2 = 0,9717 \quad \hat{\rho} = 0.9909 \quad DW = 0.0176 \\ & \text{(parentesi artean desbiderapen tipikoak)} \end{aligned} \quad (2)$$

1. Irudiko grafikoak lortuz.

Irudia 1: KTA estimazioaren emaitzak

(a) KTA hondarren denborazko seriea

(b) Benetakoa eta estimatutako aldagai endogenoa



- a) Idatz ezazu nola kalkulatu diren 1(a) Irudian agertzen diren KTA hondarrak. 1(a) Irudi honetatik abiatuta irudika ezazu, gutxi gorabehera baina modu argi batean, 1(b) Irudian falta den estimatutako aldagai endogenoari dagokion marra (hau da,  $\widehat{euro}_t$ ). Zer ondorio dituzte bi grafiko hauek (1) ekuazioko KTA estimazioan?
- b) 1. Irudiko grafikoak kontuan hartuz, kontrasta ezazu egokia iruditzen zaizun perturbazioen portaerari buruzko hipotesia.
- c) Orain arte lortutako emaitza guztiak kontuan hartuz, azal ezazu zehaztasunez (1) ekuazioko eredu-estimatzeko prozedurarik egokiena, bere estimatzaileek zer propietate izan behar dituzten eta zer baldintzapetan gertatuko litzatekeen seinatuz.
- d) Aurreko galderan deskribatutako metodoarekin hurrengo KTA erregresioa lortzen da:

$$\widehat{euro}_t^* = 8,69e-06 + 0,0654 bp_t^* + 0,0640 cd_t^* + 15,6646 dy_t^* + 1,2062 sf_t^* \quad (3)$$

$(0,0001) \quad (0,0063) \quad (0,0305) \quad (2,5364) \quad (0,0230)$   
 $T = 1866 \quad R^2 = 0,8537 \quad DW = 2.1704 \quad BG(1) = 13,5523 \quad HKB = 0,0119$   
 (parentesi artean desbiderapen tipikoak)

Azal ezazu argi zein den erregresio honetan kalkulatuako estimatzailea, eta zer diren  $euro_t^*$ ,  $bp_t^*$ , ...,  $sf_t^*$  aldagaiak. Zure ustez, (2) ekuazioko KTA erregresioan erabilitakoa baino estimatzaile hobea da. Justifika ezazu hipotesi-kontraste baten bidez.

- e) Dolar/Euro eta Dolar/Libera kanbio-tasak aldi berean zehazten direla uste da, hurrengo erlazioa betez:

$$bp_t = \gamma_1 + \gamma_2 euro_t + v_t \quad (4)$$

Deskriba ezazu zehaztasunez nola estimatuko zenituzkeen (1) ekuazioko parametroak kasu honetan, baita erabilitako estimatzaileak izan beharko lituzkeen propietateak ere.

f) Kontsidera itzazu hurrengo taulako emaitzak:

KTA2E, 1980-01-03 :1987-02-26 behaketak erabiliz ( $T = 1866$ )

Aldagai azaldua: euro

Ordezkoak erabilia: bp

Ordezkoak: const cd dy sf cd\_1 dy\_1 sf\_1

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	$p$ -balioa
const	0,528386	0,232499	2,2726	0,0230
bp	0,227092	0,0777555	2,9206	0,0035
cd	-0,917772	0,359008	-2,5564	0,0106
dy	-19,2185	4,27069	-4,5001	0,0000
sf	1,51224	0,191040	7,9158	0,0000
$R^2$	0,964216	$\hat{\rho}$ 0,991331	Durbin-Watson	0,016525

Hausman kontrastea- Kontrasterako estatistiko asintotikoa = 1,4928

$p$ -balioa = 0,221782

Azal ezazu zein den ondorengoaren esanahia: Ordezkoak: const cd dy sf cd\_1 dy\_1 sf\_1.  
Orain arte aurkeztutako eredu estimatuetatik, zure ustez, zein da egokiena? Zergatik?

g) Demagun ondoko hipotesi hutsa kontrastatu behar duzula: Dolar/Libera eta Dolar/Dolar kanadarra kanbio-tasek Dolar/Euro kanbio-tasan dituzten esperotako efektuak berdinak dira. Azal ezazu nola egingo zenukeen eta zergatik.

## ARIKETA 2018. 4 (2018-Ekaina)

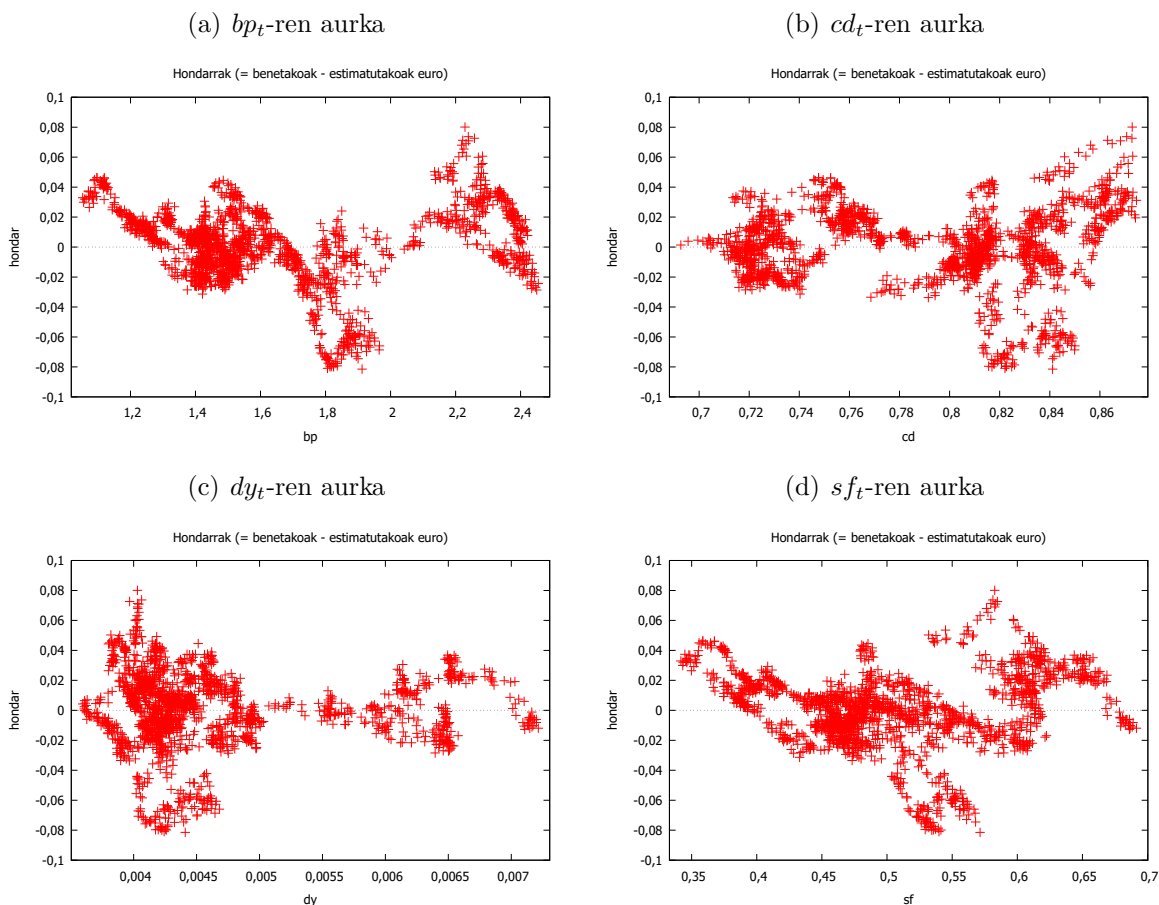
Kontsidera dezagun hasierako eredia

$$euro_t = \beta_1 + \beta_2 bp_t + \beta_3 cd_t + \beta_4 dy_t + \beta_5 sf_t + u_t$$

non orain erregresore guztiak ez estokastikoak direla eta autokorrelaziorik ez dagoela suposatzen den.

(2) ekuazioko KTA estimaziotik 1. Irudiko grafikoak lortzen dira:

## Irudia 1: KTA hondarrak



- a) Azal eta interpreta itzazu 1. Irudiko grafikoak. Zein efektu ondoriozta daitezke eredu ko KTA estimatzailearen propietateen gainean?
- b) Galdera honetan 1(c) grafikoa baino ez kontsideratu. Azal ezazu nola kontrastatuko zenukeen garrantzitsuena iruditzen zaizun hipotesia Goldfeld eta Quandt kontrastearen bidez.
- c) Ondorengo erregresio laguntzailea lortzen da

$$\widehat{usq}_t = 0,0014 - 0,0012 bp_t - 0,0010 cd_t - 1,1545 dy_t + 0,0144 sf_t \quad (1)$$

$(0,0009) \quad (0,0001) \quad (0,0012) \quad (0,0785) \quad (0,0009)$   
 $T = 1867 \quad R^2 = 0,2073 \quad HKB = 0,0019$   
 (parentesi artean desbiderapen tipikoak)

non  $usq_t$  (2) ekuaziotik kalkulaturako KTA hondarrak karratura diren. Azal ezazu zer kontrasterako behar den aurreko erregresioa. Kontraste honen emaitza bateragarria da aurreko grafikoekin?

KTA bidez lortutako hurrengo bi estimazio ditugu:

$$\frac{\widehat{\text{euro}}_t}{\sqrt{\widehat{\text{usq}}_t}} = 0,2796 \frac{1}{\sqrt{\widehat{\text{usq}}_t}} + 0,1351 \frac{\text{bp}_t}{\sqrt{\widehat{\text{usq}}_t}} - 0,4676 \frac{\text{cd}_t}{\sqrt{\widehat{\text{usq}}_t}} - 21,3993 \frac{\text{dy}_t}{\sqrt{\widehat{\text{usq}}_t}} + 1,6317 \frac{\text{sf}_t}{\sqrt{\widehat{\text{usq}}_t}}$$

$$T = 1867 \quad R^2 = 0,9901 \quad BP(4) = 18,8022, \quad \hat{\sigma} = 1,2160 \quad (2)$$

(parentesi artean desbiderapen tipikoak)

non  $\widehat{\text{usq}}_t$  (1) ekuazioko aldagai endogenoaren estimazioa den eta

$$\widehat{\text{euro}}_t = 0,2803 + 0,1434 \text{bp}_t - 0,5340 \text{cd}_t - 23,3073 \text{dy}_t + 1,7183 \text{sf}_t$$

$$(0,0202) \quad (0,0029) \quad (0,0268) \quad (2,0966) \quad (0,0229) \quad (3)$$

$$T = 1867 \quad R^2 = 0,9717 \quad \hat{\sigma} = 0,0251$$

(parentesi artean Whiten desbiderapen tipikoak)

- d) Emaitzak kontuan hartuz, arrazoi ezazu zeintzuk diren (2) eta (3) ekuazioetako KTA estimatzaileen propietateak.
- e) Egin ezazu ondoko kontrastea: Dolar/Libera kanbio-tasak Dolar/Euro kanbio-tasan duen efektua berdin 1 da. Justifika ezazu kontrastearen erabilitako estatistiko eta estimatzailearen hautaketa.
- f) (1) ereduko perturbazioetan bai heterozedastizitatea baita autokorrelazioa ere egoteko kasuan, azal ezazu nola egingo zenukeen aurreko e) galderako kontrastea.

# Ordenagailuko tareak

Landu beharreko gaitasunak:

- a) Erabilitako suposizioek oinarriko eredu ekonometriko bat zehazterako orduan duten garrantzia ulertzea, suposizio errealistagoak proposatu eta erabili ahal izateko.
- b) Estimazio metodo desberdinak bereiztea eta interesatzen zaizkigun aldagai ekonomikoen araberrako erabilpena ebaluatzea, emaitza fidagarriak lortzeko.
- c) Iturri estatistiko desberdinak erabiltzea eta aldagai ekonomikoen arteko erlazioak aztertzeko software ekonometriko baten erabileran trebatzea.
- d) Lortutako emaitzak behar bezala baloratzea txosten ekonomikoak egiteko.

## 1. TAREA

224 etxebizitzetarako buruzko datuak dauzkagu, zeintzuk Kaliforniako *Orange* konderriko bi egoitzetan banaturik dauden, *Dove Canyon* eta *Coto de Caza*-n<sup>23</sup>. Hauen salmenta prezioa eta ezaugarri ezberdinei buruzko datuak ditugu. *Dove Canyon* etxebizitza nahiko txikitako gunea da, golf zelai baten inguruan eraikita. *Coto de Caza* bizi maila altuagoko gunea da baina baita herrikoia ere, etxebizitza handiagoekin. Kontuan hartzen diren aldagaiak hurrengoak dira

salepric = etxebizitzaren salmenta prezioa, mila dolarretan  
sqft = etxebizitzaren tamaina, oin karratuetan  
age = etxebizitzaren antzinatasuna, urtetan  
city = 1 Coto de Cazan badago, 0 Dove Canyonen badago

Datu hauek Gretl bidez lor ditzakezu: Fitxategia → Ireki datuak → Lagindegia fitxategia → Aukeratu Ramanathan, data7-24.gdt fitxategia.

- a) Zehaz ezazu lehen eredu bat, etxebizitzaren tamaina eta antzinatasuna etxebizitzaren prezioa azaltzen duten ala ez aztertzeko. Estima ezazu eredu Karratu Txikien Arrunten bidez. Komenta itzazu lortutako emaitzak, doikuntza, esanguratasuna eta estimatutako koefizienteen zeinuak. Arrazona ezazu emaitzak egokiak diren ala ez.
- b) Lor ezazu lehen zehazpen honen KTA estimazioaren hondarren grafikoa. Zer deritzozu grafikoa aurkezten duela? Komenta ezazu zehazpen txarraren arazoa dagoen ala ez uste duzun.
- c) Barnera ezazu erudian *city* aldagaia aldagai azaltzaile bezala. Interpretatu ezazu zer jasotzen duen dagokion koefizientea.
- d) Estima ezazu bigarren zehazpen hau KTA bidez. Komenta itzazu emaitzak eta konpara itzazu hauek a) atalean lortutakoekin. Hobetu al da zehazpena? Arrazona ezazu erantzuna.

---

<sup>23</sup>Iturria: Ramanathan, Ramu (1992) *Introductory econometrics with applications*



Ereduaren bigarren zehazpenari dagokionez:

- e) Lor itzazu ondorengo grafikoak.
  - Hondarren segidaren grafikoa.
  - KTA hondarren grafikoa *age* aldagaiaren aurka.
  - KTA hondarren grafikoa *sqft* aldagaiaren aurka.
- f) Azter ezazu, arrazonatuz, grafikoek eskaintzen duten informazioa.
- g) Buru itzazu behar dituzun heterozedastizitate kontrasteak. Azal ezazu kontrastearen prozedura eta azal itzazu lortutako emaitzak.
- h) Aurreko g) atalean lortutakoari jarraituz, d) ataleko zer emaitza ez dira fidagarriak inferentziarako? Nola aldatuko zenituzke KTA estimazio metodo berdina erabiltzen jarraitzeko? Hau egiteko erabil ezazu Gretl-en dagoen prozedura (HCCM). Komenta itzazu emaitzak eta konpara itzazu d) atalean lortutakoekin.
- i) Estima ezazu Karratu Txikien Zabalduen edo Ponderatuen bidez, ponderazio aldagai bezala etxebizitzaren tamainaren karratuaren alderantzizkoa erabiliz. Azter itzazu emaitzak.
- j) Zer esan nahi du datu ponderatuak eta datu originalak izatea? Zergatik erabiltzen da ponderazio aldagai bezala *sqft*<sup>2</sup>-ren alderantzizkoa? Azal ezazu arrazonatuz.
- k) Proposa ezazu perturbazio terminuaren bariantzaren egiturarentzat beste zehazpen bat, bai *age*, bai *sqft* barneratzen dituen eta estima ezazu Karratu Txikien Zabalduek Eginkorren bidez.
- l) Idatz ezazu ondorioen atal bat, ariketa osoan zehar lortutako emaitzak laburbilduz. Aukera ezazu, baita zer emaitza aukeratuko zenituzkeen ere eta zergatik.

## 2. TAREA

1982 urtea oinarri bezala erabiliz, EEBBetako produkzio indize eta nekazal eta abeltzaintza produkzio faktoreei buruzko urteroko datuak ditugu 1948tik 1993rako epealdian zehar. <sup>24</sup> Kontuan hartzen diren aldagaiak hurrengoak dira:

year	= 1948-1993 (n=46)
output	= Nekazal eta abeltzaintza produkzioa
labor	= Lana faktorea
land	= Ustiapen tamainua
machines	= Hornidura gastua
energy	= Erabilitako energia
fert	= Gastua ongarri kimikoetan
seedfeed	= Gastua hazi, pentsu eta ganadu erosketan
others	= Bestelako gastuak

---

<sup>24</sup>Iturria: *Economic report of the President, 1996*, B-95 eta B-96 taulak, Ramanathan, Ramu (1992)-tik hartuta *Introductory econometrics with applications*.

Datu hauek Gretl-en lor ditzakezu: → Fitxategia → Ireki datuak → Lagindegia fitxategia → Aukeratu Ramanathan, data9-5.gdt fitxategia

- a) Kontuan izandako produkzio faktoreek 1948-1993 epean EEBB-etako nekazal-abeltzaintza produkzioa azaltzeko gai diren ala ez ikusteko, zehaz ezazu log-log eredu bat, produkzioaren logaritmoa input guztien logaritmoarekin erlazionatzen dituen. Estima ezazu eredua Karratu Txikien Arrunten bidez. Interpreta itzazu lan faktorearen koefizienteak, baita ustiapen tamainarenak ere. Komenta itzazu lorturiko estimazioaren emaitzak doikuntza eta esanguratasunaren arabera eta estimatutako koefizienteen zeinuen arabera. Arrazona ezazu emaitzak egokiak diren ala ez.
- b) Lor ezazu zehazpen honen KTA estimazioaren hondarren grafikoa. Zer iruditzen zaizu grafikoa? Komenta ezazu zehazpen txarraren arazoren bat edo oinarritzko hipotesien ez betetzea antzematen duzun.
- c) a) atalean proposatutako ereduan, kontrasta ezazu lehen ordenako autokorrelazioaren existentzia perturbazioetan, Durbin eta Watson eta Breusch eta Godfrey kontrasteen bidez. Ondoren, kontrasta ezazu hirugarren ordenako autokorrelazioaren existentzia. Zein da kontrasteen emaitzak aztertuz lortu duzun ondorioa?
- d) c) atalean lortutakoari jarraituz, a) atalean lortutako zer ondorio ez dira fidagarriak inferentziarako? Nola aldatuko zenituzke lehengo KTA estimazio metodoa erabiltzen jarraitzeko? Erabil ezazu Gretl-en dagoen prozedimendua. Komenta itzazu emaitzak eta konpara itzazu a) atalean lortutakoekin.
- e) Estima ezazu eredua Cochrane-Orcutt prozedimendua erabiliz. Idatz ezazu estimatu beharreko eredua eta deskriba ezazu argi aurrera eramane duzun estimazio prozedimendua parametroen emaitzak lortu arte. Lor ezazu hondarren grafikoa, komentatu emaitzak. Estimatu ereduko perturbazioan oinarritzko hipotesiren bat betetzen ez delaren susmorik daukazu?
- f) Berrestima ezazu eredua ez esanguratsuak diren erregresoreak kenduz eta errepika ezazu autokorrelazioaren analisiaren existentzia perturbazioetan.
- g) Idatz ezazu konklusioen azken atal bat, ariketan zehar lortutako emaitzak laburbilduz eta erlazionatuz. Gainera, aukera ezazu zehaztuko zenukeen eredua [(a) atalean proposatutakoa, e) atalekoa ala f) atalekoa]. Arrazona ezazu zure aukera.
- h) Zer esan nahi du indizeek 1982 urtea oinarritzat izateak? Oinarria ez balitz berdina indize guztientzat, zentzurik izango luke analisiak? Zergatik? Zer egin beharko zenuke arazoa konpontzeko?

### **3. TAREA**

EEBB-etako 51 estatuei buruzko informazioa biltzen duen datu base bat eskuragarri dago. Bertan 1993 urtean hiri-garraioan egindako gastu metatua (*EXPTRAV*) eta errenta erabilgarri metatuaren (*INCOME*) datuak agertzen dira.<sup>25</sup> Kontuan hartzen diren aldagaiak ondorengoak dira:

<sup>25</sup>Iturria: Statistical Abstract of U.S. (1995), Ramanathan, Ramu (1992) *Introductory econometrics with applications* liburuan agertzen delarik.

EXPTRAV = Hiri-garraioan egindako gastu metatua, bilioi dolarretan,  
 (Tartea 0.708 - 42.48).  
 INCOME = Errenta erabilgarri metatua, bilioi dolarretan,  
 (Tartea 9.3 - 683.5).  
 POP = Populazioa, milioietan,  
 (Tartea 0.47 - 31.217).

Datu hauek Gretl bidez lor ditzakezu: Fitxategia → Ireki datuak → Lagindegia fitxategia → Aukeratu Ramanathan, data8-2.gdt fitxategia.

- a) Zehaz ezazu lehen eredu bat, errenta erabilgarri metatuak hiri-garraioan egindako gastu metatua azaltzen duen ala ez aztertzeko. Interpretatu itzazu koefizienteak.
- b) Estima ezazu ereduak Karratu Txikien Arrunten bidez. Komentatu itzazu lortutako emaitzak, doikuntza, esanguratasuna eta estimatutako koefizienteen zeinuak. Arrazonatu ezazu emaitzak egokiak diren ala ez.

Populazio handiko estatuetan egindako hiri-garraioaren gastua populazio gutxi dutenena baino aldatzeko izatea oso posiblea denez, perturbazioaren bariantza populazioarekin hazi egiten dela pentsa dezakegu. Estatu desberdinei dagozkien datuak erabiliz, posibilitate hau analizatu behar duzu. Horretarako:

- c) Lor itzazu ondorengo grafikoak.
  - Hondarren segidaren grafikoa.
  - KTA hondarren grafikoa *POP* aldagaiaren aurka.
- d) Azter ezazu, arrazonatuz, grafikoek eskaintzen duten informazioa.
- e) Burutu ezazu Goldfeld eta Quandten kontrastea, perturbazioaren bariantza *POP* aldagaiaren funtzio gorakor bat delaren suposiziopean. Azal ezazu kontrastearen prozedura zehaztasunez eta komentatu itzazu lorturiko emaitzak.
- f) Burutu ezazu Breusch eta Paganen kontrastea, perturbazioaren bariantza *POP* aldagaiaren funtzio bat delaren suposiziopean. Azal ezazu kontrastearen prozedura zehaztasunez eta komentatu itzazu lorturiko emaitzak.
- g) Aurreko e) eta f) ataletan lortutako emaitzetan oinarrituz, komentatu ezazu b) atalean lortutako emaitzen fidagarritasuna.  $\hat{\beta}_{KTA}$  estimatzailean oinarrituz, posiblea litzateke errenta erabilgarri metatuaren bilioi bat dolarreko hazkunde batek hiri-garraioan egindako gastua bilioi bat dolarretan handitzea?
- h) Estima ezazu ereduak Karratu Txikien Zabalduen edo Ponderatuen bitartez, populazioaren alderantzizkoa ponderazio bezala erabiliz. Marraztu itzazu hondarrak aldagai azaltzailearekiko. Analizatu itzazu estimazioaren emaitzak.
- i) “Ponderatutako datuak” edota “hasierako datuak” esaten denean, zer esan nahi da? Zergatik  $POP^2$  aldagaiaren alderantzizkoa erabili da ponderazio bezala? Azal ezazu arrazonatuz.

j) Aurreko i) atalean kontsideratutako bariantzaren egituran oinarrituz:

j.1) Idatz ezazu dagokion eraldatutako eredu. Estima ezazu proposaturiko eraldatutako eredu efizienteki. Konpara itzazu lorturiko emaitzak h) ataleko estimazioan lorturiko emaitzekin. Ondorioen bat atera al duzu?

j.2) Marraztu itzazu eraldatutako ereduaren hondarrak dagokion eraldatutako aldagai azaltzailearen aurka. Interpretatu itzazu grafikoa eta konpara ezazu h) atalean egindako grafikorekin. Zer ondorioztatu dezakezu?

k) Zehaz ezazu *EXPTRAV* eta *INCOME* aldagaiak erlazionatzen dituen eredu bat,  $\sigma_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 POP_i$  suposiziopean. Estima ezazu dagokion eraldatutako eredu, jarraitu beharreko prozeduraren xehetasun guztiak emanaz.

l) Idatz ezazu ondorioen txosten bat, ariketa osoan zehar lortutako emaitzak laburbilduz.

## 4. TAREA

Aurreko mendearen erdialdean EEBBetako estatu batean egondako izozki eskaera analizatu nahi da. Horretarako, 1951-1953 bitarteko lau-astero bildu izan ziren 30 behaketa eskuragarri daude, martxoaren 18tik eta uztailaren 11ra hurrenez hurren.<sup>26</sup> Kontuan hartzen diren aldagaiak ondorengoak dira:

Q = izozki pinten per capita kontsumoa, (tartea 0,256 - 0,548)

P = izozki pintako prezioa dolarretan, (tartea 0,26 - 0,292)

I = asteroko errenta erabilgarri familiarra dolarretan (tartea 76 - 96)

F = batezbesteko tenperatura Fahrenheit gradutan, (tartea 24 - 72)

Datu hauek Gretl-en bidez lor ditzakezu: Fitxategia → Ireki datuak → Lagindegia fitxategia → Aukeratu Ramanathan, data9-1.gdt fitxategia.

a) Amerikar unitateetara ohituta ez gaudenez eta pinta bat 0,473 litro direla, gradu zentigradu batean 1,8 Fahrenheit gradu daudela eta dolar bat 0,82 euro direla jakinik, alda itzazu aldagaien unitateak ezagunak diren unitateetan neurtuak ager daitezen.

b) Zehaz ezazu izozki kantitatea ( $Q$ ) prezioarekin ( $P$ ), errentarekin ( $I$ ) eta tenperaturaren karratuarekin ( $F^2$ ) erlazionatzen duen eredu bat.

b.1) Interpretatu itzazu ereduko koefizienteak.

b.2) Estima ezazu ereduaren Karratu Txikien Arrunten (KTA) bitartez. Koefizienteen zeinuak esperotakoak dira?

---

<sup>26</sup>Iturria: Hildreth, C. eta J. Lu (1960), "Demand relations with autocorrelated disturbances", *Technical Bulletin No 2765, Michigan State University*, artikulua datuak zeintzuk Ramanathan, R. (1992), *Introductory econometrics with applications* liburua bilduta agertzen diren.

- b.3) Lehen lau asteko batezbesteko temperatura gradu zentigradu batean igo izan balitz, beste aldagai azaltzaileen balioak konstante mantenduz, zenbatean estimatzen duzu epe horretako izozkien per-capita kontsumoaren aldakuntza? Eta epe horretako temperatura 25 gradu zentigradukoa izan balitz? Eta 40 gradu zentigradukoa izan balitz?
- b.4) Komenta itzazu lortutako emaitzak: aldagaien esanguratasuna eta doikuntza.
- c) Lor ezazu hondarren grafikoa. Zer iradokitzen dizu? Komenta ezazu zehazpen txarra edo oinarrizko hipotesiren bat bete gabe gelditzen dela uste duzun.
- d) Kontrasta ezazu, Durbin eta Watsonen kontrastearen bitartez, ea perturbazioek lehen ordenako prozedura autorregresibo bat jarraitzen duten. Zer ondorioztatzen duzu kontrastearen emaitzatik?
- e) Kontrasta ezazu, Breusch eta Godfrey kontrastearen bitartez, ea perturbazioek bigarren ordenako prozedura autorregresibo bat jarraitzen duen.
- e.1) Ba al dago kontraesanik Durbin eta Watson estatistikoarekin lortutako emaitzarekin? Zergatik? Arrazona ezazu zure erantzuna.
- e.2) Lor ezazu, hondarren ( $\hat{u}_t$ ), bere lehen eta bigarren atzerapenen ( $\hat{u}_{t-1}$ ,  $\hat{u}_{t-2}$ ), aldagai azaltzaileen ( $P, I$  eta  $F^2$ ) eta aldagai azalduaren ( $Q$ ) korrelazio matrizea. Komenta itzazu lorturiko balioak, dauzkaten zeinua eta tamainak arrazoizkoak diren adieraziz.
- e.3) Breusch eta Godfreyren kontrastearen oinarrituz, zein da perturbazioen prozedura estokastikoa adierazten duen ekuazioa? Kontrasta ezazu.
- f) Aurreko atalean lorturiko lagin ebidentzia kontuan harturik, b) ataleko emaitzetatik zeintzuk ez dira inferentziarako fidagarriak?
- g) Estima ezazu ereduaren Karratu Txikien Zabalduek (KTZE) bitartez eta erabili ezazu Cochran eta Orcutt metodoa korrelazioaren parametroa estimatzeko.
- g.1) Azal ezazu zehaztasunez ereduaren parametro guztien estimazioak lortzeko erabili den estimazio prozedura guztia.
- g.2) Idatz ezazu lagin erregresio funtzioa.
- g.3) Lor ezazu hondarren grafikoa eta komentatu emaitzak.
- h) Estima itzazu ereduaren koefizienteak Karratu Txikien Zabalduek (KTZ) bitartez,  $u_t$  eta  $u_{t-1}$  aldagaien arteko korrelazioa  $-0,7$  delaren suposiziopean.
- h.1) Azal ezazu zehaztasunez ereduaren parametro guztien estimazioak lortzeko erabili den estimazio prozedura guztia.
- h.2) Idatz ezazu lagin erregresio funtzioa.
- h.3) Lor ezazu hondarren grafikoa eta komentatu emaitzak.
- i) Aurreko g) eta h) ataletan lortutako emaitzak emanik, zein estimatzaile erabiliko zenuke ereduaren koefizienteak estimatzeko? Arrazona ezazu zure erantzuna.
- j) Asteroko errenta erabilgarria euro batean gehituko balitz, beste aldagaien balioak konstante mantenduz:

- j.1) Zenbatean estimatzen duzu asteroko izozki eskariaren gehikuntza?
- j.2) Posiblea litzateke gehikuntza hori mililitro batekoa izatea?
- k) Idatz ezazu ondorioen txosten bat, ariketa osoan zehar lortutako emaitzak laburbilduz.

## 5. TAREA

EE.BBetako ezkonduetako emakumeen soldatan eragiten duten faktoreak aztertzeke, ondoko eredu proposatzen da:

$$lwage_i = \beta_1 + \beta_2 educ_i + \beta_3 huswage_i + \beta_4 exper_i + \beta_5 expersq_i + u_i \quad (1)$$

non

- $lwage_i$ :  $i$  emakumearen orduko soldataren (dolarretan) logaritmoa.
- $huswage_i$ :  $i$  emakumearen senarraren orduko soldata (dolarretan).
- $educ_i$ :  $i$  emakumearen eskolatzte-urteak.
- $exper_i$ :  $i$  emakumearen lan-esperientzia, urtetan.
- $expersq_i$ :  $i$  emakumearen lan-esperientzia karratura.

Datu hauek Gretl-en bidez lor ditzakezu: Fitxategia → Ireki datuak → Lagindegia fitxategia → Aukeratu Wooldridge, mroz.gdt fitxategia.

Datu-multzoan 1975. urteko 753 behaketa ditugu. Lehenengo 428 lan egiten duten emakumeei dagozkie, eta besteak lan egiten ez duten emakumeei. Lan egiten duten emakumeekin baino ez gara geratuko, hauek soldata bat irabazten dutenak direlako. Lagina murrizteko ondokoa egiten dugu: Lagina → Ezarri ibiltarrea → Hasi: 1, Bukatu: 428.

- a) Eman (1) eredu KTA estimazioaren emaitzak.
- b) Komentatu lortutako emaitzak: doikuntzaren egokitasuna, estimatutako koefizienteak eta hauen esanguratasuna.
- c) Ba al dago  $lwage$  eta  $exper$  aldagaien artean dagoen erlazioa koadratikoa izateko ebidentziarik? Eman zure ondorioak ateratzeko erabilitako kontrastearen emaitzak.
- d)  $educ$  (1) eredu perturbazioarekin korrelazionatutako erregresore estokastikoa dela uste da. Azaldu zer eragin duen honek aurreko ataletan lortutako emaitzetan.
- e) Eman (1) eredu Ordezko Aldagaien metodoaren bidez estimatzean lortutako emaitzak, aitaren eskolatzte-urteak (**fatheduc**) **educ** aldagaiaren instrumentu bezala erabiliz. Oraingo emaitzak KTA bidez lortutakoetatik asko aldentzen al dira? Komentatu emaitzak.

- f) Idatzi erabilitako OA estimatzailearen adierazpena. Idatzi  $Z$  ordeko aldagaien matrizea, eta  $X$ , ereduko aldagai azaltzaileen matrizea. Ez ipini lagineko balioak zutabeetan, erabili aldagaien izenak baino ez. Eman dimentsioak.
- g) **educ** aldagaiarentzat beste instrumentu bat ere bada, amaren eskolatzetarako (**motheduc** aldagaia) hain zuzen ere. Estimatu (1) eredua Karratu Txikien 2 Etapatan bidez instrumentu guztiak erabiliz. Eman Gretl bitartez lortutako emaitzak. Alderatu emaitzak e) atalean lortutakoekin.
- h) Kalkulatu instrumentuen eta **educ** aldagaiaren arteko korrelazioak. Zer adierazten dute korrelazio hauek instrumentu hauen egokitasunaren inguruan?
- i) Egin **educ** aldagaiaren erregresioa **ordezko aldagai posible guztiekiko**, konstantea barne:

$$educ_i = \alpha_1 + \alpha_2 huswage_i + \alpha_3 exper_i + \alpha_4 expersq_i + \alpha_5 fatheduc_i + \alpha_6 motheduc_i + v_i$$

Gorde doitutako erregresioaren seriea  $\widehat{educ}_i \quad i = 1, \dots, 428$ , eta erabili aldagai hau *educ* aldagaiaren instrumentu bezala. g) ataleko emaitza berberak lortzen dituzu? Zergatik lortu dituzu emaitza horiek? *fatheduc* eta *motheduc* aldagaiak esanguratsuak al dira?

- j) Egin Hausmanen kontrastea e) ataleko emaitzentzat. Emaitza ikusita, nola estimatuko zenituzke (1) ereduko koefizienteak?
- k) Kontrastatu *exper* aldagaia esanguratsua den. Gainontzeko ezaugarriak konstante mantenduz, zenbatean estimatzen duzu soldataren aldakuntza emakumeak lan-esperientzako urte gehigarri bat izatean? Aldakuntza hau berdina al da emakume guztientzat?

## 6. TAREA

EEBBetako Osasun Sailak osasun gastu agregatua (*exphlth*), bilioi dolarretan, errenta pertsonal erabilgarri agregatua (*income*), bilioi dolarretan, 65 urte baino gehiagoko populazioaren portzentaia (*seniors*) eta populazioaren (*pop*), milioitan, arteko erlazioa analizatu nahi du 2005 urterako. Hau dela eta Harvard-eko Ekonomia Fakultateko bi bekaduni ikerketa enkargua egin die. 51 amerikar estatuei dagozkien 2005 urteko datuak ditugu.

Datu hauek Gretl barneko Ramanathan karpeta **data8-3.gdt** fitxategian dituzue.

- a) Idatz ezazu *income*, *seniors* eta *pop* aldagai azaltzaileak *exphlth* aldagaiarekin erlazionatzen dituen eredua. Interpretatu itzazu ereduko koefiziente estimatuak. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako esanguratasuna. Idatz itzazu perturbazioari buruz egin behar diren balizkoak kontrasterako estatistikoak baliagarriak izateko.
- b) Lor itzazu ondorengo grafikoak eta azter ezazu grafikoek eskaintzen duten informazioa.
- b.1) Hondarren segidaren grafikoa.
- b.2) KTA hondarren grafikoa *pop* aldagaiaren aurka.

- b.3) KTA hondarren grafikoa *income* aldagaiaren aurka.
- c) Perturbazioaren bariantza populazioaren funtzio gorakor bat delaren suposiziopean,  $\text{var}(u_i) = \sigma^2 \text{pop}_i$ :
- c.1) Burutu ezazu Goldfeld eta Quandten kontrastea.  
 -Lehen azpilagina:  
*Lagina* → *Ezarri ibiltartea* → Hasi: 1 eta Bukatu:  $T_1$   
 ↔ Estima ezazu ereduaren lehen azpilaginarentzat  
 -*Lagina* → *Berrezarri lagin osoa*  
 -Bigarren azpilagina:  
*Lagina* → *Ezarri ibiltartea* → Hasi:  $T_1 + p + 1$  eta Bukatu:  $T$   
 ↔ Estima ezazu ereduaren bigarren azpilaginarentzat
- c.2) Idatz ezazu aurreko bariantzaren egiturari dagokion eraldatutako ereduaren eta lor itzazu perturbazio berriaren propietateak.
- c.3) Estima ezazu Karratu Txikien Zabalduen edo Ponderatuen bidez, ponderazio aldagai bezala populazioaren alderantzizkoa erabiliz. Azter itzazu emaitzak.
- c.4) Zer esan nahi du datu ponderatuak eta datu originalak izatea?
- d) Perturbazioaren bariantza  $\text{var}(u_i) = \gamma_1 + \gamma_2 \text{pop}_i^2 + \gamma_3 \text{income}_i^2 + \gamma_4 \text{pop}_i * \text{income}_i$  delaren suposiziopean,
- d.1) Nola kontrastatuko zenuke susmo hau? Azal ezazu kontrastearen prozedura. Burutu ezazu eta komenta itzazu emaitzak.
- d.2) Nola estimatuko zenuke ereduaren? Azal ezazu zehazki estimazio prozedura. Zeintzuk dira erabilitako estimatzailearen propietateak?
- d.3) Estima ezazu ereduaren.
- e) Komenta itzazu lorturiko emaitza guztiak eta erabaki ezazu ereduaren nola estimatuko zenukeen.

## 7. TAREA

EEBBetako gobernuaren XX. mendeko jaiotze-politikaren inguruko azterketa batean, 1913-1984 bitarteko urteroko datuak dauzkagu ondoko aldagaien zatiak<sup>27</sup>:

```

gfr 15-44 urte bitarteko 1000 emakumeko jaiotze-kopurua
pe  murrizketa fiskalak terminu errealetan, dolarretan
year 1913tik 1984rako denbora segida
pill =1 urtea >= 1963 bada (1963 urtean pilula antisorgailua merkaturatu zen)
ww2  =1 urtea 1941 eta 1945 artean badago (2. mundu gerra)

```

<sup>27</sup>Wooldridge, J.M. (2001), *Introducción a la Econometría*, data fertil3.gdt.



Lehenbizi ereduak zehazten da

$$gfr_t = \beta_1 + \beta_2 pe_t + u_t \quad (1)$$

- a) Ondoko pausuak jarraituz, eman denbora serieko egitura eskura daukagun datu-multzoari:  
*Datuak*  $\rightarrow$  *Datu basearen egitura*  $\rightarrow \dots$
- b) Estimatu (1) ekuazioan proposatutako ereduak KTA bidez. Interpretatu emaitzak.
- c) Lortu  $gfr_t$  eta hondarren denbora serieen grafikoa. Komenta itzazu aurreko atalean lortutako  $R^2$  kontuan izanik.
- d) Berrestimatu ereduak  $pill_t$  eta  $wu2_t$  erregresoreak barneratuz. Zer jasotzen da hauetako bakoitzarekin? Hauek ereduak barneratzeak ba al dauka eraginik aurreko grafikoei?
- e) Kontrastatu lehen ordenako autokorrelazioa dagoen ala ez, Durbin-Watsonen estatistikoa erabiliz.
- f) Orain arteko informazio guztia kontuan hartuz, kontrastatu  $pe$  aldagaiaren banakako esanguratasuna.
- g) Estimatu ereduak Cochrane-Orcutt metodoaren bidez. Komentatu lortutako emaitzak beharrezko kontrasteak eginez.
- h) Estimatu ereduak Hildreth-Lu metodoaren bidez. Ba al dago desberdintasun esanguratsurik? Zergatik?
- i)  $gfr_{t-1}$  denboraldi bateko atzerapena duen aldagaia gehitu erregresore moduan eta estimatu KTA bidez. Lortu hondarren grafikoa eta komentatu. Lehen ordenako autokorrelazio kontraste bat burutu eta, lortutako emaitza kontuan hartuz, komentatu analisiaren emaitzak. Beste estimatzailearik erabiltzea egokia al deritzozu? Zergatik?
- j) Barnera ezazu ereduak  $t$  denborazko joera bat. Hondarren irudia kontuan izanik, saiatu gaineratzen  $t^2$  joera koadratikoa ere.
- k) Egin ezazu Durbin-Watsonen kontrastea. Komenta ezazu emaitza.
- l) Zelan kontrastuko zenuke ereduak aldagai azaltzaileen banakako esanguratasuna? Orain arte daukagun informazioarekin, erabil ezazu koefizienteen desbiderapen tipikoentzat egokia den estimatzaile bat.

## 8. TAREA

EEBBetako gobernuaren XX. mendeko jaiotze-politikaren inguruko azterketa batean, 1913-1984 bitarteko urteroko datuak dauzkagun ondoko aldagaientzat <sup>28</sup>:

---

<sup>28</sup>Wooldridge, J.M. (2001), *Introducción a la Econometría*, data fertil3.gdt.

gfr 15-44 urte bitarteko 1000 emakumeko jaiotze-kopurua  
 pe murrizketa fiskalak terminu errealetan, dolarretan  
 year 1913tik 1984rako denbora segida  
 pill =1 urtea>= 1963 bada (1963 urtean pilula antisorgailua merkaturatu zen)  
 ww2 =1 urtea 1941 eta 1945 artean badago (2. mundu gerra)

Lehenbizi ondoko eredua zehazten da:

$$gfr_t = \beta_1 + \beta_2 pe_t + \beta_3 pill_t + \beta_4 ww2_t + u_t \quad (1)$$

- a) Ondoko pausuk jarraituz, eman denbora serieko egitura eskuragarri daukagun datu-multzoari: *Datuak*  $\rightarrow$  *Datu basearen egitura*  $\rightarrow$  ...
- b) Estimatu (1) ekuazioan proposatutako eredua KTA bidez. Konprobatu eredu honetan autokorrelazioa dagoela.
- c) Zehaztu eredu dinamiko bat, erregresore bezala  $gfr_t$  aldagai endogenoaren ondoz-ondoko lehenengo lau atzerapenak gehituz, hau da, gehitu  $gfr_{t-1}, \dots, gfr_{t-4}$  erregresoreen zerrendari. Hauen banakako eta baterako esanguratasuna kontrastatu, estatistiko egokiak erabiliz.
- d) Zehaztu eredu dinamiko desberdin bat, erregresore moduan  $pe_t$  aldagaiaren ondoz-ondoko lehenengo lau atzerapenak gehituz, hau da, gehitu  $pe_{t-1}, \dots, pe_{t-4}$  erregresoreen zerrendari. Hauen banakako eta baterako esanguratasuna kontrastatu, estatistiko egokiak erabiliz. Zehaztapen honek beste arazo ezagunen bat jasotzen al du?
- e) Aurreko c) eta d) galderetan kontsideratutako aldagai guztiak barneratu hasierako ereduan. Ondoren, hipotesi kontrasteetan oinarrituz eta bata bestearen ondoren:
  - e.1) Kendu  $gfr_{t-4}$  aldagaia.
  - e.2) %5eko esangura mailarekin esanguratsuak ez diren aldagai guztiak kendu, bai aldagai atzeratuak baita atzerapenik gabekoak ere. Agian eredu behin baino gehiagotan estimatu beharra izango duzu.
  - e.3) Gorde ezazu saiora, ikono bezala, onena delakoan aukeratu duzun eredu eta idatzi bere Laginaren Erregresio Funtzioa.
- f) Orain kontsideratu eta estimatu KTA bidez hurrengo eredua:

$$gfr_t = \beta_1 + \beta_2 pe_{t-2} + \beta_3 pill_t + \beta_4 ww2_t + u_t \quad (2)$$

- g) Kontrastatu autokorrelazioaren existentzia (2) ereduan. Ereduari aldagai atzeratuak gehitu beharrean, lortu (asintotikoki) tinkoa den ereduko parametroen estimatzaile bat. Erlazionatutako eredu transformatua eta estimatutako parametro guztien ( $\hat{\beta}_i$  eta  $\hat{\rho}$ ) balioak idatzi.
- h) Saia zaitez e.3) eta g) galderetako zehaztapenen artetik onena dena lortzen. Horretarako:
  - i) Kontrastatu murrizketa egokiak e.3) galderako azken ereduan.
  - ii) Aztertu kontu handiz estimatutako bi eredu honen grafikoa.