2 Gorputz hedadurak

Def.: I.b. $\mathbb{k}$ gorputza

$\mathbb{F}$ gorputza $\mathbb{k}$-ren hedadura da $\Leftrightarrow$ $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$

- Hedadura adierazteko $\mathbb{F} \mid \mathbb{k}$

Def.: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{k}$ gorputz hedadura eta $S \subseteq \mathbb{F}$

$\mathbb{k}[S] \equiv S$ eta $\mathbb{k}$ barruan dituen $\mathbb{F}$-ren azpigorputzik txikiena da

$\mathbb{k}(S) \equiv S$ eta $\mathbb{k}$ barruan dituen $\mathbb{F}$-ren azpigorputzik txikiena =

$= \mathbb{k}[S]$ barruan duen $\mathbb{F}$-ren azpigorputzik txikiena.

[S-k $\mathbb{k}$ gainean sortutako $\mathbb{F}$-ren azpigorputza]

Propietateak: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{k}$ gorputz hedadura, $S, T \subseteq \mathbb{F}$

i) $\mathbb{k}[S] \subseteq \mathbb{k}(S)$

ii) $\mathbb{k}(S)(T) = \mathbb{k}(S \cup T) = \mathbb{k}(T)(S)$

iii) $\left.\begin{array}{l} E \text{ gorputza} \\ \mathbb{k} \subseteq E \subseteq \mathbb{F} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\mathbb{k}(S) \subseteq E \Leftrightarrow S \subseteq E\right)$

iv) $\mathbb{k}(S) = \mathbb{k}(T) \not\Rightarrow S = T$

$\mathbb{k}(S) = \mathbb{k}(T) \Leftrightarrow \begin{cases} S \subseteq \mathbb{k}(T) \\ \text{eta} \\ T \subseteq \mathbb{k}(S) \end{cases}$

Froga:

iii)

$\mathbb{F}$ $\Rightarrow$

$\mathbb{E}$ Hip.: $\mathbb{K}(S) \subseteq \mathbb{E}$ $\Rightarrow S \subseteq \mathbb{E}$

Definizioz, $S \subseteq \mathbb{K}(S)$ eta $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(S)$

$\mathbb{K}$ $\Leftarrow$

Hip.: $S \subseteq \mathbb{E}$

Hipotesiz, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ eta $\mathbb{K}(S) \subseteq \mathbb{E}$

$\mathbb{E}$ $\mathbb{F}$-ren azpigorputza da $\mathbb{K}(S)$ S eta $\mathbb{K}$ barne dituen

txikiena da.

Def.: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura

$\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedadura finitua: sortzen da $\Leftrightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F} /\ \mathbb{F} = \mathbb{K}(v_1, \dots, v_n)$

$\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedadura bakuna da $\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{F} /\ \mathbb{F} = \mathbb{K}(v)$

Oharra 1.: I.b. $\mathbb{F}$ eta $\mathbb{K}$ gorputzak

$\mathbb{F}$

$\mid$ [hedadura] $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-e.b. da

$\mathbb{K}$

Frogo:

1) $\mathbb{K}$ gorputza da ✓

2) $\mathbb{F}$ gorputza da $\Rightarrow (\mathbb{F}, +)$ talde abeldarra da ✓

3) Kanpo biderketa: a) $\mathbb{K} v \in \mathbb{F}$ $\forall \mathbb{K} \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$), $\forall v \in \mathbb{F}$ (kanpo biderketa $\mathbb{F}$-ren biderketa ✓ zenbaki)

i) $\mathbb{K}(v_1 + v_2) \overset{?}{=} \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2$ $\forall \mathbb{K} \in \mathbb{K}$ $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{F}$

$\mathbb{K} \in \mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K} \in \mathbb{F}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{F}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$-n banatze-propietatea betetzen da ✓

$\mathbb{F}$ gorputza da

(Ohar. 1. Frogo)

ii) $(k_1 + k_2)v \overset{?}{=} k_1 v + k_2 v \qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \quad \forall v \in \mathbb{F}$

$k_1, k_2 \in \mathbb{K} \rightarrow k_1, k_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow$ Aurreko propietateagatik bezala, egia da ✓
($\mathbb{K}$-ren batuketa $\mathbb{F}$-ren batuketa delako, alegia)

iii) $k_1(k_2 v) \overset{?}{=} (k_1 k_2)v, \qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K} \cap \mathbb{F}, \quad \forall v \in \mathbb{F}$

$\mathbb{F}$ gorputza denez, biderketak elkartze-propietatea betetzen du

$\mathbb{K}$-ren biderketa barne berdina denez, orduan,

$k_1(k_2 v) = (k_1 k_2)v$

iv) $1_{\mathbb{K}} v \overset{?}{=} v, \qquad \forall v \in \mathbb{F}$

$\mathbb{K}$ $\mathbb{F}$-ren azpigorputza da $\Rightarrow 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{F}} \Rightarrow 1_{\mathbb{K}} v = 1_{\mathbb{F}} v = v \qquad \forall v \in \mathbb{F}$

Def.: I.b. $\mathbb{F}|\mathbb{K}$ gorputz hedadura

$$[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$$

$\Updownarrow$

$\mathbb{F}|\mathbb{K}$ hedadurarako maila

Def.:

$\mathbb{F}|\mathbb{K}$ hedadura finitua da $\Leftrightarrow [\mathbb{F} : \mathbb{K}] < +\infty$

Ohar. 2: I.b. $\mathbb{F}|\mathbb{K}$ gorputz hedadura

$[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = 1 \Leftrightarrow \mathbb{F} = \mathbb{K}$

Frogo:

$\Leftarrow$

$\mathbb{F} = \mathbb{K} \Rightarrow [\mathbb{F} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$

$\Rightarrow$

$[\mathbb{F}:\mathbb{K}] = 1 \iff \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{F} - \{0\}, \quad \{v\}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-oinarria da.

$\mathbb{F}$ gorputza $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ ID da $\Rightarrow \{v\}$ s.e. da $\left.\begin{array}{l} \\ \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \{v\}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-oinarria da

Beraz, berezkoa,

$\{1\}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-oin. da $\overset{(\text{def})}{\Longrightarrow} \forall v \in \mathbb{F}, \ \exists! k \in \mathbb{K} / \ v = k \cdot 1 = k \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{F}, \quad v \in \mathbb{K} \iff \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ $\Rightarrow \mathbb{F} = \mathbb{K}$

Teo. 1: I.b. $\mathbb{F} | \mathbb{K}$ gorputza hedadura

$\mathbb{F} | \mathbb{K}$ finitua da $\Rightarrow$ $\mathbb{F} | \mathbb{K}$ finitukoa soilik da.
$\not\Leftarrow$

Froga:

$\mathbb{F} | \mathbb{K}$ finitua da $\overset{\text{def.}}{\iff} \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F} = [\mathbb{F}:\mathbb{K}] = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \{v_1, \dots, v_n\}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-oinarri bat $\Rightarrow$
$v_i \in \mathbb{F}$
$i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \mathbb{F} = \left\{ k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \ / \ k_i \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \left\{ f(v_1, \dots, v_n) \ / \ f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \right\} =$
$i = 1, \dots, n$

$= \mathbb{K}[v_1, \dots, v_n] \subseteq \mathbb{K}(v_1, \dots, v_n)$
$\downarrow$ Propiet. ;)

eta $\left.\begin{array}{l} \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \\ v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{K}(v_1, \dots, v_n) \subseteq \mathbb{F}$ $\Rightarrow \mathbb{F} = \mathbb{K}(v_1, \dots, v_n)$

$\Downarrow$

$\mathbb{F} | \mathbb{K}$ finitukoa soilik da $\#$

Oharra 3.: I.b. $\mathbb{F}, \mathbb{E}, \mathbb{K}$ gorputzak non

$\mathbb{F}$ | $\mathbb{E}$ | $\mathbb{K}$

3.1) $\mathbb{E}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-azpiesp. bektoriala

da, hots,

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{E} \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$$

$$\Updownarrow$$

$$[\mathbb{E}:\mathbb{K}] \leq [\mathbb{F}:\mathbb{K}]$$

Froga:

$\varnothing \neq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$

i) $\forall e_1, e_2 \in \mathbb{E}$, $e_1 + e_2 \overset{?}{\in} \mathbb{E}$

ii) $\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall e \in \mathbb{E}$, $ke \overset{?}{\in} \mathbb{E}$

} Bai, $\mathbb{E}$ erazturi delako.

Beraz, $\mathbb{E}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-azpiespazioa da.

3.2) $$\dim_{\mathbb{E}} \mathbb{F} \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$$

$$\Updownarrow$$

$$[\mathbb{F}:\mathbb{E}] \leq [\mathbb{F}:\mathbb{K}]$$

Froga:

$\mathbb{F}$ | $\mathbb{E}$ gorputz hedadura da $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ $\mathbb{E}$-e.b. da

Oharra $\Updownarrow$

$\mathbb{F}$ | $\mathbb{K}$ gorputz hedadura da $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-e.b. da. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Demagun $\{v_1, \dots, v_n\}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-orm. dela:

$\forall v \in \mathbb{F}$, $v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ $k_i \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ batzutarako $\Rightarrow$ ($i = 1, \dots, n$)

$\Rightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ $\mathbb{F}$ $\mathbb{E}$-e.b.-ren sist. sortzailea da. } $\Rightarrow$

Ondorioz ez da askea

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{E}} \mathbb{F} \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$

$[\mathbb{F}:\mathbb{E}]$ $[\mathbb{F}:\mathbb{K}]$

Malaren Teorema (Tma. 2.): I.l. $\mathbb{F}, \mathbb{E}, \mathbb{K}$ gorputak non $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$

$\mathbb{F}|\mathbb{K}$ hedad. finitua da $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}|\mathbb{E}$ eta $\mathbb{E}|\mathbb{K}$ hedad. finituak dira.

Gainera, ~~Kasu konkretuan~~

i) $[\mathbb{F}:\mathbb{K}] = [\mathbb{F}:\mathbb{E}][\mathbb{E}:\mathbb{K}]$

ii) $\left.\begin{array}{l} \{u_1,\dots,u_m\} \ \mathbb{E}\text{-ren} \ \mathbb{K}\text{-ohiartza da} \\ \{v_1,\dots,v_t\} \ \mathbb{F}\text{-ren} \ \mathbb{E}\text{-ohiartza da} \end{array}\right\} \Rightarrow \{u_i v_j \ / \ \begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t \end{array}\} \ \mathbb{F}\text{-ren} \ \mathbb{K}\text{-ohiartza da.}$

Frogatzeko: $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$

$\Rightarrow$

$\mathbb{F}|\mathbb{K}$ hedad. finitua da $\Leftrightarrow [\mathbb{F}:\mathbb{K}] = n \in \mathbb{N}$, finitua

ohartu 3.1): $[\mathbb{F}:\mathbb{E}] \leq [\mathbb{F}:\mathbb{K}] = n \Rightarrow [\mathbb{F}:\mathbb{E}]$ finitua da ere bai $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}|\mathbb{E}$ hedad. finitua da

ohartu 3.2): $[\mathbb{E}:\mathbb{K}] \leq [\mathbb{F}:\mathbb{K}] = n \Rightarrow [\mathbb{E}:\mathbb{K}]$ finitua da ere bai $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}|\mathbb{K}$ hedad. finitua da.

$\Leftarrow$ eta :) (ii) frogatzea

$\mathbb{F}|\mathbb{E}$ eta $\mathbb{E}|\mathbb{K}$ hedad. finituak dira

Demagun $\left\{\begin{array}{l} \{u_1,\dots,u_m\} \ \mathbb{E}\text{-ren} \ \mathbb{K}\text{-an. dela} \ (1 \\ \{v_1,\dots,v_t\} \ \mathbb{F}\text{-ren} \ \mathbb{E}\text{-an. dela} \ (2 \end{array}\right.$ $\{u_i v_j \ / \ \begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t \end{array}\}$ $\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-ohiartza al da ?

2) $\Rightarrow \forall v \in \mathbb{F}, \quad v = e_1 v_1 + \dots + e_t v_t \quad = (k_{11}u_1 + \dots + k_{m1}u_m)v_1 + \dots + (k_{1t}u_1 + \dots + k_{mt}u_m)v_t =$

$e_j \in \mathbb{E}$

$\Downarrow$ 1) $\quad e_j = k_{1j}u_1 + \dots + k_{mj}u_m \quad j = 1,\dots,t$

$k_{ij} \in \mathbb{K}$

$$= \sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{m} k_{ij}u_i\right)v_j = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t}} k_{ij}u_i v_j \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{u_i v_j \ / \ \begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t \end{array}\}$ $\mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-e.b.-ren sist. sortzailea da

(Matlaren Teorema

Froga)

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,t}} k_{ij} u_i v_j = 0 \overset{?}{\Rightarrow} k_{ij} = 0 \quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t \end{matrix}$$

$$0 = \sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,t}} k_{ij} u_i v_j = \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{m} k_{ij} u_i \right) v_j = \sum_{j=1}^{t} e_j v_j \overset{2)}{\Rightarrow} e_1 = \dots = e_t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Izendatu:} \quad e_j = \sum_{i=1}^{m} k_{ij} u_i \in E \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_{11}u_1 + \dots + k_{m1}u_m = 0 \\ \vdots \\ k_{1t}u_1 + \dots + k_{mt}u_m = 0 \end{cases} \overset{1)}{\Rightarrow} \begin{cases} k_{11} = \dots = k_{m1} = 0 \\ \vdots \\ k_{1t} = \dots = k_{mt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k_{ij} = 0 \quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t \end{matrix}$$

Beraz, $\{ u_i v_j / \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,t \end{matrix} \}$ $\mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-ren base bat da, eta guztira, ondorez,

$\mathbb{F}$-ren $\mathbb{K}$-ornaitze da.

Gainera, ondoan, **$\mathbb{F}|\mathbb{E}$ eta $\mathbb{E}|\mathbb{K}$ hedad. finituak direnean, $\mathbb{F}|\mathbb{K}$ hedad. finitua da,**

eta $\underline{[\mathbb{F}:\mathbb{K}]} = \left| \{ u_i v_j / \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,t \end{matrix} \} \right| = m \cdot t = \underline{[\mathbb{E}:\mathbb{K}][\mathbb{F}:\mathbb{E}]}$

Mire

i) **finituak ez dira kontuan**

$\mathbb{F}|\mathbb{K}$ ez da finitua, hots, $\Updownarrow$ $[\mathbb{F}:\mathbb{K}] = \infty$

$$\begin{cases} \mathbb{F}|\mathbb{E} \text{ ez da finitua} \\ \text{eta} \\ \mathbb{E}|\mathbb{K} \text{ ez da finitua} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\mathbb{F}:\mathbb{E}] = \infty \\ \text{eta} \\ [\mathbb{E}:\mathbb{K}] = \infty \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "$[\mathbb{F}:\mathbb{E}][\mathbb{E}:\mathbb{K}] = \infty$"

1.- Elem. aljebraikoak eta traszendenteak

Def.: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura eta $v \in \mathbb{F}$

$v \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n aljebraikoa da $\Leftrightarrow$ $\exists f \in \mathbb{K}[x]$ $f \neq 0$ / $f(v) = 0$

$v \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n traszendentea da $\Leftrightarrow$ v ez da $\mathbb{K}$-n aljebraikoa

Tma 3.: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura eta $v \in \mathbb{F}$

$v \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n aljebraikoa da $\Rightarrow$

i) $f(v) = 0$ betetzen duten $f \in \mathbb{K}[x]$ guztiak haietako baten multiplodi dira, eta horri irreduzible eta moniko bakarra da ($Irr(v, \mathbb{K})$)

ii) $[\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] = \deg (Irr(v, \mathbb{K}))$

iii) $\{1, v, \dots, v^{n-1}\}$ $\mathbb{K}(v)$-ren $\mathbb{K}$-oinarria da.

Froga:

Hip: $v \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n aljebraikoa da

Definitu $\varphi : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[v]$ ebaluazio-homomorfismoa. Polinomioen aljebra propiet.
$x \longrightarrow v$

universala dela eta, φ $\mathbb{K}$-aljebra homomorfismoa da.

- $Im\varphi = \{ f(v) \ / \ f \in \mathbb{K}[x] \} = \mathbb{K}[v]$
- $Ker\varphi = \{ f(x) \in \mathbb{K}[x] / \ \varphi(f(x)) = 0 \} = \{ f \in \mathbb{K}[x] \ / \ f(v) = 0 \}$

$\Updownarrow$

$f(v) = 0$

1. Isomorfia Teoremagatik, $\dfrac{\mathbb{K}[x]}{Ker\varphi} \cong \mathbb{K}[v]$

$Ker\varphi$ $\mathbb{K}[x]$-ren ideala da $\Rightarrow$ $Ker\varphi = (g(x))$ $g \in \mathbb{K}[x]$ bateratu
$\mathbb{K}[x]$ IND da

$\dfrac{\mathbb{K}[x]}{(g(x))} \cong \mathbb{K}[v] \subseteq \mathbb{F}$ gorputza $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathbb{K}[x]}{(g(x))}$ ID da $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (g(x))$ $\mathbb{K}[x]$-ren ideal lehena da $\Rightarrow$

- $(g(x)) = \{0\}$ edo
- $g(x)$ $\mathbb{K}[x]$-n irreduzibles da

Teo. 3. Froga

i)

Hipotesia $\cup$ $\mathbb{K}$-n algebraikoa denez, $(g(x)) = \ker\varphi \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ g $\mathbb{K}[x]$-n isred. da

$\Downarrow$

$\ker\varphi = (k\,g(x))$ $\quad k \in \mathbb{K}-\{0\}$ $\quad g$ isred. baitetako

b_n g-ren koef. nagusia bada, hartu $k = b_n^{-1}$ $\Rightarrow$ $\ker\varphi - k$ sortzaile monikoa

baterako du: $b_n^{-1} g(x) = Irr(\cup, \mathbb{K})$

denetatuko duguna.

ii)

Baldintza hautsia, ondoko atalarengatik,

$$\frac{\mathbb{K}[x]}{(Irr(\cup,\mathbb{K}))} \cong \mathbb{K}[\cup]$$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathbb{K}[\cup] \text{ gorputza da} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{K}[\cup] = \mathbb{K}(\cup) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$Irr(\cup,\mathbb{K})$ isred. da $\mathbb{K}[x]$-n $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\mathbb{K}[x]}{(Irr(\cup,\mathbb{K}))}$ gorputza da

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{[\mathbb{K}(\cup):\mathbb{K}]}_{\text{def.}} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(\cup) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[x]}{(Irr(\cup,\mathbb{K}))} = n = \deg\left(Irr(\cup,\mathbb{K})\right)$$

Demagun $\deg(g) = n$

$$\frac{\mathbb{K}[x]}{(Irr(\cup,\mathbb{K}))} = \left\{ \overline{f(x)} \;/\; \deg(f) \leq n-1 \right\} = \left\{ a_0\bar{1} + a_1\bar{x} + \ldots + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} \;/\; a_i \in \mathbb{K} \right\}_{i=0,\ldots,n-1}$$

Honengatik, dakiguna, $\{\bar{1}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{n-1}\}$ $\dfrac{\mathbb{K}[x]}{(Irr(\cup,\mathbb{K}))}$-ren $\mathbb{K}$-oinarria da.

iii)

$\{\bar{1}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{n-1}\}$ $\dfrac{\mathbb{K}[x]}{(Irr(\cup,\mathbb{K}))}$-ren $\mathbb{K}$-oinarria izanik, $\bar{\varphi}$ isomorfismoaren bidez,

$$\{1, \cup, \ldots, \cup^{n-1}\} = \{\bar{\varphi}(\bar{1}), \bar{\varphi}(\bar{x}), \ldots, \bar{\varphi}(\overline{x^{n-1}})\}$$

$\bar{\varphi}(\bar{1}) = \varphi(1) = \cup$

$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x) = \cup$

$\bar{\varphi}(\overline{x^{n-1}}) = \cup$

$\mathbb{K}(\cup)$-ren $\mathbb{K}$-oinarria da.

Ohar. 4.: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura eta $\cup \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n algebraikoa

$\left.\begin{array}{l} f \in \mathbb{K}[x] \\ f(\cup) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow Irr(\cup,\mathbb{K}) \mid f(x)$

Oharra 5: I.b. $\mathbb{K}, \mathbb{E}, \mathbb{F}$ gorputzak non $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$ eta $u \in \mathbb{F}$

u $\mathbb{K}$-n aljebraikoa da $\Rightarrow$ u $\mathbb{E}$-n aljebraikoa da.
($\not\Leftarrow$)

Gainera, kasu horretan, $Irr(u, \mathbb{E}) \mid Irr(u, \mathbb{K}) \Rightarrow \underbrace{deg(Irr(u,\mathbb{E}))}_{[\mathbb{E}(u):\mathbb{E}]} \leq \underbrace{deg(Irr(u,\mathbb{K}))}_{[\mathbb{K}(u):\mathbb{E}]}$

Tma 4: $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura eta $u \in \mathbb{F}$

u $\mathbb{K}$-n traszendentea da $\Rightarrow \begin{cases} i) \ \mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(x) \\ ii) \ [\mathbb{K}(u):\mathbb{K}] = \infty \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\mathbb{K}(u) \mid \mathbb{K}$ hedadura ez da finitua

Froga:

u $\mathbb{K}$-n traszendentea da $\Downarrow$

Aurreko teoremaren frogapeko φ homomorfismoa gogoratu,

$$Ker\varphi = \{ f \in \mathbb{K}[x] \ / \ f(u) = 0\} = \{0\}$$

$\Downarrow$

φ injektiboa da ere bai $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{K}[x] \cong \mathbb{K}[u] \Rightarrow \mathbb{K}(x) \cong \mathbb{K}(u)$ (i

Bestalde, horrengatik, $[\mathbb{K}(u):\mathbb{K}] = [\mathbb{K}(x):\mathbb{K}] = dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(x) \geq dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]$

$\mathbb{K}[x]$ $\mathbb{K}(x)$-ren azpiespazio bektoriala da

Dakigunez, $\{1, x, x^2, \ldots\}$ $\mathbb{K}[x]$-ren $\mathbb{K}$-oinarria da $\Rightarrow dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [\mathbb{K}(u):\mathbb{K}] = \infty$ //

Ondorio 4 I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura eta $u, v \in \mathbb{F}$

u, v $\mathbb{K}$-n aljebraikoak dira $\Rightarrow [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}] \leq [\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}]\,[\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}]$

Kasu honetan, $[\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}]$ eta $[\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}]$ elkarrekikiko lehenak badira $\Rightarrow$

$$\Rightarrow [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}]\,[\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}]$$

Froga:

Hip.: $u, v \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n aljebraikoak dira

$\mathbb{K}(u,v) = \mathbb{K}(u)(v)$ — Mailaren Tma. $\Rightarrow [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(u)]\,[\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}] \leq [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}]\,[\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}]$

$\mathbb{K}(u)$

$\mathbb{K}$

$[\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(u)] = [\mathbb{K}(u)(v) : \mathbb{K}(u)] \leq [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}]$

Ohar. 5, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(u) \subseteq \mathbb{K}(u,v)$

eta $\left([\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}], [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}]\right) = 1$ izanik.

Ohartu

$\mathbb{K}(v)(u)$ — Mailaren Tma. $\Rightarrow [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(v)]\,[\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] \Rightarrow$

$\mathbb{K}(v)$

$\mathbb{K}$

$\Rightarrow [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] \mid [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}]$ — Mailaren Tma. $\Leftrightarrow [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] \mid [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(u)]\,[\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}] \Rightarrow$ Hip.

$\Rightarrow [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] \mid [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(u)] \Rightarrow [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] \leq [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(u)]$

$[\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] \geq [\mathbb{K}(u)(v) : \mathbb{K}(u)]$ — Ohar. 5

$\Rightarrow [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(u)]$

$$[\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(u,v) : \mathbb{K}(u)]\,[\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(v) : \mathbb{K}]\,[\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}]$$

Ondorio "2": I.l. $F \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura eta $u, v \in F$

i) u, v $\mathbb{K}$-n traszendentak dira $\Rightarrow$ $\mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(v)$

ii) u, v $\mathbb{K}$-n aljebraikoak dira $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(v)$
$\mathrm{Irr}(u, \mathbb{K}) = \mathrm{Irr}(v, \mathbb{K})$

Froga:

i)

u, v $\mathbb{K}$-n traszendentak dira $\overset{\text{Teo. 4}}{\Rightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} \mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(x) \\ \text{eta} \\ \mathbb{K}(v) \cong \mathbb{K}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(v)$

ii)

u, v $\mathbb{K}$-n aljebraikoak dira $\overset{\text{Teo. 3}}{\Rightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} \mathbb{K}(u) \cong \dfrac{\mathbb{K}[x]}{(\mathrm{Irr}(u, \mathbb{K}))} \\ \text{eta} \\ \mathbb{K}(v) \cong \dfrac{\mathbb{K}[x]}{(\mathrm{Irr}(v, \mathbb{K}))} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(v)$ //

$\mathrm{Irr}(u, \mathbb{K}) = \mathrm{Irr}(v, \mathbb{K})$

$\Downarrow$

Beraz, $(\mathrm{Irr}(u, \mathbb{K})) = (\mathrm{Irr}(v, \mathbb{K})) \Rightarrow \dfrac{\mathbb{K}[x]}{(\mathrm{Irr}(u, \mathbb{K}))} = \dfrac{\mathbb{K}[x]}{(\mathrm{Irr}(v, \mathbb{K}))}$

Ondorio "3" I.b. $\mathbb{K}, \mathbb{E}, \mathbb{F}$ gorputzak non $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$

$u \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n aljebraikoa da $\Rightarrow$ $[\mathbb{E}(u) : \mathbb{E}] \leq [\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}]$

Orokorrean,

$u_1, \dots, u_n \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n aljebraikoak dira $\Rightarrow$ $[\mathbb{E}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{E}] \leq [\mathbb{K}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{K}]$

(Ondorio "3")

Froga:

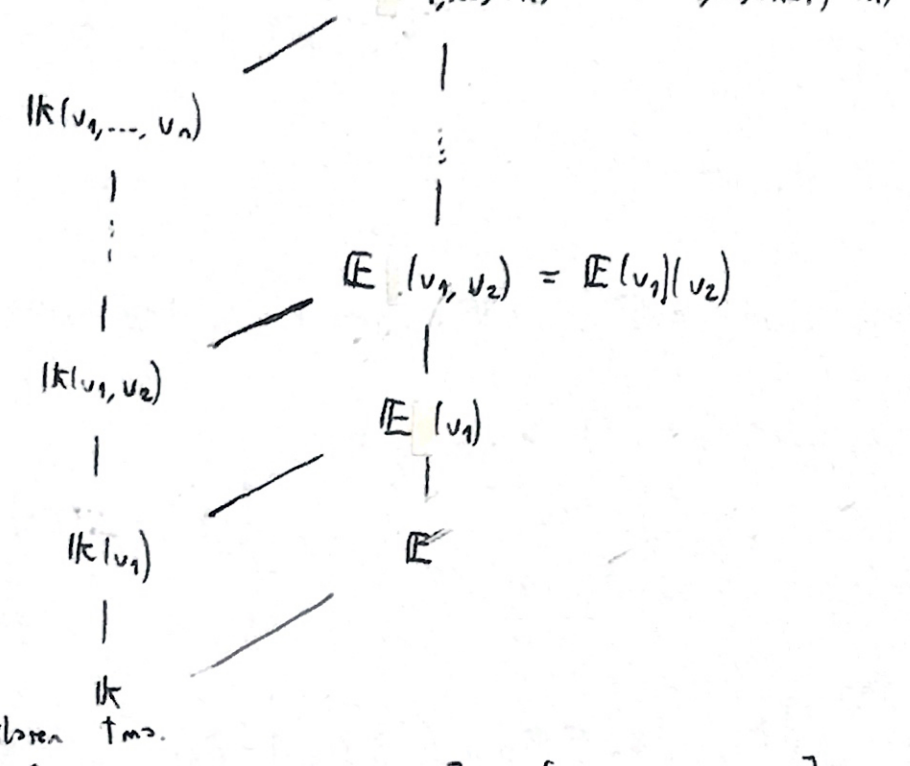
$u_1, \dots, u_n \in \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-n aljebraikoak, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$

$[\mathbb{E}(u_1) : \mathbb{E}] \leq [\mathbb{K}(u_1) : \mathbb{K}]$ (barra 5)

$[\mathbb{E}(u_1)(u_2) : \mathbb{E}(u_1)] \leq [\mathbb{K}(u_1)(u_2) : \mathbb{K}(u_1)]$

$\vdots$

$[\mathbb{E}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{E}(u_1, \dots, u_{n-1})] \leq [\mathbb{K}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{K}(u_1, \dots, u_{n-1})]$



Ondoan, $[\mathbb{E}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{E}] \leq [\mathbb{E}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{E}(u_1, \dots, u_{n-1})] \cdots [\mathbb{E}(u_1, u_2) : \mathbb{E}(u_1)][\mathbb{E}(u_1) : \mathbb{E}] \leq$

$\leq [\mathbb{K}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{K}(u_1, \dots, u_{n-1})] \cdots [\mathbb{K}(u_1, u_2) : \mathbb{K}(u_1)][\mathbb{K}(u_1) : \mathbb{K}]$ Matxaren tma.

$= [\mathbb{K}(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{K}]$ //

2.- Hedadura aljebraikoak & hedadura finituak

Def.: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura

$\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedadura aljebraikoa da $\Leftrightarrow$ $\forall u \in \mathbb{F}$, u $\mathbb{K}$-n aljebraikoa da

$\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedadura trazendentea da $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ ez da hedad. aljebraikoa

$\Updownarrow$

$\exists u \in \mathbb{F}$ / u $\mathbb{K}$-n trazendentea den

Tma. 5: I.b. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura

$\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedad. finitua $\Rightarrow$ $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedad. , aljebraikoa da.

($\not\Leftarrow$)

Froga:

$\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedad. finitua da $\Leftrightarrow$

$$[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F} = n < \infty$$

Hartu $\underline{\forall u \in \mathbb{F}}$

$\{1, u, \dots, u^n\} \subseteq \mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ gorputza izateagatik.

$|\{1, u, \dots, u^n\}| = n+1 > \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$ $\Rightarrow$ $\{1, u, \dots, u^n\}$ ez da $\mathbb{F}$ $\mathbb{K}$-e.b.-a ne-

sistema askea. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists k_0, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ / $k_0 \cdot 1 + k_1 u + \dots + k_n u^n = 0$

ez denak nuluak

ordun, hartuz $f(x) = k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^n \in \mathbb{K}[x]$,

- $f(u) = 0$
- $f(x) \neq 0$, $k_0, \dots, k_n$ ez direlarik denak nuluak

} $\overset{\text{def}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ u $\underline{\mathbb{K}\text{-n aljebraikoa}}$ da

Ondorioz, $\underline{\mathbb{F} \mid \mathbb{K}}$ hedad. $\underline{\text{aljebraikoa}}$ da. //

Kasu orokorra - Metodo (Al.-tik)

I.b. $\mathbb{K}(v) \mid \mathbb{K}$ hedad. finitua: $[\mathbb{K}(v):\mathbb{K}] = n$

$\forall v \in \mathbb{K}(v)$, $\mathrm{Irr}(v,\mathbb{K})$?

$\mathbb{K}(v) \mid \mathbb{K}$ finitua $\Rightarrow$ $\mathbb{K}(v) \mid \mathbb{K}$ hedad. algebraikoa $\Rightarrow$ Berezkoa, eta $\mathbb{K}$-n algebraikoa da ↘

↙ Tmo. 3 iii)

$\langle 1, v, \dots, v^{n-1} \rangle$ $\mathbb{K}(v)$-ren $\mathbb{K}$-oinarria da.

Orduan $\exists!\, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ / $v = a_0 + a_1 v + \dots + a_{n-1} v^{n-1}$ ⇒

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = a_0 + a_1 v + \dots + a_{n-1} v^{n-1} \\ v\,v = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} v + \dots + a_{n-1}^{(1)} v^{n-1} \\ \vdots \\ v^{n-1} v = a_0^{(n-1)} + a_1^{(n-1)} v + \dots + a_{n-1}^{(n-1)} v^{n-1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a_0 - v) + a_1 v + \dots + a_{n-1} v^{n-1} = 0 \\ a_0^{(1)} + (a_1^{(1)} - v) v + \dots + a_{n-1}^{(1)} v^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ a_0^{(n-1)} + a_1^{(n-1)} v + \dots + (a_{n-1}^{(n-1)} - v) v^{n-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

⇒ Honako sistemak sol. ez-nulu bat du $(x_0 = 1,\ x_1 = v, \dots, x_{n-1} = v^{n-1})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_0 - v) x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} = 0 \\ a_0^{(1)} x_0 + (a_1^{(1)} - v) x_1 + \dots + a_{n-1}^{(1)} x_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ a_0^{(n-1)} x_0 + a_1^{(n-1)} x_1 + \dots + (a_{n-1}^{(n-1)} - v) x_{n-1} = 0 \end{array} \right\} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} (a_0 - v) & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_0^{(1)} & (a_1^{(1)} - v) & \dots & a_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ a_0^{(n-1)} & a_1^{(n-1)} & \dots & (a_{n-1}^{(n-1)} - v) \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hots, sist. bateragarri indeterminatua da. $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} (a_0 - v) & \dots & a_{n-1} \\ a_0^{(1)} & \ddots & a_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{(n-1)} & \dots & (a_{n-1}^{(n-1)} - v) \end{vmatrix}_{n\times n} = 0$

eta determinante hori "v-ren gainetko polin." gisa ikus daiteke, lortuz honeratzik

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_0 - x & \dots & a_{n-1} \\ a_0^{(1)} & \ddots & a_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & & \\ a_0^{(n-1)} & \dots & a_{n-1}^{(n-1)} - x \end{vmatrix} \in \mathbb{K}[x], \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cdot f(v) = 0 \\ \cdot (\deg(f) = n) \end{array} \right.$$

Obsv. 6: Sejam $F|k$ corpos, $v \in F$ k-algébrico.

$\mathrm{Irr}(v,k) = a_0 + a_1 x + \dots + x^n \Rightarrow$ Tenho $g(v) = a_0^{-1}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + 1)$, g mónico de $g(v^{-1}) = 0$

$\deg(g) = n = \deg(\mathrm{Irr}(v,k))$

$g(x) = \mathrm{Irr}(v^{-1}, k)$

ela ⑬(b) $\Rightarrow$ também $\deg(\mathrm{Irr}(v,k)) = \deg(\mathrm{Irr}(v^{-1},k))$

Obsv. 5: Sejam $F|k$ corpos, $v \in F$

$v \in F$ k-algébrico $\Rightarrow k(v)|k$ estendido algébrico de.

Prova:

$v \in F$ k-algébrico de $\xrightarrow[\text{Tms. 3}]{}$ $k(v)|k$ estendido finito de $\xrightarrow[\text{Tms. 5}]{}$

$\Rightarrow k(v)|k$ estendido algébrico de.

Tms. 6: Sejam $F|k$ corpos estendidos

:) $F|k$ estendido finito de

$\Updownarrow$

:::) $F|k$ estendido finitamente gerado de, ou seja, $F = k(v_1, \dots, v_n)$ com $v_1, \dots, v_n \in F$ k-algébricos duas.

Prova:

$\Rightarrow$) $F|k$ finito de $\xrightarrow[\text{Tms. 5}]{}$ $F|k$ estendido algébrico de $\Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{Tms. 1}]{}$ $F|k$ finitamente gerado de $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists v_1, \dots, v_n \in F$ / $F = k(v_1, \dots, v_n)$

$\Rightarrow$ Basta-me, $v_1, \dots, v_n \in F$ k-algébricos duas

$\Leftarrow$)

$F = k(v_1, \dots, v_n)$ com $v_1, \dots, v_n \in F$ k-algébricos duas.

(Tma. 6: Frogak)

$\mathbb{K}(v_1,\dots,v_n) = \mathbb{F}$

$\mathbb{K}(v_1,\dots,v_{n-1})$

$\mathbb{K}(v_1,v_2)$

$\mathbb{K}(v_1)$

$\mathbb{K}$

v_1 $\mathbb{K}$-n aljebraikoa $\overset{\text{Tma. 3}}{\Rightarrow}$ $\mathbb{K}(v_1)\,|\,\mathbb{K}$ finitua da.

v_2 $\mathbb{K}$-n aljebraikoa $\overset{\text{Tma. 3}}{\Rightarrow}$ v_2 $\mathbb{K}(v_1)$-en aljebraikoa

$\Rightarrow \mathbb{K}(v_1)(v_2)\,|\,\mathbb{K}(v_1)$ finitua da.

v_n $\mathbb{K}$-n aljebraikoa $\overset{\text{Tma. 3}}{\Rightarrow}$ v_n $\mathbb{K}(v_1,\dots,v_{n-1})$-en aljebraikoa

$\Rightarrow \mathbb{K}(v_1,\dots,v_n)(v_n)\,|\,\mathbb{K}(v_1,\dots,v_{n-1})$ finitua da.

Hau da, $\mathbb{K}(v_1)\,|\,\mathbb{K}$, $\mathbb{K}(v_1,v_2)\,|\,\mathbb{K}(v_1)$, ..., $\mathbb{K}(v_1,\dots,v_n)\,|\,\mathbb{K}(v_1,\dots,v_{n-1})$ finituak direla $\overset{\text{Mailaren Tma.}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathbb{K}(v_1,\dots,v_n)}_{=\mathbb{F}}\,|\,\mathbb{K}$ finitua da. $\Leftrightarrow \mathbb{F}\,|\,\mathbb{K}$ finitua da.

Tma. 7: I.k. $\mathbb{F}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{K}$ gorputzak non $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$

i) $\mathbb{F}\,|\,\mathbb{K}$ hedad. aljebraikoa da

$\Updownarrow$

ii) $\mathbb{F}\,|\,\mathbb{E}$ eta $\mathbb{E}\,|\,\mathbb{K}$ hedad. aljebraikoak direla.

Froga:

i) $\Rightarrow$ ii)

$\mathbb{F}\,|\,\mathbb{K}$ hedad. aljebraikoa da

$\forall e \in \mathbb{E}$, e $\mathbb{K}$-n aljebraikoa al da?

$\Downarrow$

$e \in \mathbb{F} \overset{\text{Hip.}}{\Rightarrow}$ e $\mathbb{K}$-n aljebraikoa da

Beraz, $\mathbb{E}\,|\,\mathbb{K}$ hedad. aljebraikoa da.

$\forall v \in \mathbb{F}$, v $\mathbb{K}$-n aljebraikoa $\overset{\text{Ohartu S}}{\Rightarrow}$ v $\mathbb{E}$-n aljebraikoa

Beraz, $\mathbb{F}\,|\,\mathbb{E}$ hedad. aljebraikoa da.

i) $\Leftarrow$ ii)

$\mathbb{F}\,|\,\mathbb{E}$ eta $\mathbb{E}\,|\,\mathbb{K}$ hedad. aljebraikoak direla.

$\Downarrow$

$\forall v \in \mathbb{F}$, v $\mathbb{E}$-n aljebraikoa da $\Rightarrow \exists g(x) = \mathrm{Irr}(v,\mathbb{E}) = e_0 + \dots + e_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{E}[x]$

non $g(v) = 0$ den.

Orduan, zeharkako, u $\mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1})$-ren aljebraikoa da ere bai $\Rightarrow$

Teo. 3 $\Rightarrow$ $\mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1})(u) \mid \mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1})$ finitua da.

$$\begin{array}{c} \mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1})(u) \\ | \\ \mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1}) \\ | \\ \mathbb{K} \end{array}$$

$e_0,\dots,e_{n-1} \in \mathbb{E}$, hipotesiz, $\mathbb{K}$-ren aljebraikoak dira $\Rightarrow$

$\mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1}) \mid \mathbb{K}$ finitua da

Beraz, marraren teo. aplikatuz, $\mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1})(u) \mid \mathbb{K}$ finitua da $\Rightarrow$ (Teo. 5) $\mathbb{K}(e_0,\dots,e_{n-1})(u) \mid \mathbb{K}$ aljebraikoa da $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Beraz, u $\mathbb{K}$-ren aljebraikoa da.

Ondorioz, $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ hedatze aljebraikoa da. $\blacksquare$

Def. I.1. $\mathbb{F} \mid \mathbb{K}$ gorputz hedadura

$$\overline{\mathbb{K}}^{\mathbb{F}} = \{ u \in \mathbb{F} \mid u \text{ } \mathbb{K}\text{-ren aljebraikoa da} \}$$

($\overline{\mathbb{K}}^{\mathbb{F}}$: $\mathbb{K}$-ren itxitura aljebraiko bat $\mathbb{F}$-n.)