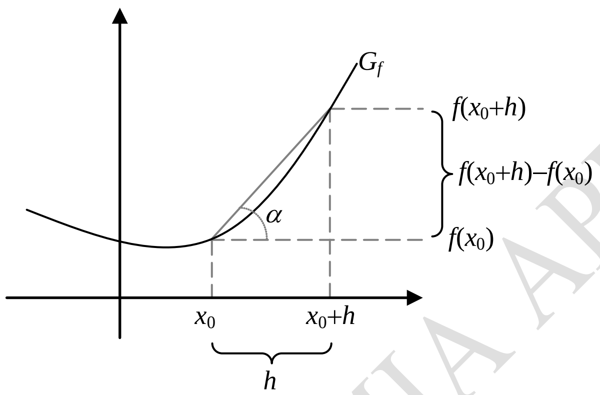
FUNTZIO ERREALEN DERIBAZIOA

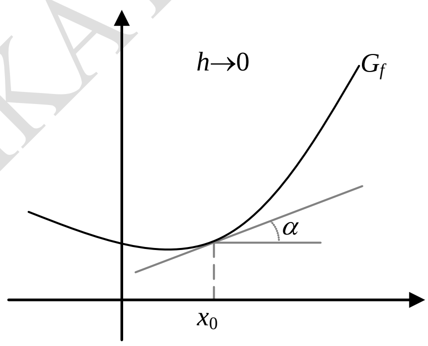
Aldagai bateko funtzio errealen deribatua:

Bira $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $x_0 \in \text{int}(E)$. f funtzioaren deribatua x_0 puntuan limite hau da, existitzen denean ($f'(x_0)$ edo $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ idatziko dugu):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funtzioaren deribatua x_0 puntuan existitzen denean, f funtzioa x_0 puntuan deribagarria dela esango dugu.





Irudian ikusten den bezala, $\tan(\alpha) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ da (hots, $(x_0, f(x_0))$ eta $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ puntuen arteko zuzenaren malda). h gero eta txikiagoa egiten denean, α angelua aldatzen da... noraino? $(x_0, f(x_0))$ puntutik igarotzen eta G_f grafikoari ukitzaile den zuzenaren angelua izan arte. Horrela, f funtzioa deribagarria bada x_0 puntuan, deribatua modu honetan adieraz daiteke: grafikoan puntu horretatik igarotzen den zuzen ukitzailearen malda.

Adibidea:

Har dezagun $f(x) = x^2$ funtzioa. Kalkulatu, existitzen bada, $f'(1)$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} (h+2) = 2.$$

Propietateak:

Bira $f, g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio deribagarriak eta $k \in \mathbb{R}$. Orduan:

i) $y = k$ bada, $y' = 0$ da.

ii) $y = kf(x)$ bada, $y' = kf'(x)$ da.

iii) $y = f(x) \pm g(x)$ bada, $y' = f'(x) \pm g'(x)$ da.

iv) $y = f(x)g(x)$ bada, $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ da.

v) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ bada, $y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ da.

Oinarrizko funtzioak deribatzeko erregelak:

funtzioa	**deribatua**
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = \ln(x)$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = a^x \quad (a>0)$	$y' = a^x \ln(a)$
$y = \mathrm{e}^x$	$y' = \mathrm{e}^x$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = \tan(x)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Katearen erregela:

- Demagun konposaketa hau dela:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

f funtzioa x_0 puntuan deribagarria bada eta g funtzioa $f(x_0)$ puntuan deribagarria bada, orduan, $g \circ f$ funtzioa x_0 puntuan deribagarria da eta:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Aurreko taulatik funtzio konposatuen deribazio erregelak atera ditzakegu:

funtzioa	**deribatua**
$y = (f(x))^n$	$y' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$
$y = \ln(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = a^{f(x)}$ (a>0)	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln(a) \cdot f'(x)$
$y = \mathrm{e}^{f(x)}$	$y' = \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)$
$y = \sin(f(x))$	$y' = \cos(f(x)) f'(x)$
$y = \cos(f(x))$	$y' = -\sin(f(x)) f'(x)$
$y = \tan(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$

Adibidea:

Kalkulatuko dugu $z = \sin(\mathrm{e}^x)$ funtzioaren deribatua. $f(x) = \mathrm{e}^x$ eta $g(x) = \sin(x)$ funtzioak erabiliko ditugu konposaketa hau egiteko

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\mathrm{e}^x) = \sin(\mathrm{e}^x):$$

$$\begin{array}{l} z = g(u) = \sin(u) = \sin(\mathrm{e}^x) \\ \quad | \\ u = f(x) = \mathrm{e}^x \\ \quad | \\ x \end{array}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\frac{du}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dz}{du} = \dfrac{dg}{du} = \cos(u) = \cos(\mathrm{e}^x) \\ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{df}{dx} = \mathrm{e}^x \end{array} \right\} = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$$

Deribatu funtzioa eta hurrengo deribatuak:

$f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa E osoan deribagarria bada, beste funtzio bat, f-ren deribatu funtzioa deituko duguna, era honetan definituko dugu:

$$f': E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Aldi berean, f' funtzioa E osoan deribagarria bada, beste funtzio bat, f'-ren deribatu funtzioa edo f-ren bigarren deribatu funtzioa, era honetan definituko dugu:

$$f'': E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Modu berean, f-ren n. deribatu funtzioa defini dezakegu.

Adibidea:

Demagun $f(x) = x^3$ dela. Funtzio hori $\mathbb{R}$ osoan deribagarria da eta $f'(x) = 3x^2$ da bere deribatu funtzioa. Eta $f''(x) = 6x$ bigarren ordenako deribatu funtzioa.