Nerea Urzueta 2020

MATE 1. PARTZIALA: EKUAZIO DIFERENTZIALEN APLIKAZIOAK

① DESINTEGRAZIO ERRADIAKTIBOA: $x' = -Kx$

$x(t) = x_0 e^{-Kt}$ $\quad$ $K = -\frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) > 0 \rightarrow x_1 < x_0$ delako

Erdibizitza $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{K}$ $\quad$ $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \rightarrow \lim x_0 e^{-Kt} \rightarrow 0$

② POPULAZIOAREN HAZKUNDEA (simplea) $x' = Kx$ $\quad$ $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$

$x(t) = x_0 e^{Kt}$ $\quad$ $K = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) > 0 \rightarrow x_1 > x_0$ delako

③ HOZTE-LEGEA: $T' = -K(T - T_i)$ $\quad$ $K = -\frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{T_1 - T_i}{T_0 - T_i}\right)$

$T(t) = T_i + (T_0 - T_i) e^{-Kt}$ $\quad$ $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_i \rightarrow \lim_{t\to\infty} T_i + (T_0 - T_i) e^{-Kt} \rightarrow 0$

④ EREDU LOGISTIKOA (Malthus): $x' = ax - bx^2$

$$x(t) = \frac{a x_0 e^{at}}{b x_0 e^{at} - b x_0 + a} \qquad at = \ln\left[\frac{x(a - b x_0)}{x_0 (a - bx)}\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b} \rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{a x_0 e^{at}}{b x_0 e^{at} \underbrace{- b x_0 + a}_{\text{baztergarria}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{a \cancel{x_0} \cancel{\infty}}{b \cancel{x_0} \cancel{\infty}} = \lim_{t\to\infty} \frac{a}{b}$$

⑤ ERREAKZIO KIMIKOAK $x' = K(a_0 - a)(b_0 - b)$

$$\begin{array}{ccccc} A & + & B & \rightarrow & C \\ M & & N & & M+N \\ \frac{M}{M+N} & & \frac{N}{M+N} & & 1 \end{array} \longrightarrow \alpha = \frac{M}{M+N} \ ; \ 1 - \alpha = \frac{N}{M+N}$$

$$a(t) = \frac{M}{M+N} x \rightarrow a(t) = \alpha x \qquad b(t) = \frac{N}{M+N} x \rightarrow b(t) = (1-\alpha) x$$

$$x(t) = \frac{a_0 b_0 (e^{cKt} - 1)}{\alpha b_0 e^{cKt} - a_0 (1-\alpha)} \qquad cK = \frac{1}{t_1} \ln\left[\frac{a_0 [b_0 - (1-\alpha) x]}{b_0 (a_0 - \alpha x)}\right]$$

$\lim_{t\to\infty} x(t)$ doanean...

① $cK > 0$ $\quad$ $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a_0}{\alpha} \rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{a_0 b_0 (e^{cKt} - 1)}{\alpha b_0 e^{cKt} \underbrace{- a_0 (1-\alpha)}_{\text{baztergarria}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{a_0 \cancel{b_0} \cancel{\infty}}{\alpha \cancel{b_0} \cancel{\infty}}$

$A \rightarrow \lim_{t\to\infty} [a_0 - a(t)] = 0 \rightarrow \lim_{t\to\infty} [a_0 - \alpha x(t)] = a_0 - \cancel{\alpha} \frac{a_0}{\cancel{\alpha}} = a_0 - a_0$

$B \rightarrow \lim_{t\to\infty} [b_0 - b(t)] = b_0 - (1-\alpha) \frac{a_0}{\alpha} \rightarrow \lim_{t\to\infty} [b_0 - (1-\alpha) x(t)] = b_0 - (1-\alpha) \lim_{t\to\infty} x(t)$

✱ $cK > 0$ denean, A da erreaktibo mugatzailea $e^{cKt} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

② $cK < 0$ $\quad$ $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{b_0}{1-\alpha} \rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{a_0 b_0 (e^{cKt} - 1)}{\cancel{\alpha b_0 e^{cKt}} - a_0 (1-\alpha)} = \lim \frac{-\cancel{a_0} b_0}{-\cancel{a_0} (1-\alpha)}$

$A \rightarrow \lim_{t\to\infty} [a_0 - a(t)] > 0 \rightarrow \lim_{t\to\infty} [a_0 - \alpha x(t)] = a_0 - \alpha \frac{b_0}{1-\alpha}$

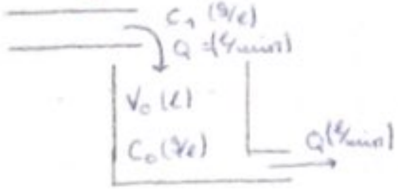
$B \rightarrow \lim_{t\to\infty} [b_0 - b(t)] = 0 \rightarrow \lim_{t\to\infty} [b_0 - (1-\alpha) x(t)] = b_0 - (1-\alpha) \frac{b_0}{1-\alpha} = b_0 - b_0$

✱ $cK < 0$ denean, B da erreaktibo mugatzailea $e^{cKt} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Lavoisierren printzipioa: erreakzioan gastatutako dena produktu bilakatzen da

Q ≠ 0 da BETI

⑥ DEPOSITU 1: $x_0 = C_0 V_0$

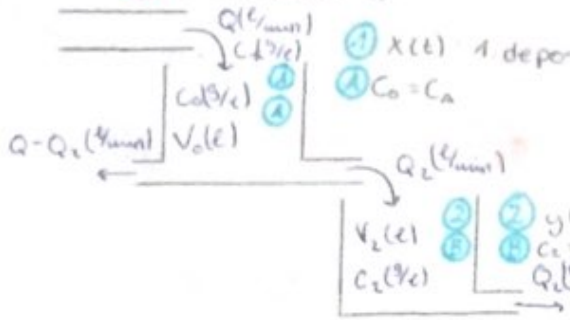


$$x(t) = C_1 V_0 + (C_0 - C_1) V_0 e^{-\frac{Q}{V_0} t}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = C_1 V_0 \longrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} \left[C_1 V_0 + (C_0 - C_1) V_0 e^{-\frac{Q}{V_0} t} \right] = C_1 V_0$$

⑦ DEPOSITU 2



① $x(t)$ 1 depositoko gatza t unean

④ $C_0 = C_A$

② $y(t)$ 2 depositoko gatza t unean

③ $C_2 = C_B$

① $x(t) = C_1 V_0 + (C_0 - C_1) V_0 e^{-\frac{Q}{V_0} t}$

② 1. Baldin, $\boxed{V_0 Q_2 - V_2 Q \neq 0}$ $V_0 \neq V_2$

$$y(t) = C_1 V_2 + \left[V_2 (C_2 - C_1) - \frac{(C_0 - C_1) Q_2 V_0 V_2}{V_0 Q_2 - V_2 Q} \right] e^{-\frac{Q_2}{V_2} t} + \frac{(C_0 - C_1) Q_2 V_0 V_2}{V_0 Q_2 - V_2 Q} e^{-\frac{Q}{V_0} t}$$

2. Baldin, $\boxed{V_0 Q_2 - V_2 Q = 0}$ $V_0 = V_2$

$$y(t) = C_1 V_2 + \left[V_2 (C_2 - C_1) + (C_0 - C_1) Q_2 t \right] e^{-\frac{Q_2}{V_2} t}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = C_1 V_0 \rightarrow \lim_{t\to\infty} \left[C_1 V_0 + (C_0 - C_1) V_0 e^{-\frac{Q}{V_0} t} \right] = C_1 V_0$$

$$C_{A,\infty} = C_1 \rightarrow C_{A,\infty} = \frac{\lim x(t)}{V_0} \rightarrow C_{A,\infty} = \frac{C_1 \cancel{V_0}}{\cancel{V_0}}$$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = C_1 V_2 \rightarrow e$-ri biderkatzen daudenak 0 direlako $e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$C_{B,\infty} = C_1 \longrightarrow C_{B,\infty} = \frac{\lim y(t)}{V_2} \rightarrow C_{B,\infty} = \frac{C_1 \cancel{V_2}}{\cancel{V_2}}$$

¡EZ KENDU PARENTESIAK AMAIERARATE!

¡SINPLIFIKAU AHALIK ETA GEHIEN!

¡AZALPENAK!

B eredua

Irakasgaia: Matematika eta Estatistika **Taldea:** 31
Saila: Matematika Aplikatua eta Estatistika
Azterketa: 1. partziala
Data: 2019ko urriaren 7a

✓ **Kalkulagailua**: kalkulagailua erabil daiteke baldin programagarria ez bada. Erabat debekatuta dago bestelako gailu elektronikoak erabiltzea edo eskura edukitzea.

✓ **Iraupena**: behin enuntziatuak emanda, 90 minutuko iraupena izango du azterketak.

✓ **Kalifikaziorako irizpideak**: ariketa bakoitzean gehienezko nota lortzeko, planteamenduak, azalpenak eta ebazpenak zuzenak izan behar dute. Gainera, ordena eta argitasuna baloretsiko dira.

✓ **Idazketarako tresnak**: ez da aintzat hartuko, ezta zuzenduko ere, erantzunetan arkatzez edo boligrafo gorriz idatzitakoa.

(0.50 puntu) 1. Mikroorganismo-populazio jakin baten hazkundea aztertu nahi da. Esperimentuen arabera, mikroorganismoen hazkundeak honako eredu honi jarraitzen dio:

$$x'(t) = k\,x(t),$$

non $x(t)$ mikroorganismoen kopurua, t aldiunean (orduetan adierazita). Demagun

$$x(6) = 8x_0,$$

non x_0 mikroorganismoen hasierako kopurua baita.

a) Kalkula ezazu proportzionaltasun konstantea (k). $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{8}\right)$

b) Zenbat denbora igaroko da $x(t) = 128\,x_0$ izateko? 14h

(0.75 puntu) 2. Demagun A substantziak B substantziarekin erreakzionatzen duela C produktua eratzeko. Erreaktiboen hasierako masak honako hauek dira: 20 g eta b_0 g, hurrenez hurren. Estekiometriaren arabera, 3 g A-k 1 g B-rekin erreakzionatzen dute. Hasi eta 4 minutura, 20 g C daude, eta 4 minutu geroago, 24 g C.

a) Kalkula ezazu b_0. 10g

b) Erreaktibo bakoitzaren zer masa geratuko da erreakzionatu gabe $t \to \infty$ doanean? $B = \frac{10}{3}$ g

(0.75 puntu) 3. Demagun 100 ℓ-ko depositu bi ditugula: A eta B. Andelak gatz-soluzio banaz beteta daude, kontzentrazioak 1 $\frac{g}{\ell}$ eta 3 $\frac{g}{\ell}$ izanik, hurrenez hurren. Une batetik aurrera, 2 $\frac{g}{\ell}$-ko soluzio bat sartzen da lehenengo depositura, $Q\ \frac{\ell}{\text{min}}$-ko abiaduran, eta, abiadura berean, likidoa ateratzen da lehenengo depositutik bigarrenera. Halaber, likidoa ateratzen da bigarren andeletik, berriz ere abiadura berean.

a) Kalkula ezazu Q abiadura ekuazio hau bete dadin 10 ℓ/min

$$x(20) = y(20).$$

b) Kalkula itzazu bi depositüetako gatz-soluzioen kontzentrazioak $t \to \infty$ doanean. 2 g/ℓ

Orain, demagun bigarren deposítua sistema horretatik isolatzen dugula; hala, gatz-soluzioa ez da sartzen, ez eta ateratzen ere. Demagun T_0 °C dela andelaren hasierako tenperatura, eta $\frac{1}{4}T_0$°C, ingurumen-tenperatura.

(c) Kalkula ezazu energia transmisioaren koefizientea (k), jakinda $t = 1$ minutuan andelaren tenperatura $T = \frac{3}{4}T_0$ °C dela.

$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

MATE 2. PARTZIALA: EKUAZIO DIFERENTZIALAK

Nerea Urrueta Jaio

1 ALDAGAI BANANDUETAKOA

$\boxed{f(t,x) = g(t)\cdot h(x)}$

1- Faktorizatu eta forma lortu

2- Bi aldeak dt-rekin biderkatu

$x'dt = dx$

3- h(x) funtzioa beste aldera zatitzen pasa

4- Bi aldeak integratu

5- g(t)-ri +K jarri

3 BANANDUETARA BIHURGARRIAK

* Aldagai aldaketa dute $u = x$

1- x' askatu

2- Aldagai aldaketa egin $x = u$

3- Aldagai aldaketa deribatu $x' = u'$

4- x' eta x ordezkatu, $f(t,u)$ lortuz

5- Aldagai banandu etakoa bihurtu

$f(t,u) = g(t)\,h(u)$

6- Bi aldeak dt-rekin biderkatu

$u'dt = du$

7- h(u) funtzioa beste aldea pasa

8- Bi aldeak integratu

9- g(t)-ri +K jarri

10- Aldagai aldaketa

5 BERNOULLIRENA

$\boxed{f(t,x) = a(t)x + b(t)x^n}$ $n \neq 1, 0$

1- a(t), b(t), n eta u bereizi

$u = x^{1-n}$

2- Ekuazio berria lortu

$u' = \underbrace{(1-n)a(t)}_{a(t)_1}u + \underbrace{(1-n)b(t)}_{b(t)_1}$

3- $a(t)_1$ eta $b(t)_1$ bereizi

4- Formula aplikatu

$$u(t) = e^{\int a(t)_1 dt}\left[K + \int b(t)_1 e^{-\int a(t)_1 dt} dt\right]$$

5- Aldagai aldaketa

6- x bakantzea hobeto, baina x^{1-n} bezala utzi daiteke

adb $x^{-1} = t^{-1}[K + \ldots$ edo $x = \frac{t}{K + \ldots}$

DERIBATUAK (3 biderkagai)

$f(x) = g(x)\cdot h(x)\cdot i(x)$

$f'(x) = g'(x)\cdot h(x)\cdot i(x) + g(x)\cdot h'(x)\cdot i(x) + g(x)\cdot h(x)\cdot i'(x)$

2 LINEALAK

$\boxed{f(x,t) = a(t)x + b(t)}$

* x alde batean agertzen da soilik, t bietan edo batean bakarrik

1- x' bakarrik utziz forma lortu

2- a(t) eta b(t) zein diren adierazi

3- Formula aplikatu

$$x(t) = e^{\int a(t)dt}\left[K + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right]$$

4- Integralak bakoitza bere aldetik egin

4 HOMOGENEOAK

$\boxed{f(t,x) = f(Kt, Kx)}$ $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

1- Baldintza betetzen den egiaztatu

* $\frac{x}{t}$ edo $\frac{t}{x}$ dagoenean HOMOGENEOA

2- Betetzen bada, aldagai aldaketa $u = \frac{x}{t}$

3- f(u) ekuazioa lortu $u = x$ $t = 1$

4- $\boxed{\frac{1}{f(u) - u}du = \frac{1}{t}dt}$ lortu

5- du aldea ahalik eta gehien simplifi

- zatitzailean zenbaki bera zatitzen
- zatitzailearen zatitzailea gora pasa

6- Aldagai banandu etako bezala askatu

7- Aldagai aldaketa $u = \frac{x}{t}$

6 ZEHATZAK

$P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0 \longrightarrow \boxed{x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}}$

1- Zehatza dela egiaztatu, deribatu partzialak

$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)$ = x-ekiko deribatu t = Kte bat

$\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$ = t-rekiko deribatu x = Kte bat

* Berdinak badira ZEHATZA

2- Ekuazio sistema planteatu

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = P(t,x) \\ \textcircled{2}\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = Q(t,x) \end{cases}$$

3- Bat aukeratu eta integratu

① - $u(t,x) = \int P(t,x)\,dt + h(x)$

② - $u(t,x) = \int Q(t,x)\,dx + h(t)$

4- Emaitzaren deribatu partziala

- Beste ekuazioarekin berdindu

① - $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(t,x)dt\right) + h'(x) = Q(t,x)$

② - $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int Q(t,x)dx\right) + h'(t) = P(t,x)$

5- h( ) kalkulatu $h(\,) = \int h'(\,)d$

6- Integratutako emaitzean ordezkatu

7 ZEHATZETARA BIHURGARRIA

$P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0 \rightarrow \boxed{x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}}$

1- $P(t,x)$ eta $Q(t,x)$ zehaztu

2- Zehatza den ziurtatu

- Deribatu partzialak egin

$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \neq \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$ Ez da ZEHATZA

3- Faktore integratzailea lortu $\mu(t,x)$

- Deribatuen arteko kenketa

$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}$

- Emaitzaren arabera 1 edo 2 kasua

Aldagai bat soilik geratu behar da

1 kasua: $-\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{Q}$ = t aldagaia soilik geratu

2 kasua: $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P}$ = x aldagaia soilik geratu

- Faktore integratzailea

1 kasua: $\mu(t) = e^{\int -\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{Q} dt}$

2 kasua: $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P} dx}$

4- Formulan faktore integratzailea sartu

$\underbrace{\mu(t,x)P(t,x)dt}_{P_1(t,x)} + \underbrace{\mu(t,x)Q(t,x)dx}_{Q_1(t,x)} = 0$

5- $P_1(t,x)$ eta $Q_1(t,x)$ zehaztu

6- Deribatu partzialak

$\frac{\partial P_1}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q_1}{\partial t}(t,x)$ ZEHATZAK

7- Zehatz bezala askatu

- Sistema planteatu
- Integratu
- Deribatu partziala
- h( ) askatu eta ordezkatu

INTEGRALAK

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + K$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot g\, x + K$
- $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + K$
- $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\csc + K$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan + K$
- $\int f'(x) f(x)^a dx = \frac{f(x)^{a+1}}{a+1} + K$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + K$
- $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + K$
- $\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + K$
- $\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + K$

$$I \uparrow \begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \\ -\sin x \\ -\cos x \end{array} \downarrow D$$

- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + K$
- $u \cdot v - \int v \, du$ (ALPES) (u, dv)

u = $\xrightarrow{\text{deribatu}}$ du = dt

$dv = dt$ $\xrightarrow{\text{integratu}}$ v =

EKUAZIO TRIGONOMETRIKOAK

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot g\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$
- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$
- $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$
- $\cot g\, x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $g(x) = \cos^2 x \longrightarrow g'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x)$
- $g(x) = \sin^2 x \longrightarrow g'(x) = 2\cos x \cdot \sin x$
- $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot g^2 x$
- $\cos(-x) = -\cos x$

$\boxed{\cdot \ \frac{x}{x} = 1 \text{ ez ahaztu ekuazioan sartzeaz}}$

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \ // \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\tan(2x) = \frac{\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

- $-x^2 + x - a$ dugunean, faktorizatzeko minus zeinua kanpora atera $-(x^2 - x + a)$

C eredua

Irakasgaia: Matematika eta Estatistika **Taldea:** 31
Saila: Matematika Aplikatua eta Estatistika
Azterketa: 2. partziala
Data: 2019ko azaroaren 6a

- ✓ **Kalkulagailua**: kalkulagailua erabil daiteke baldin programagarria ez bada. Erabat debekatuta dago bestelako gailu elektronikoak erabiltzea edo eskura edukitzea.
- ✓ **Iraupena**: behin enuntziatuak emanda, 90 minutuko iraupena izango du azterketak.
- ✓ **Kalifikaziorako irizpideak**: ariketa bakoitzean gehienezko nota lortzeko, planteamenduak, azalpenek eta ebazpenak zuzenak izan behar dute. Gainera, ordena eta argitasuna balioetsiko dira.
- ✓ **Idazketarako tresnak**: ez da aintzat hartuko, ezta zuzenduko ere, erantzunetan arkatzez edo boligrafo gorriz idatzitakoa.

(0,80 puntu) 1. Biz

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{t}\right) x' = \frac{x}{t}\cos\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{t}{x} \\ x(1) = \pi \end{cases}$$

Kalkula ezazu bere soluzio partikularra. $-\frac{x}{t}\sin\frac{x}{t} - \cos\frac{x}{t} = \ln t + 1$

(0,80 puntu) 2. Biz

$$\begin{cases} x' - \frac{1}{t}x = -\frac{1}{t^2+t-2}x^2 \\ x(2) = 1 \end{cases}$$

Kalkula ezazu bere soluzio partikularra. $x = \frac{t}{1 - \frac{2}{3}\ln 4 + \frac{1}{3}\ln(t-1) + \frac{2}{3}\ln(x+2)}$

(0,90 puntu) 3. Kalkula ezazu problema honen soluzio partikularra.

$$\begin{cases} (2x^3 + 3tx^2 + 2)\,\mathrm{d}t + (3tx^2 + 2t^2x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \mu(t) = t \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$t^2x^3 + t^3x^2 + t^2 = 1$

MATEMATIKA 3. PARTZIALA

Nerea Urrueta

LEHENENGO 4 ZIFRA DEZIMALAK

① ESTATISTIKA DESKRIBATZAILEA

$[a_i, a_{i+1})$ $\quad x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ $\quad n_i$ (maiz. abs.) $\quad N_i = \sum n_i$ (maiz. abs. met.) $\quad f_i = \frac{n_i}{n}$ (maiz. erla.) $\quad F_i = \sum f_i$ (maiz. erl. met.)

- Batez bestekoa $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$
- Bariantza $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \bar{x}^2$
- Desbideratze tipikoa $S_x = \sqrt{S_x^2}$
- Kuasibariantza $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ $\quad \boxed{\hat{S}^2 > S^2}$
- Kuasidesbideratze tipikoa $\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2}$
- Kobariantza $S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij} - \bar{x}\,\bar{y}$
- Erregresio zuzena: x gainekoa $\longrightarrow y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$

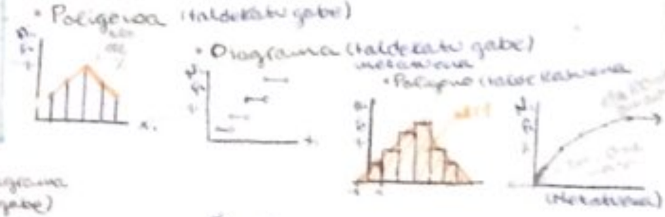
  y-ren gainekoa $x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - \bar{y})$
- Korrelazio koefizientea $r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2 S_y^2}}$

r	aldagaien arteko erlazioa	lerro zuzen para	korrelazioa	fidagarritasuna
1	funtzionala	/	erabatekoa	%100
0,8 - 1	zorizkoa	"	oso sendoa	%100
0,6 - 0,8	"	"	sendoa	"
0,2 - 0,6	"	"	neurritsua	"
0 - 0,2	"	"	ahula	"
0	planoan sakabanatua	X	ez dago	%0

- Negatiboekin berdina baina beherakorra

- $r = \pm 1 \rightarrow x - \bar{x} = y - \bar{y}$ zuzen bakarra, bestela 2
- X\Y tauletan → diagonaleko balioak soilik baditu $r = \pm 1$

GRAFIKOAK



- Histograma taldekatuekin, besteekin barra diagrama (metatu gabe) (metatu gabe)

PERTZENTILAK

- $N_i = \frac{\alpha n}{100} \longrightarrow P_\alpha = a_i + \frac{\frac{\alpha n}{100} - N_{i-1}}{n_i}(a_{i+1} - a_i)$
- $F_i = \frac{\alpha}{100} \longrightarrow P_\alpha = a_i + \frac{\frac{\alpha}{100} - F_{i-1}}{f_i}(a_{i+1} - a_i)$
- $100F_i = \alpha \longrightarrow P_\alpha = a_i + \frac{\alpha - [a_i, a_{i+1})\text{ tarteko datuen \%}}{i\text{ klaseko datuen \%}}(a_{i+1} - a_i)$

② ERREGRESIOAK

- ERRORE TIPIKOA $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underbrace{f(x_i)}_{\tilde{y}_i} - y_i)^2}$
- $\tilde{y}_i$ lortutako funtzioan, x_i ordezkatzean lortzen den y_i balioa ← erregresioa egitean

- LINEALA $y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x}) \rightarrow$ honekin $\tilde{y}$ kalkulatu

  $a = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$ $\quad b = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\bar{x}$
- PARABOLIKOA $\rho(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

① Taula bat osatu $x_i, y_i, x_i^2, x_i^3, x_i^4, x_i y_i, x_i^2 y_i$

② Ekuazio sistema hori planteatu

③ Cramer eginez a, b, c balioak lortu

$y = ax^2 + bx + c$

Minimo karratuen bidezko doikuntza

$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$ $\quad b = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{a}{n}\sum x_i$

- LOGARITMIKOA: $y = a\ln x + b$ $\boxed{X = \ln x}$ ② $x_i, y_i, X_i, x_i^2, x_iy_i$ taula egin

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a eta b kalkulatzeko zenbaki kalkulagailu bidezko dedukzioa erabiltzen da

- ESPONENTZIALA: $y = be^{ax}$ $\boxed{Y = \ln y}$ $\boxed{B = \ln b}$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- POTENTZIALA: $y = bx^a$ $\boxed{X = \ln x}$ $\boxed{Y = \ln y}$ $\boxed{B = \ln b}$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \qquad B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- HIPERBOLIKOA: $y = \frac{a}{x} + b$ $\boxed{X = \frac{1}{x}}$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- MICHAELARRA: $y = \frac{bx}{x+a}$ $\boxed{X = \frac{1}{x}}$ $\boxed{Y = \frac{1}{y}}$ $\boxed{A = \frac{a}{b}}$ $\boxed{B = \frac{1}{b}}$

$$A = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \qquad B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{A}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- LOGISTIKOA: $y = \frac{1}{1+be^{ax}}$ $\boxed{Y = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)}$ $\boxed{B = \ln b}$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

③ PROBABILITATEA

- KONBINATORIA

	Ordena	Errepikapen kop etagua	elementu guztiak erabili	
Aldakuntza arruntak	✓	✗	✓	$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$
Errepikatuzko aldakuntzak	✓	✗		$VR_{m,n} = m^n$
Permutazio arruntak	✓	✓	✓	$P_m = m!$
Errepikatuzko permutazioak	✓	✓		$PR_{m;m_1 \ldots m_k} = \frac{m!}{m_1! \ldots m_k!}$
Konbinazio arruntak	✗	✗	✓	$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ $\boxed{nCr}$
Errepikatuzko konbinazioak	✗	✗		$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$

- n: esperimentua errepikatu garen aldi kop
- m: esperimentuko balio kop

$$\frac{\text{① Aldeko kasuak}}{\text{② Kasu kop}} = P(x)$$

C eredua

Irakasgaia: Matematika eta Estatistika **Taldea:** 31
Saila: Matematika Aplikatua eta Estatistika
Azterketa: 3 partziala
Data: 2019ko abenduaren 4a

- ✓ **Kalkulagailua**: kalkulagailua erabil daiteke baldin programagarria ez bada. Erabat debekatuta dago bestelako gailu elektronikoak erabiltzea edo eskura edukitzea.
- ✓ **Iraupena**: behin enuntziatuak emanda, 50 minutuko iraupena izango du azterketak.
- ✓ **Kalifikaziorako irizpideak**: ariketa bakoitzean gehienezko nota lortzeko, planteamenduak, azalpenek eta ebazpenak zuzenak izan behar dute. Gainera, ordena eta argitasuna balioetsiko dira.
- ✓ **Idazketarako tresnak**: ez da aintzat hartuko, ezta zuzenduko ere, erantzunetan arkatzez edo boligrafo gorriz idatzitakoa.

(1.25 puntu) 1. Ohitura berberak dituzten 50 ikasle aukeratzen dira, bakoitzaren bi ezaugarri aztertu eta ezaugarrien arteko korrelazioa zehazteko asmoz. Hona hemen datuen banaketa:

$X \backslash Y$	1	2	3	n_i
[0, 10)	0	0	12	12
[10, 20)	0	14	2	16
[20, 30)	16	4	2	22
n_j	16	18	16	50

(a) Irudika ezazu Y-ren maiztasun absolutu metatuen diagrama. Halaber, irudika itzazu Y-ren kuartilak, haien balio zehatzak kalkulatu gabe.

(b) Aintzat har ezazu X aldagaia, kalkula ezazu α $P_\alpha = 24$ izan dadin.

(c) Taulako datuak erabiliz, arrazoi ezazu aurreikuspenak fidagarriak diren. Kalkula ezazu X-ren aurreikusitako balioa $Y = 1.2$ denean.

(0.25 puntu) 2. Egun 13 bitamina ezagutzen dira: A, D, E, K, B_1, B_2, B_3, B_5, B_6, B_7, B_9, B_{12} eta C. Lehenengo laurak lipodisolbagarriak dira eta besteak, hidrodisolbagarriak. Aintzat har ezazu 13 bitaminek osatutako multzo bat.

(a) Zenbat modutara aukera daitezke multzoko 3 bitamina?
Oharra: Behin bitamina bat aukeratuta, ez da berriz ere multzora itzultzen.

(b) Zer probabilitate dago hiru bitaminak lipodisolbagarriak izateko?

MATEMATIKA FINALA

1.) PROBABILITATEA $\boxed{P(E)=1}$

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ • BAYES: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- INDEPENDENTEAK: $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$ • $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$
- $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\overline{A\cap B})$ • $P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$
- $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B})$ • $P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B)$

- Probabilitate osoaren teorema: $P(A_2) = P(A_2/B_1)\,P(B_1) + P(A_2/A_1)\,P(A_1) + P(A_2/B_2)\cdot P(B_2)$

$P(A\cap B)$	$P(A\cap\bar{B})$	$P(A)$
$P(\bar{A}\cap B)$	$P(\bar{A}\cap\bar{B})$	$P(\bar{A})$
$P(B)$	$P(\bar{B})$	

- Beti adierazi zer den gertaera bakoitza: $A = \{\}$
- $P(\ldots) = 1/2 \cdot 2/3$
- 3 kaja ta bakoitzak kajen probabilitatea be kontutan! → $x \cdot 1/6 = P(S)$ Daduen kasuan

2.) PROBABILITATE - BANAKETA edo ZORIZKO ALDAGAIAK

- BINOMIALA: $X \sim B(n,p)$ • $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ edo $\boxed{nC_k}$
  - ↳ n: errepikapen kopurua
  - ↳ p: arrakasta probabilitatea
  - ↳ $q = 1-p$
  - ↳ x: arrakasta kop zein den

  * $n > k$

  • $P(x=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

  - $\binom{n}{0} = 1$
  - $\binom{n}{n} = 1$
  - $\binom{n}{n-1} = n$

- n oso handia denean → hurbilketa
  - ↳ $n \geq 30$
  - ↳ $np \geq 5$
  - ↳ $nq \geq 5$

  BINOMIALA ⟶ NORMALA

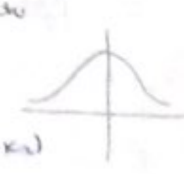
  * DOIKUNTZA: jarraitutasuna zuzentzeko
  - ↳ $P(x=k) \to P(k-0{,}5 < x < k+0{,}5)$
  - ↳ $P(x \geq k) \to P(x \geq k-0{,}5)$
  - ↳ $P(x \leq k) \to P(x \leq k+0{,}5)$
  - ↳ $P(a \leq x \leq b) \to P(a-0{,}5 \leq x \leq b+0{,}5)$
  - ↳ $P(a < x < b) \to P(a+0{,}5 < x < b-0{,}5)$

- NORMALA: $X \sim N(\mu, \sigma)$
  - ↳ $\mu = np$
  - ↳ $\sigma = \sqrt{npq}$

  • $P(x \leq k) = P(x < k)$ * σ BETI POSITIBO

  * TIPIFIKAZIOA: $\frac{k-\mu}{\sigma}$ $P(x<k) \longrightarrow P(x < \frac{k-\mu}{\sigma}) = P(z < k_2)$

- $P(x \leq k) \xrightarrow{\text{doiku}} P(x \leq k+0{,}5) \xrightarrow{\text{tipifikatu}} P(x \leq \frac{(k+0{,}5)-\mu}{\sigma}) = P(z \leq k_1) \xrightarrow{k_1 \text{ taulan begiratu}}$
- BETI GRAFIKOA EGIN!



- $P(z \leq k) \longrightarrow P(z < k)$ • $P(k_1 < z < k_2) \longrightarrow P(z < k_2) - P(z < k_1)$
- $P(z \geq k) \longrightarrow 1 - P(z < k)$ • $P(-k_1 < z < -k_2) \to P(k_2 < z < k_1) \to P(z < k_1) - P(z < k_2)$

$P(z \leq -k) \to P(z > k) \to 1 - P(z < k)$ • $P(-k_1 < z < k_2) \to P(z < k_2) - [1 - P(z < k_1)]$

- PEARSON χ_n^2 • STUDENT t_n • FISCHER SNEDECOR $F_{(m,n)}$

③ HIPOTESI TESTAK

1. POPULAZIOA: $\mu, \sigma^2, p, \mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

2. LAGINA $\bar{x}, s^2, \hat{S}^2$

- Aldagaiak adierazteko letra larriak
- Aldagaiak EZ badira elkarrekiko INDEPENDNTEAK
  - $D = X - Y$
  - $d_i = x_i - y_i$
  - $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$ edo $\bar{x} - \bar{y}$
  - $S_d^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \bar{d}^2$
  - $\hat{S}_d^2 = \frac{n}{n-1} S_d^2$
- Populazio bereko laginak izateko, $\mu_1 = \mu_2$ eta $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ bete behar dira!

OINARRIZKO KONTZEPTUAK

① • Hipotesi nulua H_0 $\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$ edo $\mu_1 = \mu_2$?
• Hipotesi alternatiboa H_a $\mu \neq \mu_0 \rightarrow$ isats biko grafikoa $\mu > \mu_0 \rightarrow$ Eskuinerako isatsa $\mu < \mu_0 \rightarrow$ Ezkerrerako isatsa $\mu_1 = \mu_2$?

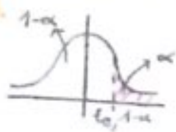
② Test estatistikoa definitzea
Baldintza eta datuak taulan begiratu eta egokia aukeratu

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

③ Estimazioa kalkulatu H_0 egia dela pentsatuz.

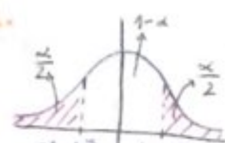
$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = t_0 \rightarrow$ PUNTU ESTIMAZIOA $\boxed{t_0, F_0, \chi^2_0, Z_0}$

④ Irudikatu eta puntu kritikoa aurkitu (PK)

1.


$t_{0,1-\alpha}$ = PUNTU KRITIKOA
Dagokion taulan
- $Z_0 \rightarrow$ normala, taula BARRUAN

3. Lehenengoaren berdina, baina isatsa ezkerrean

2.


- $\frac{\alpha}{2}$ kalkulatu
- $1 - \frac{\alpha}{2}$ kalkulatu

$t_{0,1-\frac{\alpha}{2}}$ = PUNTU KRITIKOA.
Dagokion taulan

⑤ Onarpen eremua eta eremu kritikoa kalkulatu

- Onarpen eremua; $A_{1-\alpha} = [-PK, PK]$
- Eremu kritikoa $C_\alpha = (-\infty, -PK) \cup (PK, \infty)$

- α: Esangura maila, zehazten ez bada $\alpha = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}05$ $\alpha = 0{,}01$ Kalkulatu

⑥ Ondorioak $t_0 \in C_\alpha$

- Puntu estimazioa eremu kritikoaren barnean dagoenez, gure datuak nahiko esanguratsuak dira hipotesi nulua baztertzeko, beraz hipotesi ALTERNATIBOA onartuko dugu
  Ebidentzia estatistikoa dela eta ... esangura maila/etan ondorioztatzen da H_a ...
- Puntu estimazioa onarpen eremuaren $t_0 \in A_{1-\alpha}$ barnean dagoenez, gure datuak ez dira nahiko esanguratsuak hipotesi nulua baztertzeko, beraz hipotesi NULUA onartuko dugu
  Ebidentzia estatistikoa dela eta ... esangura maila/etan ondorioztatzen da ... H_0 ...