DEPARTAMENTO ORGANIZACION DE EMPRESAS
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (TELECOMUNICACIONES)
FECHA: 23 de Junio 2008

TIEMPO: 90 minutos

1.– Considérese un cierto tipo de componentes cuya duración X en horas es una variable aleatoria.

a) Si X sigue distribución NORMAL de media 150 y desviación σ, calcular el valor de la desviación para que la probabilidad de que un componente falle antes de 140 horas sea igual a 0,1.

Un sistema consta de 4 componentes independientes (a los que llamaremos A, B, C y D) que siguen la distribución del apartado a) dispuestos en PARALELO (el sistema NO funciona si ningún componente funciona). Calcular:

b) La probabilidad de sólo hayan fallado los elementos A y D antes de 140 horas de funcionamiento.
c) La probabilidad de que antes de 140 horas de funcionamiento hayan fallado dos de los cuatro componentes.
d) Lla probabilidad de que el sistema falle después de 140 horas de funcionamiento.

Considérense los componentes anteriores montados en SERIE.

e) Si la duración de los componentes fuese EXPONENCIAL, calcular qué valor debería tomar el parámetro de la distribución para que la probabilidad de que el sistema falle antes de 150 horas sea igual a 0,1.
f) Si al cabo de 140 horas el sistema no había fallado, calcular la probabilidad de que falle en las próximas 10 horas.

Si la distribución de probabilidad queda definida por su Función de Distribución:

$$F(x) = \frac{x-k}{x} \quad \text{para } x > 10 \quad \text{(siendo cero en otro caso)}$$

g) Calcular el valor de k y la función de densidad
h) Se toman al azar dos de estos componentes y se ponen en funcionamiento simultáneamente de manera independiente; calcular la probabilidad de que el primero dure más que el segundo.

CALIFICACIÓN: cada apartado correcto se califica con un punto

2.– El número de dígitos incorrectos en un mensaje es una variable aleatoria que sigue distribución de Poisson de parámetro λ=10.

a) Calcular la probabilidad de que en 40 mensajes se encuentren en total más de 440 dígitos incorrectos.
b) La probabilidad de que la media muestral de una muestra de "n" mensajes sea mayor que 10,5 es igual a 0,01. Calcular "n"

CALIFICACIÓN: cada apartado correcto se califica con un punto

SOLUCIONES

1º PROBLEMA

a) Sea X: duración — $N(150 ; \sigma_x)$

Se desea que la $Prob(X < 140) = 0,1$

(tipificando) $Prob\left[Z < \frac{140-150}{\sigma_X}\right] = 0,1$

En la tabla de la normal tipificada se observa $Prob[Z<-1,28] = 0,1$

$$\frac{-10}{\sigma_X} = -1,28 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma_x = 7,8030}$$

b) Sea X_I la duración del elemento "I" ($I \equiv A, B, C, D$).

Según los datos del apartado a): $Prob[\ (X_I < 140) = 0,1$; $Prob[\ (X_I > 140) = 0,9$

El suceso "sólo fallen los elementos A y D antes de 140 horas" es el suceso:

$(X_A < 140) \cap (X_B > 140) \cap (X_C > 140) \cap (X_D > 140)$

Por ser sucesos inepandientes:

$Prob[\ (X_A < 140) \cap (X_B > 140) \cap (X_C > 140) \cap (X_D > 140)\ ] =$

$Prob(X_A<140) * Prob(X_B>140) * Prob(X_C>140) * Prob(X_D<140) = 0,1 * 0,9 * 0,9 * 0,1$

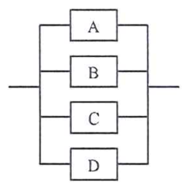
= 0,0081

c) Sea W ≡ Nº componentes, de los 4, que fallan antes de 140 horas.

W — b(n=4; p=0,1)

$Prob(w = 2) = \binom{4}{2} * 0,1^2 * 0,9^2 = \mathbf{0,0486}$

d) Los componentes se montan en paralelo:



El sistema falla antes de 140 horas (dura menos de 140 horas) si todos sus componentes fallan antes de 140 horas.

$(T_{SMA} < 140) \equiv (X_A < 140) \cap (X_B < 140) \cap (X_C < 140) \cap (X_D < 140)$

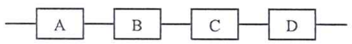
Por ser sucesos independientes:

$Prob(T_{SMA} < 140) = 0,1^4 = 0,0001$

La probabilidad pedida es la probabilidad de que el sistema dure más de 140 horas:

$Prob(T_{SMA} > 140) = 1 - 0,0001 = \mathbf{0,9999}$

e) Los componentes se montan en serie y son exponenciales:



El sistema funciona más de "x" horas si todos sus componentes funcionan más de "x" horas.

$(T_{SMA} > 140) \equiv (X_A > 140) \cap (X_B > 140) \cap (X_C > 140) \cap (X_D > 140)$

Para el componente $I \equiv A, B, C, D$: X_I — exp(a) $\Rightarrow Prob(X_I < x) = 1 - e^{-ax} \Rightarrow$

$Prob(X_I > x) = e^{-ax}$

Como el sistema consta de 4 componentes independientes:

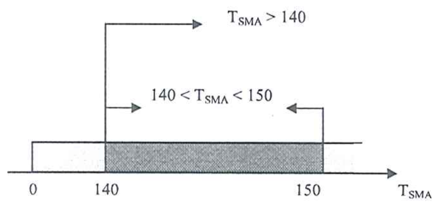
$Prob(T_{SMA} > x) = [e^{-ax}] * [e^{-ax}] * [e^{-ax}] * [e^{-ax}] = [e^{-ax}]^4$

Como se desea que la $Prob(T_{SMA} < 150) = 0,1 \Rightarrow Prob(T_{SMA} > 150) = 0,9$

$= [e^{-a*150*4}] = 0,9 \Rightarrow$ (tomando logaritmos) $a = \mathbf{0,0001756}$

f) Se trata de calcular la probabilidad condicionada:

$Prob(T_{SMA}<150 / T_{SMA}>140) =$



Teniendo en cuenta que, como a = 0,0001756 entonces :

$Prob(T_{SMA} > x) = e^{-4 * 0,0001756 * x}$

$Prob(T_{SMA} > x) = [e^{-0,007 x}]$

$Prob(T_{SMA} > 140) = 0,9063$ $\quad$ $Prob(T_{SMA} < 140) = 0,0937$

$Prob(T_{SMA} > 150) = 0,9$ $\quad$ $Prob(T_{SMA} < 150) = 0,1$

$$\frac{Prob(140 < T_{SMA} < 150)}{Prob(T_{SMA} > 140)} = \frac{0,1 - 0,0937}{0,9063} = \mathbf{0,007}$$

g) La función de densidad es, por definición:

$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{k}{x^2}$ para $x > 10$

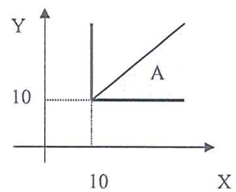
Como se debe cumplir $F(10) = 0 \quad 10 - k = 0 \Rightarrow k = 10$

h) Sean X e Y las duraciones del 1º y del 2º componentes elegidos respectivamente.

Por ser independientes

$f(x\,y) = f(x)*f(y) = \frac{100}{x^2 y^2}$ para $x > 10$ e $y > 10$ (siendo cero en otro caso)

Se pide $Prob(X > Y) = Prob[\,(xy) \in A\,] = \int_{10}^{\infty} dx \int_{10}^{x} \frac{10}{x^2}\frac{10}{y^2} dy = \int_{10}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx \int_{10}^{x} \frac{10}{y^2} dy = \mathbf{0,5}$



2º PROBLEMA

a) Sea Y el nº de dígitos incorrectos en un mensaje: Y — P(10)

Si X es el nº total de dígitos incorrectos en 40 mensajes:

$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{40}$ (por la propiedad de convolución) $X — P(400)$

Como se cumple la condición de convergencia:

$X \to N(\lambda\,;\,\sqrt{\lambda}\,)$ $\quad X \to N(400\,;\,20)$

$\text{Prob}(X > 440) = (\text{tipificando})\ \text{Prob}\left[Z > \dfrac{440-400}{20}\right] = \text{Prob}(Z > 2) = (\text{tabla})\ \mathbf{0{,}0228}$

Sea $\overline{Y}$ la media muestral de una muestra de "n" mensajes

$$\overline{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}$$

$$\overline{Y} \to N\left(m_y\,;\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}\right) \qquad \overline{Y} \to N\left(10\,;\sqrt{\frac{10}{n}}\,\right)$$

Como se desea Prob($\overline{Y} > 10{,}5$) = 0,01

$$(\text{tipficando})\ \text{Prob}\left(Z > \frac{10{,}5-10}{\sqrt{\frac{10}{n}}}\right) = 0{,}01$$

En la tabla de la variable normal estándar se observa que $\text{Prob}(z > 2{,}33) = 0{,}01$

En consecuencia debe cumplirse: $\dfrac{10{,}5-10}{\sqrt{\frac{10}{n}}} = 2{,}33 \;\Rightarrow\; n = 216{,}47$ redondeando al entero inmediato superior $\mathbf{n = 217}$

DEPARTAMENTO ORGANIZACION DE EMPRESAS
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (TELECOMUNICACIONES)
FECHA: 2 de Septiembre de 2008

TIEMPO: 90 minutos

1. Una empresa discográfica produce CD's con un porcentaje de defectuosos del 10%, poniéndolos a la venta en paquetes de 200 unidades. Una discográfica ilegal, realiza copias de los CD's con un porcentaje de defectuosos del 30% y las vende en el mismo paquete de 200 unidades que la empresa anterior.
   a. Calcular cual es la probabilidad de que un paquete que contiene menos de 70 CD's defectuosos sea ilegal. Tener en cuenta que el 45% de los CD's vendidos son ilegales.
   b. Si la vida útil de un CD sigue una distribución exponencial con una media de 200 horas de funcionamiento. Cuál es la probabilidad de que dure más de 150 horas?

Calificación: a) 1 punto b) 1 punto

2. Una empresa productora de cuadros eléctricos se dedica a analizar la relación existente entre la intensidad y la potencia que generan estos cuadros. Saben que la función de densidad conjunta viene dada por:

   $f(x,y) = k$, $0<x<8$, $0<y<x$; (x : intensidad; y : potencia)

   a. Calcular k y estudiar la independencia de las variables.
   b. Sabiendo que en un determinado momento la intensidad es igual a 5 calcular la probabilidad de que la potencia sea mayor que 3.
   c. Calcular la probabilidad de que $x+y<4$
   d. Calcular el coeficiente de correlación.

Calificación: a) 0,5 punto b) 1 punto c) 1 punto d) 1 punto

3. En un sistema contra incendio, la probabilidad de que se produzca un peligro es de 0,02 y si este se produce, la probabilidad de que alarma funcione es de 0,98. Sabiendo además de que la probabilidad de que funcione la alarma sin que exista peligro es de 0,04. calcular
   a. La probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya habido peligro
   b. La probabilidad de que ante un peligro, la alarma no funcione
   c. La probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma, haya un peligro.

Calificación: a) 1 punto b) 0,5 puntos c) 1 punto

4. En una estación de autobuses las distintas compañías dan servicio siguiendo una distribución de Poisson con una media de 500 personas al día.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que den servicio a más de 3400 personas en una semana?
   b. La edad de las personas sigue una distribución normal con una media de edad de las personas que toman el servicio es de 30 años y la desviación típica es de 15 años. Si tomamos una muestra de 100 personas, calcular la probabilidad de que la media de edad sea menor que 33 años.

Calificación: a) 1 punto b) 1 punto

SOLUCIONES

1º PROBLEMA

1. Una empresa discográfica produce CD's con un porcentaje de defectuosos del 10%, poniéndolos a la venta en paquetes de 200 unidades. Una discográfica ilegal, realiza copias de los CD's con un porcentaje de defectuosos del 30% y las vende en el mismo paquete de 200 unidades que la empresa anterior.
   a. Calcular la probabilidad de que un paquete que contiene menos de 70 CD's defectuosos sea ilegal. Tener en cuenta que el 45% de los CD's vendidos son ilegales.
   b. Si la vida útil de un CD sigue una distribución exponencial con una media de 200 horas de funcionamiento. Cuál es la probabilidad de que dure más de 150 horas?

Solución

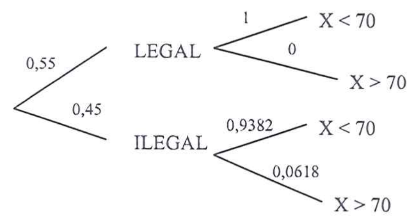
X: nº de CD's defectuosos de 200 – b(p, n= 200)

X legal –b(p= 0,10 n= 200); np= m= 20; npq= 18 >5 → X legal –N(20, 4,24)

X ilegal –b(p= 0,30 n= 200); np= m= 60; npq= 42 >5 → X ilegal –N(60, 6,48)

Prob(X ilegal < 70) = (tipificando) Prob(Z < 1,54) = (tablas) 0,9382

Prob(X legal < 70) = (tipificando) Prob(Z < 11,80) = (tablas) ≈ 1



Aplicando el teorema de Bayes:

$$\operatorname{Prob}(\text{ILEGAL}/X<70) = \frac{0{,}45*0{,}9382}{0{,}55*1+0{,}45*0{,}9382} = 0{,}4342$$

b) X: media útil X → exp(a)

como la media es m=200 ; a = 1/m = 1/200 X → exp(1/200)

La función de distribución de la exponencial: $\operatorname{Prob}(X<x) = F(x) = 1 - e^{-ax}$

$\operatorname{Prob}(X>150) = 1 - F(150) = e^{-(150/200)} = 0{,}4723$

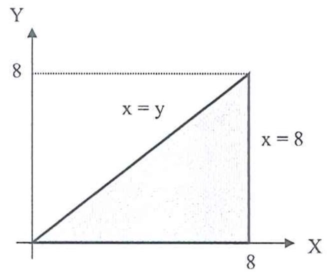
2º PROBLEMA

Una empresa productora de cuadros eléctricos se dedica a analizar la relación existente entre la intensidad y la potencia que generan estos cuadros. Saben que la función de densidad conjunta viene dada por:

$f(x,y) = k$, $0<x<8$, $0<y<x$; (x: intensidad; y : potencia)

a. Calcular k y estudiar la independencia de las variables.
b. Sabiendo que en un determinado momento la intensidad es igual a 5 calcular la probabilidad de que la potencia sea mayor que 3.
c. Calcular la probabilidad de que $x + y < 4$
d. Calcular el coeficiente de correlación.

Solución



a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(xy)dydx = 1$; $k\int_0^8 dx \int_0^x dy = 1$; $k*32 = 1 \Rightarrow k = {}^1/_{32}$

No son independientes porque $f(xy) \neq f(x)\, f(y)$ y además la distribución conjunta no está definida en el espacio de producto completo.

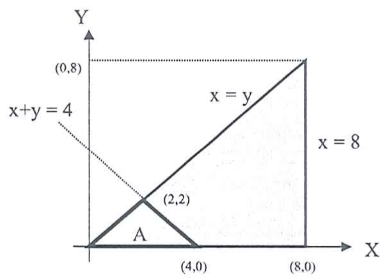
b) Prob(y>3 /x= 5)

$$f(y/x) = \frac{f(xy)}{f(x)}$$

$$f(x) = \int_0^x f(xy)dy = \int_0^x \frac{1}{32}dy = \frac{x}{32}$$

$$f(y/x) = \frac{1/32}{x/32} = \frac{1}{x} \quad ; \quad f(y/x=5) = \frac{1}{5} \quad \text{para} \quad 0<y<5$$

$$\Pr ob(y>3/x=5) = \int_3^5 \frac{1}{5}dy = \frac{2}{5} = 0,4$$



Los puntos que cumplen $x + y < 4$ son los puntos del recinto A de la figura

$\text{Prob}(x+y<4) = {}^1/_{32} \int_0^2 dy \int_y^{4-y} dx = {}^1/_8 = 0,125$

Como la densidad es constante, esta probabilidad también se puede calcular multiplicando la densidad por la superficie de A

$S_A = 4$; $\quad \text{Prob}[(xy)\in A] = k*S_A = {}^1/_{32} * 4 = {}^1/_8 = 0,125$

d) coeficiente de correlación

$$\rho = \frac{\text{cov}(xy)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\text{cov}(xy) = E(xy) - m_x m_y$$

$$f(x) = \int_0^x f(xy)\,dy = \int_0^x \frac{1}{32}dy = \frac{x}{32}$$

$$m_x = E(x) = \int_0^8 x\, f(x)\,dx = \int_0^8 x \cdot \frac{x}{32}dx = \frac{16}{3}$$

$$f(y) = \int_y^8 f(xy)\,dx = \int_y^8 \frac{1}{32}dx = \frac{1}{32}(8-y)$$

$$m_y = E(y) = \int_0^8 y\, f(y)\,dy = \frac{1}{32}\int_0^8 y(8-y)dy = \frac{8}{3}$$

$$E(xy) = \int_0^8 \int_0^x xy \frac{1}{32} dx dy = 16$$

$$cov(xy) = 16 - \frac{16}{3} * \frac{8}{3} = \frac{16}{9}$$

$$\sigma^2_x = E(x - m_x)^2 = \int_0^8 \left[x - \frac{16}{3} \right]^2 \frac{x}{32} dx = \frac{32}{9}$$

$$\sigma^2_y = E(y - m_y)^2 = \int_0^8 \left[y - \frac{8}{3} \right]^2 \frac{(8-y)}{32} dy = \frac{32}{9}$$

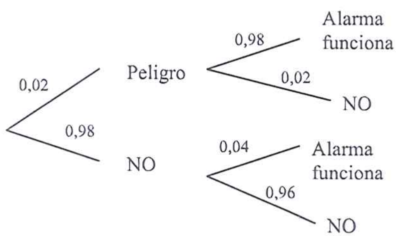
$$\rho = \frac{cov(xy)}{\sigma_x * \sigma_y} = \frac{16/9}{\sqrt{32/9} * \sqrt{32/9}} = \frac{1}{2}$$

3º PROBLEMA

En un sistema de incendio, la probabilidad de que se produzca un peligro es de 0,02 y si este se produce, la probabilidad de que alarma funcione es de 0,98. Si la probabilidad de que funcione la alarma sin que exista peligro es de 0,04, calcular:

a. La probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya habido peligro
b. La probabilidad de que ante un peligro, la alarma no funcione
c. La probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma, haya un peligro.

Solución



a) Probabilidad (NP/ alarma funciona) = CF/ CP = $\frac{0{,}98 \cdot 0{,}04}{0{,}02 \cdot 0{,}98 + 0{,}98 \cdot 0{,}04} = 0{,}6667$

b) Probabilidad (alarma no funcione / P) = 0,02

c) Probabilidad (P/ alarma no funcione)= CF/CP= $\frac{0{,}02 \cdot 0{,}02}{0{,}02 \cdot 0{,}02 + 0{,}98 \cdot 0{,}96} = 0{,}00042$

4º PROBLEMA

En una estación de autobuses las distintas compañías dan servicio siguiendo una distribución de Poisson con una media de 500 personas al día.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que den servicio a más de 3400 personas en una semana?
b. La edad de las personas sigue una distribución normal con una media de edad de las personas que toman el servicio es de 30 años y la desviación típica es de 15 años. Si tomamos una muestra de 100 personas, calcular la probabilidad de que la media de edad sea menor que 33 años.

Solución

a) X_i : Nº personas atendidas el día "i" $X \rightarrow P(\lambda_x = 500)$

W : Nº de personas atendidas en una semana $W = X_1 + X_2 + \ldots + X_7$

$W \rightarrow P(\lambda_w = 7*500) = P(\lambda_w = 3500)$

Puesto que $\lambda_w > 5$ cumple la condición de convergencia a la distribución Normal.

$W \rightarrow N(3500 ; 59{,}16)$

Prob(W > 3400) = (tipificando) Prob(Z > –1,69) = (tablas) 0,9545

b) X: edad de las personas – N(30,15)

La media muestral de una muestra de tamaño 100 sigue distribución normal de parámetros $m_{\bar{x}} = m_x = 30$ y desviación $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{100}} = 1{,}5$

Prob($\bar{x} < 33$) = (tipificando) Prob(Z < 2) = 0,9772

DEPARTAMENTO ORGANIZACION DE EMPRESAS
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (TELECOMUNICACIONES)
FECHA: 26 de Junio de 2009

TIEMPO: **90 minutos**

1. Considérese el proceso estocástico
$X(t) = W\,t^2 - Z$
en el que W— N(0, 2) y Z— N(0, 1).
Calcular la media y la autocorrelación del proceso.
a) Si son independientes.
b) Si están correlacionadas, siendo $\rho = 0{,}25$

2. Un dispositivo consta de cuatro componentes A , B , C y D
El dispositivo funciona si al menos funcionan 2 de los 4 componentes.
Cada uno de los componentes A y B funcionan de manera independiente del resto de componentes. Tienen una probabilidad de no fallar igual a 0,9.
Si A y B no fallan entonces C tampoco falla; si falla uno de los dos, entonces C fallará con una probabilidad igual a 0,5 y si fallan ambos, C tiene una probabilidad de fallar de 0,8.
D falla sólo si falla B
a) Calcular la probabilidad de que el dispositivo falle
b) Calcular la probabilidad de que el sistema funcione aunque falle B

3. El tiempo (en días) de vida de una marca de dispositivos sigue distribución exponencial de parámetro 1/50. Hace 20 días comenzaron a funcionar (de manera independiente) 6 de estos dispositivos.
a) Calcular la probabilidad de que al día de hoy sigan en funcionamiento 4 de los 6.
b) Si al día de hoy siguen en funcionamiento 4 de los 6 iniciales, calcular la probabilidad de que al menos uno de los cuatro siga funcionando dentro de diez días.

4. El número de partículas emitidas por una fuente radioactiva A sigue distribución de Poisson de tasa 0,1 partículas/hora. Para la fuente B, la tasa aumenta hasta 3 partículas/hora.
a) Calcular la probabilidad de que en 20 minutos, la fuente B haya emitido como mínimo 2 partículas.
b) Una fuente tiene la misma probabilidad de ser de tipo A que de tipo B. Para distinguir si una fuente es de tipo A o de tipo B, un sensor cuenta el número de partículas X emitidas por la fuente durante una hora. Si la fuente ha emitido como máximo 1 partícula, el sensor interpreta que la fuente es de tipo A; por el contrario si la fuente emite 2 ó más partículas interpreta que la fuente es de tipo B. Calcular la probabilidad de que el sensor se equivoque.
c) Calcular la probabilidad de que una fuente de tipo A emita, durante 160 horas, más de 20 partículas.

5. La duración, en minutos, de las tareas de mantenimiento que requiere un aparato se distribuye uniformemente con media desconocida y desviación igual a 5 minutos.
Se ha tomado una muestra de 100 tareas resultando una media muestral igual a 34 minutos.
Calcular la probabilidad de que el valor medio de una tarea sea mayor que 35.

PUNTUACION: Todos los apartados tienen la misma = 1

SOLUCIONES

1. Considérese el proceso estocástico
$X(t) = W\,t^2 - Z$
en el que W— N(0, 2) y Z— N(0, 1).
Calcular la media y la autocorrelación del proceso.
a) Si son independientes.
b) Si están correlacionadas, siendo $\rho = 0{,}25$

Solución

Media

$E[X(t)] = E[W\,t^2 - Z] = EW\,t^2 - EZ = 0$ ya que $EW = EZ = 0$

(tanto si W y Z son independientes como si están correlacionadas)

Autocorrelación

$R(t_1\,t_2) = E[X(t_1)*X(t_2)] = E[\,(W\,t_1^2 - Z) * (W\,t_2^2 - Z)\,]$
$= E(W^2)\,t_1^2\,t_2^2 - E(WZ)\,t_1^2 - E(ZW)\,t_2^2 + E(Z^2)$

$E(W^2) = \sigma_w^2 + m_w^2 = 4$
$E(Z^2) = \sigma_z^2 + m_z^2 = 1$

coeficiente de correlación $\rho = \dfrac{Cov(WZ)}{\sigma_W \sigma_Z} = \dfrac{E(WZ) - EW * EZ}{\sigma_W \sigma_Z} = \dfrac{E(WZ)}{2}$

Si son independientes $\rho = 0 \Rightarrow E(WZ) = 0$

Si $\rho = 0{,}25 \Rightarrow E(WZ) = E(ZW) = 2\rho = 0{,}5$

Sustituyendo:

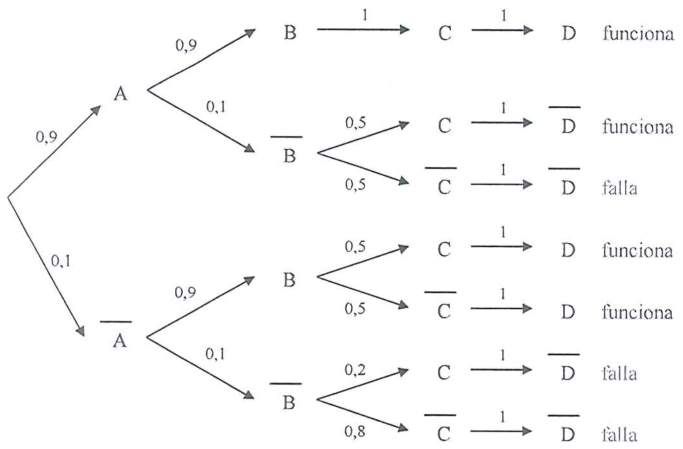
Si son independientes $\Rightarrow R(t_1\,t_2) = 4\,t_1^2\,t_2^2 + 1$

Si $\rho = 0{,}25 \Rightarrow R(t_1\,t_2) = 4\,t_1^2\,t_2^2 - 0{,}5(t_1^2 + t_2^2) + 1$

2. Un dispositivo consta de cuatro componentes A , B , C y D
El dispositivo funciona si al menos funcionan 2 de los 4 componentes.
Cada uno de los componentes A y B funcionan de manera independiente del resto de componentes. Tienen una probabilidad de no fallar igual a 0,9.
Si A y B no fallan entonces C tampoco falla; si falla uno de los dos, entonces C fallará con una probabilidad igual a 0,5 y si fallan ambos, C tiene una probabilidad de fallar de 0,8.
D falla sólo si falla B
a) Calcular la probabilidad de que el dispositivo falle
b) Calcular la probabilidad de que el sistema funcione aunque falle B

Solución

El dispositivo funciona si al menos funcionan 2 de los 4 componentes.



a) Prob(fallo) = 0,9*0,1*0,5 + 0,1*0,1 = 0,055

b) $\text{Probabilidad (funcione/ B falla)} = \dfrac{\text{Prob(funciona} \cap \overline{B})}{\text{Prob}(\overline{B})} = \dfrac{0{,}9 * 0{,}1 * 0{,}5}{0{,}1} = 0{,}45$

3. El tiempo (en días) de vida de una marca de dispositivos sigue distribución exponencial de parámetro 1/50. Hace 20 días comenzaron a funcionar (de manera independiente) 6 de estos dispositivos.
a) Calcular la probabilidad de que al día de hoy sigan en funcionamiento 4 de los 6.
b) Si al día de hoy siguen en funcionamiento 4 de los 6 iniciales, calcular la probabilidad de que al menos uno de los cuatro siga funcionando dentro de diez días.

Solución

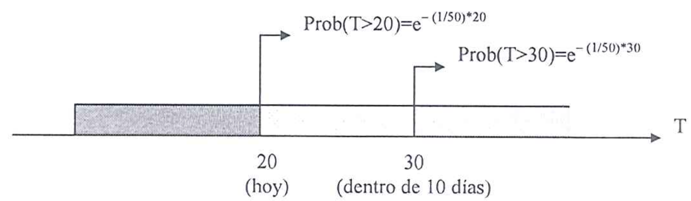
Sea T la vida de un dispositivo $T \longrightarrow \exp(^1/_{50})$

a) Si comenzaron a funcionar hace 20 días:

Prob(1 dispositivo funcione hoy) = Prob(T>20) = $e^{-(1/50)*20} = 0{,}6703$

El número de dispositivos, de los seis que comenzaron, que funcionan hoy es una variable X binomial de parámetros n=6 ; p=0,6703

a) $\text{Prob}(X=4) = \binom{6}{4} 0{,}6703^4 * 0{,}3297^2 = 0{,}3292$



Prob(1 dispositivo funcione dentro de 10 días / funciona hoy) =

$$\text{Prob(T>30/T>20)} = \frac{\text{Prob}(T > 20 \cap T > 30)}{\text{Prob}(T > 20)} = \frac{\text{Prob}(T > 30)}{\text{Prob}(T > 20)} = e^{-(1/50)*(30-20)} = 0{,}8187$$

El número de dispositivos que funcionarán dentro de 10 días, de los 4 que funcionan hoy, es una variable W binomial de parámetros n=4 ; p=0,8187

b) La probabilidad de que al menos uno de los cuatro siga funcionando dentro de diez días
= 1 – probabilidad de que ninguno sobreviva
= 1 – Prob(W=0) = 0,9989

4. El número de partículas emitidas por una fuente radioactiva A sigue distribución de Poisson de tasa 0,1 partículas/hora. Para la fuente B, la tasa aumenta hasta 3 partículas/hora.
a) Calcular la probabilidad de que en 20 minutos, la fuente B haya emitido como mínimo 2 partículas.
b) Una fuente tiene la misma probabilidad de ser de tipo A que de tipo B. Para distinguir si una fuente es de tipo A o de tipo B, un sensor cuenta el número de partículas X emitidas por la fuente durante una hora. Si la fuente ha emitido como máximo 1 partícula, el sensor interpreta que la fuente es de tipo A; por el contrario si la fuente emite 2 ó más partículas interpreta que la fuente es de tipo B. Calcular la probabilidad de que el sensor se equivoque.
c) Calcular la probabilidad de que una fuente de tipo A emita, durante 160 horas, más de 20 partículas.

Solución

a) X_A : Nº partículas/hora emitidas por A: $X_A \to P(\lambda_A = 0{,}1)$

X_B : Nº partículas/hora emitidas por B: $X_B \to P(\lambda_B = 3)$

Sea Y = Nº partículas emitidas por B en 20 minutos

Puesto que 20 minutos = $^1/_3$ hora, el número Y de partículas emitidas en ese tiempo sigue también distribución de Poisson de tasa $3 * {^1/_3} = 1$

$Y \to P(1)$

a) $Prob(Y \geq 2) = 1 - Prob(Y = 0) - Prob(Y = 1) = 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} - \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0{,}2642$

b) El sensor se equivoca cuando una fuente de tipo B ($\lambda_B = 3$) emite como máximo 1 partícula en una hora (ya que la interpretará como fuente A)

Prob(Interpreta A cuando es B) = $Prob(X \leq 1)$ siendo $X \to P(\lambda_B = 3)$

$= P(0) + P(1) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0{,}1991$

También se equivoca cuando una fuente de tipo A ($\lambda_A = 0{,}1$) emite 2 ó más partículas en una hora (ya que la interpretará como fuente B)

Prob(Interpreta B cuando es A) = $Prob(X \geq 2)$ siendo $X \to P(\lambda_A = 0{,}1)$

$= 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{e^{-0,1}0{,}1^0}{0!} + \frac{e^{-0,1}0{,}1^1}{1!} = 1 - 0{,}9953 = 0{,}0047$

La fuente tiene las mismas probabilidades de ser de tipo A o de tipo B = $^1/_2$

b) Prob(Equivocarse) = $^1/_2 * 0{,}1991 + ^1/_2 * 0{,}0047 = 0{,}1019$

c) Sea W = Nº partículas emitidas por A en 160 horas

$W \to P(\lambda_w = 0{,}1*160) = P(\lambda_w = 16)$

Puesto que $\lambda_w > 5$ cumple la condición de convergencia a la distribución Normal.

$W \to N(16\ ;\ 4)$

c) $Prob(W > 20)$ = (tipificando) $Prob(Z > 1)$ = (tablas) 0,1587

5. La duración, en minutos, de las tareas de mantenimiento que requiere un aparato se distribuye uniformemente con media desconocida y desviación igual a 5 minutos.
Se ha tomado una muestra de 100 tareas resultando una media muestral igual a 34 minutos. Calcular la probabilidad de que el valor medio de una tarea sea mayor que 35.

Solución

Sea X: tiempo de una tarea que es uniforme de media m_x y desviación 5

La media muestral $\overline{X}$ de una muestra de tamaño 100 sigue distribución normal de parámetros $m_{\overline{x}} = m_x$ y desviación $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$

$\overline{X} = m_x + 0{,}5*Z\ ;\ 34 = m_x + 0{,}5*Z\ ;\ m_x = 34 - 0{,}5*Z$

$Prob(m_x > 35) = Prob(34 - 0{,}5*Z > 35) = Prob(Z < -2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

DEPARTAMENTO ORGANIZACION DE EMPRESAS
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (TELECOMUNICACIONES)
FECHA: 16 de Septiembre de 2009

TIEMPO: 90 minutos

1.- Una empresa consultora de recursos humanos ha realizado un estudio sobre los tipos de empleo solicitados por los estudiantes de Bachiller, Formación Profesional y Universitarios. El informe clasifica estos solicitantes de empleo como cualificados o no para los trabajos que solicitan, y de los datos que contiene se desprende que sólo el 25% estaban cualificados para el trabajo que solicitaban, de los cuales, un 20% eran estudiantes universitarios, un 30% estudiaban Formación Profesional y un 50% Bachillerato. La situación entre los no cualificados es diferente: un 40% de ellos era estudiante universitario, otro 40% estudiaban Formación Profesional y solo un 20% se encontraba en Bachillerato.
a) ¿Qué porcentaje de estos estudiantes se encontraban en Bachillerato y estaban cualificados para los empleos que solicitaban?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos estudiantes que solicitaba empleo estudiara Formación Profesional?
c) Entre los estudiantes universitarios que solicitaron empleo, ¿qué porcentaje no estaba cualificado para los puestos de trabajo que solicitaban?

Calificación: a) 0,5 puntos b) 0,5 puntos c) 1 punto

2.- Un sistema electrónico contiene 20 componentes y la probabilidad de que falle un componente individual es de 0,15.
Se supone que los componentes fallan independientemente unos de otros.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen dos? ¿Y al menos uno?
b) Si uno de ellos se sabe que ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que fallen al menos dos?
c) Si al menos uno de ellos ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que fallen al menos dos?

Calificación: a) 0,5 puntos b) 0,5 puntos c) 1 punto

3.- Tras realizar un estudio de las señales que emite una antena de telecomunicaciones, se ha sabido que el número de mensajes emitidos al mes sigue distribución de Poisson de media 16. Se pide:
a) Calcular la probabilidad de que en un mes, 2 antenas emitan más de 34 mensajes.
b) Considérese un conjunto de 250 antenas. Calcular la probabilidad de que en un mes, 7 de las 250 antenas haya emitido cada una más de 25 mensajes.

Calificación: a) 1,5 puntos b) 1,5 puntos

4.- Se han estudiado las resistencias que se van a utilizar en la fabricación de un circuito antes de hacer el pedido al proveedor. La duración del tipo de resistencia A, sigue una distribución normal N(900, 200). Este tipo de resistencia no se pediría si su duración media fuese menor a 850 horas.
a) Si se toma una muestra de 50 resistencias, calcular la probabilidad de realizar el pedido.
b) Se ha estudiado otro tipo de resistencia, B, y su duración también sigue una distribución Normal, tal que, N(800,250).
El coste del circuito es el siguiente dependiendo de la resistencia elegida:

K_A: $6x_A^2+250$ (X_A: duración de la resistencia A)
K_B: $5X_B^2+100$ (X_B: duración de la resistencia B)

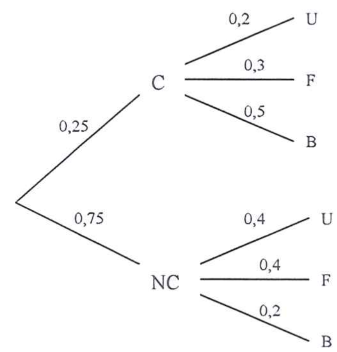
¿Qué resistencia elegirías según su coste?

Calificación: a) 1,5 puntos b) 1,5 puntos

SOLUCIONES

1.- Una empresa consultora de recursos humanos ha realizado un estudio sobre los tipos de empleo solicitados por los estudiantes de Bachiller, Formación Profesional y Universitarios. El informe clasifica estos solicitantes de empleo como cualificados o no para los trabajos que solicitan, y de los datos que contiene se desprende que sólo el 25% estaban cualificados para el trabajo que solicitaban, de los cuales, un 20% eran estudiantes universitarios, un 30% estudiaban Formación Profesional y un 50% Bachillerato. La situación entre los no cualificados es diferente: un 40% de ellos era estudiante universitario, otro 40% estudiaban Formación Profesional y solo un 20% se encontraba en Bachillerato.
a) ¿Qué porcentaje de estos estudiantes se encontraban en Bachillerato y estaban cualificados para los empleos que solicitaban?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos estudiantes que solicitaba empleo estudiara Formación Profesional?
c) Entre los estudiantes universitarios que solicitaron empleo, ¿qué porcentaje no estaba cualificado para los puestos de trabajo que solicitaban?

Definimos los siguientes sucesos:
C="Estudiante cualificado" ; NC="Estudiante NO cualificado"
U="Estudiante Universitario"
F="Estudiante de Formación Profesional"
B="Estudiante de Bachillerato"



a) Prob(B∩C) = Prob(C) Prob(B/C) = 0,25 * 0,5 = 0,125 → **12,5%**

b) Prob(F) = Prob(C) Prob(F/C) + Prob(NC) Prob(F/NC) = 0,25*0,3 + 0,75*0,4 = 0,375 → **37,5%**

c) $\mathrm{Prob}(NC/U) = \dfrac{\mathrm{Prob}(U/NC)\,\mathrm{Prob}(NC)}{\mathrm{Prob}(U/NC)\,\mathrm{Prob}/NC) + \mathrm{Prob}(U/C)\,\mathrm{Prob}(C)}$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}75}{0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}25} = 0{,}8571 \qquad \rightarrow \mathbf{85{,}71\%}$$

2.- Un sistema electrónico contiene 20 componentes y la probabilidad de que falle un componente individual es de 0,15.
Se supone que los componentes fallan independientemente unos de otros.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen dos? ¿Y al menos uno?
b) Si uno de ellos se sabe que ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que fallen al menos dos?
c) Si al menos uno de ellos ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que fallen al menos dos?

Sea X = nº de componentes que fallan: X — $b(20\,,\,0{,}15)$

a1) $\text{Prob}(x = 2) = \binom{20}{2} 0{,}15^2 0{,}85^{18} = 0{,}2293 \rightarrow \mathbf{22{,}93\%}$

a2) $\text{Prob}(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \binom{20}{0} 0{,}15^0 0{,}85^{20} = 0{,}9612 \rightarrow \mathbf{96{,}12\%}$

b) La probabilidad de que fallen **al menos dos** si ha fallado uno de los veinte componentes será igual a la probabilidad de que falle al menos 1 de los 19 componentes que quedan (ya que si de los 20 ha fallado 1 entonces quedan 19)

Se trata de calcular la probabilidad $\text{Prob}(w \geq 1)$ siendo W — $b(19\,,\,0{,}15)$

$\text{Prob}(w \geq 1) = 1 - P(w=0) = 1 - \binom{19}{0} 0{,}15^0 0{,}85^{19} = 0{,}9544 \rightarrow \mathbf{95{,}44\%}$

c) $P(x \geq 2 / x \geq 1) = \dfrac{\text{Prob}(x \geq 2 \cap x \geq 1)}{\text{Prob}(x \geq 1)} = \dfrac{\text{Prob}(x \geq 2)}{\text{Prob}(x \geq 1)} = \dfrac{0{,}8244}{0{,}9612} = 0{,}8576 \rightarrow \mathbf{85{,}76\%}$

$\text{Prob}(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 0{,}8244$

3.- Tras realizar un estudio de las señales que emite una antena de telecomunicaciones, se ha sabido que: el nº de mensajes emitidos al mes sigue distribución de Poisson de media 16. Se pide:
a) Calcular la probabilidad de que en un mes, 2 antenas emitan más de 34 mensajes.
b) Considérese un conjunto de 250 antenas. Calcular la probabilidad de que en un mes, 7 de las 250 antenas haya emitido cada una más de 25 mensajes.

a) Sean
X_1: nº de mensajes emitidos por la antena de telecomunicaciones 1
X_2: nº de mensajes emitidos por la antena de telecomunicaciones 2

X_1 — $P(16)$
X_2 — $P(16)$

Como $Y = X_1 + X_2$ la probabilidad pedida es la siguiente:

$\text{Prob}(Y > 34) = \text{Prob}(X_1 + X_2 > 34)$

Como X_1 y X_2 son independientes, y teniendo en cuenta la propiedad de convolución:

$Y = X_1 + X_2$ — $P(16 + 16) \equiv P(32)$

$\text{Prob}(Y > 34) = 1 - \text{Prob}(Y \leq 34) = \sum_{y=0}^{34} \dfrac{e^{-32} 32^y}{y!} = 0{,}3208$ (solución exacta)

Como $\lambda = 32 > 5$, aplicando el TCL

$Y = X_1 + X_2$ — $P(32) \rightarrow N(\lambda;\ \sqrt{\lambda}) \equiv N(32;\ \sqrt{32})$

Si no se aplica la corrección por continuidad:

$\text{Prob}(Y > 34) = \text{Prob}\left(z > \dfrac{34 - 32}{\sqrt{32}}\right) = \text{Prob}(z > 0{,}3536) = (\text{tablas}) = 0{,}36$

Si se aplica la corrección por continuidad:

$\text{Prob}(Y > 34{,}5) = \text{Prob}\left(z > \dfrac{34{,}5 - 32}{\sqrt{32}}\right) = P(z > 0{,}44) = 1 - \varphi(0{,}44) = 1 - 0{,}67 = \mathbf{0{,}33}$

b) X: nº de mensajes emitidos por la antena de telecomunicaciones

X — $P(16) \rightarrow N(16;\ \sqrt{16})$

Calculamos en primer lugar la probabilidad de que una antena emita más de 25 mensajes:

$\text{Prob}(X > 25) = P\left(z > \dfrac{25 - 16}{\sqrt{16}}\right) = P(z > 2{,}25) = (\text{tablas}) = 0{,}0122$

Sea T = nº de antenas, entre 250, que han emitido más de 25 mensajes

T — $b(250;\ 0{,}0122)$

$P(T = 7) = \binom{250}{7} 0'0122^7 0{,}9978^{243} = 0{,}0228$

4.- Se han estudiado las resistencias que se van a utilizar en la fabricación de un circuito antes de hacer el pedido al proveedor. La duración del tipo de resistencia A,

sigue una distribución normal N(900, 200). Este tipo de resistencia no se pediría s su duración media fuese menor a 850 horas.
a) Si se toma una muestra de 50 resistencias, calcular la probabilidad de realizar el pedido.
b) Se ha estudiado otro tipo de resistencia, B, y su duración también sigue una distribución Normal, tal que, N(800,250).
El coste del circuito es el siguiente dependiendo de la resistencia elegida:

K_A: $6x_A^2+250$ (X_A: duración de la resistencia A)
K_B: $5X_B^2+100$ (X_B: duración de la resistencia B)

¿Qué resistencia elegirías según su coste?

a) $x_A - N(900,200)$
n=50 $\bar{x}$ -- $N(900, {}^{200}/_{\sqrt{50}})$
El pedido se acepta si $\bar{x}>850$

$$\text{Prob}(\bar{x}>850) = \text{Prob}\left(z > \frac{850-900}{200/\sqrt{50}} \right) = \text{Prob}(z>-1{,}77) = 0{,}96$$

b) $x_A - N(900,200)$; $x_B - N(800, 250)$

K_A: $6x_A^2+250$ (X_A: duración de la resistencia A)
K_B: $5X_B^2+100$ (X_B: duración de la resitencia B)

Elegiremos aquella que tenga menor coste medio

$E(K_A)$: $6Ex_A^2+250$
$E(K_B)$: $5EX_B^2+100$

$Ex_A^2 = \sigma_A^2 + m_A^2 = 200^2 + 900^2 = 850.000$
$Ex_B^2 = \sigma_B^2 + m_B^2 = 250^2 + 800^2 = 702.500$

$E(K_A)$: $6Ex_A^2+250 = 6*850000 + 250 = 5.100.250$
$E(K_B)$: $5EX_B^2+100 = 5*702.500 + 100 =$ **3.512.600**

Por lo tanto elegimos la de menor coste → **B**

DEPARTAMENTO ORGANIZACIÓN DE EMPRESAS
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (TELECOMUNICACIONES)
FECHA: 2 de JUNIO de 2010

TIEMPO: 2 HORAS

1. Una impresora de planos ejecuta correctamente el trabajo en el 90% de las ocasiones (es decir el 10% de los planos son defectuosos).
   En la fase de corrección sólo se detecta el 80% de los planos incorrectos. Los planos incorrectos que no se hayan detectado, no se corrigen.
   Los planos que se confeccionan de este modo pasan a formar parte de un proyecto. Cada proyecto contiene dos planos. Un proyecto se considera correcto si sus dos planos son correctos.
   El tiempo (horas) necesario para corregir un plano incorrecto es aleatorio normal de media 2 y desviación 0,5.
   Calcular:
   a) La probabilidad de que entre 100 de estos proyectos se encuentren como máximo 1 defectuoso.
   b) La probabilidad de que el tiempo necesario para corregir los planos incorrectos detectados en UN proyecto sea superior a 45 minutos.

Calificación: a) 1 punto b) 1,5 puntos

2. Una tienda vende dos tipos de productos. El beneficio obtenido en euros por cada producto A sigue una distribución uniforme en el intervalo (1, 5) y el beneficio obtenido en euros por el producto B sigue una distribución uniforme en el intervalo (2, 4). A lo largo del año vende 1200 productos tipo A y 1500 del tipo B.
   a) Calcular la probabilidad de que el beneficio obtenido por A por lo menos sea el doble del obtenido por el producto B (los beneficios de ambos productos son independientes).
   b) Si el beneficio obtenido por ambos productos no es independiente, y su factor de correlación es de 0,7, calcular la probabilidad de que el beneficio total sea mayor que 8000 euros.

Calificación: a) 1 punto b) 1,5 puntos

3. En una heladería 3 dependientes sirven virtuosas copas de helado, el nº de copas de helado que no cumplen la normativa de presentación definida por el establecimiento en una hora de trabajo de cada dependiente es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de tasa λ=0.5. Calcular:
   a) La probabilidad de que en una jornada laboral (2 turnos de 8 horas) se produzcan 3 o más copas que no cumplan la normativa por el dependiente 1.
   b) La probabilidad de que cada uno de los dependientes produzca 3 o más copas que no cumplan la normativa en una jornada laboral.
   c) La probabilidad de que en una jornada laboral se produzcan 3 o más copas que no cumplen la normativa al menos uno de los dependientes.

Calificación: a) 1 punto b) 1 punto c) 1 punto

4. El número de pasajeros que utilizan el ascensor para salir del metro es una variable aleatoria normal. Si se analiza una muestra de 50 ascensores, la empresa que realiza el estudio ha calculado que el número medio de pasajeros que utiliza el ascensor es de 25 con una desviación muestral de 10.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el nº medio de pasajeros que utilizan el ascensor sea superior a 45?
   b) Otro estudio asegura que el número de pasajeros que utilizan el ascensor sigue una distribución normal cuya media es de 50 y su desviación típica es 20. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 60 ascensores el número medio de pasajeros que utilizan el ascensor sea superior a 45?

Calificación: a) 1 punto b) 1 punto

SOLUCIONES

1. *Una impresora de planos ejecuta correctamente el trabajo en el 90% de las ocasiones (es decir el 10% de los planos son defectuosos).En la fase de corrección sólo se detecta el 80% de los planos incorrectos. Los planos incorrectos que no se hayan detectado, no se corrigen. Los planos que se confeccionan de este modo pasan a formar parte de un proyecto. Cada proyecto contiene dos planos. Un proyecto se considera correcto si sus dos planos son correctos.El tiempo (horas) necesario para corregir un plano incorrecto es aleatorio normal de media 2 y desviación 0,5.*
   Calcular:
   a) La probabilidad de que entre 100 de estos proyectos se encuentre como máximo 1 defectuoso.
   b) La probabilidad de que el tiempo necesario para corregir los planos incorrectos detectados en UN proyecto sea superior a 45 minutos.

Solución

a) Un plano puede resultar correcto o defectuoso con las siguientes probabilidades:

Prob(plano correcto) = 0,9 + 0,1*0,8 = 0,98 ; Prob(plano defectuoso) = 0,1*0,2 = 0,02

Un proyecto que contiene 2 planos resulta correcto si sus 2 planos son correctos, en consecuencia:

Prob(proyecto correcto) = 0,98^2 = 0,9604 ; Prob(proyecto defectuoso) = 0,0396

Sea W el nº total de proyectos defectuosos entre 100 proyectos W—B(100 ; 0,0396)

$$\text{Prob}(W \le 1) = P(0) + P(1) = \binom{100}{0} 0{,}0396^0\, 0{,}9604^{100} + \binom{100}{1} 0{,}0396^1\, 0{,}9604^{99} = 0{,}0901$$

b) Sea X el número de planos incorrectos que contiene un proyecto X—b(2 ; 0,02)

Si no contiene ninguno defectuoso el tiempo de corrección es cero, en consecuencia la probabilidad de que T (tiempo de corrección) > ¾ es cero

Prob(T > ¾ / X=0) = 0

Si contiene 1 plano defectuoso el tiempo de corrección T—N(2 ; 0,5)

Prob(T > ¾ / X=1) = Prob(Z > (0,75-2)/0,5) = Prob(Z > -2,5) = 0,9937

Si contiene 2 planos defectuosos el tiempo de corrección $T = T_1 + T_2$ —N(4 ; 0,7071)

$m_T = 2 + 2 = 4 \quad \sigma_T = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = 0{,}7071$

Prob(T > ¾ / X=2) = Prob(Z > (0,75-4)/0,7071) = Prob(Z > -4,5962) ≈ 1

Prob(X=0) = 0,98^2 = 0,9604
Prob(X=1) = 2*0,98*0,02 = 0,0392
Prob(X=2) = 0,02^2 = 0,0004

$Prob(T > 3/4) =$

$Prob(T > 3/4 / X=0)\,P(X=0) + Prob(T > 3/4 / X=1)\,P(X=1) + Prob(T > 3/4 / X=2)\,P(X=2)$

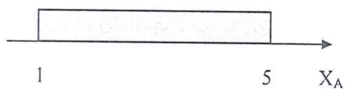
$= 0*0{,}9604 + 0{,}9938*0{,}0392 + 1*0{,}0004 = 0{,}0394$

2. *Una tienda vende dos tipos de productos. El beneficio obtenido en euros por cada producto A sigue una distribución uniforme en el intervalo (1, 5) y el beneficio obtenido en euros por el producto B sigue una distribución uniforme en el intervalo (2, 4). A lo largo del año vende 1200 productos tipo A y 1500 del tipo B.*

   a) *Calcular la probabilidad de que el beneficio obtenido por A por lo menos sea el doble del obtenido por el producto B (los beneficios de ambos productos son independientes).*
   b) *Si el beneficio obtenido por ambos productos no es independiente, y su factor de correlación es de 0,7, calcular la probabilidad de que el beneficio total sea mayor que 8000 euros.*

Solución

a)



$f(x_A) = 1/5 \rightarrow m_A = 3\ \sigma^2_A = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ Unidades vendidas 1200

$f(x_B) = 1/2 \rightarrow m_B = 3\ \sigma^2_A = \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ Unidades vendidas 1500

$1200\ A \rightarrow$ TCL $x_{AT} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{1200}$ ---N ($m_{AT} = 1200*3 = 3600$, $\sigma^2_{AT} = 4/3*1200 = 1600$)

$1500\ B \rightarrow$ TCL $x_{BT} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{1500}$ ---N ($m_{BT} = 1500*3 = 4500$, $\sigma^2_{AT} = 1/3*1500 = 500$)

$P(x_{AT} > 2x_{BT}) = P(x_{AT} - 2x_{BT} > 0)$

$W = x_{AT} - 2x_{BT} \rightarrow m_w = 3600 - 2*4500 = -5400$ $\sigma^2_w = 1600 + 2^2*500 = 3.600$

W –N (-5400, 3600)

$P(w>0) = P(z > 0-(-5400)/\sqrt{3600}) = 1 - \varphi(90) = 1 - 1 =$ **0**

b) $\rho = Cov(xy) / \sigma_x\sigma_y \rightarrow cov(xy) = 0{,}7 * \sqrt{1600} * \sqrt{500} = 626{,}1$

$w = x_A + x_B \rightarrow m_w = 3600 + 4500 = 8100$;

$\sigma^2_w = \sigma^2_x + \sigma^2_y + 2\,Cov(xy) = 1600 + 500 + 2*626{,}1 = 3.352{,}2$

$W \rightarrow N(8100,\ 3352{,}2)$ $P(w > 8000) = P(z > 8000-8100/\sqrt{3352{,}2}) = 1 - \varphi(-1{,}73) = 1 - 0{,}0418 =$ **0,9582**

3. *En una heladería 3 dependientes sirven virtuosas copas de helado, el nº de copas de helado que no cumplen la normativa de presentación definida por el establecimiento en una hora de trabajo de cada dependiente es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de tasa λ=0.5. Calcular:*

   a) *La probabilidad de que en una jornada laboral (2 turnos de 8 horas) se produzcan 3 o más copas que no cumplan la normativa por el dependiente 1.*
   b) *La probabilidad de que cada uno de los dependientes produzca 3 o más copas que no cumplan la normativa en una jornada laboral.*
   c) *La probabilidad de que en una jornada laboral se produzcan 3 o más copas que no cumplen la normativa, al menos en uno de los dependientes.*

Solución

a) Sea Y la variable "Nº de copas que no cumplen la normativa de presentación /hora" Y— $P(\lambda_y = 0{,}5)$

En una jornada laboral (de 2 turnos de 8 horas, por tanto de 16 horas) se realizan X copas incorrectas, siendo

$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{16}$

X es una variable independiente que representa el nº de copas incorrectas en las 16 horas y por la propiedad de convolución de las variables de Poisson sigue también distribución de Poisson:

$\lambda_x = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{16} = 0{,}5 + 0{,}5 + \ldots + 0{,}5 = 0{,}5 * 16 = 8$ o sea: X— $P(\lambda_x = 8)$

$Prob(x \geq 3) = 1 - Prob(x \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{x=2} \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!} = 1 - 0.01375 =$ **0.9862**

Prob (x=0) = $3.3546 * 10^{-4}$
Prob (x= 1)= $2.6837 * 10^{-3}$
Prob (x=2) = $1.0734 * 10^{-2}$

b) Probabilidad $(D1 \cap D2 \cap D3) = 0.9862^3 =$ **0.9591**

c) Probabilidad ($x \geq 3$ al menos en uno de los dependientes)=
1 – Probabilidad ($x \leq 2$ en todos los dependientes) = $1 - 0.01375^3 =$ **0.9999**

Probabilidad($x \leq 2$ en un dependiente) $= \sum_{x=0}^{x=2} \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!} = 0.01375$

4 *El número de pasajeros que utilizan el ascensor para salir del metro es una variable aleatoria normal. Si se analiza una muestra de 50 ascensores, la empresa que realiza el estudio ha calculado que el número medio de pasajeros que utiliza dicha línea es de 25 con una desviación muestral de 10.*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que el nº medio de pasajeros que utilizan el ascensor sea superior a 45?*

b) *Otro estudio asegura que el número de pasajeros que utilizan el ascensor sigue una distribución normal cuya media es de 50 y su desviación típica es 20. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 60 ascensores el número medio de pasajeros que utilizan el ascensor sea superior a 45?*

Solución

a) X: Nº de pasajeros que utilizan un ascensor → N(m ; σ)

En una muestra de n=50 ascensores, se ha calculado que:

$\bar{x} = 25$ con una desviación muestral S = 10.

Se pide calcular la Prob(m > 45)

Utilizando el estadístico basado en la t de Student:

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{25 - m}{10/\sqrt{50}} = \frac{25 - m}{1{,}4142}$$

sigue distribución "t" de Student de (50-1) = 49 grados de libertad.

Despejamos m = 25 – 1,4142 t

Prob (m > 45) = Prob (25 – 1,4142 t > 45) = Prob (t < – 27,32) ≅ 0

b) Ahora X — N(50, 20)
para n= 60 → $\bar{x}$ — N (50, 20/√60) – N(50, 2,581)
P($\bar{x}$ >45) = (tipificar) = P(z> -1,93) (tablas) = 0,9732 → %97,32

DEPARTAMENTO ORGANIZACIÓN DE EMPRESAS
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (TELECOMUNICACIONES)
FECHA: 31 de AGOSTO de 2010

TIEMPO: 90 MINUTOS

1. En un colegio hay dos grupos de 25 alumnos de quinto curso y dos grupos de 20 alumnos de sexto curso. El 50% de los alumnos de quinto no tienen faltas de ortografía, porcentaje que sube a 70% en los alumnos de sexto. En un concurso de redacción entre alumnos de quinto y sexto se elige una redacción al azar.

   a) ¿Qué probabilidad hay de que se elija un alumno de quinto?
   b) Si tiene faltas de ortografía, ¿qué probabilidad hay de que sea de un alumno de quinto?

Calificación: a) 1 punto b) 1,5 punto

2. La duración (años) del componente electrónico X es uniforme en el intervalo (0,2). La duración (años) del componente Y es también uniforme en el intervalo (0,1). Ambos componentes son independientes.
   a) Si la suma de sus duraciones fue menor de 1 año, calcular la probabilidad de que el componente X durara más de ½ año.
   b) Supóngase que un componente X y otro Y (ambos nuevos) se colocan en serie formando un sistema (el sistema funciona si funcionan ambos componentes). Calcular la probabilidad de que el sistema dure sin fallos más de ½ año.

Calificación: a) 1 punto b) 1,5 punto

3. En un departamento de montaje de dispositivos trabajan un maestro y un aprendiz. El nº de dispositivos que monta a la hora el maestro sigue distribución de Poisson de tasa $\lambda_m = 3$, mientras que el nº de dispositivos que monta a la hora el aprendiz sigue distribución de Poisson de tasa $\lambda_a = 1{,}5$. Ambas variables son independientes. Calcular:
   a) Probabilidad de que en una hora tomada al azar no se haya montado ningún dispositivo.
   b) Probabilidad de que en una jornada de 8 horas se hayan montado más de 40 dispositivos.

Calificación: a) 1 punto b) 1,5 punto

4. El peso de un **artículo** es una variable aleatoria X, normal, con desviación típica 2.
   a) Calcular la probabilidad de que la media del peso de los artículos sea mayor que 20 Kg. si una muestra aleatoria simple de 25 artículos tiene una **media muestral** igual a 21 Kg.
   b) Supongamos que X es normal de media 20 y desviación típica 2. El peso de una caja para empaquetar los artículos es de 10 Kg. Si el peso que tienen que soportar las cajas es superior a 100 Kg. (incluido su propio peso), las cajas se rompen. Calcular la probabilidad de que una caja que contiene 4 artículos se rompa.

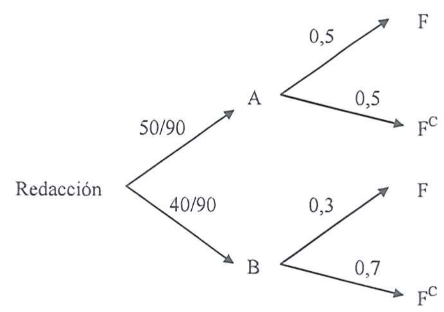
Calificación: a) 1 punto b) 1,5 punto

SOLUCIONES

1. En un colegio hay dos grupos de 25 alumnos de quinto curso y dos grupos de 20 alumnos de sexto curso. El 50% de los alumnos de quinto no tienen faltas de ortografía, porcentaje que sube a 70% en los alumnos de sexto. En un concurso de redacción entre alumnos de quinto y sexto se elige una redacción al azar.
   a) ¿Qué probabilidad hay de que se elija un alumno de quinto?
   b) Si tiene faltas de ortografía, ¿qué probabilidad hay de que sea de un alumno de quinto?

Solución

Se consideran los sucesos:
A = la redacción es de un alumno de quinto
B = la redacción es de un alumno de sexto ($B^c = A$)
F = la redacción tiene faltas de ortografía.



P(A) = 50/90 = 5/9 ; P(B) = 40/90 = 4/9

$P(F^c/A) = 0{,}5$; $P(F/A) = 1 - P(F^c/A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$P(F^c/B) = 0{,}7$; $P(F/B) = 1\text{-}\ P(F^c/B) = 1\text{-}\ 0{,}7 = 0{,}3$

a) P(A) = 5/9

b) P(A/F) (Teorema de Bayes) =

$$\frac{P(F/A)P(A)}{P(F/A)P(A)+P(F/B)P(B)} = \frac{0.5\frac{5}{9}}{0.5\frac{5}{9}+0.3\frac{4}{9}} = \frac{25}{37} = 0.676$$

2.- La duración (años) del componente electrónico X es uniforme en el intervalo (0,2). La duración (años) del componente Y es también uniforme en el intervalo (0,1). Ambos componentes son independientes.

a) Si la suma de sus duraciones fue menor de 1 año, calcular la probabilidad de que el componente X durara más de ½ año.
b) Supóngase que un componente X y otro Y (ambos nuevos) se colocan en serie formando un sistema (el sistema funciona si funcionan ambos componentes). Calcular la probabilidad de que el sistema dure sin fallos más de ½ año.

Solución

X — U(0,2)   f(x) = ½
Y — U(0,1)   f(y) = 1

Por tratarse de variables uniformes independientes

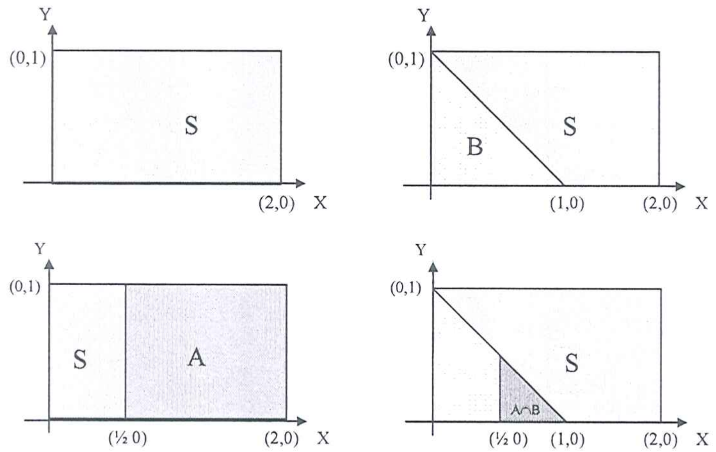
f(x,y) = f(x)*f(y) = ½ * 1 = ½

definidas en el recinto S (0<X<2 ; 0<Y<1)

Sea el suceso A ≡ X> ½

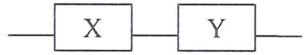
Sea el suceso B ≡ X+Y < 1 ; Prob(B) = Prob(X+Y < 1) = $\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} dy dx = \frac{1}{4}$

Prob(A∩B) = $\int_{1/2}^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} dy dx = \frac{1}{16}$



Se trata de calcular Prob(A / B) = $\frac{Prob(A \cap B)}{Prob(B)} = \frac{1}{4}$

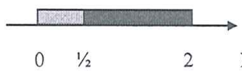
b)



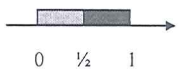
Sea T_{sma} la duración del sistema. El sistema durará más de ½ año si ambos componentes duran simultáneamente mas de ½ año:

Prob(T_{sma} > ½) = Prob(X > ½) * Prob(Y > ½) = $\frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Como X — U(0,2) Prob(X > ½) = $\frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$



Como Y — U(0,1) Prob(Y > ½) = $\frac{1 - \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$



3.- En un departamento de montaje de dispositivos trabajan un maestro y un aprendiz. El nº de dispositivos que monta a la hora el maestro sigue distribución de Poisson de tasa $\lambda_m = 3$, mientras que el nº de dispositivos que monta a la hora el aprendiz sigue distribución de Poisson de tasa $\lambda_a = 1,5$. Ambas variables son independientes. Calcular:

a) Probabilidad de que en una hora tomada al azar no se haya montado ningún dispositivo.
b) Probabilidad de que en una jornada de 8 horas se hayan montado al menos 40 dispositivos.

Solución

Sea la variable Xm = nº de dispositivos /hora que monta el maestro — P(λ_m = 3)
Sea la variable Xa = nº de dispositivos /hora que monta el aprendiz — P(λ_a = 1,5)

W = Xm + Xa es el nº de dispositivos /hora que se montan en total. — P(λ_w = 4,5)

a) Se trata de calcular Prob(W=0) = $\frac{e^{-4,5} 4,5^0}{0!}$ = 0,0111

b) T = W_1 + ... + W_8 es el nº de dispositivos que se montan en 8 horas — P(λ_T = 36)

el nº de dispositivos /hora que se montan en total. — P(λ_w = 4,5)que converge a la N(36 ; 6)

Se trata de calcular Prob(T≥40) = $1 - \sum_{k=0}^{39} \frac{e^{-6} 6^k}{k!}$ probabilidad exacta

Prob(T>40) = (tipificando) Prob $\left(Z > \frac{40-36}{6} \right)$ = (tabla) 0,2525

4.- El peso de un **artículo** es una variable aleatoria X, normal, con desviación típica 2.

a) Calcular la probabilidad de que la media del peso de los artículos sea mayor que 20 Kg. si una muestra aleatoria simple de 25 artículos tiene una media muestral igual a 21 Kg.

b) Supongamos que X es normal de media 20 y desviación típica 2. El peso de una caja para empaquetar los artículos es de 10 Kg. Si el peso que tienen que soportar las cajas es superior a 100 Kg. (incluido su propio peso), las cajas se rompen. Calcular la probabilidad de que una caja que contiene 4 artículos se rompa.

Solución

Sea X — N(m ; 0,1) la variable peso de un artículo

El peso medio de 25 artículos es: $\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_{25}}{25}$ que por ser combinación lineal de variables normales es también normal. Sus parámetros son:

$m_{\bar{x}} = m_x$

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Se pide la Prob($m_x > 20$) si $21 = \bar{x} = m_x + Z*0{,}4$

Despejando: Prob$\left(Z < \frac{21-20}{0{,}4} \right)$ = Prob(z < 2,5) = (tabla) **0,9938**

Sea Y=10 el peso de la caja y X_i el peso del artículo "i"

$W = 10 + X_1 + \ldots + X_4$

Se trata de calcular: Prob (W > 100)

$m_W = 90$; $\sigma_w = \sqrt{4 * \sigma_x^2} = 4$

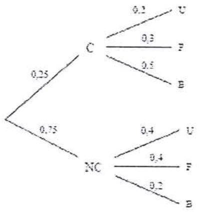
Prob (W>100) = (tipificando) Prob $\left(Z > \frac{100-90}{4} \right)$

= Prob(Z > 2,5) = (tabla) 0,0062

FECHA: 16 de Septiembre de 2009

1.- Una empresa consultora de recursos humanos ha realizado un estudio sobre los tipos de empleo solicitados por los estudiantes de Bachiller, Formación Profesional y Universitarios. El informe clasifica estos solicitantes de empleo como cualificados o no para los trabajos que solicitan, y de los datos que contiene se desprende que sólo el 25% estaban cualificados para el trabajo que solicitaban, de los cuales, un 20% eran estudiantes universitarios, un 30% estudiaban Formación Profesional y un 50% Bachillerato. La situación entre los no cualificados es diferente: un 40% de ellos era estudiante universitario, otro 40% estudiaban Formación Profesional y solo un 20% se encontraba en Bachillerato.
a) ¿Qué porcentaje de estos estudiantes se encontraban en Bachillerato y estaban cualificados para los empleos que solicitaban?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos estudiantes que solicitaba empleo estudiara Formación Profesional?
c) Entre los estudiantes universitarios que solicitaron empleo, ¿qué porcentaje no estaba cualificado para los puestos de trabajo que solicitaban?

Definimos los siguientes sucesos:
C="Estudiante cualificado" ; NC="Estudiante NO cualificado"
U="Estudiante Universitario"
F="Estudiante de Formación Profesional"
B="Estudiante de Bachillerato"



a) $Prob(B \cap C) = Prob(C)\,Prob(B/C) = 0{,}25 * 0{,}5 = 0{,}125$ → **12,5%**

b) $Prob(F) = Prob(C)\,Prob(F/C) + Prob(NC)\,Prob(F/NC) = 0{,}25*0{,}3 + 0{,}75*0{,}4 = 0{,}375$
→ **37,5%**

c) $$Prob(NC/U) = \frac{Prob(U/NC)Prob(NC)}{Prob(U/NC)Prob(NC) + Prob(U/C)Prob(C)}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}75}{0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}25} = 0{,}8571$$ → **85,71%**

2.- Un sistema electronico contiene 20 componentes y la probabilidad de que falle un componente individual es de 0,15.
Se supone que los componentes fallan independientemente unos de otros.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen dos? ¿Y al menos uno?
b) Si uno de ellos se sabe que ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que fallen al menos dos?
c) Si al menos uno de ellos ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que fallen al menos dos?

Sea X = nº de componentes que fallan: $X — b(20, 0{,}15)$

a1) $Prob(x = 2) = \binom{20}{2} 0{,}15^2 0{,}85^{18} = 0{,}2293$ → **21,93%**

a2) $Prob(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \binom{20}{0} 0{,}15^0 0{,}85^{20} = 0{,}9612$ → **96,12%**

b) La probabilidad de que fallen **al menos dos** si ha fallado uno de los veinte componentes será igual a la probabilidad de que falle al menos 1 de los 19 componentes que quedan (ya que si de los 20 ha fallado 1 entonces quedan 19)

Se trata de calcular la probabilidad $Prob(w \geq 1)$ siendo $W — b(19, 0{,}15)$

$Prob(w \geq 1) = 1 - P(w=0) = 1 - \binom{19}{0} 0{,}15^0 0{,}85^{19} = 0{,}9544$ → **95,44%**

c) $$P(x \geq 2 / x \geq 1) = \frac{Prob(x \geq 2 \cap x \geq 1)}{Prob(x \geq 1)} = \frac{Prob(x \geq 2)}{Prob(x \geq 1)} = \frac{0{,}8244}{0{,}9612} = 0{,}8576$$ → **85,76%**

$Prob(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 0{,}8244$

3.- Tras realizar un estudio de las señales que emite una antena de telecomunicaciones, se ha sabido que: el nº de mensajes emitidos al mes sigue distribución de Poisson de media 16. Se pide:
a) Calcular la probabilidad de que en un mes, 2 antenas emitan más de 34 mensajes.
b) Considérese un conjunto de 250 antenas. Calcular la probabilidad de que en un mes, 7 de las 250 antenas haya emitido cada una más de 25 mensajes.

a) Sean
X_1: nº de mensajes emitidos por la antena de telecomunicaciones 1
X_2: nº de mensajes emitidos por la antena de telecomunicaciones 2

$X_1 — P(16)$
$X_2 — P(16)$

Como $Y = X_1 + X_2$ la probabilidad pedida es la siguiente:

$Prob(Y > 34) = Prob(X_1 + X_2 > 34)$

Como X_1 y X_2 son independientes, y teniendo en cuenta la propiedad de convolución:

$Y = X_1 + X_2 — P(16 + 16) \equiv P(32)$

$$Prob(Y > 34) = 1 - Prob(Y \leq 34) = \sum_{y=0}^{34} \frac{e^{-32}\, 32^y}{y!} = 0{,}3208 \text{ (solución exacta)}$$

Como $\lambda = 32 > 5$, aplicando el TCL

$Y = X_1 + X_2 — P(32) \;\rightarrow\; N(\lambda; \sqrt{\lambda}) \equiv N(32; \sqrt{32})$

Si no se aplica la corrección por continuidad:

$$Prob(Y > 34) = Prob\left(z > \frac{34-32}{\sqrt{32}}\right) = Prob(z > 0{,}3536) = (tablas) = 0{,}36$$

Si se aplica la corrección por continuidad:

$$Prob(Y > 34{,}5) = Prob\left(z > \frac{34{,}5-32}{\sqrt{32}}\right) = P(z > 0{,}44) = 1 - \phi(0{,}44) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$$

b) X: nº de mensajes emitidos por la antena de telecomunicaciones

$X — P(16) \;\rightarrow\; N(16; \sqrt{16})$

Calculamos en primer lugar la probabilidad de que una antena emita más de 25 mensajes:

$$Prob(X > 25) = P\left(z > \frac{25-16}{\sqrt{16}}\right) = P(z > 2{,}25) = (tablas) = 0{,}0122$$

Sea T = nº de antenas, entre 250, que han emitido más de 25 mensajes

$T — b(250; 0{,}0122)$

$P(T = 7) = \binom{250}{7} 0{,}0122^7 0{,}9978^{243} = 0{,}0228$

4.- Se han estudiado las resistencias que se van a utilizar en la fabricación de un circuito antes de hacer el pedido al proveedor. La duración del tipo de resistencia A, sigue una distribución normal N(900, 200). Este tipo de resistencia no se pediría si su duración media fuese menor a 850 horas.
a) Si se toma una muestra de 50 resistencias, calcular la probabilidad de realizar el pedido.
b) Se ha estudiado otro tipo de resistencia, B, y su duración también sigue una distribución Normal, tal que, N(800,250).
El coste del circuito es el siguiente dependiendo de la resistencia elegida:

K_A: $6x_A^2 - 250$ (X_A: duración de la resistencia A)
K_B: $5X_B^2 - 100$ (X_B: duración de la resistencia B)

¿Qué resistencia elegirías según su coste?

a) $x_A - N(900,200)$
$n=50 \quad \bar{x} - N(900, 200/\sqrt{50})$
El pedido se acepta si $\bar{x} > 850$

$$Prob(\bar{x} > 850) = Prob\left(z > \frac{850-900}{200/\sqrt{50}}\right) = Prob(z > -1{,}77) = 0{,}96$$

b) $x_A - N(900,200)$; $x_B - N(800, 250)$

K_A: $6x_A^2 + 250$ (X_A duración de la resistencia A)
K_B: $5X_B^2 + 100$ (X_B: duración de la resitencia B)

Elegiremos aquella que tenga menor coste medio

$E(K_A)$: $6Ex_A^2 + 250$
$E(K_B)$: $5EX_B^2 + 100$

$Ex_A^2 = \sigma_A^2 + m_A^2 = 200^2 + 900^2 = 850.000$
$Ex_B^2 = \sigma_B^2 + m_B^2 = 250^2 + 800^2 = 702.500$

$E(K_A)$: $6Ex_A^2 + 250 = 6*850000 + 250 = 5.100.250$
$E(K_B)$: $5EX_B^2 + 100 = 5*702.500 + 100 =$ **3.512.600**

Por lo tanto elegimos la de menor coste → B

FECHA: 26 de Junio de 2009

1. Considérese el proceso estocástico
$X(t) = W t^2 - Z$
en el que $W — N(0, 2)$ y $Z — N(0, 1)$.
Calcular la media y la autocorrelación del proceso.
a) Si son independientes.
b) Si están correlacionadas, siendo $\rho = 0{,}25$

Solución

Media

$E[X(t)] = E[W t^2 - Z] = EW\, t^2 - EZ = 0$ ya que $EW = EZ = 0$

(tanto si W y Z son independientes como si están correlacionadas)

Autocorrelación

$R(t_1 t_2) = E[X(t_1) * X(t_2)] = E[(W t_1^2 - Z) * (W t_2^2 - Z)]$
$= E(W^2)\, t_1^2 t_2^2 - E(WZ)\, t_1^2 - E(ZW)\, t_2^2 + E(Z^2)$

$E(W^2) = \sigma_W^2 + m_W^2 = 4$
$E(Z^2) = \sigma_Z^2 + m_Z^2 = 1$

coeficiente de correlación $\rho = \frac{Cov(WZ)}{\sigma_W \sigma_Z} = \frac{E(WZ) - EW * EZ}{\sigma_W \sigma_Z} = \frac{E(WZ)}{2}$

Si son independientes $\rho = 0 \Rightarrow E(WZ) = 0$

Si $\rho = 0{,}25 \Rightarrow E(WZ) = E(ZW) = 2\rho = 0{,}5$

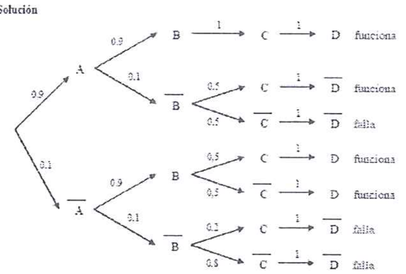
Sustituyendo:

Si son independientes $\Rightarrow R(t_1 t_2) = 4\, t_1^2 t_2^2 + 1$

Si $\rho = 0{,}25 \Rightarrow R(t_1 t_2) = 4\, t_1^2 t_2^2 - 0{,}5(t_1^2 + t_2^2) + 1$

2. Un dispositivo consta de cuatro componentes A , B , C y D
El dispositivo funciona si al menos funcionan 2 de los 4 componentes.
Cada uno de los componentes A y B funcionan de manera independiente del resto de componentes. Tienen una probabilidad de no fallar igual a 0,9.
Si A y B no fallan entonces C tampoco falla; si falla uno de los dos, entonces C fallará con una probabilidad igual a 0.5 y si fallan ambos, C tiene una probabilidad de fallar de 0,8.
D falla sólo si falla B
a) Calcular la probabilidad de que el dispositivo falle
b) Calcular la probabilidad de que el sistema funcione aunque falle B

Solución



a) $Prob(falla) = 0.9*0.1*0.5 + 0.1*0.1 = 0{,}055$

b) $$Probabilidad\ (funcione/\ B\ falla) = \frac{Prob(funciona \cap \overline{B})}{Prob(\overline{B})} = \frac{0.9*0.1*0.5}{0.1} = 0{,}45$$

3. El tiempo (en dias) de vida de una marca de dispositivos sigue distribución exponencial de parámetro 1/50. Hace 20 dias comenzaron a funcionar (de manera independiente) 6 de estos dispositivos.
a) Calcular la probabilidad de que al dia de hoy sigan en funcionamiento 4 de los 6.
b) Si al día de hoy siguen en funcionamiento 4 de los 6 iniciales, calcular la probabilidad de que al menos uno de los cuatro siga funcionando dentro de diez días.

Solución

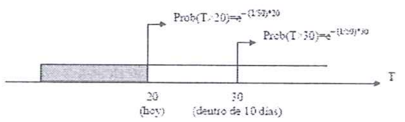
Sea T la vida de un dispositivo $T — exp(1/50)$

a) Si comenzaron a funcionar hace 20 días:

$Prob(1\ dispositivo\ funcione\ hoy) = Prob(T > 20) = e^{-(1/50)*20} = 0{,}6703$

El número de dispositivos, de los seis que comenzaron, que funcionan hoy es una variable X binomial de parámetros n=6 ; p=0,6703

a) $Prob(X=4) = \binom{6}{4} 0{,}6703^4 * 0{,}3297^2 = 0{,}3292$



Prob(1 dispositivo funcione dentro de 10 dias / funciona hoy) =

$$Prob(T > 30 / T > 20) = \frac{Prob(T > 20 \cap T > 30)}{Prob(T > 20)} = \frac{Prob(T > 30)}{Prob(T > 20)} = e^{-(1/50)*(30-20)} = 0{,}8187$$

El número de dispositivos que funcionarán dentro de 10 días, de los 4 que funcionan hoy, es una variable W binomial de parámetros n=4 ; p=0,8187

b) La probabilidad de que al menos uno de los cuatro siga funcionando dentro de diez días
= 1 – probabilidad de que ninguno sobreviva
= 1 – Prob(W=0) = 0,9989

4. El número de partículas emitidas por una fuente radioactiva A sigue distribución de Poisson de tasa 0,1 partículas/hora. Para la fuente B, la tasa aumenta hasta 3 partículas/hora.
a) Calcular la probabilidad de que en 20 minutos, la fuente B haya emitido como mínimo 2 partículas.
b) Una fuente tiene la misma probabilidad de ser de tipo A que de tipo B. Para distinguir si una fuente es de tipo A o de tipo B, un sensor cuenta el número de partículas X emitidas por la fuente durante una hora. Si la fuente ha emitido como máximo 1 partícula, el sensor interpreta que la fuente es de tipo A; por el contrario si la fuente emite 2 ó más partículas interpreta que la fuente es de tipo B. Calcular la probabilidad de que el sensor se equivoque.
c) Calcular la probabilidad de que una fuente de tipo A emita, durante 160 horas, más de 20 partículas.

Solución

a) X_A : Nº partículas/hora emitidas por A: $X_A \rightarrow P(\lambda_A = 0.1)$

X_B : Nº partículas/hora emitidas por B: $X_B \rightarrow P(\lambda_B = 3)$

Sea Y = Nº partículas emitidas por B en 20 minutos

Puesto que 20 minutos = 1/3 hora, el número Y de partículas emitidas en ese tiempo sigue también distribución de Poisson de tasa $3 * 1/3 = 1$

$Y \rightarrow P(1)$

---

a) $$Prob(Y \geq 2) = 1 - Prob(Y = 0) - Prob(Y = 1) = 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} - \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0{,}2642$$

b) El sensor se equivoca cuando una fuente de tipo B ($\lambda_B = 3$) emite como máximo 1 partícula en una hora (ya que la interpretará como fuente A)

$Prob(Interpreta\ A\ cuando\ es\ B) = Prob(X \leq 1)$ siendo $X \rightarrow P(\lambda_B = 3)$

$$= P(0) + P(1) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0.1991$$

También se equivoca cuando una fuente de tipo A ($\lambda_A = 0.1$) emite 2 ó más partículas en una hora (ya que la interpretará como fuente B)

$Prob(Interpreta\ B\ cuando\ es\ A) = Prob(X \geq 2)$ siendo $X \rightarrow P(\lambda_A = 0.1)$

$$= 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{e^{-0.1}0.1^0}{0!} + \frac{e^{-0.1}0.1^1}{1!} = 1 - 0.9953 = 0.0047$$

La fuente tiene las mismas probabilidades de ser de tipo A o de tipo B = 1/2

b) $Prob(Equivocarse) = 1/2 * 0.1991 + 1/2 * 0.0047 = 0{,}1019$

c) Sea W = Nº partículas emitidas por A en 160 horas

$W \rightarrow P(\lambda_W = 0.1*160) = P(\lambda_W = 16)$

Puesto que $\lambda_W > 5$ cumple la condición de convergencia a la distribución Normal.

$W \rightarrow N(16 ; 4)$

c) $Prob(W > 20) = (tipificando)\ Prob(Z > 1) = (tablas)\ 0{,}1587$

5. La duración, en minutos, de las tareas de mantenimiento que requiere un aparato se distribuye uniformemente con media desconocida y desviación igual a 5 minutos.
Se ha tomado una muestra de 100 tareas resultando una media muestral igual a 34 minutos. Calcular la probabilidad de que el valor medio de una tarea sea mayor que 35.

Solución

Sea X: tiempo de una tarea que es uniforme de media m_x y desviación 5

La media muestral $\overline{X}$ de una muestra de tamaño 100 sigue distribución normal de parámetros $m_{\bar{x}} = m_x$ y desviación $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$

$\overline{X} = m_x + 0{,}5*Z$; $34 = m_x + 0{,}5*Z$; $m_x = 34 - 0{,}5*Z$

$Prob(m_x > 35) = Prob(34 - 0{,}5*Z > 35) = Prob(Z < -2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

RESUMEN:

$Prob[A/B] = \frac{Prob[A \cap B]}{Prob[B]}$
Prob[A<x<B]=Prob[x<B]-Prob[x<A]

BINOMIAL
$Prob[X=x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$
$\sigma = \sqrt{n\,p\,q}$
$m_x = p\,n$

Al menos:
Prob[X>x] 1-Prob[X<x]

T.BAYES
$Prob[A/B] = \frac{caso\ Particular}{casos\ Posibles} = \frac{p\,p'}{p\,p' + q\,p'}$

Distribucion EXP
$Prob[T>t] = e^{-at}$
$a = \frac{1}{m_x}$
$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$

Distribucion POISON
$x - P(\lambda) \quad \lambda_w = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \rightarrow \lambda_w = n\lambda$
$x - P(\lambda_m, \sqrt{\lambda_m})$
$Prob[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Media MUESTRAL
$\bar{x} - N(m_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}) \quad Ex^2 = \sigma^2 + m^2$
$m_{\bar{x}} = m_x \qquad \bar{x} = m_x + \sigma_{\bar{x}}\ Z$ (para tipificar)
$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \rightarrow n\ conocida$
$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_x}{n}} \rightarrow n\ No\ conocida$

TIPIFICAR
$Prob[z < \frac{x - m_x}{\sigma_x}] = Tabla$
$Prob[z > \frac{x - m_x}{\sigma_x}] = 1 - Tabla$
Pr(w≥1)=1- Pr(w=0) // Pr(w≤1)= Pr(0)+Pr(1)

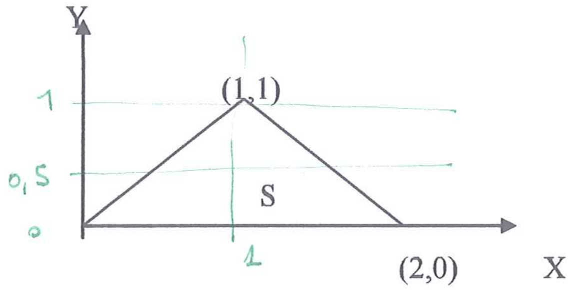
DEPARTAMENTO ORGANIZACION DE EMPRESAS
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA (GRADO TELECOMUNICACIONES)
FECHA: 2 DE JUNIO DE 2014
TIEMPO: 1,5 HORAS

2,5 puntos

1. Sea el siguiente juego: Se tiran 100 dados y si la suma es menor o igual a 360 se saca una bola al azar de una urna que contiene: 1 bola azul, 2 bolas rojas y 3 negras. Si se extrae una bola azul se ganan 5000 €, si es roja 2000 € y si la bola extraída es negra se pierden 1000 €. Si la suma es mayor que 360 no se utiliza la urna y se pierden directamente 1000 €.
   a) Calcular la probabilidad de utilizar la urna. *(sol.0,7291)*
   b) Calcular la probabilidad de ganar dinero con este juego. *(sol.0,3645)*
   c) Si se ha perdido dinero en este juego, calcular la probabilidad de no haber utilizado la urna. *(sol.0,4263)*

3 puntos

2. Sea la variable aleatoria bidimensional XY de función de densidad constante y definida en el recinto S.



   a) Calcular la media de la variable marginal X. *(sol.1)*
   b) Calcular la probabilidad de $X > 1$ *(sol.1/2)*
   c) Definir la función de densidad de la variable marginal Y. *(sol.(2-2y) $0 < y < 1$;0 en otro caso)*
   d) Si se sabe que $Y > 0,5$ calcular la probabilidad de $X > 1$. *(sol.0,5)*
   e) Si se sabe que $Y = 0,3$ calcular la probabilidad de $X > 0,7$. *(sol.0,714)*
   f) Calcular la probabilidad de que al elegir un punto al azar de S , este punto se sitúe dentro del círculo de centro el origen y radio= $\sqrt{2}$. *(sol.$\pi/4$)*

2,5 puntos

3. A un sistema le llega la superposición de dos señales X(t) e Y(t) aleatorias e independientes. X(t) es la señal " inteligente", es decir la que transporta la información mientras que Y(t) es una señal de ruido estacionaria con m(t)=0 y $R(t_1,t_2)=2*(t_1-t_2)$.
   Sabiendo que:
   $X(t)=(Z1 + Z2)*t$
   Z_1 es una variable aleatoria normal de media 2 y desviación típica 1
   Z_2 es una variable aleatoria tipificada e independiente de Z_1.
   La señal suma que entra al sistema es S(t)=X(t)+Y(t)

   De este ejercicio hacer sólo la Media

   Calcular para la señal suma que entra al sistema:

   a) Media y autocorrelación. *(sol. m=2t)*
   b) Autocovarianza y varianza. *(*

2 puntos

4. La duración en horas de un determinado componente electrónico es una variable aleatoria exponencial de parámetro a=1/10.

   a) Si se eligen 50 componentes electrónicos al azar, calcular la probabilidad de que al menos 20 fallen antes de las 10 horas. *(sol.0,9998)*
   b) Calcular número máximo de componentes a colocar en serie en un sistema (el sistema funciona si todos funcionan) para garantizar con una probabilidad de al menos 0,1 de que el sistema funcione más de 10 horas. *(sol.n=2)*
   c) Calcular número mínimo de componentes a colocar en paralelo en un sistema(el sistema funciona si al menos uno de ellos funciona) para garantizar con una probabilidad de al menos 0,7 de que el sistema funcione más de 10 horas. *(sol.n=3)*