AUTOMATIKA ETA KONTROLA

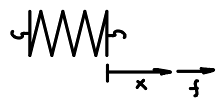
Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

OHIKO SISTEMEN ADIERAZPEN MATEMATIKOA

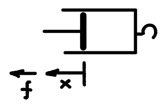
SISTEMA MEKANIKOAK

TRASLAZIOA:

- Newtonen bigarren legea: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow f(t) = m\,\dfrac{d^2x(t)}{dt}$
- Malgukia: $f(t) = -K\cdot x(t)$ ($x=0$-n orekan egonda)



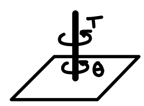
- Motelgailua: $f(t) = -B\cdot\dfrac{dx(t)}{dt}$



ERROTAZIOA:

- Newtonen bigarren legea: $T = I\alpha \Rightarrow T(t) = I\,\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$
- Malgukia: $T(t) = -k\,\theta(t)$

- Marruskadura: $T(t) = -B\,\dfrac{d\theta(t)}{dt}$



SISTEMA ELEKTRIKOAK

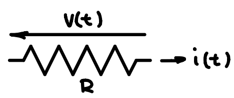
KIRCHOFFEN LEGEAK

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

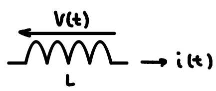
$$\oint_c dV = 0$$

INPEDANTZIAK

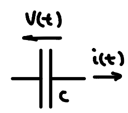
- Erresistentzia: $V(t) = R\cdot i(t)$



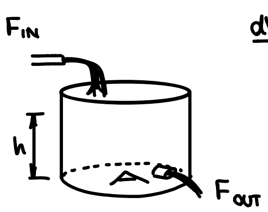
- Harila: $V(t) = L\cdot\dfrac{di(t)}{dt}$



- Kondentsadorea: $V(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\,dt$ edo $i(t) = C\cdot\dfrac{dV(t)}{dt}$



SISTEMA HIDRAULIKOAK



$$\frac{dV(t)}{dt} = A\,\frac{dh(t)}{dt} = F_{IN}(t) - F_{OUT}(t)$$

Fluxu laminarra: $F = kh$

Fluxu turbulentoa: $F = k\sqrt{h}$

SISTEMA TERMIKOAK

$$\dot{q}(t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R} = mc\,\frac{dT(t)}{dt}$$

Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

LINEALIZAZIOA

Sistema bat deskribatzen duten ekuazioak linealak ez direnean:

1) EDA lineala modu inplizituan adierazi: $f(x, \dot{x}, \dots, y, \dot{y}, \dots) = 0$

2) Operazio puntua aurkitu: $OP(x_0, y_0)$ non $f(x_0, y_0) = 0$

   gainera oreka puntua bada: $\dot{x} = 0 \wedge \dot{y} = 0$

3) Desbideratze aldagaiak zehaztu: $\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 \\ \dots \end{cases}$

4) Taylorren seguidarekin hurbilketa egin: $\underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{OP} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{OP} \cdot \Delta \dot{x} + \dots + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{OP} \cdot \Delta y + \dots = 0}_{\text{Lortutako EDA berria lineala da.}}$

$\Delta \dot{x} = \dot{x}$ ($\dot{x}_0 = 0$ bada)

TRANSFERENTZIA FUNTZIOA

Sistema baten EDA lineal bati Laplacen transformatua aplikatzen badiogu aldagaien s eremuko erlazioa lortu dezakegu.

$$f(r, \dot{r}, \dots, y, \dots) = 0 \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} f(R(s), Y(s)) = 0 \Longrightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s) \cdot G(s)]$$

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

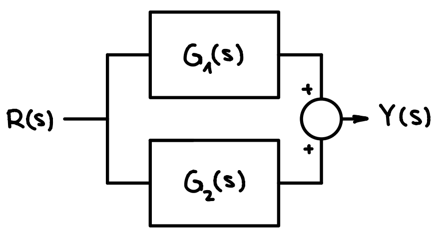
Zenbakitzailea ← Polinomio honen erroei sistemaren ZEROAK deritzegu.

Izendatzailea ← Polinomio honen erroei sistemaren POLOAK deritzegu.

SERIEAN

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G_1(s)} \longrightarrow \boxed{G_2(s)} \longrightarrow Y(s) \quad \Longrightarrow \quad R(s) \longrightarrow \boxed{G_1(s) \cdot G_2(s)} \longrightarrow Y(s)$$

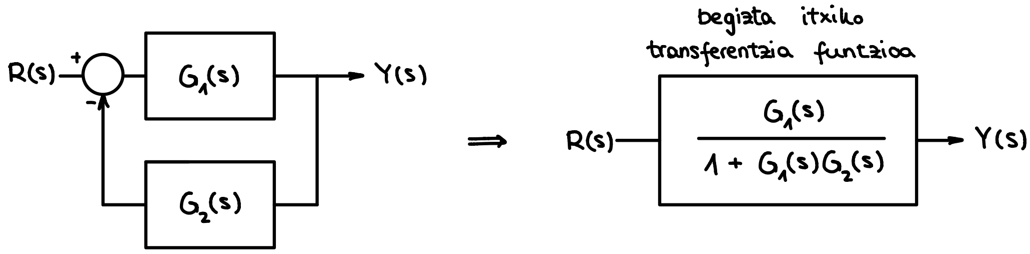
PARALELOAN



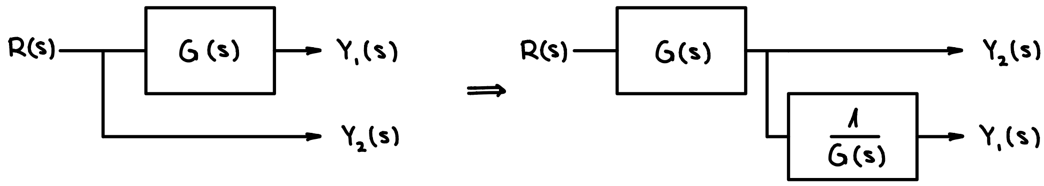
$$\Longrightarrow \quad R(s) \longrightarrow \boxed{G_1(s) + G_2(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

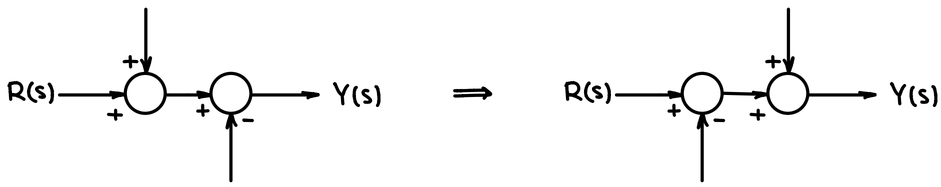
BERRELIKADURA



TRASLAZIOA



BATUTZAILEEN ORDEN ALDAKETA



LAPLACEN TRANSFORMATUA

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta\cdot g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\cdot F(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as}\cdot F(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

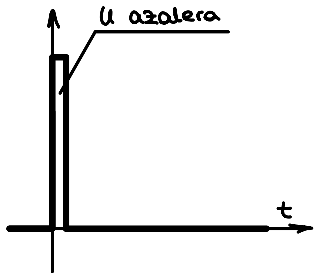
$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

FROGA SEINALEAK

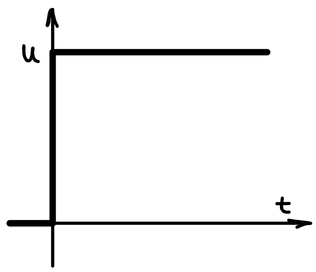
INPULTSU-SARRERA



$$\begin{cases} u(t) = \lim_{t \to 0} \frac{u}{t} & t = 0 \\ u(t) = 0 & \forall t \neq 0 \end{cases}$$

$$U(s) = u$$

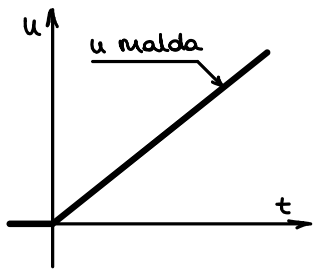
ESPALOI-SARRERA



$$\begin{cases} u(t) = u & t \geq 0 \\ u(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{u}{s}$$

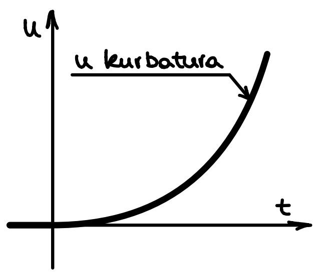
ARRAPALA-SARRERA



$$\begin{cases} u(t) = ut & t \geq 0 \\ u(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{u}{s^2}$$

PARABOLA-SARRERA



$$\begin{cases} u(t) = \frac{u}{2} t^2 & t \geq 0 \\ u(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{u}{s^3}$$

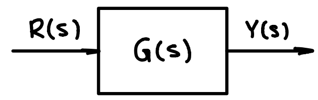
Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

LEHEN ORDENAKO SISTEMEN DENBORA ERANTZUNA

$$\boxed{\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = K r(t)}$$

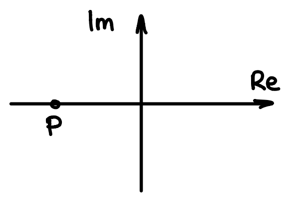
$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}}$$

non $\begin{cases} K \equiv \text{irabazpen estatikoa} \\ \tau \equiv \text{denbora konstantea} \end{cases}$



Era honetako sistemek polo bakarra dute: $s = -\frac{1}{\tau}$

$\tau < 0$ denean $s > 0$ da, eta sistema ez egonkorra da.



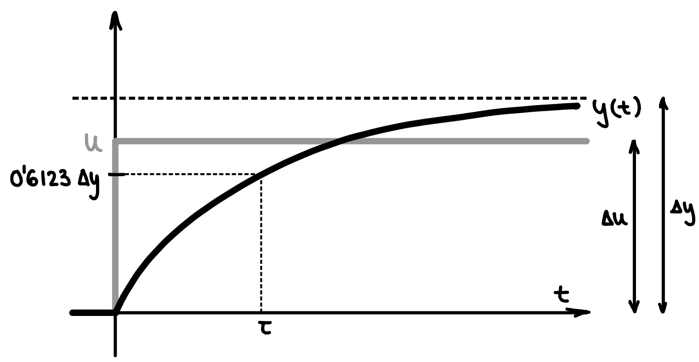
ESPALOI ERANTZUNA

$u(t) = H(t) \implies y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$

$y(\tau) = 0'6321 \cdot u$

Egonkortze denbora $\begin{cases} t_{ss}(\%2) = 4\tau \\ t_{ss}(\%5) = 3\tau \end{cases}$

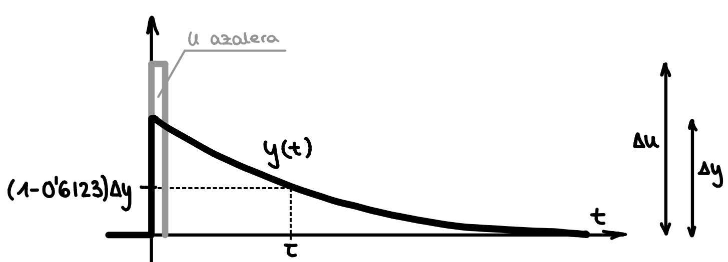


INPULTSU ERANTZUNA

$y(t) = u\frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$y(0) = \Delta y = u\frac{K}{\tau}$

Egonkortze denbora ez da sarreraren araberakoa. $\begin{cases} t_{ss}(\%2) \simeq 4\tau \\ t_{ss}(\%5) \simeq 3\tau \end{cases}$



Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

BIGARREN ORDENAKO SISTEMEN DENBORA ERANTZUNA

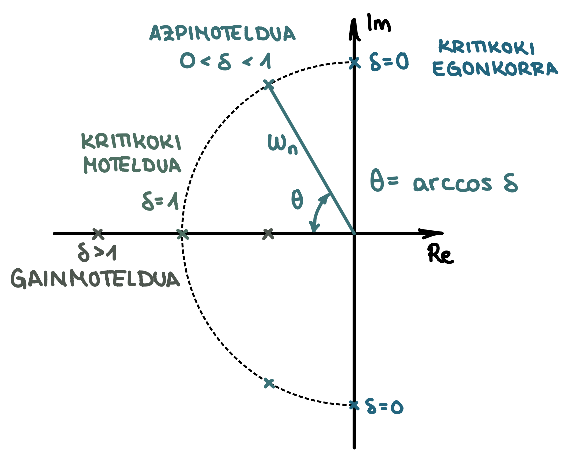
$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 \cdot y(t) = K\omega_n^2 \cdot u(t)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

non
- $K \equiv$ irabazpen estatikoa.
- $\delta \equiv$ moteldura koefizientea
- $\omega_n \equiv$ maiztasun naturala

SISTEMAREN POLOAK

$$s_{1,2} = -\delta\omega_n \pm \underbrace{\omega_n\sqrt{\delta^2-1}}_{\omega_d \cdot i}$$



ESPALOI ERANTZUNA

- AZPIMOTELDUA $(0 \leq \delta \leq 1)$

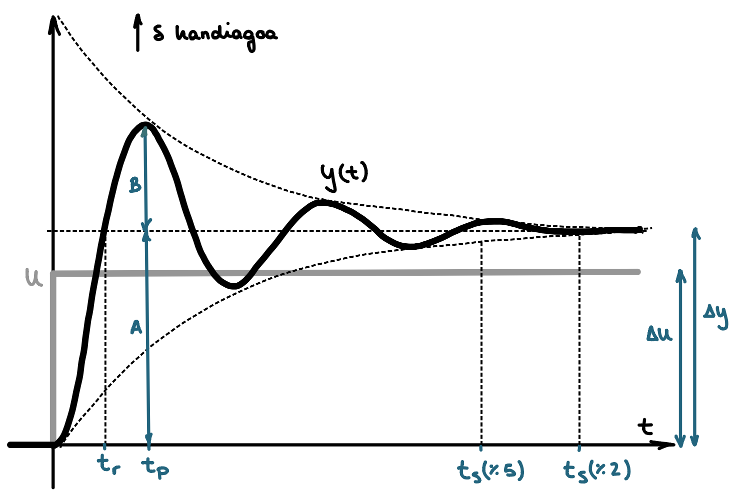
$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = k \cdot u$$

$$M_p = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = \frac{B}{A} = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \qquad (M_p \propto \delta)$$

$$t_s(\%5) = \frac{3}{\delta\omega_n} \qquad t_s(\%2) = \frac{4}{\delta\omega_n} \qquad \left(\tau = \frac{1}{\delta\omega_n}\right)$$

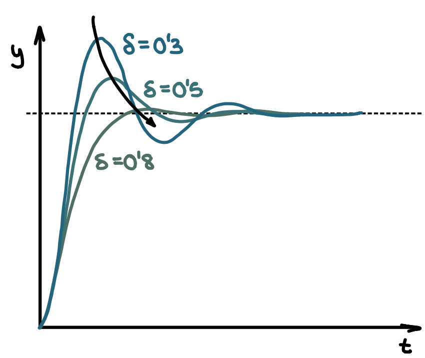
$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \qquad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)$$

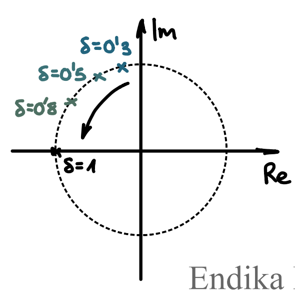
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$



- ω_n konstante mantenduz,

$$\delta\uparrow \implies \begin{cases} M_p \downarrow \\ t_s \downarrow \\ t_p \uparrow \\ \omega_d \downarrow \end{cases}$$



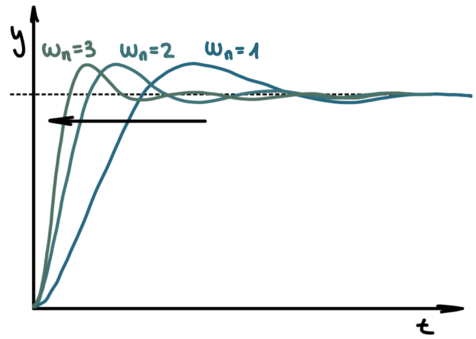


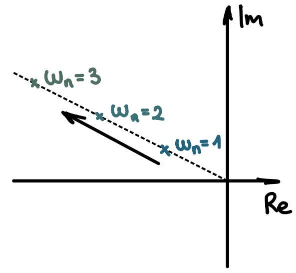
Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

- δ konstante mantenduz,

M_p konstante

$$\omega_n \uparrow \Longrightarrow \begin{cases} t_s \downarrow \\ t_p \downarrow \\ \omega_d \uparrow \end{cases}$$

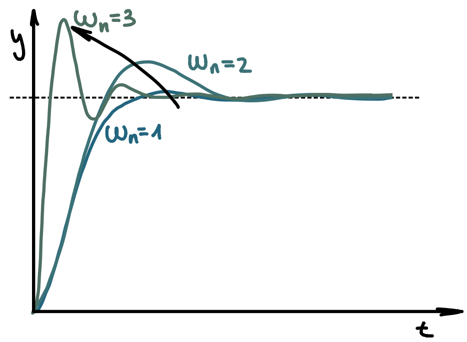


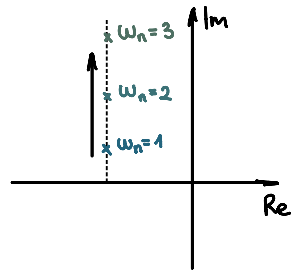


- $\delta \cdot \omega_n$ konstante mantenduz,

t_s konstante

$$\delta \downarrow \text{ eta } \omega_n \uparrow \Longrightarrow \begin{cases} M_p \uparrow \\ \omega_d \uparrow \\ t_p \downarrow \end{cases}$$

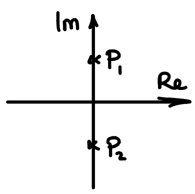




- KRITIKOKI EGONKORRA ($\delta = 0$)

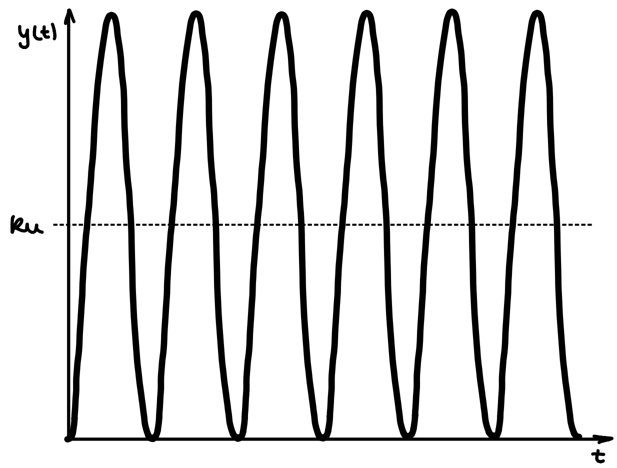
$$Y(s) = \frac{K_u \omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)} = \frac{K_u}{s} - \frac{K_u s}{s^2+\omega_n^2}$$

$$y(t) = K_u\left[1-\cos(\omega_n t)\right]$$



Polo irudikari puruak:

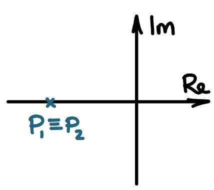
$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$



- KRITIKOKI MOTELDUA ($\delta = 1$)

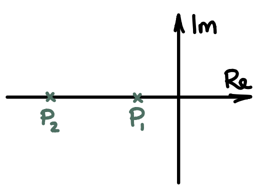
Polo bikoitza:

$P_{1,2} = -\omega_n$

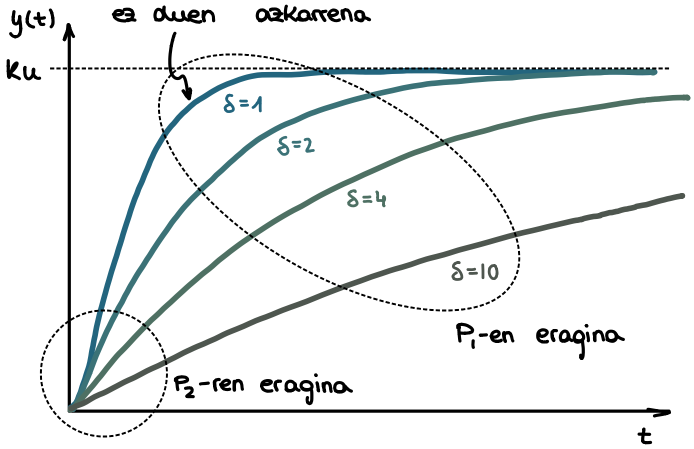


- GAINMOTELDUA ($\delta > 1$)

$$P_{1,2} = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2-1}$$



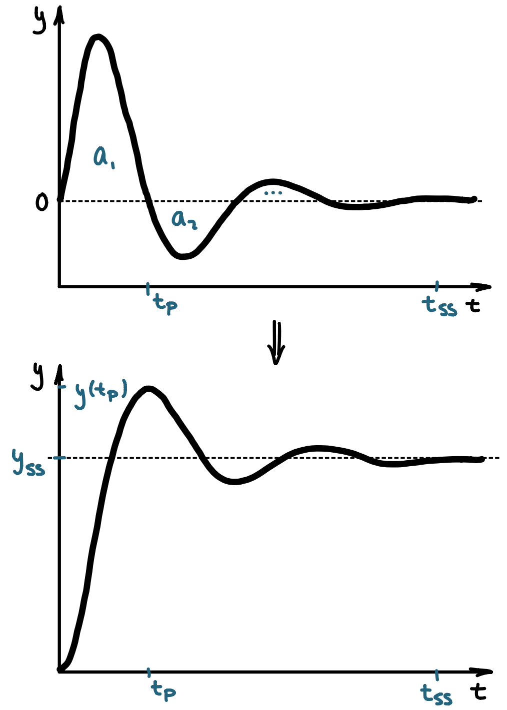
Bigarren mailakoen artean, oszilatzen ez duen azkarrena



Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

INPULTSU ERANTZUNA

- AZPIMOTELDUA $(0 \leq \delta \leq 1)$



Maila erantzunean oinarrituko gara inpultsu erantzuna aztertzeko.

$$\begin{cases} Y_{INPULTSUA}(s) = G(s) \\ Y_{MAILA}(s) = \dfrac{G(s)}{s} \end{cases} \equiv \begin{cases} Y_{INPULTSUA}(s) = s \cdot Y_{MAILA}(s) \\ Y_{MAILA}(s) = \dfrac{Y_{INPULTSUA}(s)}{s} \end{cases} \equiv \begin{cases} y_{INPULTSUA}(t) = \dfrac{dy_{MAILA}(s)}{dt} \\ y_{MAILA}(s) = \int y_{INPULTSUA}(t)\, dt \end{cases}$$

1) Mailarekiko erantzuna lortu:

- $y_{MAILA}(t_p) = \int_0^{t_p} y_{INPULTSUA}(t)\, dt = a_1$
- $y_{MAILA}(\infty) = \int_0^{\infty} y_{INPULTSUA}(t)\, dt = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots = y_{ss}$

2) Mailarekiko erantzuna aztertu:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\; K = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = \dfrac{y_{ss}}{\Delta u} \\ \cdot\; M_p = \dfrac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \Rightarrow \delta \\ \cdot\; t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \Rightarrow \omega_n \end{array}\right\} \Rightarrow G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

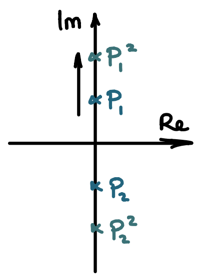
- KRITIKOKI EGONKORRA $(\delta = 0)$

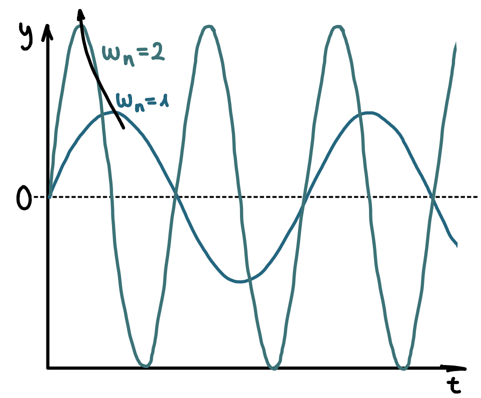
$$Y(s) = \frac{Ku\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2} = Ku \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}$$

$$y(t) = K \cdot u \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n t)$$

Polo irudikari puruak:

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

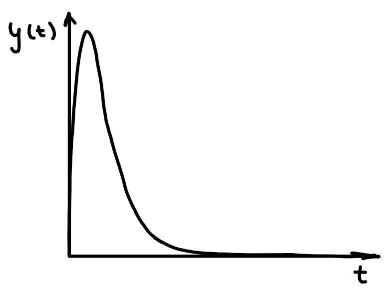




- GAINMOTELDUA $(\delta \geq 1)$

$\delta = 1$: $\quad y(t) = Ku\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$

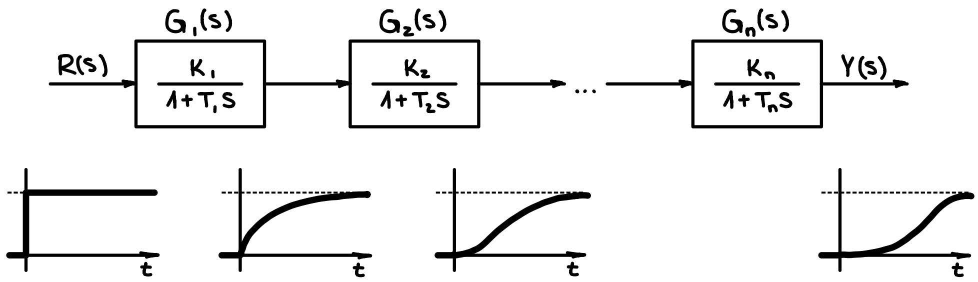
$\delta > 1$: $\quad y(t) = Ku \dfrac{\omega_n}{2\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \left(e^{P_1 t} - e^{P_2 t}\right)$



Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

GOI ORDENEKO SISTEMEN DENBORA ERANTZUNA

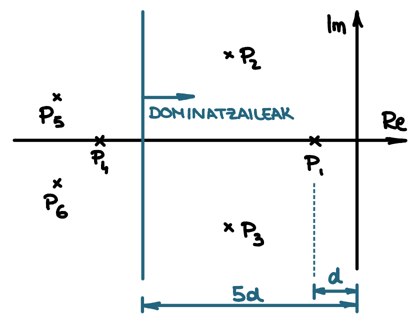
- Polo bakoitzak erantzunean atzerapen bat gehitzen du.



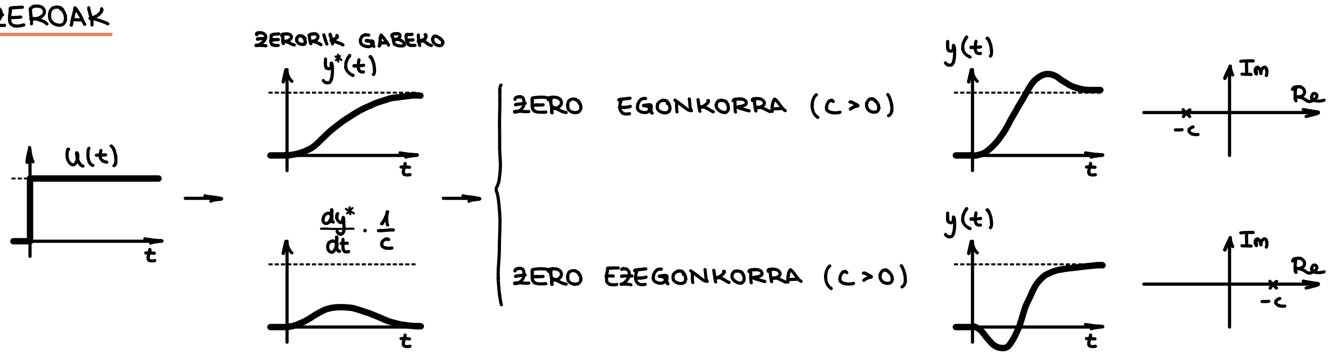
POLOAK

- Poloa zenbat jatorritik hurbilago egon, gero eta denbora luzeagoan nabarituko da bere eragina.

- Eragin nabariagoa duten polo horiei DOMINATZAILE deritzegu.



ZEROAK



- Zeroek ez dute oszilaziorik sortuko, baina gaindipenak sor ditzakete.

- Zenbat eta jatorritik urrunago egon, gero eta eragin txikiagoa dute.

- Polo batetik oso hurbil dagoen zero batek, bere eragina baliogabetzen du.

Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

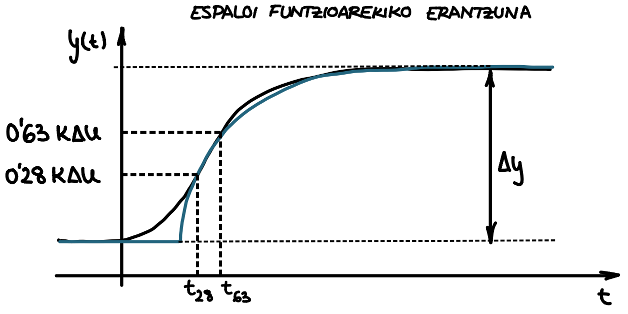
ORDEN MURRIZKETA

Irabazpen estatikoa $\left(K = \lim_{s\to 0} G(s)\right)$ mantenduz:

1) Polo-zero baliogabetzeak aztertu eta kendu. $\frac{\cancel{(s-a)}\cdot \ldots}{\cancel{(s-b)}\cdot \ldots}$ baldin $a \simeq b$

2) Dominatzaileak ez diren poloak eta zeroak kendu, haien eragina ia bat-batekoa da eta beraz baztertu daiteke. $\frac{\ldots}{(s-a)\cdot \cancel{(s-b)}\cdot \ldots}$ baldin $|b| \geq |5a|$

POMTM HURBILKETA



Euskaraz LOGA, lehen orden geldi atzerapena.

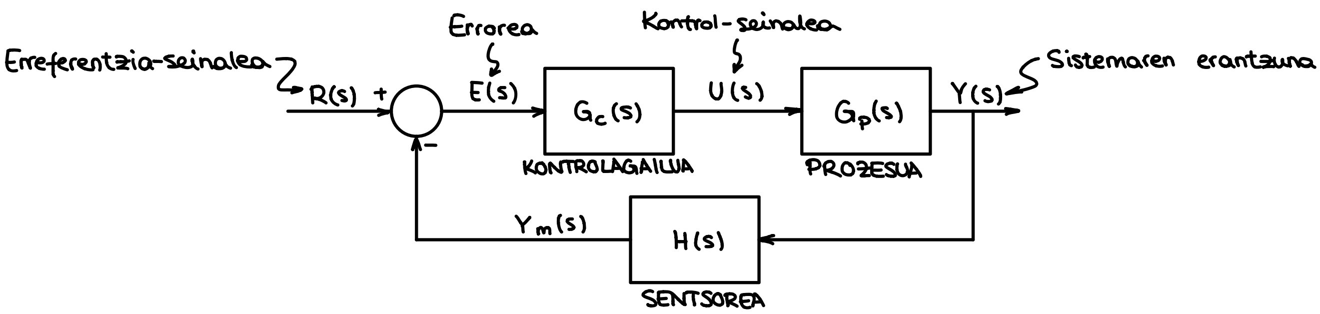
$$G(s) = \frac{K e^{-t_m \cdot s}}{\tau s + 1}$$

$$y(t) = K\Delta u \left(1 - e^{\frac{-(t-t_m)}{\tau}}\right)$$

non $\begin{cases} K = \Delta y / \Delta u \\ \tau = 1'5\,(t_{63} - t_{28}) \\ t_m = t_{63} - \tau \end{cases}$

Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

SISTEMA BERRELIKATUAK



Errore seinalea: $E(s) = R(s) - Y(s)\cdot H(s)$

Begizta itxiko TF: $$G_{BI}(s) = \frac{G_c(s)\cdot G_p(s)}{\underbrace{1 + G_c(s)\cdot G_p(s)\cdot H(s)}_{\text{EKUAZIO KARAKTERISTIKOA}}}$$

Begizta irekiko TF: $G_{BA}(s) = G_c(s)\cdot G_p(s)\cdot H(s)$

EGONKORTASUNA

EGONKORTASUN MOTAK

1) BIBO EGONKORTASUNA (Bounded input bounded output): Sistema lineal egonkor baten irteera mugatuta dago bere sarrera mugatua egotekotan.

(Sistema kritikoki egonkorrak $\notin$ Sistema BIBO egonkorrak)

2) EGONKORTASUN ASINTOTIKOA: Sistema lineal bat egonkorra da bere begizta itxiko polo guztiek zati erreal negatiboa badute.

ROUTH HURWITZEN IRIZPIDEA (Sistema kritikoki egonkorrak ezegonkortzat hartzen ditu)

Polinomio bat HURWITZ dela esaten da, bere erro guztiek zati erreal negatiboa badute

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n s^0 = 0$$

BALDINTZA BEHARREZKOA: $a_i > 0$ edo $a_i < 0 \ \forall i$

BALDINTZA BEHARREZKOA ETA NAHIKOA: Routhen taulako lehenengo zutabeko koefiziente guztiak positiboak izatea.

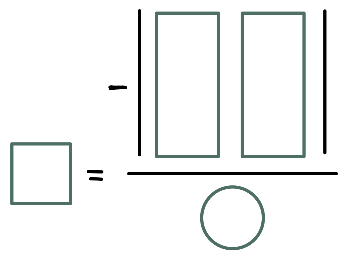
Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

ROUTHEN TAULA

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & \boxed{c_2} & \cdots & \cdots \\
\cdots & \vdots & \vdots & & \\
s^0 & k_1 & & &
\end{array}
$$

positiboa izan behar den zutabea

b, c eta gainerako koefizienteak kalkulatzeko:



Lehenengo zutabeko gaiak positiboak ez izatekotan, zeinu-aldaketa kopuruak zati erreal positibodun erro kopurua adierazten du.

KASU BEREZIAK

1) Lehenengo zutabeko gai bat 0 da:

- 0-a ε-ekin ordezkatzen dugu, non $\varepsilon \to 0$, gainerako koefizienteak kalkulatzeko.

- Polinomioa $(s+a)$ gai batez biderkatu, polo ezagun bat gehituz, eta berriro ebazten saiatu.

Kasu honetan kritikoki egonkorra edo ezegonkorra izango da.

2) Lerro bateko elementu guztiak 0 dira:

Erroak jatorriarekiko simetrikoki kokatuta daudenean gertatzen da.

$$
\left|\begin{array}{l}
s = \pm\sigma \Rightarrow \text{EZEGONKORRA} \\
s = \pm j\beta \Rightarrow \text{KRITIKOKI EGONKORRA} \\
s = \pm\sigma \mp j\beta \Rightarrow \text{EZEGONKORRA}
\end{array}\right.
$$

- Polinomio laguntzailea erabiltzen da zeroz osatutako lerroa ordezkatzeko.

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & 0 & 0 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^0 & k_1 & & &
\end{array}
\Longrightarrow \frac{d}{ds}\left(b_1 s^{n-2} + b_2 s^{n-4} + b_4 s^{n-6} + \ldots\right)
$$

$$\Downarrow$$

$$(n-2)b_1 s^{n-3} + (n-4)b_2 s^{n-5} + \ldots$$

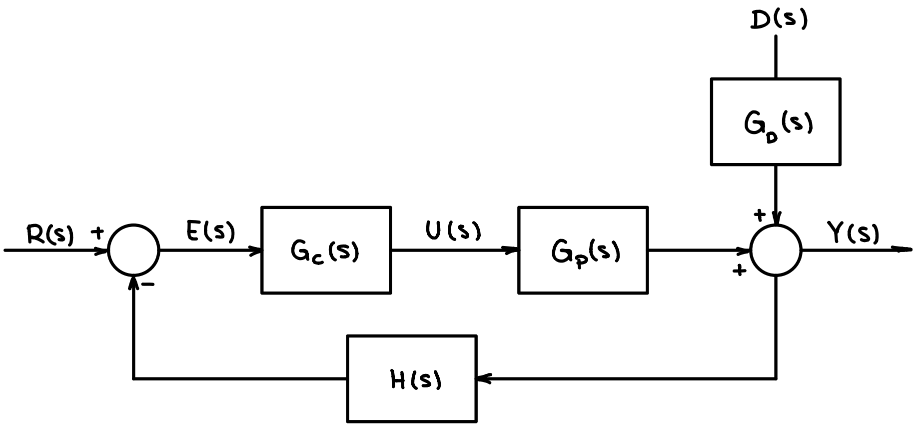
polinomio honetatik ateratzen dira erro simetrikoak

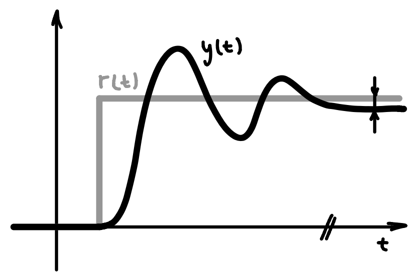
Endika Llano
ETSI Bilbao, 2020

G(s) transferentzia funtzio baten izendatzaileko polinomioa, ekuazio karakteristikoa dena, RUTH-HURWITZ bada, zati erreal negatiboa duten erroak besterik ez ditu. Poloak polinomio horren erroak direnez, sistema egonkorra izango da.

EGOERA IRAUNKORRA

Egoera iraunkorra poloen eragina desagertu ostean dugun erantzuna da.





Egoera iraunkorreko errorea:

$$E(s) = \underbrace{\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)}_{\text{SARRERAK SORTUTAKO ERROREA}} - \underbrace{\frac{H(s)\,G_d(s)}{1+G(s)H(s)}}_{\text{PERTURBAZIOAK SORTUTAKO ERROREA}} G_d(s)$$

Bi erroreek ekuazio karakteristiko bera dute.

$$e_{ss} = e_{ss\,R}\big|_{D(s)=0} + e_{ss\,D}\big|_{R(s)=0}$$ (erroreen gainezarmena)

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

ERRORE-KOEFIZIENTE ESTATIKOAK

Sarrera ezberdinerako errorea kalkulatzeko erabiltzen da.

Balio handiagoek errore txikiagoak adierazten dituzte.

POSIZIOAREN ERRORE-KOEFIZIENTE ESTATIKOA (espaloi sarrera)

$$R(s) = \frac{1}{s} \implies e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)\cdot H(s)} \implies \begin{cases} K_p = \lim\limits_{s\to 0} G(s)\cdot H(s) \\ e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p} \end{cases}$$

ABIADURAREN ERRORE-KOEFIZIENTE ESTATIKOA (arrapala sarrera)

$$R(s)=\frac{1}{s^2} \Longrightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^2} \simeq \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\cdot G(s)\cdot H(s)} \Longrightarrow \begin{cases} K_v=\lim\limits_{s\to 0} s\cdot G(s)\cdot H(s) \\ e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}\end{cases}$$

AZELERAZIOAREN ERRORE-KOEFIZIENTE ESTATIKOA (sarrera parabolikoa)

$$R(s)=\frac{1}{s^3} \Longrightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^3} \simeq \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)\cdot H(s)} \Longrightarrow \begin{cases} K_a=\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)\cdot H(s) \\ e_{ss}=\dfrac{1}{K_a}\end{cases}$$

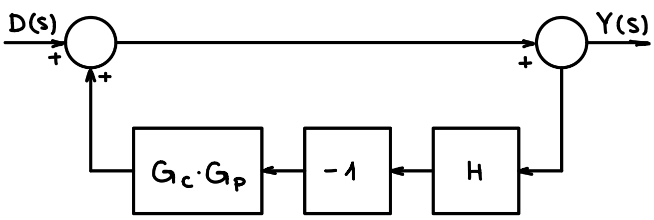
Sistema mota begizta irekiko transferentzia funtzioak $(G(s)H(s))$ duen integratzaile $\left(\frac{1}{s}\right)$ kopuruaren berdina da.

MOTA	ESPALOIA	ARRAPALA	PARABOLA
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$
3	0	0	0

Egoera iraunkorreko errorea kentzeko, integratzaileak gehitu ditzakegu.

PERTURBAZIOAK SORTUTAKO ERROREA

Sistema birrantolatzen dugu $D(s)$ sarreratzat hartuz eta $R(s)=0$ eginez:

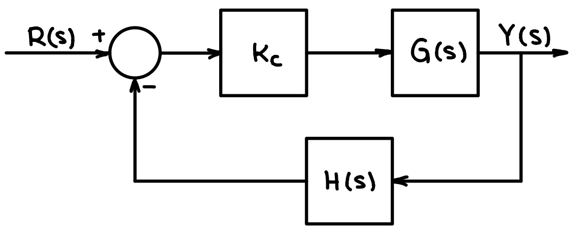


$$\left.\frac{Y(s)}{D(s)}\right|_{R(s)=0}=\frac{1}{1+G_c\cdot G_p\cdot H}$$

$$E_D(s)\overset{R(s)=0}{=}-Y(s)\cdot H(s)=-\frac{1}{1+G_c\cdot G_p\cdot H}\cdot D(s)\cdot H(s)$$

$$e_{ssD}=\lim_{s\to 0} s\,E_D(s)$$

ERROEN TOKI GEOMETRIKOA



$$G_{BC}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c\, G(s)}{\underbrace{1 + K_c \cdot G(s) \cdot H(s)}_{\text{EKUAZIO KARAKTERISTIKOA}}}$$

(Bere erroak ≡ poloak)

Erroen toki geometriko esaten zaio, begizta itxiko sistemaren poloek K_c irabazpena 0-tik ∞-ra aldatzean osatzen duten toki geometrikoari.

ERAIKUNTZA

1) $G_{BA}(s)$-ren n POLOAK eta m ZEROAK s planoan kokatu.

2) ADAR kopurua = n

3) ARDATZ ERREALEKO SEGMENTUAK : Puntu bat ETG-n dago, bere eskumatara dauden polo eta zeroen batuketa bakoitia denean.

4) ADAR bakoitza $G_{BA}(s)$-ren polo baten hasi ($K_c=0$) eta zero baten amaitzen dira ($K_c \to \infty$)

$n > m$ bada ⟹ $n-m$ ADAR INFINITUETAN amaitzen dira.

5) ASINTOTAK definitu:

n-m adarrek ardatz errealekin osatzen duten ANGELUA : $\theta = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Asintoten eta ardatz errealen arteko EBAKIPUNTUA: $\sigma = \frac{\sum p - \sum z}{n-m}$

6) Ardatz-irudikariarekiko EBAKIPUNTUAK : Ruth-Hurwitzekin K_c-ren araberako egonkortasuna aztertuz.

ZEROEN ERAGINA ETG-AN

Zeroak sartuz, alde negatibora muga dezakegu ETG, sistema egonkor bihurtzera arte.

Sartzen ez diren 2 pauso gehiago:

7) Adarrek zuzen errealarekin osatzen dituzten s rrera eta irteera angeluak definitu:

$$\phi_{p_k} = \sum_{i=1}^{m} \phi_{z_i} - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \phi_{p_j} - (2r+1)\pi \qquad \text{non } r = 1,2,3,\ldots$$

$$\phi_{z_k} = \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \phi_{z_i} - \sum_{j=1}^{n} \phi_{p_j} - (2r+1)\pi \qquad \text{non } r = 1,2,3,\ldots$$

8) Dispertsio eta konfluentzia puntuak aurkitu:

Dispertsio puntua: ETG bi adar konplexutan banatzen den puntua.

Konfluentzia puntua: ETGko bi adar konplexu batzen diren puntua.

$K_c = -\dfrac{1}{G(s)\cdot H(s)}$ -ren minimoak.

METODOAREN OINARRIA

Erroen toki geometrikoko poloek $K_c G(s)\cdot H(s) = -1$ baldintza bete behar dute. Beraz:

- MODULUAREN IRIZPIDEA: $|K_c \cdot G(s)\cdot H(s)| = 1 \implies K_c \cdot \dfrac{\prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s+p_i|} = 1$

- ARGUMENTUAREN IRIZPIDEA: $Arg(KG(s)H(s)) = Arg(K) + \sum_{i=1}^{m} Arg(s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} Arg(s+p_i) = (2q+1)\pi$

$q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Irizpide hauetatik abiatuta, aurreko eraikuntza metodoa lor dezakegu.