

# 4. GAIA

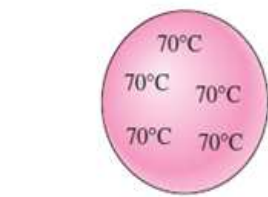
## BERO-EROAPEN IRAGANKORRA

### 4.0 - HELBURUAK

2/30

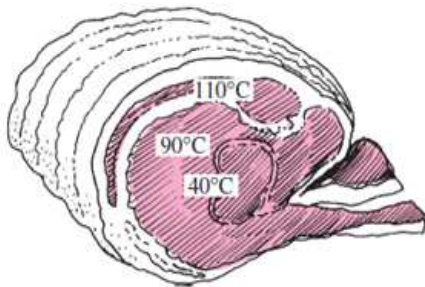
- Baloratu noiz den baztergarria tenperaturaren aldaketa espaziala eta noiz aldatzen den tenperatura ia era uniformean denborarekin, parametro **kontzentratuen sistemen** analisi sinplifikatuak aplikagarri eginez
- Ebazpide analitikoak lortu **dimentsio bakarreko eroapen-problema iragankorretarako** geometria angeluzuzen, zilindriko eta esferikoetan, aldagai-bereizkuntzaren metodoa erabilita, eta ulertu zergatik den hurbiltze onargarria, gehienetan, gai bakarreko soluzioa
- **Ingurune handietako eroapen iragankorreko** problemak ebatzi, antzekotasun-aldagaia erabilita, eta tenperaturaren aldaketa aurrean, denboraren eta gainazaletiko distantziaren arabera

## SARRERA



(a) Copper ball

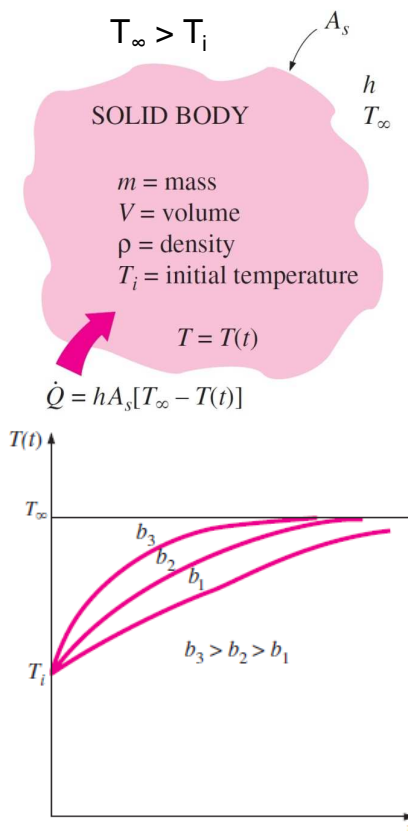
Barne erresistentzia= 0

 $T = \text{cte}$  espazioan $T \neq \text{cte}$  denbora $T(x,y,z,t) \rightarrow T(t)$ 

(b) Roast beef

 $T \neq \text{cte}$  espazioan $T \neq \text{cte}$  denbora $T(x,y,z,t)$ 

## 4.1 – PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMEN ANALISIA



$$\left( \begin{array}{c} \text{Bero-} \\ \text{transferentzia} \\ \text{gorputzera, dt-n} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Gorputzaren} \\ \text{energia gehitzea} \\ \text{dt-n} \end{array} \right)$$

$$hA_s(T_\infty - T) dt = mC_p dT$$

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho VC_p} dt$$

t=0-tik integratu non  $T = T_i$ t berdin  $T = T(t)$ -rarte

$$\ln \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho VC_p} t$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}$$

$$b = \frac{hA_s}{\rho VC_p} \quad (1/s)$$

Newtonen hozte-legea

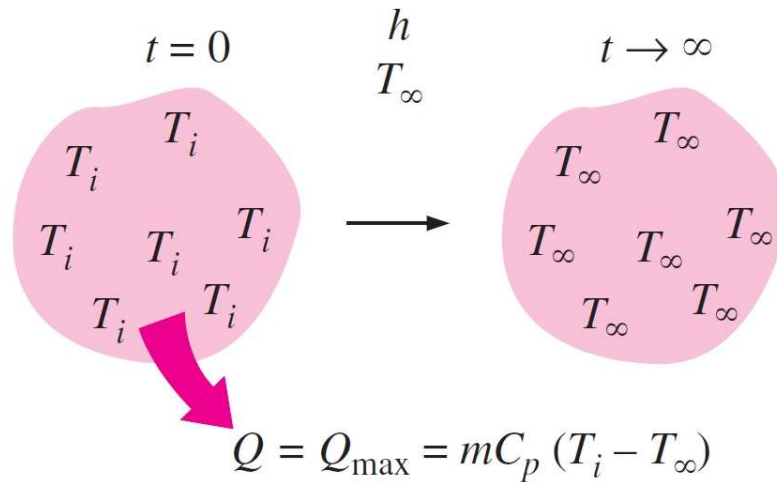
$$\dot{Q}(t) = hA_s[T(t) - T_\infty] \quad (\text{W})$$

Gorputzaren eta haren ingurunearen arteko bero-transferentzia kantitate totala

$$Q = mC_p[T(t) - T_i] \quad (\text{J})$$

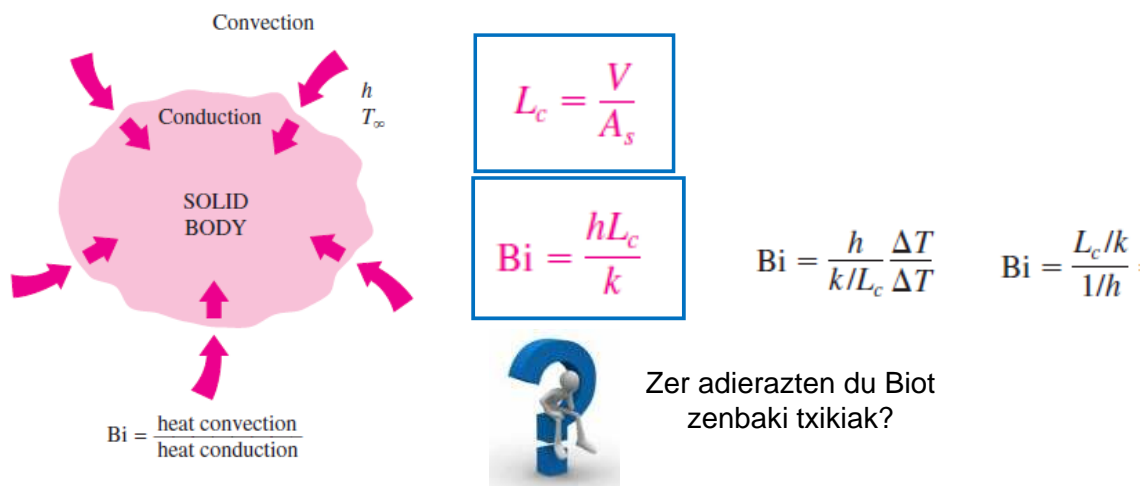
Gorputzaren eta haren ingurunearen arteko bero-transferentzia maximoa

$$Q_{\max} = mC_p(T_\infty - T_i) \quad (\text{J})$$



## 4.1 – PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMEN ANALISIA

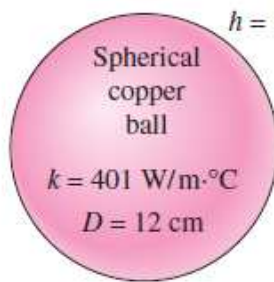
## PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMEN ANALISIRAKO IRIZPIDEAK

PARAMETRO KONTZENTRATUAK APLIKATZEKO IRIZPIDEAK **Bi = 0**

$$Bi \leq 0.1 \rightarrow T - T_\infty \text{ errora } \pm 5 \%$$

## PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMEN ANALISIRAKO IRIZPIDEAK

## 1. ADIBIDEA:



$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6} \pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6} D = 0.02 \text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{15 \times 0.02}{401} = 0.00075 < 0.1$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}$$

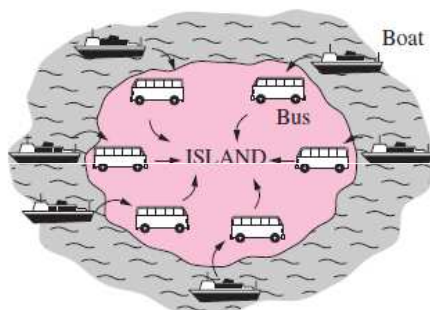
$$b = \frac{hA_s}{\rho V C_p}$$

Eroankortasun termiko handiko eta konbekzio-koefiziente txikiko gorputz txikiak dira parametro kontzentratuen sistemen analisisen irizpideak betetzeko aukera gehien dituztenak

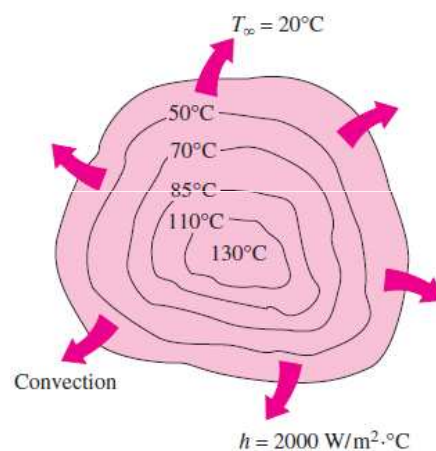
## 4.1 – PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMEN ANALISIA

## OHAR BATZUK PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMETAKO BERO-TRANSFERENTZIAZ

Solido baterako bero-transferentzia

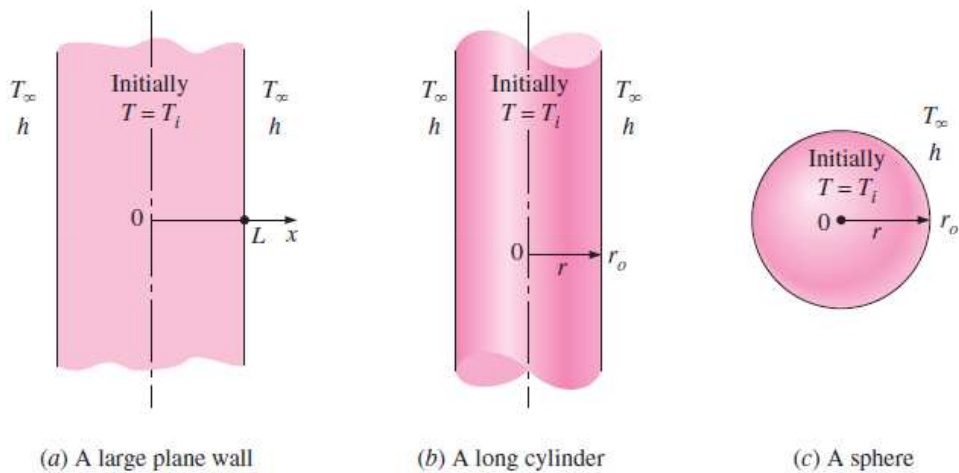


Gorputz baten hozte prozesua



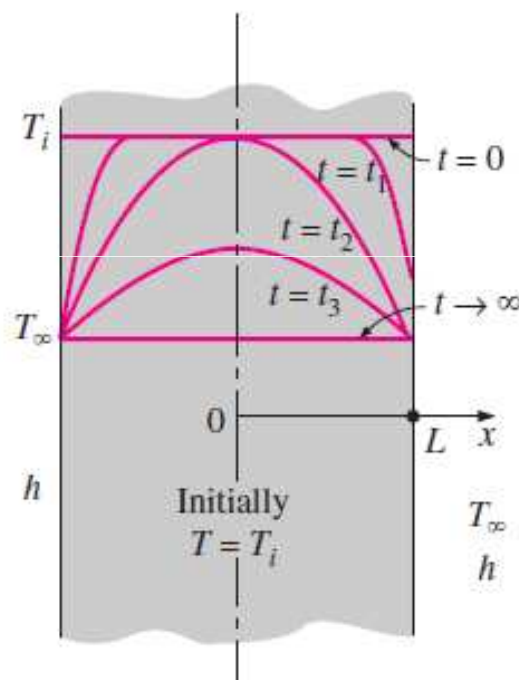
## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, 9/30 ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

Bero-transferentzia dimentsio bakarrekoa duten geometria sinpleen eskema



## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, 10/30 ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

Tenperatura-profil iragankorra gainazaletiko konbekziopean dagoen horma lau batean,  $T_i > T_\infty$ -rako.



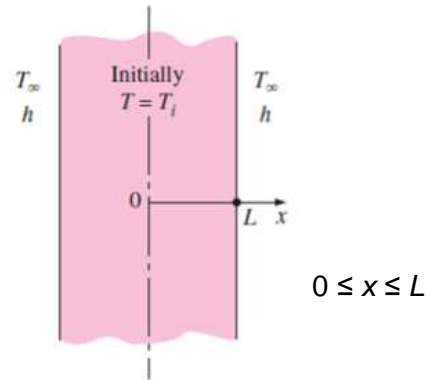
## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 11/30

### JATORRIZKO BERO-EROAPENENKO PROBLEMA:

- Ekuazio diferentziala  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$   $\alpha = k/\rho c_p$  difusibitate termikoa
- Mugalde-baldintzak  $\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$   $-k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_\infty]$
- Hasierako baldintzak  $T(x, 0) = T_i$
- Eraitza  $T = F(x, t, L, k, \alpha, h, T_i)$   

$\underbrace{\hspace{2cm}}$   
aldagaia

$\underbrace{\hspace{2cm}}$   
parametroa



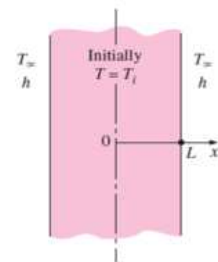
(a) A large plane wall

## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 12/30

### DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMA DIMENTSIOGABETUA

- Aldagai dimentsiogabeak :
- $$X = x/L$$
- $$\theta(x, t) = [T(x, t) - T_\infty] / [T_i - T_\infty]$$

- Ekuazio diferentziala  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$
- Mugalde-baldintzak  $\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0$   $\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = -Bi \theta(1, \tau)$
- Hasierako baldintzak  $\theta(X, 0) = 1$
- Eraitza  $\theta = f(X, Bi, Fo)$



(a) A large plane wall

## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 13/30

### DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMA DIMENTSIOGABETUA

Tenperatura dimentsiogabea  $\theta(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i}$

Distantzia dimentsiogabea, zentrotik  $X = x/L$

Bero-transferentziaren koefiziente dimentsiogabea

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

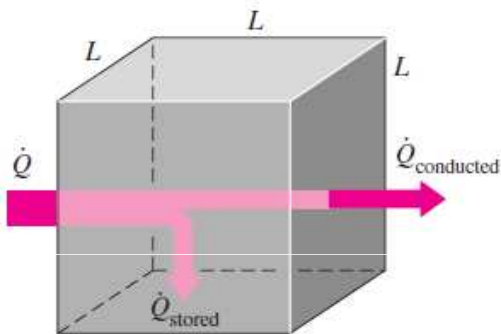
Bioten zenbakia

Denbora dimentsiogabea

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} = Fo$$

Fourierren zenbakia

## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 14/30



Fourierren Zenbakia =  $\frac{\text{eroandako beroa}}{\text{metatutako beroa}}$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{kL^2 (1/L) \frac{\Delta T}{\rho C_p L^3/t \Delta T}}{\rho C_p L^3/t \Delta T}$$

Fourier number:  $\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\dot{Q}_{\text{conducted}}}{\dot{Q}_{\text{stored}}}$

## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, 15/30 ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

### DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMEN SOLUZIO ZEHATZA

Aldagai-bereizkuntzaren metodoa

$$\theta(X, \tau) = F(X)G(\tau) \xrightarrow{\text{Ek Diferentziala eta /FG}} \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = \frac{1}{G} \frac{dG}{d\tau} = \text{CTE } (-\lambda^2)$$

$$\frac{d^2 F}{dX^2} + \lambda^2 F = 0 \quad \frac{dG}{d\tau} + \lambda^2 G = 0$$

#### APLIKAGARRITASUNA

- Geometria sinplea eta finitua bada
- Ekuazio diferentziala eta mugalde-baldintzak nahiz hasierakoak, linealak badira
- Gai ez-homogeneo bakarra badute

Emaitzak eta mugalde baldintzak – **Ekuazio karakteristiko**

$$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$$

$$\theta(X, 0) = 1 \rightarrow 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n X) \xrightarrow{\text{Fourier-en serieak}} A_n = \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}$$

## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, 16/30 ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

### DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMEN SOLUZIO ZEHATZA

**Geometría** **Ebazpidea**  **$\lambda_n$ -ak hauen erroak dira**

Horma Laua	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x / L)$	$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$
Zilindroa	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r / r_0)$	$\lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = \text{Bi}$
Esfera	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_n x / L)}{\lambda_n x / L}$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \text{Bi}$

**Ebazpideak:** Serie infinituak eta ekuazio inplizitua



## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 17/30

**HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE** : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna  $\tau > 0,2$

### a. EBAZPIDE ANALITIKOA

Horma lauen zentroa  $\theta_{0, \text{wall}} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

Zilindroen zentroa  $\theta_{0, \text{cyl}} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

Esferen zentroa  $\theta_{0, \text{sph}} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

non  $A_1$  eta  $\lambda_1$  konstanteak Bi zenbakiaren funtzioak dira (Taula A-2)

Bi	Plane Wall	
	$\lambda_1$	$A_1$
0.01	0.0998	1.0017
0.02	0.1410	1.0033
0.04	0.1987	1.0066

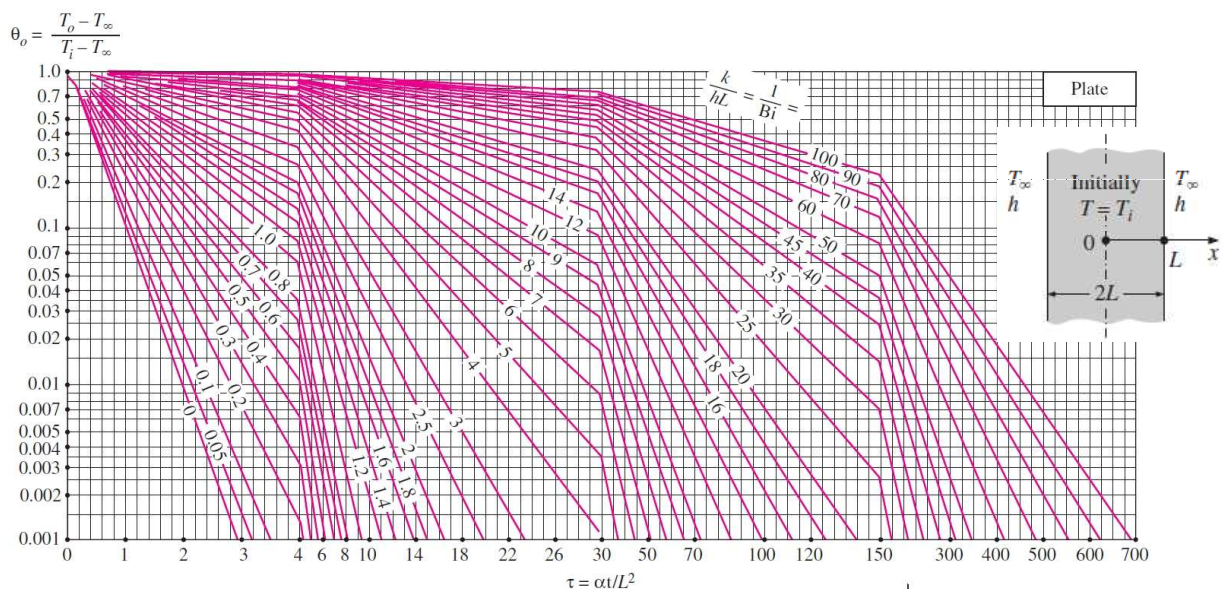
## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 18/30

**HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE** : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna  $\tau > 0,2$

### b. EBAZPIDE GRAFIKOA. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta.

b.1. Geometriaren zentroan eta t denbora jakin batean  $T_o$  **temperatura** kalkulatzeko balio du



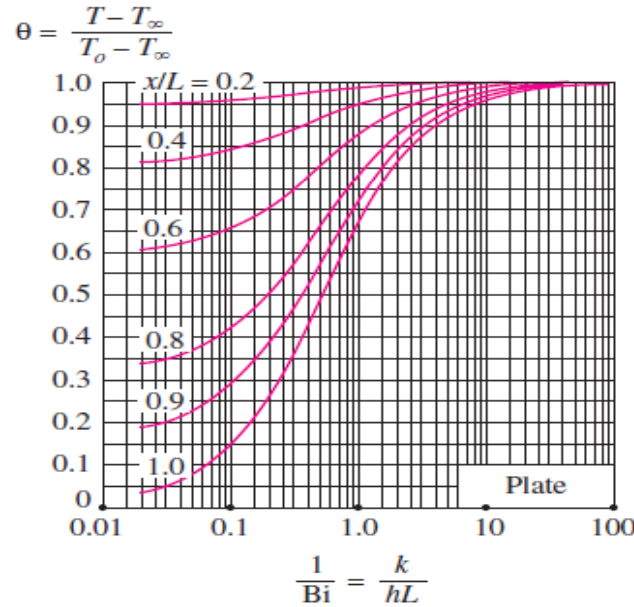
## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 19/30

**HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE** : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna  $\tau > 0,2$

**b. EBAZPIDE GRAFIKOA. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta**

**b.2. Beste kokapenetako eta aldiune bereko tenperatura  $T_o$ -ren arabera kalkulatzeko**



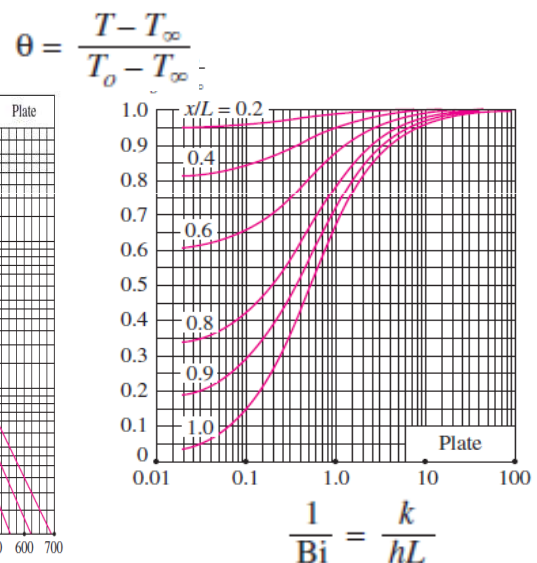
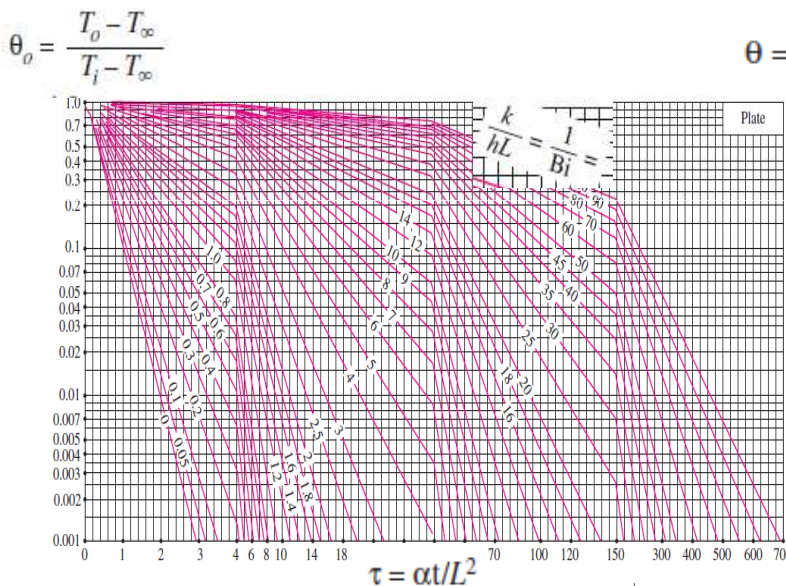
TERMOTEKNIA

## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 20/30

**HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE** : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna  $\tau > 0,2$

**b. EBAZPIDE GRAFIKOA. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta**



TERMOTEKNIA

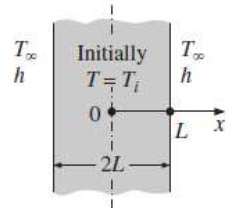
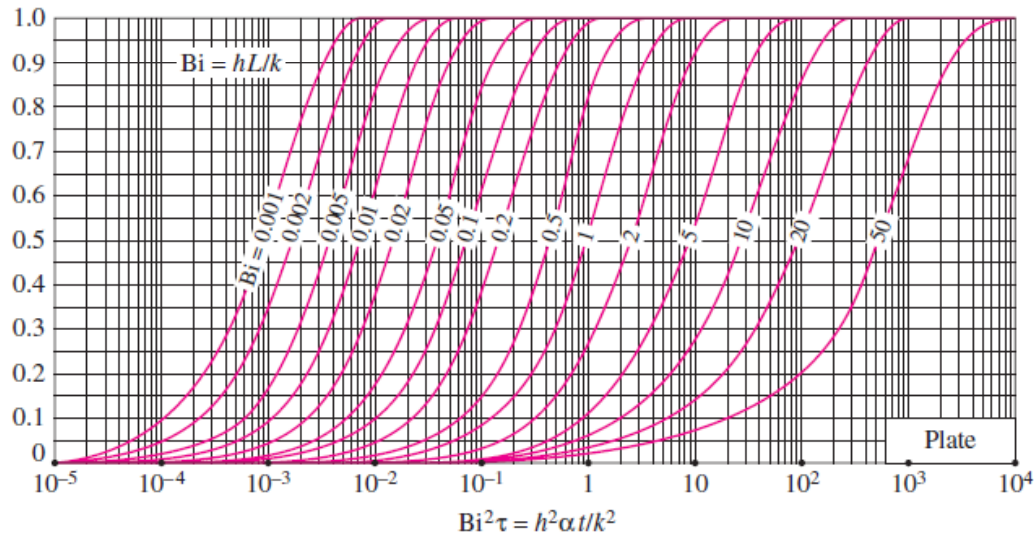
## 4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ 21/30

**HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE** : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna  $\tau > 0,2$

- b. **EBAZPIDE GRAFIKOA**. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta  
b.3.  $t$ aldiunera arteko **bero-transferentziaren** kantitate totala kalkulatzeko

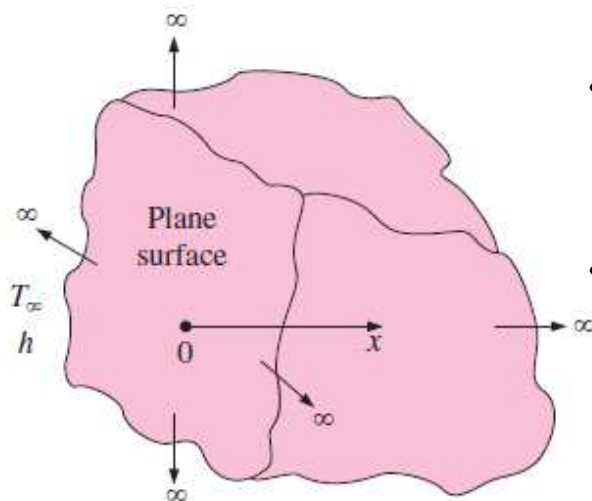
$$\frac{Q}{Q_{\max}} \quad Q_{\max} = mc_p(T_{\infty} - T_i) = \rho V c_p(T_{\infty} - T_i) \quad (\text{kJ})$$



Atakino eta Motor Termikoak Saila  
Departamento de Máquinas y Motores Térmicos

## 4.3 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAN 22/30

### GORPUTZ ERDIINFINITU BATEN ESKEMA



- Ekuazio diferentziala

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Mugalde-baldintzak

$$T(0, t) = T_s$$

$$T(x \rightarrow \infty, t) = T_i$$

- Hasierako baldintzak

$$T(x, 0) = T_i$$

## BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA

## Antzekotasun-Aldagai Metodoa

$x$  eta  $t$  aldagai independenteak  $\eta$  aldagai bakarrean konbinatzen ditu

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \quad \begin{array}{l} \bullet T = T(\eta) \text{ suposatuz eta } y \text{ kate-erregela erabiliz:} \\ \alpha = k/\rho c_p \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{and} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x}{2t\sqrt{4\alpha t}} \frac{dT}{d\eta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \frac{dT}{d\eta} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2} \end{aligned}$$

- Ekuazio Diferentziala

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT}{d\eta}$$

- Mugalde-baldintzak

$$T(0) = T_s$$

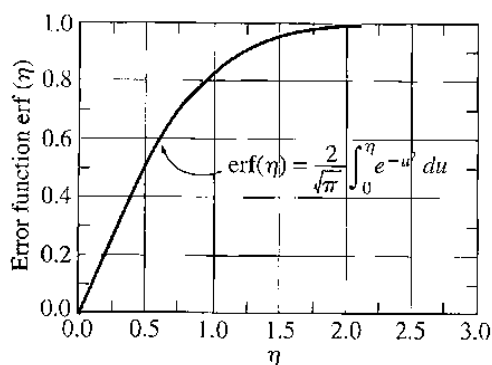
$$T(\eta \rightarrow \infty) = T_i$$

Ekuazio eraldatua nahiz mugalde-baldintzak,  $\eta$ -ren menpekoak baino ez dira, eta  $x$ -rekiko nahiz  $t$ -rekiko independenteak dira.

## BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA

Temperatura-ren aldaketa

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du}_{\text{Gauss-en ekuazioa}} = \underbrace{\text{erf}(\eta)}_{\text{Errore funtzioa: numerikoki ebaluatzen da}} = 1 - \text{erfc}(\eta)$$



$\eta$	erfc( $\eta$ )
0.00	1.00000
0.02	0.9774
0.04	0.9549
0.06	0.9324

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$



## BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA

Tenperatura-banaketa jakinda, gainazaleko bero-fluxua Fourierren legearekin

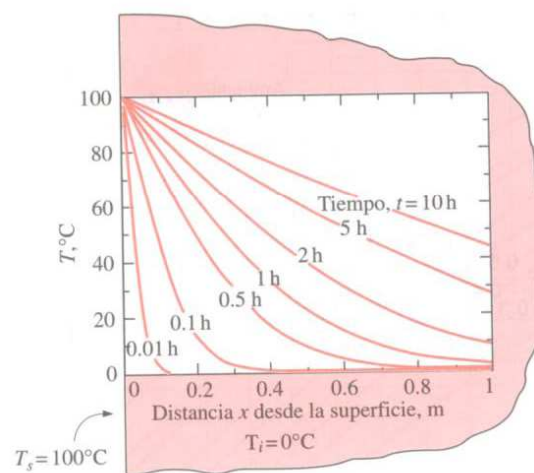
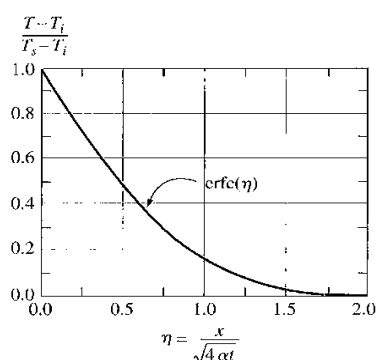
$$\dot{q}_s = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\eta=0} = -k C_1 e^{-\eta^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \Big|_{\eta=0} = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

## BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

1. **kasua** Gainazal-tenperatura zehaztua,  $T_s = \text{konstantea}$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$\dot{q}_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

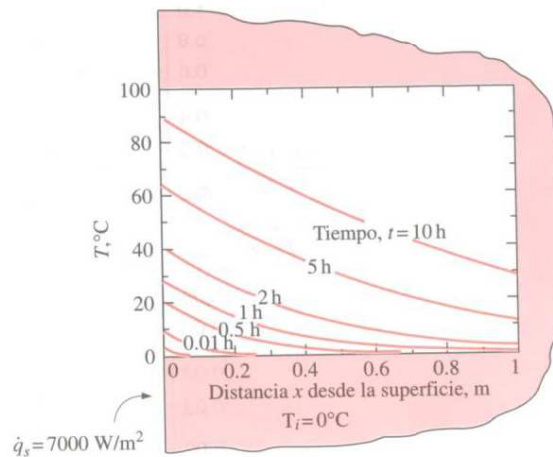


a) Temperatura especificada en la superficie,  $T_s = \text{constante}$ .

## BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

**2. Kasua** Gainazaleko bero-fluxu zehaztua  $q = \text{cte}$

$$T(x, t) - T_i = \frac{\dot{q}_s}{k} \left[ \sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right]$$

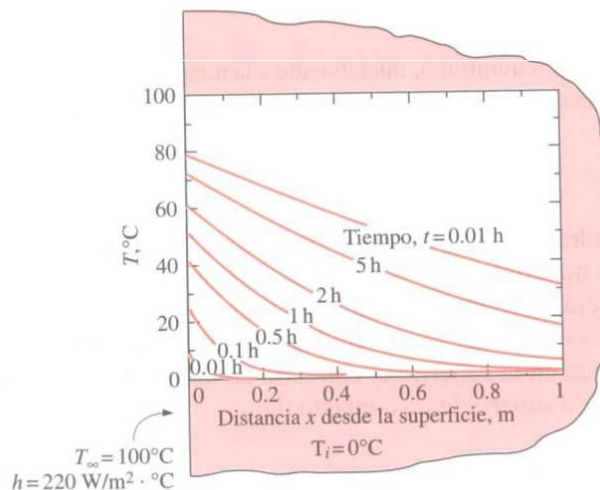


b) Flujo de calor especificado en la superficie,  $\dot{q}_s = \text{constant}$

## BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

**3. Kasua** Konbekzioa gainazalean  $\dot{q}_s(t) = h[T_\infty - T(0, t)]$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

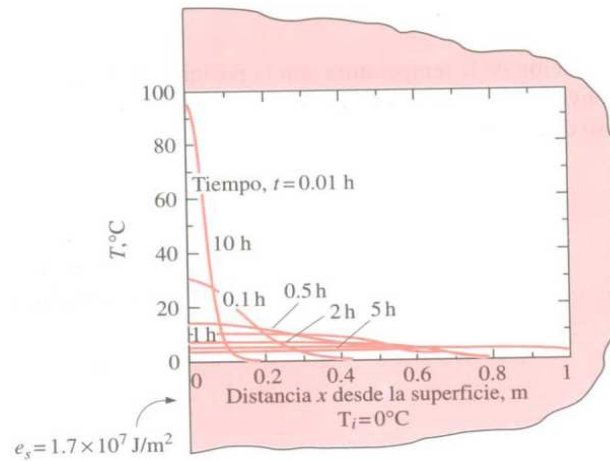


c) Convección en la superficie

### BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

4. Kasua Energia-pultsua gainazalean,  $e_s = \text{cte}$

$$T(x, t) - T_i = \frac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$



d) Pulso de energía en la superficie,  $e_s = \text{constante}$

## 4.4 – IRAKATSIKO EZ DIREN ATALAK

30/30

- 4.3ko azpiatala: BI SOLIDO ERDIINFINITUREN ARTEKO KONTAKTUA
- 4.4 atala: BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SISTEMA MULTIDIMENSIONALETAN

Irudi Iturria:

ÇENCEL, Y.A. TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA, Un enfoque práctico. McGraw-Hil.3 Edición. 2007