2. GAIA

BERO EROAPENAREN EKUAZIOA

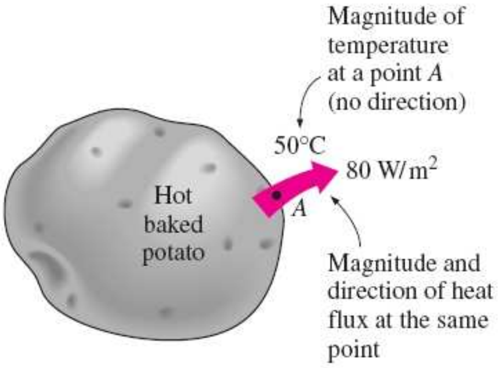
2.0 - HELBURUAK

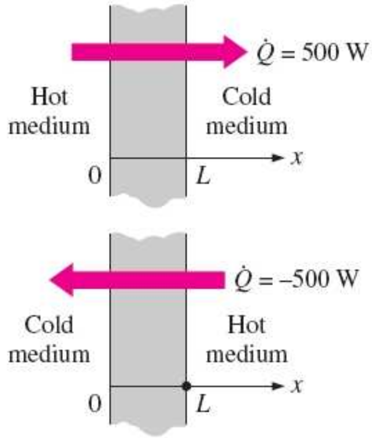
- Bero-transferentziaren **multidimentsionaltasuna** eta denborarekiko menpekotasuna ulertu, eta orobat zer balditzen pean trata daitezkeen bero-transferentziaren problemak dimentsio bakarrekoak balira bezala.
- **Bero-eroapenaren ekuazio diferentzialak** zenbait koordenatu-sistematan lortu, eta dimentsio bakarreko kasu geldikorretarako sinplifikatu.
- Gainazalen baldintza termikoak identifikatu, eta matematikoki adierazi, **mugalde (edo inguruko) baldintza eta hasierako baldintza** gisa.
- Dimentsio bakarreko bero-eroapenaren problemak ebatzi, eta ingurune bateko **tenperatura-banaketa** eta **bero-fluxua** kalkulatu.
- **Beroa sorrera** duten solidoetako dimentsio bakarreko bero-eroapena aztertu.

2.1 - SARRERA

TENPERATURA ETA BERO TRANSFERENTZIA

• Eskalar magnitudea vs. Bektorial magnitudea



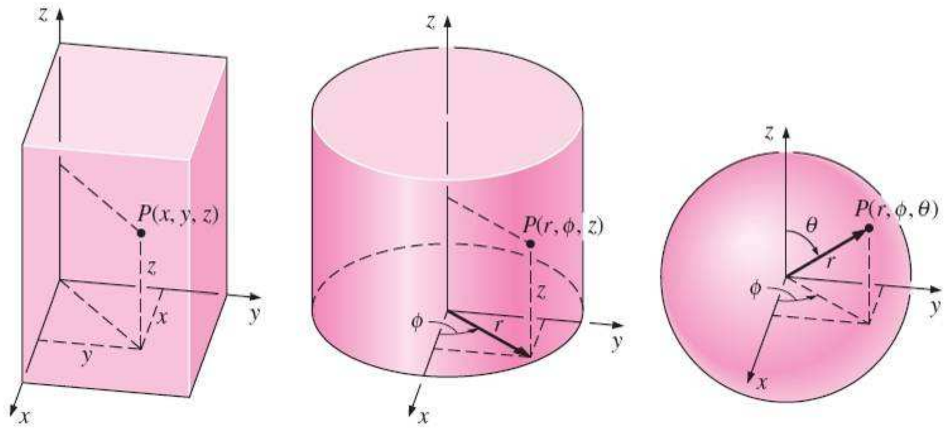


BERO FLUXUAREN NORANTZA

2.1 – SARRERA

TENPERATUREN BANAKETA

Koordenatu-sistema → angeluzuzenak, zilindrikoak, esferikoak.

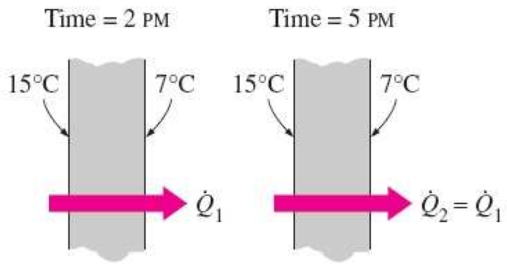


T = T (x, y, z, t) T = T (r, ϕ, z, t) T = T (r, ϕ, θ, t)

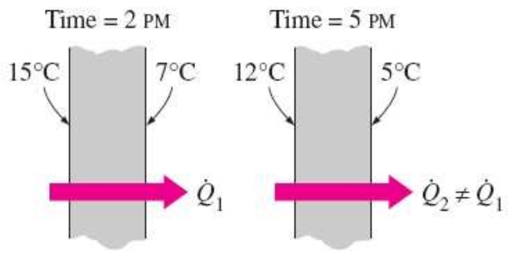
Kasu berezia: T = T (x) → **Dimentsio bakarra eta Geldikorra**

BERO-TRANSFERENTZIA GELDIKORRA VS. IRAGANKORRA

Egoera geldikorra



Egoera iragankorra



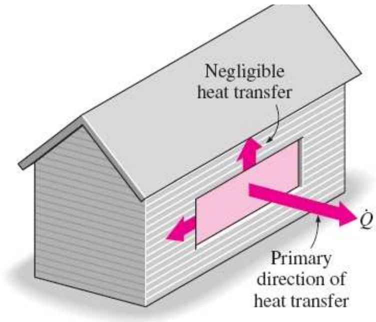
* Kasu berezia: **Parametro kontzentratuen sistemak.**

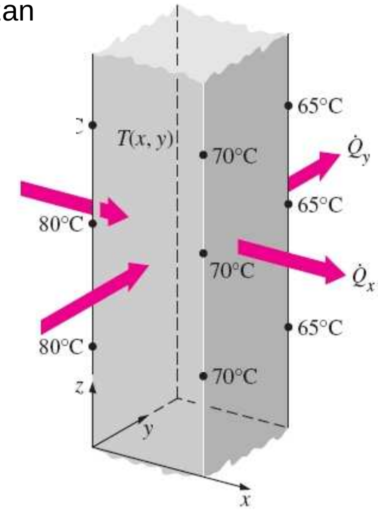
Naturan ematen diren prozesuak iragankorrak badira, **nola aztertzen dira?**

BERO-TRANSFERENTZIA MULTIDIMENTSIONALA

Dimentsio bakarreko, bi dimentsioko edo hiru dimentsiokoa izan daiteke.

Tenperatura-aldakuntzaren araberakoa izango da.





Zer motako transferentzia gertatzen da...

… ur beroa daraman hodi batean?

eta lapiko baten barnean ura irakiten dagoen arraultz batean?

BERO-TRANSFERENTZIA MULTIDIMENTSIONALA

ZER DA EROAPEN PROBLEMA BAT EBAZTEA?

Helburua:

- Punto jakin bateko tenperatura $$T = \mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) \qquad [^{\mathrm{o}}\mathrm{C}]$$

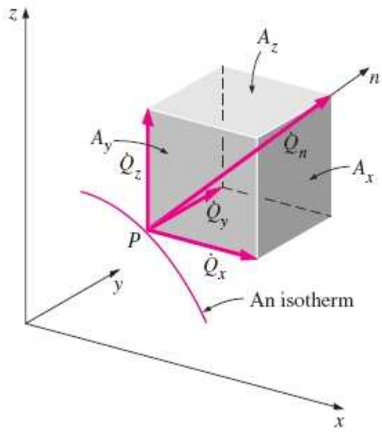
$$\Downarrow$$

- Bero fluxua $$\dot{Q}_n = -k \cdot A \cdot \left| \overrightarrow{grad}\,(T) \right| \qquad [\mathrm{W}]$$

BERO-TRANSFERENTZIA-MULTIDIMENTSIONALA

Fourier legearen adierazpen orokorra:

$$\dot{Q}_n = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -k \cdot A \cdot \left| \overrightarrow{grad}\,(T) \right| \qquad [\mathrm{W}]$$



$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \cdot \vec{i} + \dot{Q}_y \cdot \vec{j} + \dot{Q}_z \cdot \vec{k}$$

$$\dot{Q}_x = -k \cdot A_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \dot{Q}_y = -k \cdot A_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \qquad \dot{Q}_z = -k \cdot A_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$$

Material isotropoak – anisotropoak

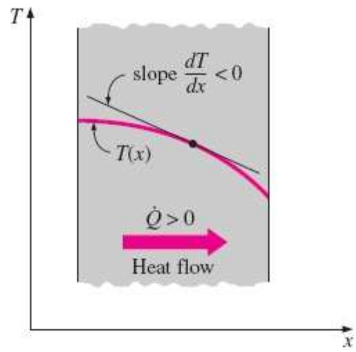
BERO-TRANSFERENTZIA MULTIDIMENTSIONALA

FOURIERREN LEGEA $$\dot{Q}_{cond} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \qquad \text{(W)}$$

Bero-eroapenaren abiadura ingurunean zeharreko tenperatura-diferentziarekiko eta bero-transferentziaren norabidearekiko elkarzuta den azalerarekiko proportzionala da, baina norabide horretako distantziarekiko alderantziz proportzionala.

k eroankortasun termikoa da.

$\frac{dT}{dx}$ tenperaturaren gradientea da.



BERO-SORRERA

Beste energia mota bat (mekanikoa, elektrikoa, nuklearra, kimikoa) bero energian bihurtzean sortzen da.

Adibidez: Zirkuito elektrikoak, erregai nuklearra, eguzkia, etc.

Fenomeno bolumetrikoa da.

Bero-sorrera abiadura: $\dot{e}_{gen}$ [W/m^3] o [Btu/h·ft^3]

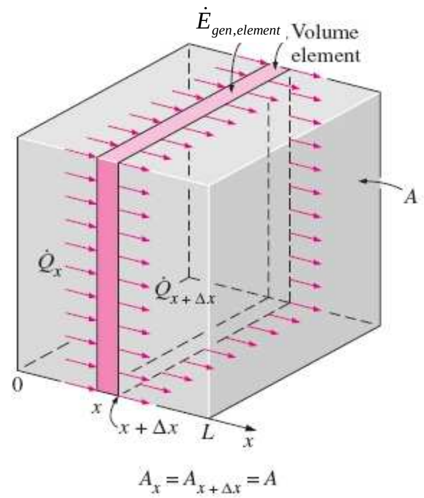
Orokorrean posizio eta denborarekin aldatzen da: $$\dot{E}_{gen} = \int_V \dot{e}_{gen} \cdot dV$$

Bero-sorrera konstantea bada: $$E_{gen} = \dot{e}_{gen} \cdot V$$

Bero-transferentzian norabide nagusi bat dagoenenan erabiltzen da, beste bi norabideak mesprezagarriak izanik.

HORMA LAU HANDI BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Energia-balatzea aplikatuz:



$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{E}_{gen,element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad [W]$$

$$\dot{E}_{gen,element} = \dot{e}_{gen} \cdot V_{element} = \dot{e}_{gen} \cdot A \cdot \Delta x$$

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = m \cdot c \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho \cdot c \cdot A \cdot \Delta x \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

HORMA LAU HANDI BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Ordezkatuz, $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ limitea hartuz eta Fourierren legea aplikatuz:

Eroankortasun aldakorra:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{e}_{gen} = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Eroankortasun konstantea:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Difusibitate termikoa: $\alpha = \dfrac{k}{\rho \cdot c}$

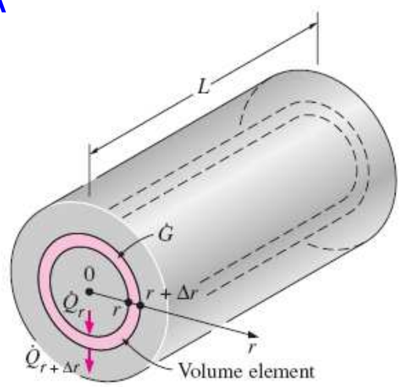
Kasu bereziak:

- Egoera egonkorra $$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$$
- Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$
- Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra $$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

2.2 – DIMENTSIO BAKARREKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

ZILINDRO LUZE BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Energia-balantzea aplikatuz:



$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{E}_{gen,element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad [\mathrm{W}]$$

$$\dot{E}_{gen,element} = \dot{e}_{gen} \cdot V_{element} = \dot{e}_{gen} \cdot A \cdot \Delta r$$

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = m\,c \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho\,c \cdot A \cdot \Delta r \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

Ordezkatuz, $\Delta t \to 0$ y $\Delta x \to 0$ limitea hartuz eta Fourierren legea aplikatuz:

Eroankortasun aldakorra:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{e}_{gen} = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

2.2 – DIMENTSIO BAKARREKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

ZILINDRO LUZE BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Eroankortasun konstantea

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

Kasu bereziak:

- Egoera egonkorra

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$$

- Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra

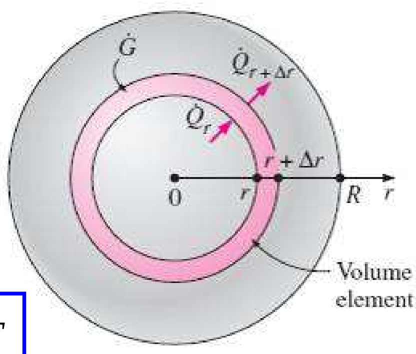
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

ESFERA BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Beste geometriekiko parekotasuna eginez:



Eroankortasun aldakorra:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{e}_{gen}=\rho \cdot c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Eroankortasun konstantea:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{e}_{gen}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

Kasu bereziak:

- Egoera egonkorra $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{e}_{gen}}{k}=0$$

- Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra $$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$$

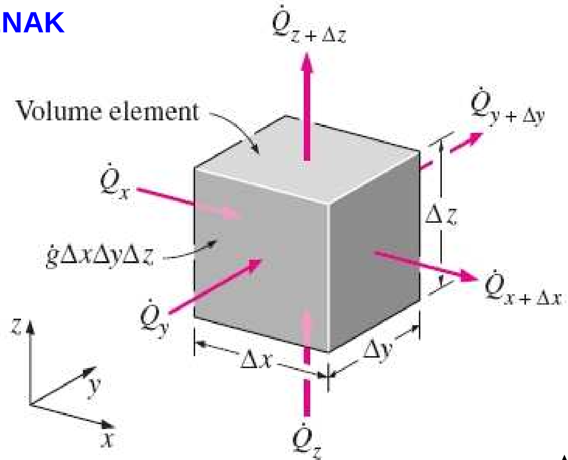
DIMENTSIO BAKARREKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIO KONBINATUA

Hiru geometrientzako baliogarria den adierazpen trinkoa da:

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{e}_{gen}=\rho c\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

n = 0	Pared plana.
n = 1	Pared cilíndrica.
n = 2	Pared esférica.

KOORDENATU ANGELUZUZENAK



$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{gen,element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad [\mathrm{W}]$$

$$\dot{E}_{gen,element} = \dot{e}_{gen} V_{element} = \dot{e}_{gen} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = m\,c\cdot(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho\,c\cdot\Delta x\Delta y\Delta z(T_{t+\Delta t} - T_t)$$

KOORDENATU ANGELUZUZENAK

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{e}_{gen} = \rho\cdot c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Eroankortasun konstantea:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

Kasu bereziak:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$$

Egoera egonkorra.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

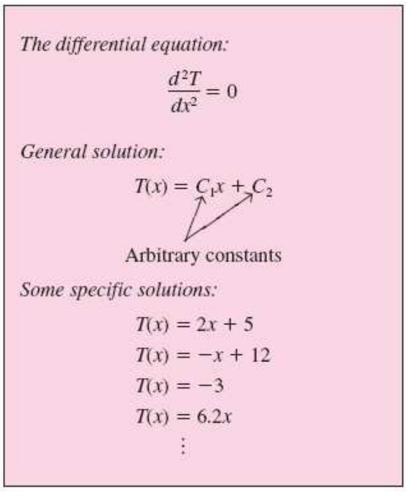
Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra.

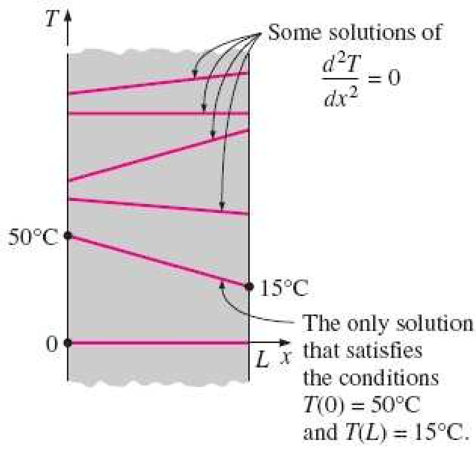
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra.

MUGALDE-BALDINTZAK

Gorputzaren mugaldean adierazpen matematikoa osatzen duten baldintza termikoak dira.



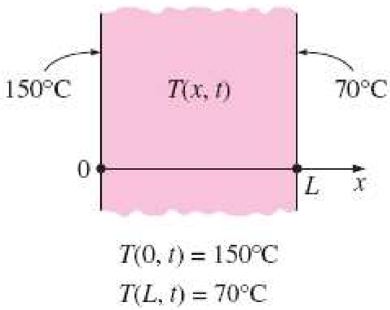


HASIERAKO BALDINTZAK

Aldiune zehatz batean adierazpen matematikoa osatzen duten baldintza termikoak dira. Orokorrean t = 0 aldiuneari buruzko informazioa da.

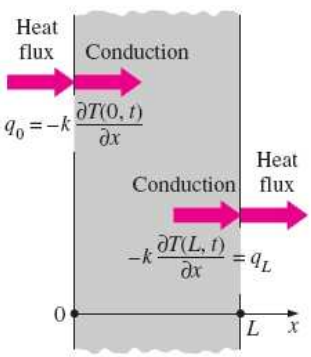
$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

1- TENPERATURA ZEHAZTUAREN MUGALDE-BALDINTZA



$$\begin{cases} T(0,t) = T_1 \\ T(L,t) = T_2 \end{cases}$$

2- BERO-FLUXU ZEHAZTUAREN MUGALDE-BALDINTZA



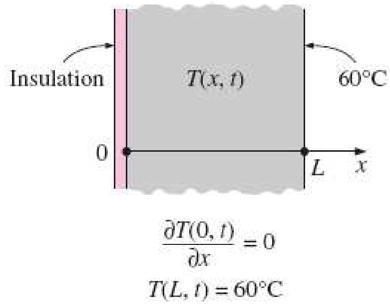
$$\begin{cases} \dot{q} = -k\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} & [\mathrm{W/m^2}] \\ \dot{q} = -k\dfrac{\partial T(L,t)}{\partial x} & [\mathrm{W/m^2}] \end{cases}$$

Bero fluxua x norabide positiboan

2- BERO-FLUXU ZEHAZTUAREN MUGALDE-BALDINTZA

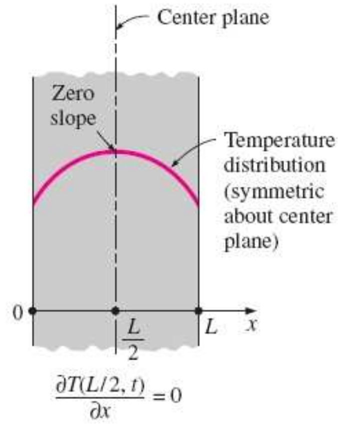
Mugalde isolatua

$$k\frac{\partial T}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}=0$$



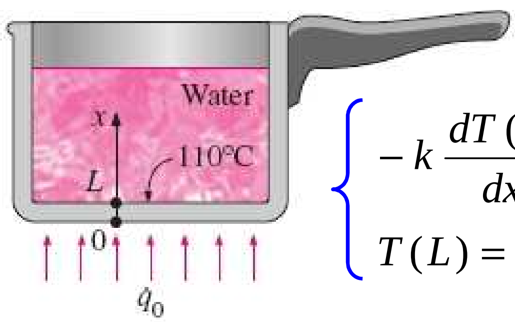
Simetri termikoa

$$\frac{\partial T(L/2,t)}{\partial x}=0$$



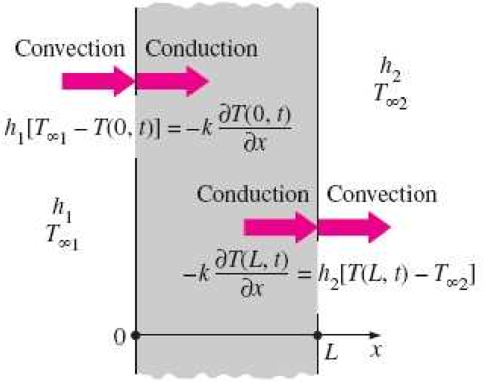
1. ADIBIDEA

Jar dezagun aluminiozko zartagin bat, haragia erregosteko erabiltzen dena, su elektrikoan. Zartagin-ipurdia L = 0,3 cm lodi da, eta D = 20 cm-ko diametroa du. Berogailu elektrikoak 800 W kontsumitzen du bete-betean ari denean haragia erregosten, eta berotze-elementuak sortzen duen beroaren ehuneko 90 transferitzen dio zartaginari. Operazio geldikorrean neurtu da zartaginaren barne-gainazalaren tenperatura 110 ℃ dela. Adierazi zartagin-ipurdiaren mugalde-baldintzak haragia erregosten ari denean.

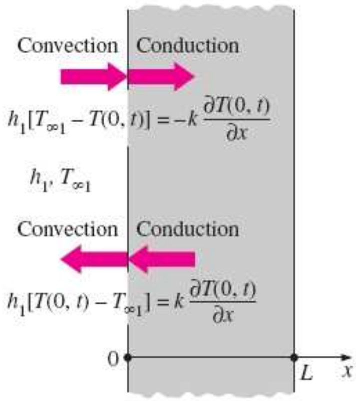


$$\begin{cases} -k\dfrac{dT(0)}{dx}=\dot{q}_0 = \dfrac{0.720\ \text{kW}}{\pi(0.1\,\text{m})^2}=22.9\ \text{kW/m}^2 \\ T(L)=110\ ^{\circ}\text{C} \end{cases}$$

3- KONBEKZIOAREN MUGALDE-BALDINTZA



$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h_1[T_{\infty,1} - T(0,t)] \\ -k\dfrac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h_2[T(L,t) - T_{\infty,2}] \end{cases}$$



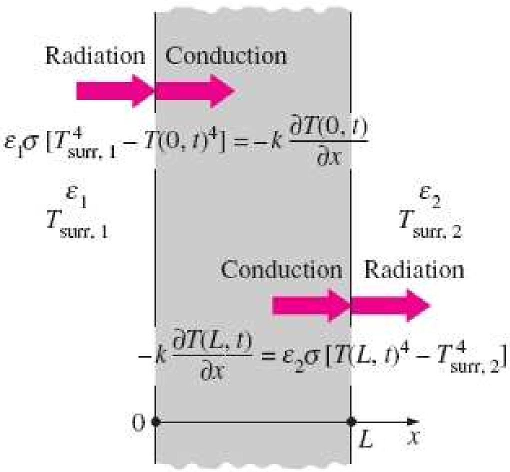
Iruzkinak:

Zeinuak

Gainazaleko balantzearen esanahi fisikoa

Gainazaleko tenperatura ezezagunak

4- ERRADIAZIOAREN MUGALDE-BADINTZA



$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \varepsilon_1\sigma[T^4_{surr,1} - T(0,t)^4] \\ \\ -k\dfrac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \varepsilon_2\sigma[T(L,t)^4 - T^4_{surr,2}] \end{cases}$$

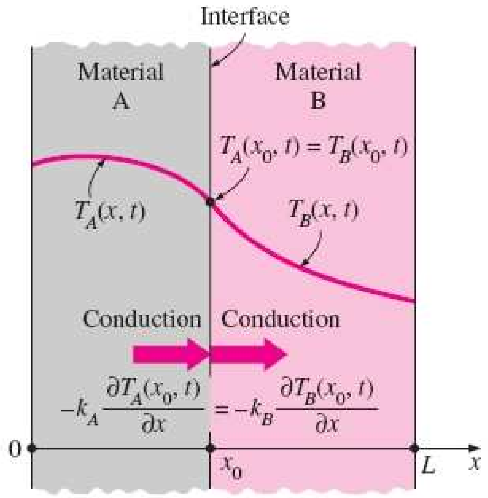
$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ [W/m²·K⁴]

Stefan-Boltzmannen konstantea

Iruzkinak:

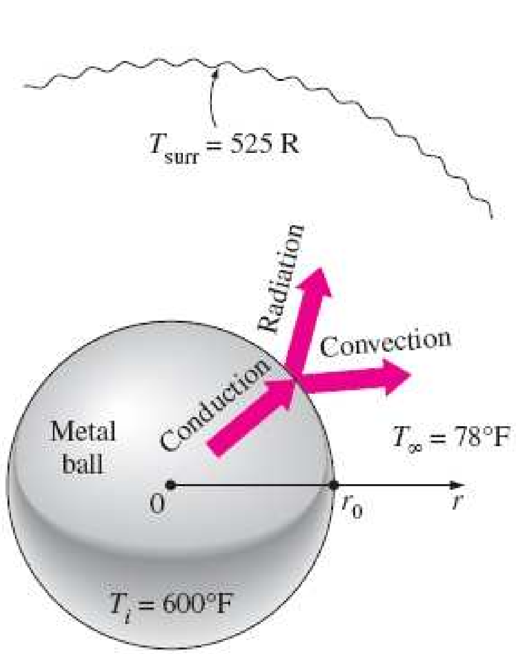
- Tenperaturak
- Linealtasuna

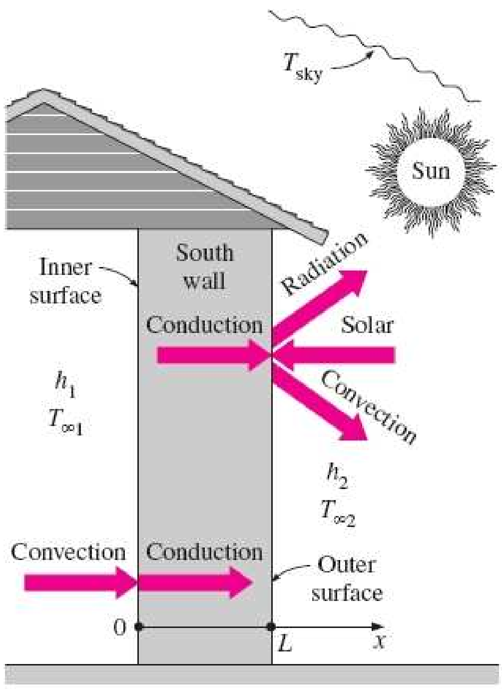
5- FASEARTEKO MUGALDE BALDINTZAK



$$
\begin{cases}
T_A(x_0,t) = T_B(x_0,t) \\[2ex]
-k_A \dfrac{\partial T_A(x_0,t)}{\partial x} = -k_B \dfrac{\partial T_B(x_0,t)}{\partial x}
\end{cases}
$$

6- MUGALDE-BALDINTZA OROKORRAK





2.5 – DIMENTSIO BAKARREKO BERO-EROAPEN GELDIKORREKO PROBLEMEN EBAZPENA

Bero transferentzia problema

⇩

Formulazio matematikoa (ekuazio diferentziala eta mugaldeko baldintzak)

⇩

Ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra

⇩

Mugaldeko-baldintzen aplikazioa

⇩

Problemaren soluzioa

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{e}_{gen}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = \mathrm{T(x,y,z,t)} \qquad [^{\mathrm{o}}\mathrm{C}]$$

$$\dot{Q}_n = -k\cdot A\cdot\left|\overrightarrow{grad}\,(T)\right| \qquad [\mathrm{W}]$$

2.6 – IRAKATSIKO EZ DIREN ATALAK

- 2.3ko azpiatala: KOORDENATU ZILINDRIKOAK
- 2.3ko azpiatala : KOORDENATU ESFERIKOAK
- 2.6 atala: BERO-SORRERA SOLIDOETAN
- 2.7 atala: EROANKORTASUN TERMIKO ALDAKORRA k(T).

Irudi iturria:
ÇENCEL, Y.A. TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA, Un enfoque práctico. McGraw-Hil.3 Edición. 2007