

## TEMA 7 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1. Trace el diagrama de Bode asintótico de los siguientes sistemas:

$$a) G(s) = \frac{4}{s+2}$$

$$b) G(s) = \frac{40}{s^2 + s + 4}$$

$$c) G(s) = \frac{4}{(1+0.4s)(s+1)}$$

$$d) G(s) = \frac{8}{s(1.25s+1)(s+2)}$$

$$e) G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2 + s + 2)}$$

$$f) G(s) = \frac{5(s+0.6)}{s(0.25s+1)(2.5s+1)(s+2)}$$

2. Trace el diagrama de Bode asintótico del siguiente sistema,

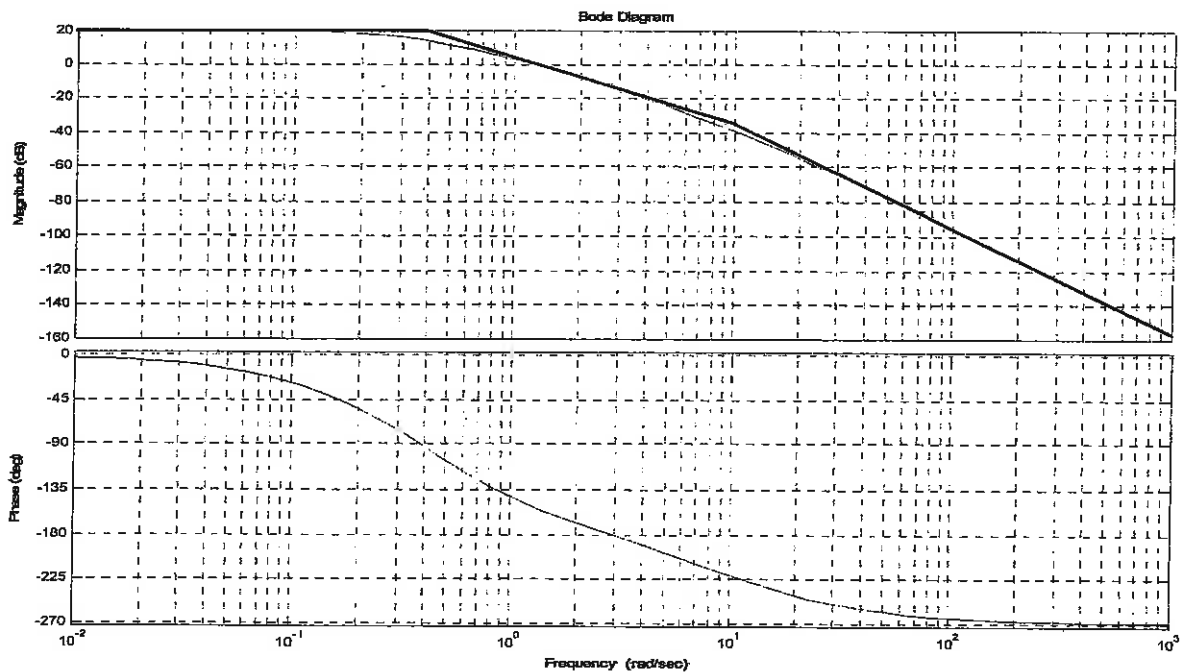
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(1+0.1s)}$$

y calcule la respuesta en estado estacionario a las siguientes entradas senoidales, ¿qué efecto tiene la frecuencia en la amplitud y el desfase?

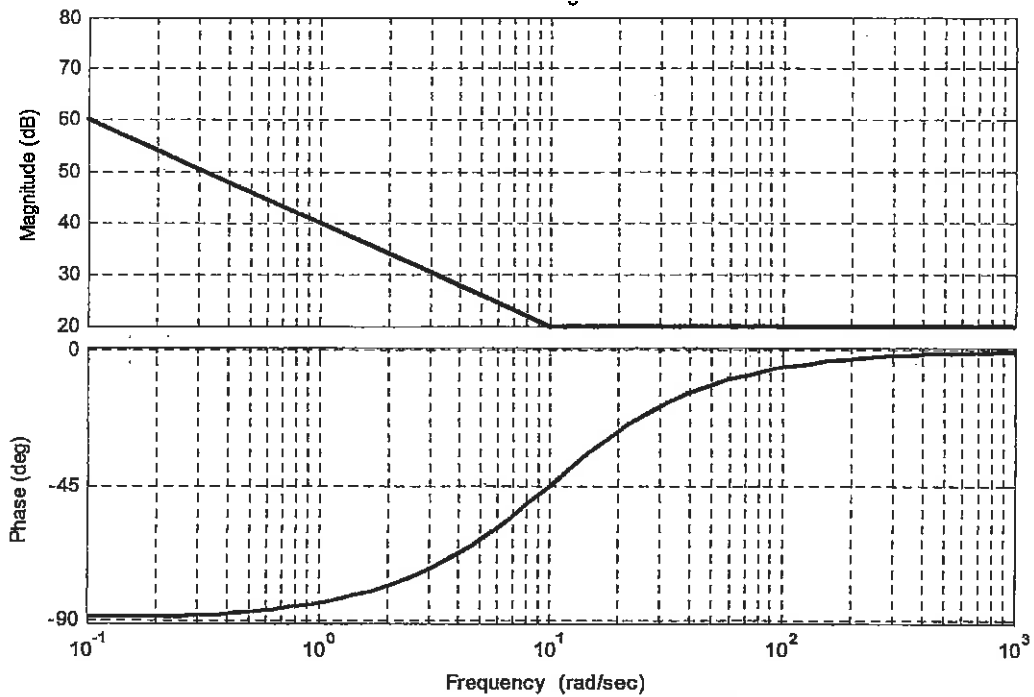
$$r(t) = 2 \operatorname{sen} 0.5t$$

$$r(t) = 2 \operatorname{sen} t$$

3. Identificar el sistema cuyo Bode de módulo es:



4. El diagrama de la figura representa la  $G(s)$  de un controlador tipo PID. ¿Qué acciones tiene y cuál es el valor de sus parámetros?



5. El diagrama de la figura representa la  $G(s)$  de un sistema de fase mínima. Identifique  $G(s)$ .

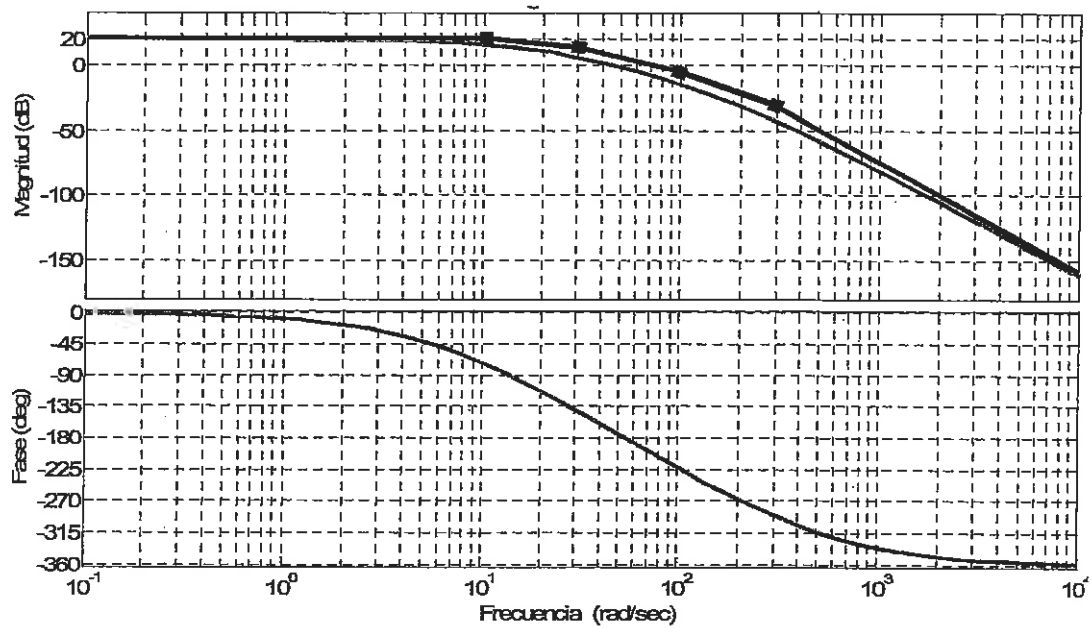
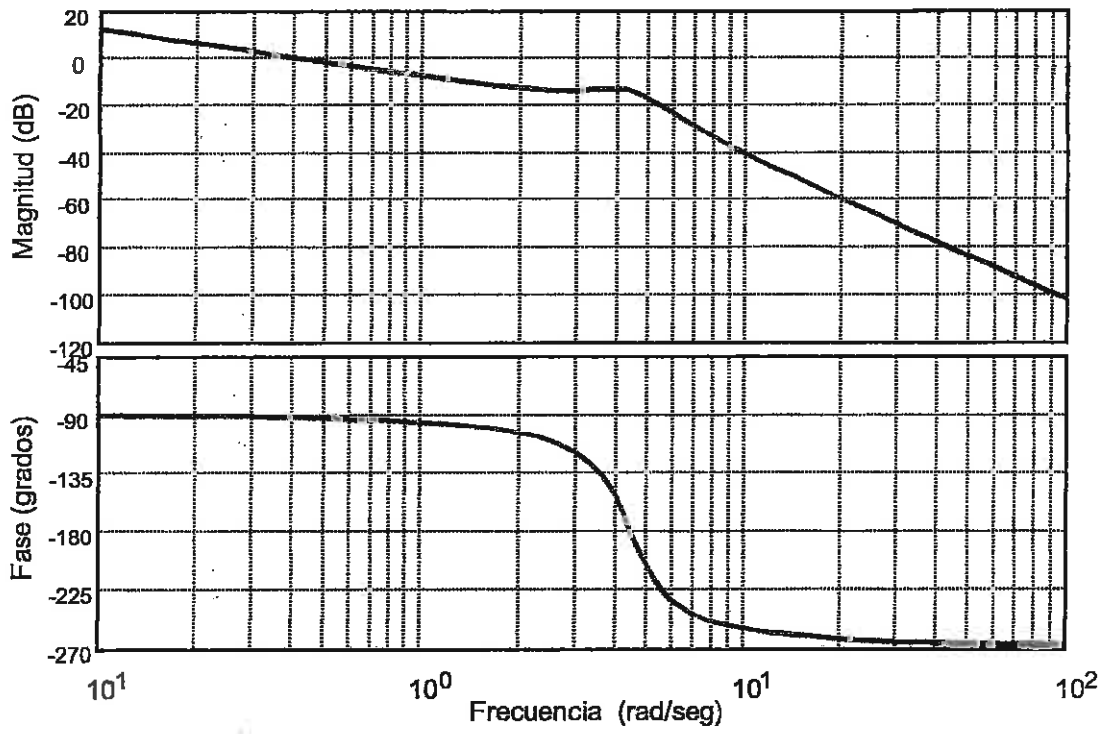
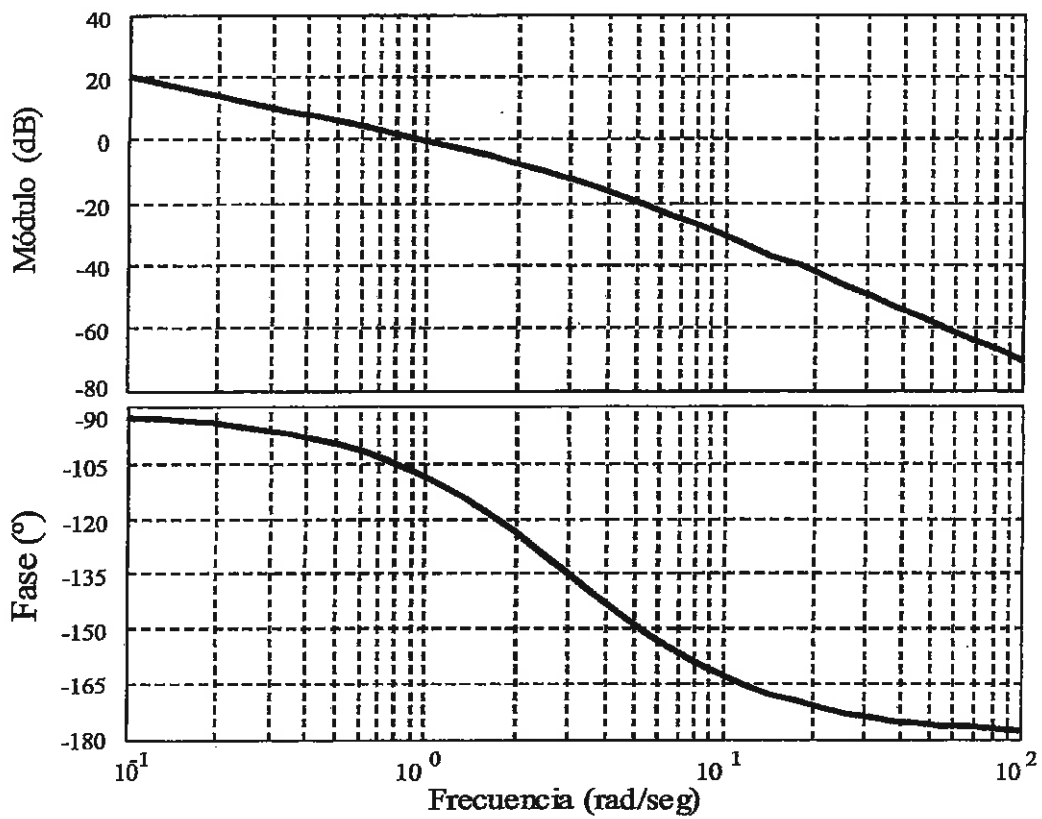


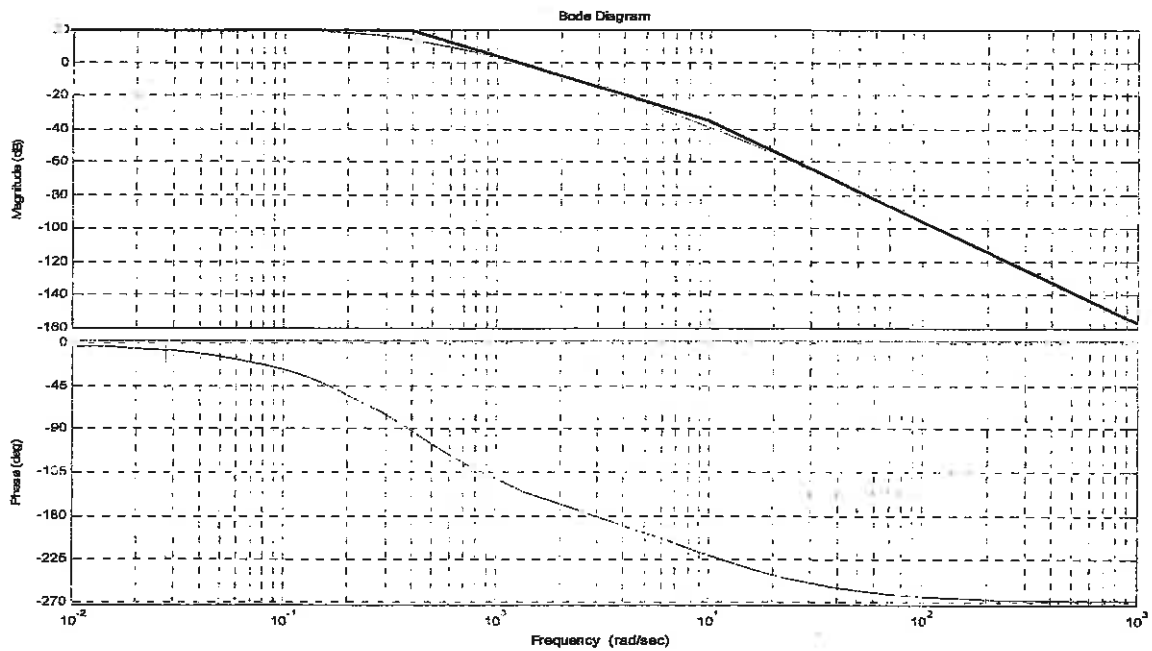
Diagrama de Bode



10. Para el mismo sistema realimentado:



6. El diagrama de la figura representa la  $G_{BA}(s)$  de un sistema realimentado. ¿Qué error presentará a entrada escalón?



7. Sea el siguiente sistema realimentado con realimentación unitaria, calcule el valor de  $a$  para que  $MF=45^\circ$ :

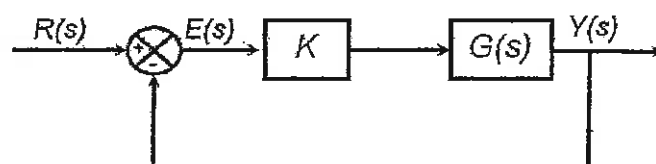
$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

8. Sea un sistema realimentado con la siguiente función de transferencia en bucle abierto:

$$G_{BA}(s) = \frac{ke^{-s}}{s}$$

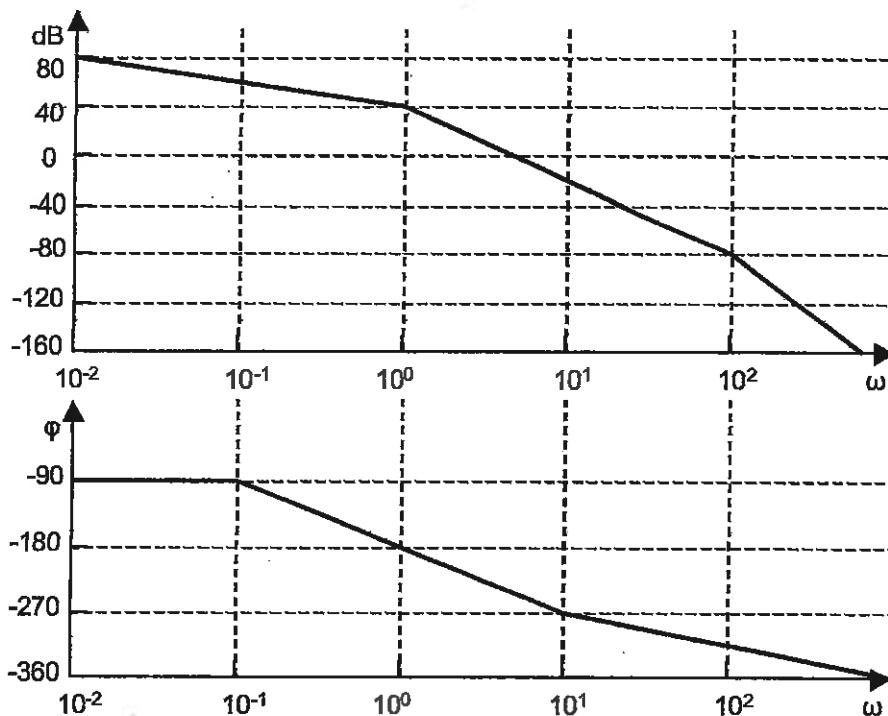
¿Cuál es el máximo valor de  $k$  que asegura la estabilidad en bucle cerrado?

9. Sea el sistema realimentado de la figura del que se conoce el diagrama de Bode de  $KG(s)$ . Analice la estabilidad relativa (MG y MF). ¿Es posible aumentar más la ganancia  $K$  del controlador?



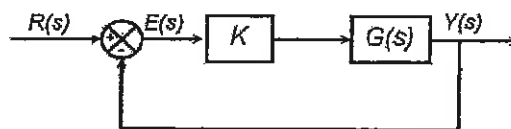
- Calcule el MG y MF.
- ¿Cuál será el error estacionario del sistema a entrada escalón 0,5?
- ¿Y a rampa de pendiente 0.5?
- ¿Será capaz de seguir a una señal de referencia  $r(t)=3\text{sen}5t$ ?
- ¿Es posible aumentar la K del controlador antes de que el sistema realimentado se haga inestable?

11. Para el mismo sistema realimentado:



- Calcule el MG y MF.
- Si el sistema realimentado es estable, ¿hasta dónde se puede aumentar la ganancia del controlador sin que el sistema se haga inestable?
- Si es inestable, razone qué se podría hacer para estabilizarlo hasta obtener un MG=6dB.

12. Sea el sistema realimentado de la figura.



Cuál es la función de transferencia  $G(s)$  que hace que las características del sistema en bucle cerrado sean:

- El error en estado estacionario a entrada rampa unitaria  $1/50$ .
- El margen de ganancia 6 dB

Se sabe que la función de transferencia  $G(s)$  tiene un polo doble fuera del origen.



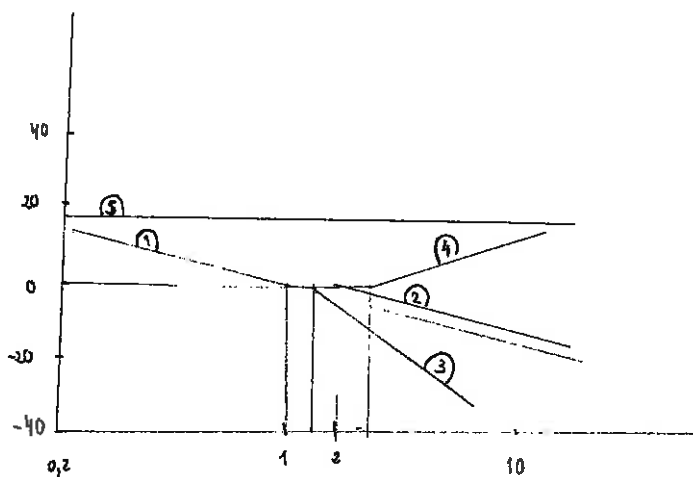
Dibujar el diagrama de Bode:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

Escribimos  $G(j\omega)$  de forma que las asíntotas de baja frecuencia para los factores de primer orden y el factor de segundo orden son la línea 0dB.

$$G(j\omega) = \frac{\frac{10}{4} \cdot 3 \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \cdot \left(\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2 + \frac{j\omega}{2} + 1\right)} = \frac{7,5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{2} + 1\right)}$$

- ① Polo primer orden  $\frac{1}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{1}{j\omega}\right) = -20 \log \omega$  pasa por  $\omega = 1$
- ② Polo simple:  $\frac{1}{\frac{j\omega}{2} + 1} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{1}{\frac{j\omega}{2} + 1}\right) = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \cdot 2^2}$  pasa por  $\omega = \frac{1}{2} = 0,5$
- ③ Polo segundo orden:  $\frac{1}{\left(\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{2} + 1\right)} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \Rightarrow$   
 $\omega \rightarrow 0 \quad |G(j\omega)|_{dB} = 0$   
 $\omega \rightarrow \infty \quad |G(j\omega)|_{dB}$  recta  $-40$  dB  
que pasa por  $\omega = \sqrt{2}$
- ④ cero simple:  $\frac{j\omega}{3} + 1 = |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \cdot \frac{1}{9}}$  pasa por  $\omega = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0,33$
- ⑤ Ganancia estática  $K: 7,5. \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(7,5) = 17,5$  dB.







# ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

$$y_{ss}(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Desfase :  $\text{Arg } G(j\omega) = \phi$

Distancia  $r_{\max}$  a 0  $\Rightarrow A |G(j\omega)|$ .

DIAGRAMA de BODE Representa  $20 \log |G(j\omega)|$  (dB) y  $\text{Arg } G(j\omega)$  en grados.

Tiempo de retardo =  $\frac{\phi \cdot T}{360}$

**GANANCIA ESTÁTICA K**  $\Rightarrow |G(\omega)|_{dB} = 20 \log |K| = \text{cte}$

$\text{Arg } G(\omega_j) = 0^\circ$  ó  $\pi$  si  $K < 0$ .

**POLOS EN EL ORIGEN**  $G(s) = \frac{1}{s}$

Recta pendiente -20 dB  
pasa por  $\omega = 1, 0 \text{ dB}$ .

$\Rightarrow |G(\omega_j)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$

$\text{Arg } G(\omega_j) = \text{Arg} \left( \frac{1}{j\omega} \right) = -90^\circ$

**CEROS EN EL ORIGEN**  $G(s) = s$

Recta pendiente +20 dB  
pasa por  $\omega = 1, 0 \text{ dB}$ .

$\Rightarrow |G(\omega_j)|_{dB} = 20 \log(\omega_j) = 20 \log \omega$

$\text{Arg } G(\omega_j) = \text{Arg}(\omega_j) = 90^\circ$

**POLOS SIMPLES.**  $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G(\omega_j)| = 0$

$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow$  Recta pendiente -20 que  
pasa por  $\omega = 1/T, 0 \text{ dB}$

$\Rightarrow |G(\omega_j)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2}$

$\text{Arg } G(\omega_j) = -\arctan(\omega T)$

**CEROS SIMPLES**  $G(s) = Ts+1$

$\omega \rightarrow 0 \rightarrow |G(\omega_j)| = 0$

$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow$  Recta pendiente +20 que  
pasa por  $\omega = 1/T, 0 \text{ dB}$

$\Rightarrow |G(\omega_j)|_{dB} = 20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2}$

$\text{Arg } G(\omega_j) = \arctan(\omega T)$

**POLOS SEGUNDO ORDEN**  $G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G(\omega_j)| = 0$

$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow$  Recta de pendiente -40  
que pasa por  $\omega = \omega_n$

$\omega_n \equiv$  frecuencia de ruptura  
la curva de módulo asintótico  
cambia de pendiente.

**RETARDO PURO** :  $G(s) = e^{-\tau s}$

$\Rightarrow |G(\omega_j)|_{dB} = 0$

$\text{Arg}(G(\omega_j)) = -\omega \tau$

**POHTR** :  $G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts+1}$

$\Rightarrow |G(\omega_j)|_{dB} = -20 \sqrt{1+\omega^2 \tau^2}$

$\text{Arg } G(\omega_j) = -\omega \tau - \arctan(\omega T)$

ANCHO DE BANDA : frecuencia a la que la atenuación es 3dB menor que la atenuación a frecuencia nula.

### SISTEMAS DE FASE MÍNIMA.

- La altura de la asíntota a bajas frecuencias:  $20 \log K$  ( $\omega=1$ )
- La pendiente a bajas frecuencias ( $n$ ) polos / ceros en  $s=0$ :  $\pm 20n$  dB/dec
- Frecuencias de ruptura.

POLOS y ceros simples  $\Rightarrow \pm 20$  dB/década

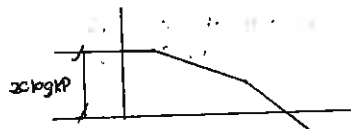
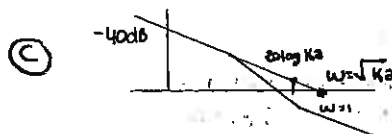
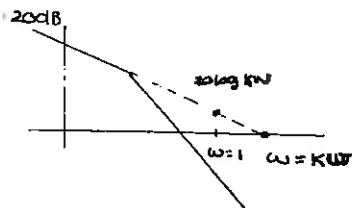
POLOS y ceros 2º ORDEN  $\Rightarrow \pm 40$  dB/década

- Fase: número polos y ceros  $\rightarrow$  Bajas frecuencias  $\pm 90 \cdot n$   
Altas frecuencias  $(n-m) (-90)$

### ERROR EN RÉGIMEN PERMANENTE

- A = Asíntotas planas  $\Rightarrow$  SISTEMA REALIMENTADO TIPO 0
- B = A BF pendiente  $\pm 20$  dB/dec  $\Rightarrow$  SISTEMA REALIMENTADO TIPO 1
- C = A BF pendiente  $\pm 40$  dB/dec  $\Rightarrow$  SISTEMA REALIMENTADO TIPO 2

(A)  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{dB} = 20 \log K_p$



### ESTABILIDAD CRÍTICA

$|G(s) \cdot H(s)| = 1$  ;  $\text{Arg } G(s) \cdot H(s) = -180^\circ$  : OSCILA AMPLITUD CTE.

$|G(s) \cdot H(s)| < 1$  ; oscilaciones decaen  $\Rightarrow$  SISTEMA ESTABLE

$|G(s) \cdot H(s)| > 1$  ; oscilaciones crecen  $\Rightarrow$  SISTEMA INESTABLE.

▣ Frecuencia de cruce de fase:  $\omega_f$

Frecuencia a la que  $\text{Arg } G_B(j\omega)$  alcanza por primera vez  $-180^\circ$

▣ Frecuencia de cruce de ganancia:  $\omega_g$

Frecuencia a la que  $|G_B(j\omega)|$  alcanza por primera vez 1.

▣ margen de Fase:  $\mu_F$

$$\mu_F = 180 + \text{Arg } G_B(j\omega_g)$$

▣ margen de ganancia:  $\mu_G$   $\rightarrow \mu_G = -20 \log (1/|G_B(j\omega_f)|)$

Nombre \_\_\_\_\_  
 Izena \_\_\_\_\_  
 1º Apellido \_\_\_\_\_  
 1 Deitura \_\_\_\_\_  
 2º Apellido \_\_\_\_\_  
 2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**90 minutos**

Grupo:

**PROBLEMA 1 (6 PUNTOS)**

El diagrama de la *figura 1* se corresponde con el sistema de control con dos entradas en tensión, una continua  $r_1(t)$  y otra alterna  $r_2(t)$ , y una salida  $y(t)$  en intensidad.

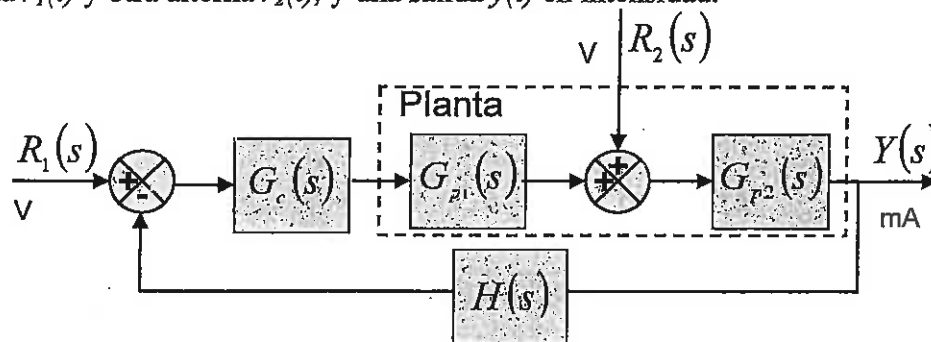


Figura 1

La *figura 2* muestra el diagrama de módulo de bode correspondiente a la función de transferencia  $G_{pl}(s)$  (sistema de fase mínima). En esta gráfica la línea continua expresa trazado asintótico, mientras que la línea discontinua muestra el trazado real.

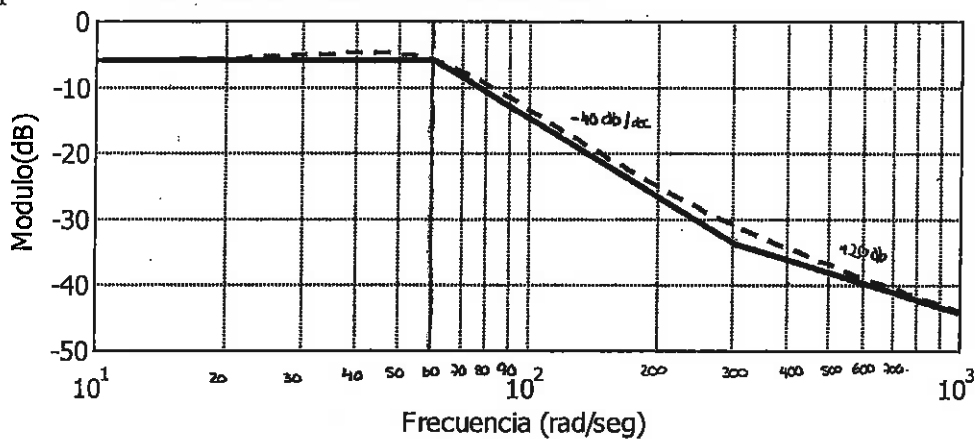


Figura 2

La *figura 3* muestra la respuesta en tiempo de  $G_{pl}(s)$  ante entrada escalón unitario.

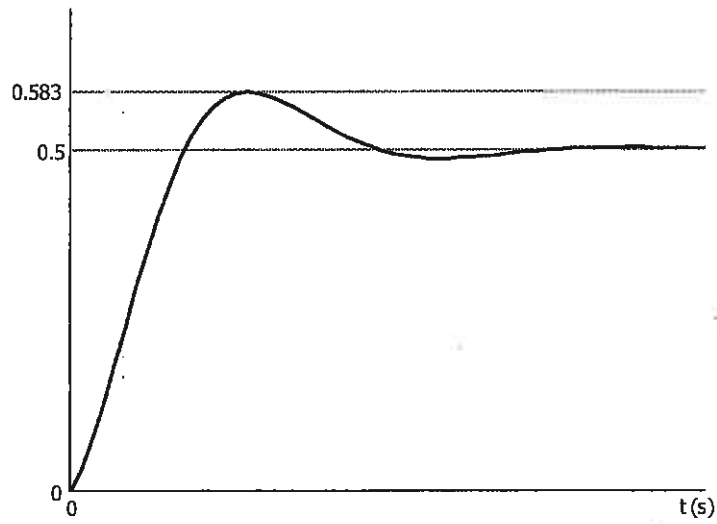


Figura 3

La figura 4 muestra la respuesta de  $G_{p2}(s)$  ante entrada escalón de amplitud 2 y la figura 5 la respuesta de  $H(s)$  ante entrada impulso unitario.

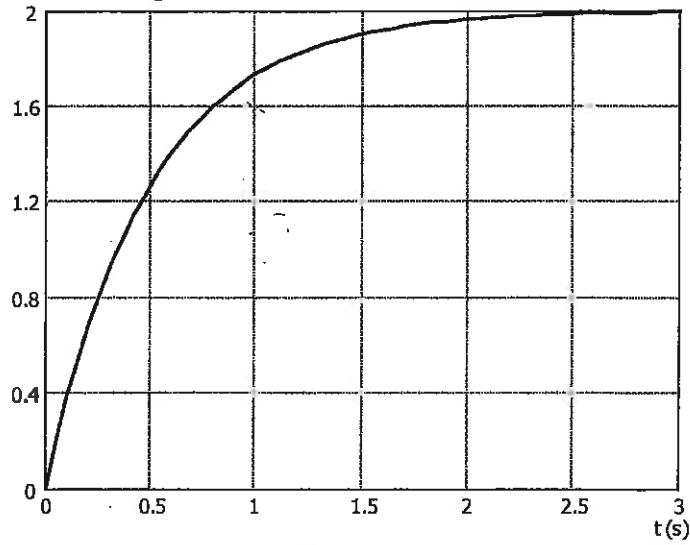


Figura 4

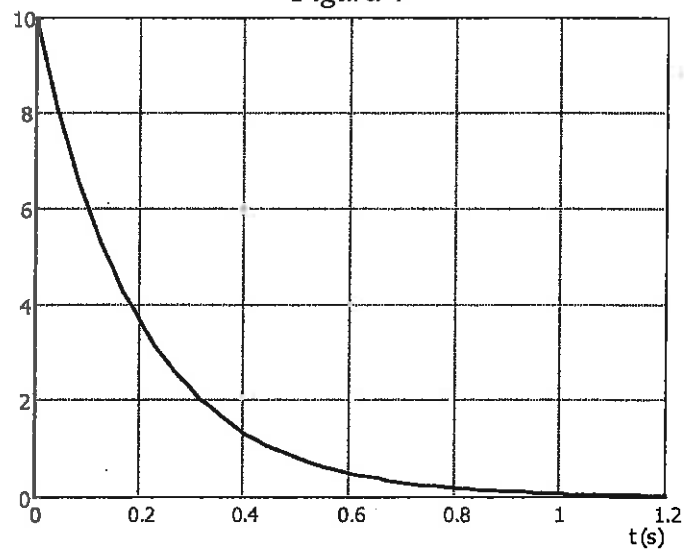


Figura 5

## SOLUCIÓN

1. Identificar las funciones de transferencia de cada uno de los componentes del sistema.

Comenzamos por obtener la función de transferencia correspondiente a la primera parte de la planta  $G_{p1}(s)$ .

Partimos de la curva de módulo de Bode suponiendo que se trata de un sistema de fase mínima. Se trata de un sistema tipo 0 dado que la pendiente a bajas frecuencias es nula. Por lo tanto, no tenemos ni integradores ni derivadores. Se observa un decremento de pendiente de  $-40\text{dB/dec}$  a partir de  $\omega_1 = 60 \text{ rad/seg}$ , esto supone un término de segundo orden  $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$  en el denominador. También, se observa un incremento de pendiente de  $+20\text{dB/dec}$  a partir de  $\omega_2 = 300 \text{ rad/seg}$ , esto supone un término de primer orden en el numerador  $T_1 s + 1$  (cero) con una constante de tiempo  $T_1 = 1/\omega_2 = 0,0033$ . La función de transferencia a partir del bode será entonces,

$$G_{p1}(s) = \frac{K \omega_n^2 (T_1 s + 1)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K 60^2 (1/300 s + 1)}{s^2 + 2\delta 60 s + 60^2}$$

Faltan por determinar la ganancia y el coeficiente de amortiguamiento. Para ello observamos la figura 3 donde el valor en el estacionario ante entrada escalón unitario es 0,5, por lo que la ganancia es  $K = 0,5$ . Además observando el sobreimpulso podemos encontrar el valor del coeficiente de amortiguamiento, esto es debido a que la influencia del cero es mínima respecto de la influencia de los polos dominantes.

$$\left. \begin{aligned} M_p &= \frac{y(t_p) - y_u}{y_u} = \frac{0,583 - 0,5}{0,5} = 0,166 \\ M_p &= e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \end{aligned} \right\} \delta = 0,5$$

Así pues,

$$G_{p1}(s) = \frac{6s + 1800}{s^2 + 60s + 3600}$$

Para obtener la función de transferencia de la segunda parte de la planta observamos la figura 4. La curva se corresponde con la respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada escalón. En nuestro caso es un escalón de amplitud 2 y dado que el valor en el estacionario es 2, la ganancia del módulo es 1. Además la constante de tiempo la obtenemos a partir del punto de la curva en el que tenemos 0,632 veces el valor del estacionario; en nuestro caso  $T_1 = 0,5$ . Así pues la función de transferencia buscada es,

$$G_{p2}(s) = \frac{1}{0,5s + 1} = \frac{2}{s + 2}$$

Para obtener la función de transferencia de la cadena realimentada (sensor) observamos la figura 5. La curva se corresponde con la respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada impulso. La constante de tiempo la obtenemos a partir del punto de la curva en el que tenemos 0,368 veces el valor inicial; en nuestro caso  $T_1 = 0,2$ . El valor en  $t = 0$  es  $K/T$ , donde para nuestro caso  $K = 10T = 2$ . Así pues la función de transferencia buscada es,

$$H(s) = \frac{2}{0,2s + 1} = \frac{10}{s + 5}$$

2. Cálculo de ganancia a partir de sensibilidad estática y cálculo de estabilidad.

- a. Se busca el valor de la ganancia del controlador proporcional ( $G_c(s) = K_c$ ) para que la sensibilidad estática de la función de transferencia del sistema respecto de la función de transferencia de la planta para  $r_2(t) = 0$  tenga un valor de 0,25.

Comenzamos por obtener la función de transferencia del sistema para  $r_2(t) = 0$ ,

$$M(s) \Big|_{R_2(s) \rightarrow 0} = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{K_c G_{p1}(s) G_{p2}(s)}{1 + K_c G_{p1}(s) G_{p2}(s) H(s)}$$

Se pide:

- 1) Identificar las funciones de transferencia de cada uno de los componentes del sistema. (1,5 puntos)
- 2) Si  $G_c(s)$  es la función de transferencia correspondiente a un controlador proporcional
  - a) Obtener el valor de la ganancia de dicho controlador para que la sensibilidad estática de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado respecto de la función de transferencia de la planta para  $r_2(t) = 0$  tenga un valor de 0,25. (0,5 puntos)
  - b) Comprobar la estabilidad del sistema para el valor obtenido. (0,5 puntos)
- 3) Utilizando el sistema reducido (simplificado) de la planta y para un controlador proporcional de ganancia 3:
  - a) Obtener la salida del sistema en estado estacionario para unas entradas  $r_1(t) = 20 V$  y  $r_2(t) = 6,73 \text{ sen } 5t V$ . (1 punto)
  - b) Determina el error en estado estacionario para la entrada continua ( $r_2(t) = 0$ ) en unidades de salida. (0,5 puntos)
- 4) Siguiendo con el sistema reducido y suponiendo  $r_2(t) = 0$ , se pretende diseñar un controlador en el lugar de las raíces:
  - a) Diseñar dicho controlador de forma que el error en estado estacionario para la entrada continua sea nulo y al mismo tiempo el sobreimpulso sea de un 16%. (1,5 puntos)
  - b) Determinar el margen de fase para el sistema obtenido (0,5 puntos)

Calculamos el valor de la sensibilidad.

$$S_{G_{p1}G_{p2}}^{M(s)} = \frac{G_{p1}(s)G_{p2}(s)}{M(s)} \cdot \frac{\delta[M(s)]}{\delta[G_{p1}(s)G_{p2}(s)]} = \frac{G_{p1}(s)G_{p2}(s)}{M(s)} \cdot \frac{\delta}{\delta[G_{p1}(s)G_{p2}(s)]} \left[ \frac{K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)}{1 + K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s)} \right]$$

$$S_{G_{p1}G_{p2}}^{M(s)} = \frac{G_{p1}(s)G_{p2}(s) [1 + K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s)]}{K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)} \cdot \frac{K_c [1 + K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s)] - K_c^2 G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s)}{[1 + K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s)]^2}$$

$$S_{G_{p1}G_{p2}}^{M(s)} = \frac{1}{1 + K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s)}$$

$$S_{G_{p1}G_{p2}}^{M(s)} = \frac{1}{1 + K_c \frac{6s+1800}{s^2+60s+3600} \cdot \frac{2}{s+2} \cdot \frac{10}{s+5}} = \frac{(s^2+60s+3600)(s+2)(s+5)}{(s^2+60s+3600)(s+2)(s+5) + 20K_c(6s+1800)}$$

La sensibilidad estática será,

$$\lim_{s \rightarrow 0} S_{G_{p1}G_{p2}}^{M(s)} = \frac{36000}{36000 + 36000K_c} = \frac{1}{1 + K_c}$$

Y según la condición impuesta,

$$\lim_{s \rightarrow 0} S_{G_{p1}G_{p2}}^{M(s)} = \frac{1}{1 + K_c} = 0,25 \Rightarrow \boxed{K_c = 3}$$

- b. Para comprobar la estabilidad es necesario partir de la ecuación característica del sistema y aplicar Routh-Hurwitz.

$$D(s) = 1 + K_c G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s) = 0 \rightarrow (s^2 + 60s + 3600)(s+2)(s+5) + 20 \cdot 3(6s+1800) = 0$$

$$s^4 + 67s^3 + 4030s^2 + 26160s + 144000 = 0$$

$s^4$	1	4030	144000
$s^3$	67	26160	0
$s^2$	3639,55	144000	
$s^1$	23509,12	0	
$s^0$	144000		

El sistema es estable dado que todos los términos de la primera columna son del mismo signo y mayores que cero.

3. Salida y error estacionario para un controlador proporcional de ganancia 3, utilizando el sistema reducido de la planta.

La función de transferencia de la planta viene dada por,

$$G_p(s) = G_{p1}(s)G_{p2}(s) = \frac{6s+1800}{s^2+60s+3600} \cdot \frac{2}{s+2} = \frac{6(s+300)}{((s+30)^2+2700)} \cdot \frac{2}{s+2}$$

Dado que la parte real de los polos complejos conjugados de  $G_{p1}(s)$  se encuentran a una gran distancia (30) del polo de  $G_{p2}(s)$  y el cero también  $G_{p1}(s)$  se encuentra a gran distancia de dicho polo, es posible la sustitución de  $G_{p1}(s)$  por la ganancia que aportan, de forma que la expresión simplificada para la función de transferencia de la planta sería,

$$G_p(s) = \frac{6 \cdot 300}{3600} \cdot \frac{2}{s+2} = 0,5 \cdot \frac{2}{s+2} \rightarrow G_p(s) = \frac{1}{s+2}$$

- a. Obtener la salida del sistema en estado estacionario para unas entradas  $r_1(t) = 20 V$  y  $r_2(t) = 6,73 \text{ sen } 5t V$ .

Dado que tenemos dos entradas y trabajamos con sistemas LTI podemos aplicar el principio de superposición,

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \rightarrow Y(s) = M(s) \Big|_{R_2(s)=0} R_1(s) + M(s) \Big|_{R_1(s)=0} R_2(s)$$

$$y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) \rightarrow y_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sM(s)]_{R_2(s)=0} R_1(s) + \lim_{s \rightarrow 0} [sM(s)]_{R_1(s)=0} R_2(s)$$

Para calcular el valor de  $y_1(t)$  (parte de la salida correspondiente a  $r_1(t)$ ) aplicamos el teorema del valor final.

$$M(s)_{R_2(s)=0} = \frac{Y(s)}{R_1(s)} \Big|_{R_2(s)=0} = \frac{K_c G_p(s)}{1 + K_c G_p(s)H(s)} = \frac{3(s+5)}{(s+2)(s+5)+30} = \frac{3(s+5)}{s^2+7s+40}$$

$$y_{1ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sM(s)]_{R_2(s)=0} R_1(s) \left. \vphantom{y_{1ss}(t)} \right\} y_{1ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{3(s+5)}{s^2+7s+40} \cdot \frac{20}{s} = 7,5 \text{ mA}$$

$$r_1(t) = 20 \rightarrow R_1(s) = \frac{20}{s}$$

Para calcular el valor de  $y_2(t)$  (parte de la salida correspondiente a  $r_2(t) = 6,73 \text{ sen} 5t \text{ V}$ ) aplicamos el valor de salida en estado estacionario ante una entrada sinusoidal.

$$y_{2ss}(t) = 6,73 \left[ M(j\omega)_{R_1(j\omega)=0} \Big|_{\omega=5} \text{sen}(5t + \text{Arg}[M(j\omega)_{R_1(j\omega)=0}]_{\omega=5}) \right]$$

Partimos de la función de transferencia sinusoidal para  $r_1(t) = 0$ , en donde podemos aplicar los mismos criterios de simplificación de la planta,

$$M(s)_{R_1(s)=0} = \frac{Y(s)}{R_2(s)} \Big|_{R_1(s)=0} = \frac{G_{p2}(s)}{1 + K_c G_p(s)H(s)} = \frac{2(s+5)}{(s+2)(s+5)+30} = \frac{2(s+5)}{s^2+7s+40}$$

$$M(j\omega)_{R_1(s)=0} = \frac{10 + j2\omega}{40 - \omega^2 + j7\omega}$$

Calculando módulo y argumento para  $\omega = 5$ ,

$$\left| M(j\omega)_{R_1(s)=0} \right|_{\omega=5} = \sqrt{\frac{100 + 4\omega^2}{(40 - \omega^2)^2 + 49\omega^2}} \Big|_{\omega=5} = 0,3714$$

$$\text{Arg}[M(j\omega)_{R_1(s)=0}]_{\omega=5} = \arctg\left[\frac{\omega}{5}\right] - \arctg\left[\frac{7\omega}{40 - \omega^2}\right] \Big|_{\omega=5} = -21,8^\circ = -0,38 \text{ rad}$$

Así pues,

$$y_{2ss}(t) = 6,73 \cdot 0,3714 \text{sen}(0,5t - 0,38) \rightarrow y_{2ss}(t) = 2,5 \text{sen}(0,5t - 0,38) \text{ rad.}$$

Por lo que el valor final de la salida en el estacionario es de,

$$\boxed{y_{ss}(t) = 7,5 + 2,5 \text{sen}(5t - 0,38) \text{ mA}}$$

#### b. Cálculo del error para la entrada continua.

Ahora calculamos el error para la entrada continua, es decir aplicamos  $r_2(t) = 0$ , por lo que, observando la función el sistema resultante, se trata de un sistema tipo 0. De esta forma vemos que el error es finito y podemos calcularlo a partir del coeficiente estático de error  $K_p$  (entrada a escala 20V)

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K_c G_{p1}(s) G_{p2}(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 3 \cdot 0,5 \cdot \frac{2}{s+2} \cdot \frac{10}{s+5} = 3$$

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1 + K_p} \cdot r_1(t) \Big|_{r_1(t)=20} = \frac{1}{1+3} \cdot 20 = 5V$$

Para expresar el error en unidades de salida dividimos el valor obtenido entre la ganancia del sensor ( $H(0) = 2$ )

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{H(0)} \cdot e_{ss}(t) = \frac{1}{2} \cdot 5 \rightarrow \boxed{e_{ss}(t) = 2,5 \text{ mA}}$$

#### 4. Diseño de controlador en el LR.



- Nº a. Diseñar un controlador en el Lugar de las Raíces de forma que el error en estado estacionario para la entrada continua sea nulo y al mismo tiempo el sobreimpulso sea de un 16%.

Dado que se desea un error nulo y el sistema es de tipo 0 es necesario un controlador PI. Hacemos que el cero que introduce el PI cancele el polo dominante del sistema en lazo abierto, es decir  $1/T_i = 2$ , con lo cual el controlador será,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1/T_i}{s} = K_c \frac{s + 2}{s}$$

Así pues podemos calcular las funciones de transferencia en lazo abierto y en lazo cerrado,

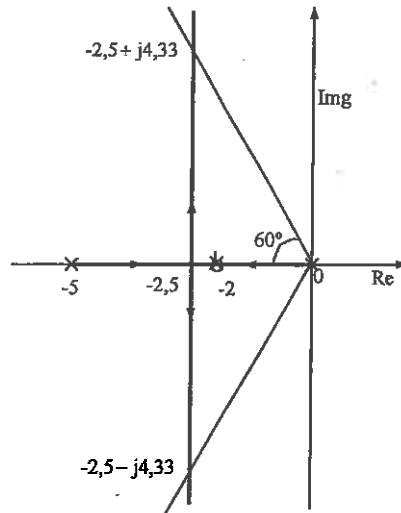
$$G_{La}(s) = G_c(s)G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s) = K_c \frac{s+2}{s} \cdot 0,5 \cdot \frac{2}{s+2} \cdot \frac{10}{s+5} = \frac{10K_c}{s(s+5)}$$

$$G_{Lc}(s) = \frac{G_c(s)G_{p1}(s)G_{p2}(s)}{1 + G_c(s)G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s)} = \frac{K_c(s+5)}{s(s+5) + 10K_c} = \frac{K_c(s+5)}{s^2 + 5s + 10K_c}$$

Para que el sistema cumpla las condiciones del transitorio debe tener un sobreimpulso del 16% (independientemente del cero de la función de transferencia en lazo cerrado). De esta condición podemos encontrar el valor del coeficiente de amortiguamiento y el ángulo máximo que pueden formar los posibles polos complejos conjugados.

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 16\% \rightarrow \frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = -\ln 0,16 \rightarrow \delta \geq 0,5 \rightarrow \cos\theta \geq 0,5 \rightarrow \theta \leq 60^\circ$$

La intersección del lugar de las raíces con las condiciones impuestas se observa en la siguiente figura,



Dado que se desea una respuesta con un sobreimpulso del 16% los polos del sistema en lazo cerrado son los puntos de corte entre el lugar de las raíces con las rectas que delimitan el sobreimpulso máximo; es decir, los polos se encuentran en  $s_{1,2} = -2,5 \pm j4,33$ . Entonces se puede calcular el valor de la ganancia por la condición del módulo.

$$K = |s||s+5|_{s=-2,5+j4,33} = |-2,5+j4,33||-2,5+j4,33+5| \rightarrow K = 25$$

Por lo tanto el valor de la ganancia del controlador es,

$$K = 10K_c \rightarrow K_c = 2,5$$

Así pues el controlador que cumple las condiciones de este apartado será,

$$G_c(s) = \frac{2,5(s+2)}{s}$$

La función de transferencia en lazo abierto y lazo cerrado serán,

$$G_{La}(s) = G_c(s)G_{p1}(s)G_{p2}(s)H(s) = \frac{10K_c}{s(s+5)} \xrightarrow{K_c=2,5} G_{La}(s) = \frac{25}{s(s+5)}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{K_c(s+5)}{s^2 + 5s + 10K_c} \xrightarrow{K_c=2,5} G_{LC}(s) = \frac{2,5(s+5)}{s^2 + 5s + 25}$$

b. Cálculo del margen de fase.

Para calcular el margen de fase es necesario encontrar la frecuencia de ganancia crítica  $\omega_c$ , en donde la ganancia de sistema es la unidad.

$$|G_{LA}(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{25}{\omega_c \sqrt{25 + \omega_c^2}} = 1 \rightarrow \omega_c = 3,93$$

Entonces el margen de fase es,

$$MF = 180 + \text{Arg}[G_{LA}(j\omega_c)] = 180 - \text{Arg}[j\omega_c] - \text{Arg}[5 + j\omega_c] = 180 - 90 - \text{arctg} \frac{\omega_c}{5} \rightarrow \boxed{MF = 51,83^\circ}$$

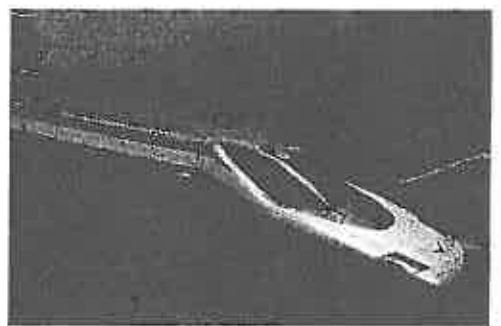
$$G_{LA} = \frac{25}{s(s+5)} = \frac{25}{j\omega_a(j\omega_a+5)} = \frac{25}{-\omega_a^2 + j5\omega_a} = \frac{25}{\omega_a(5j - \omega_a)}$$

$$|G_{LA}(j\omega_a)| = \frac{25}{\omega_a \sqrt{25^2 + \omega_a^2}} = 1 \Rightarrow \omega_a = 3,93$$

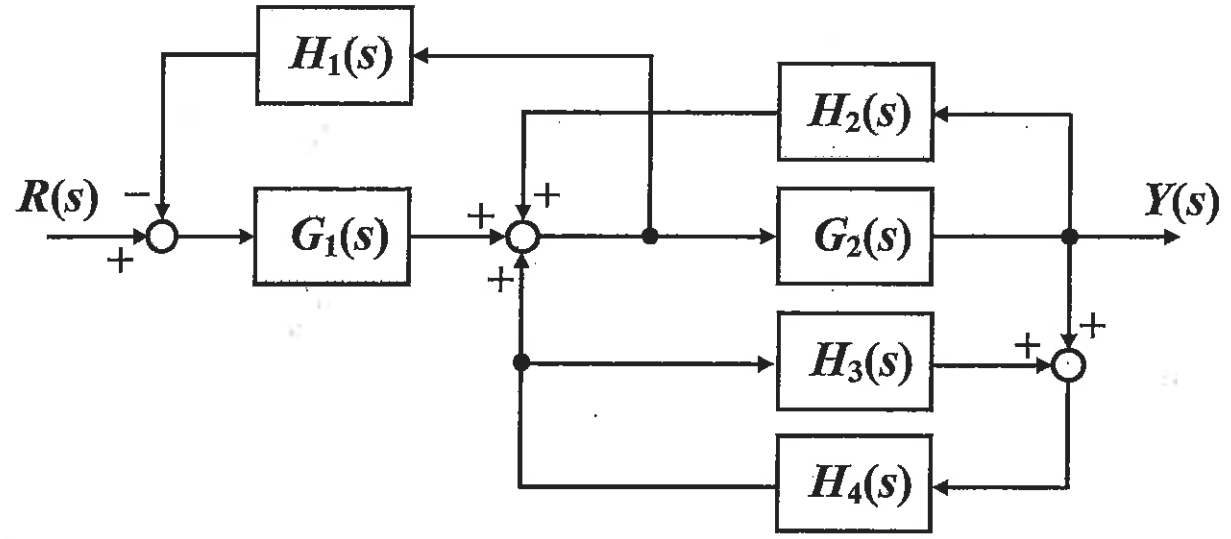
<p>Ingeniarien Goi Eskola Escuela Superior de Ingenieros Bilbao</p> <p>eman la zabal zazu</p> <p>Universidad del país vasco</p> <p>Euskal herriko unibertsitatea</p>	<b>INGENIERÍA DE SISTEMAS I</b>		<b>Curso: 2006/2007</b>
	Nombre _____		23/Enero/2007
	Izena _____		<b>Tiempo:</b>
	1º Apellido _____		90 minutos
1 Deitura _____		<b>Grupo</b>	
2º Apellido _____		Taldea	
2 Deitura _____			

**Problema 2 (4 puntos)**

Los trenes de alta velocidad de la serie AVE S-102 disponen de un complejo sistema de adaptación de la velocidad, que les permite realizar cambios en la misma sin que el confort de los pasajeros se vea afectado.



El sistema está formado por 6 componentes diferentes, interconectados entre sí, como se muestra en el diagrama de bloques de la figura.



Se pide:

1. (0.75 puntos) Obtener la función de transferencia  $T(s)$  que relaciona la salida  $Y(s)$  con la referencia  $R(s)$ :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \qquad R(s) \longrightarrow \boxed{T(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Reducir la función de transferencia  $T(s)$  a la expresión más sencilla posible.

2. (0.75 puntos) El mismo sistema responde a una ecuación diferencial, como ésta:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 11.5y(t) = r(t)$$

Determinar la función de transferencia del sistema suponiendo que:

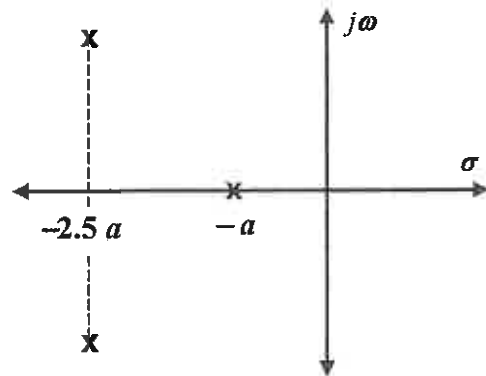
$$\dot{y}(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad r(0) = 0$$

3. (0.5 puntos) Considerar que la función de transferencia puede expresarse en la forma:

$$T(s) = \frac{K}{(s+a)(s^2+bs+c)}$$

Donde la relación entre  $a$  y  $b$  puede deducirse de la figura.



Hallar la ubicación de los polos del sistema.

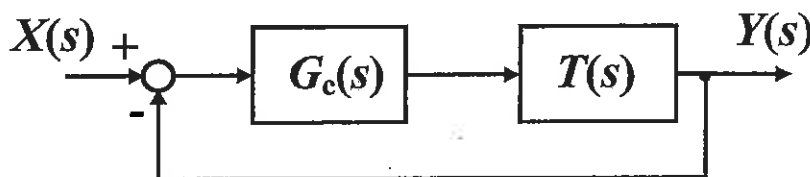
4. (0.75 puntos) A partir de la función de transferencia obtenida, hallar la expresión de la salida del sistema  $y(t)$  para una entrada:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

5. (0.5 puntos) Determinar los siguientes valores más significativos de la respuesta del sistema  $y(t)$ :

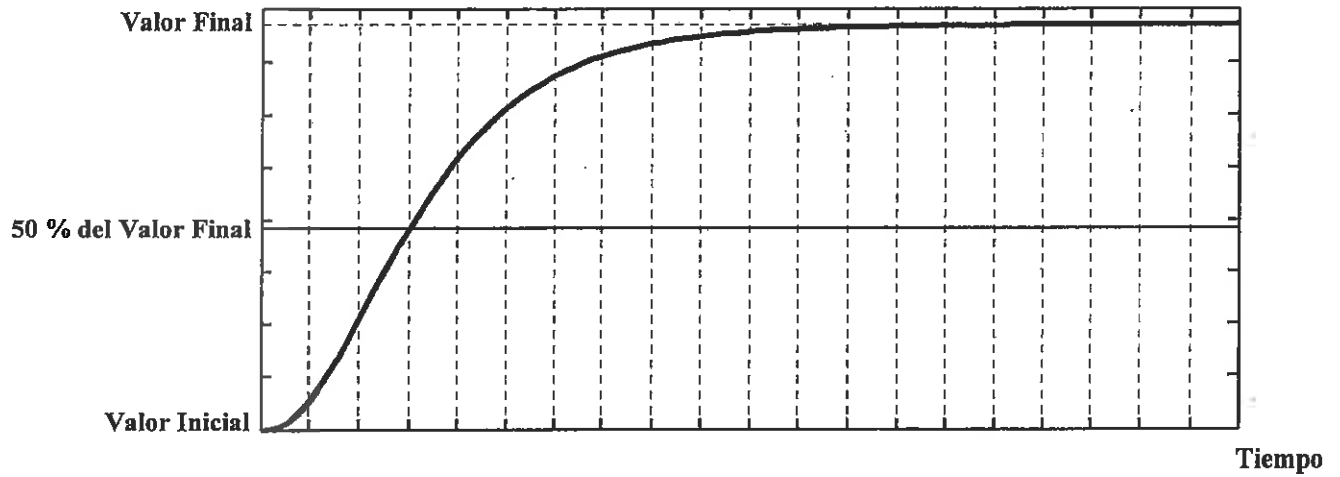
- Salida  $y(t)$  en  $t = 0$  (cero);
- Salida  $y(t)$  en  $t = \infty$  (infinito);
- Tiempo al 50 % del Valor Final de la respuesta del sistema  $y(t)$ .

6. (0.75 puntos) Se desea modificar las prestaciones del sistema de adaptación de velocidad del tren, y para ello se introduce el sistema  $T(s)$  en un lazo de realimentación unitaria, junto con un controlador PID, tal y como muestra la figura:

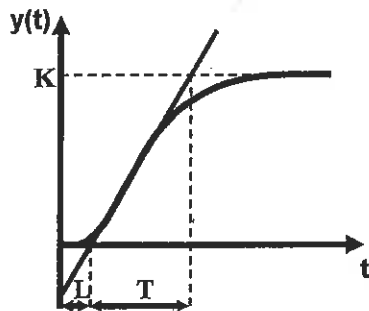


A partir de la respuesta  $y(t)$  representada en la siguiente figura, en donde la escala de tiempos no está especificada, utilizar el primer método de sintonización de Ziegler-Nichols (método del lazo abierto) para sintonizar los parámetros del controlador PID, y hallar  $G_c(s)$ .

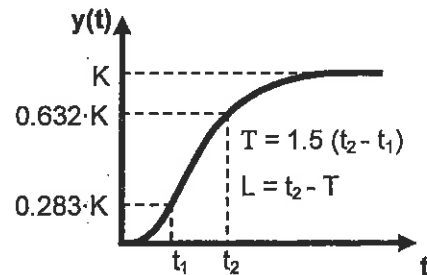
**Respuesta en lazo abierto del sistema  $y(t)$ :**



Utilizar para su resolución los valores calculados en el apartado 5, junto a la figura y tabla dadas a continuación.



$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \cdot e^{-Ls}$$

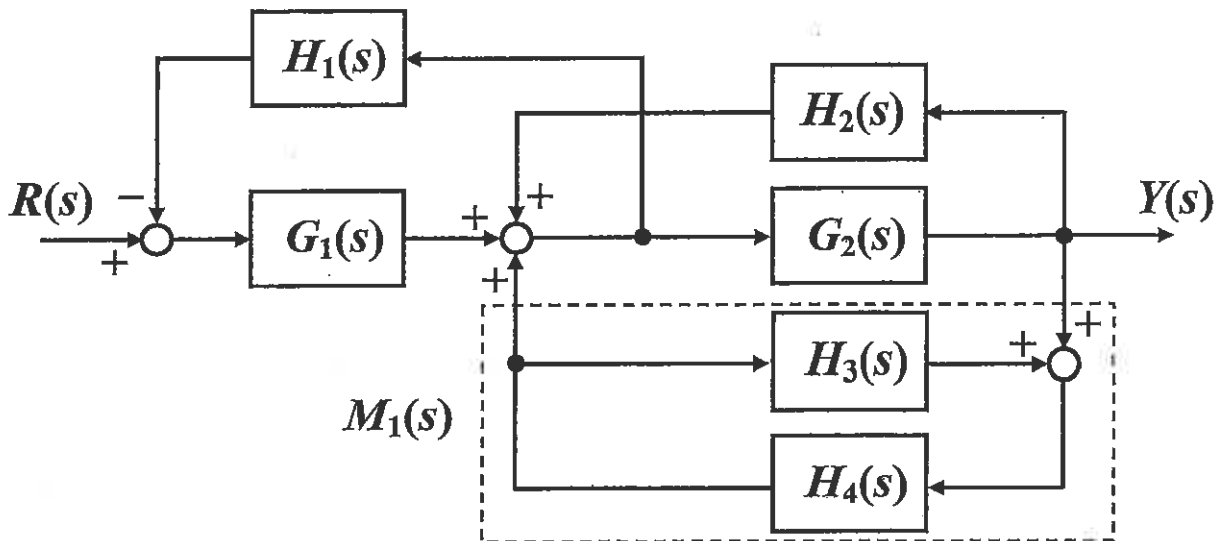
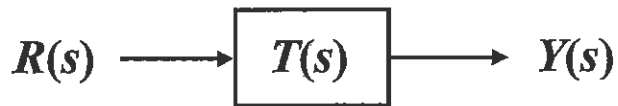


Controladores	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$T / (K \cdot L)$	-	-
PI	$0.9 \cdot T / (K \cdot L)$	$L/0.3$	-
PID	$1.2 \cdot T / (K \cdot L)$	$2L$	$0.5L$

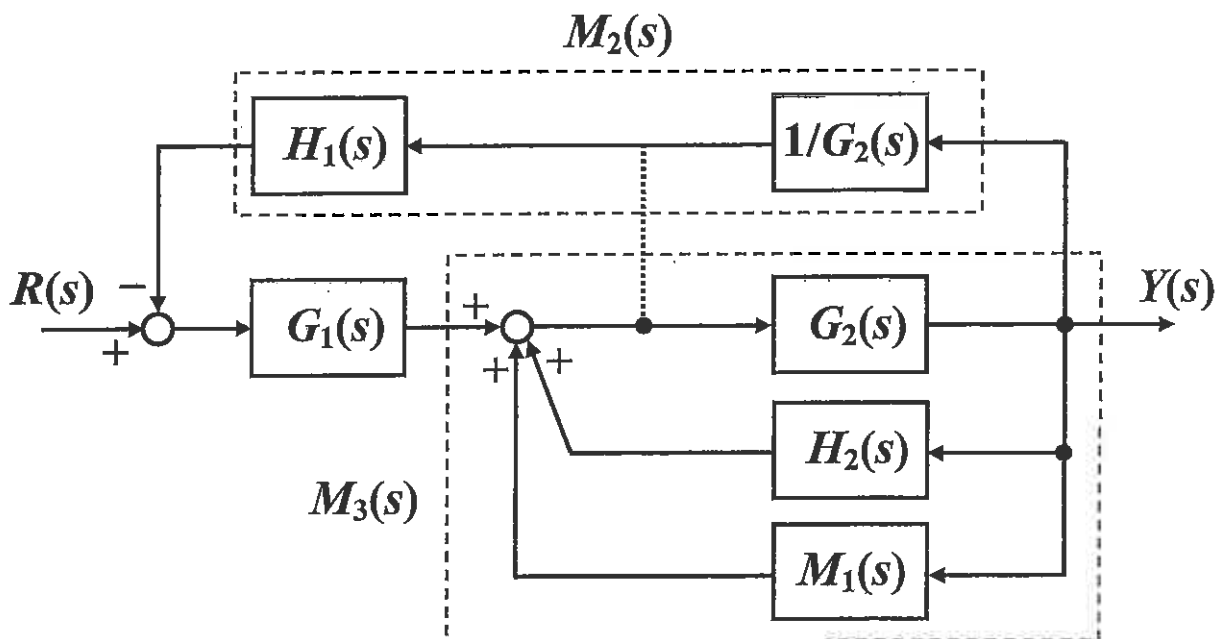


1. (0.75 puntos) Obtener la función de transferencia  $T(s)$  que relaciona la salida  $Y(s)$  con la referencia  $R(s)$ :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$



$$M_1(s) = \frac{H_4(s)}{1 - H_3(s) \cdot H_4(s)}$$



$$M_2(s) = \frac{H_1(s)}{G_2(s)} \quad M_3(s) = \frac{G_2(s)}{1 - G_2(s) \cdot [H_2(s) + M_1(s)]}$$

$$T(s) = \frac{G_1(s) \cdot M_3(s)}{1 + G_1(s) \cdot M_2(s) \cdot M_3(s)} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot [1 - H_3(s) \cdot H_4(s)]}{[1 + G_1(s) \cdot H_1(s) - G_2(s) \cdot H_2(s)] [1 - H_3(s) \cdot H_4(s)] - G_2(s) \cdot H_4(s)}$$





2. (0.75 puntos) El mismo sistema responde a una ecuación diferencial, como ésta:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 11.5y(t) = r(t)$$

Determinar la función de transferencia del sistema suponiendo que:

$$\dot{y}(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad r(0) = 0$$

Los valores proporcionados indican que las condiciones iniciales son nulas.

Trabajando con la Transformada de Laplace la ecuación diferencial se convierte en la siguiente expresión en el dominio de la variable compleja  $s = \sigma + j\omega$ :

$$s^3 \cdot Y(s) + 6 \cdot s^2 \cdot Y(s) + 11.5 \cdot s \cdot Y(s) + 6.5 \cdot Y(s) = R(s)$$

La función de transferencia será la relación:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11.5s + 6.5}$$

3. (0.5 puntos) Considerar que la función de transferencia puede expresarse en la forma:

$$T(s) = \frac{K}{(s+a)(s^2+bs+c)}$$

Donde la relación entre  $a$  y  $b$  puede deducirse de la figura.

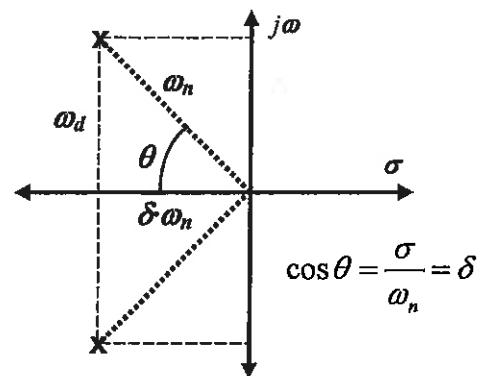
Hallar la ubicación de los polos del sistema.

Operando con ambas expresiones:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11.5s + 6.5} = \frac{K}{(s+a)(s^2+bs+c)} = \frac{K}{s^3 + (a+b)s^2 + (ab+c)s + ac}$$

Considerando la representación de los polos complejos conjugados y teniendo en cuenta la expresión genérica (normalizada) de un sistema de segundo orden y las relaciones con la ubicación de sus polos:

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}$$



Se deduce la siguiente relación:  $\delta \omega_n = 2.5a = b/2$

Por lo tanto, tomando todas las relaciones extraídas:

$$\left. \begin{array}{l} 5a = b \\ a + b = 6 \\ ab + c = 11.5 \\ ac = 6.5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6.5 \end{array}$$

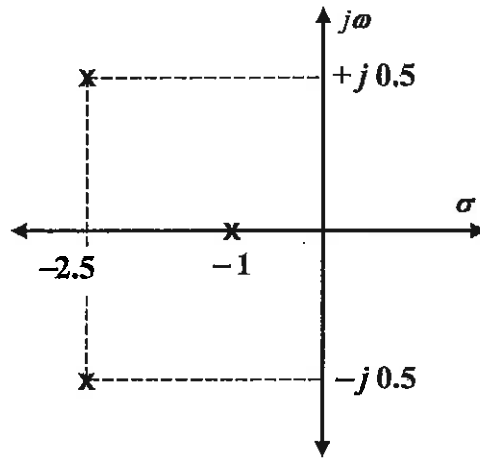
Finalmente se puede hacer la identificación del numerador:  $K = 1$

Una vez obtenidos los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se determinan las ubicaciones de los polos del sistema:

$$(s^2 + bs + c) = (s^2 + 5s + 6.5) \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 26}}{2} = \begin{cases} s_1 = -2.5 + j0.5 \\ s_2 = -2.5 - j0.5 \end{cases}$$

$$(s + a) = (s + 1) \Rightarrow s_3 = -1$$

Gráficamente se representan:



4. (0.75 puntos) A partir de la función de transferencia obtenida, hallar la expresión de la salida del sistema  $y(t)$  para una entrada:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

La entrada es un escalón unitario, por lo que su correspondiente expresión en el dominio de la variable compleja es:

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Se trabaja con la expresión del sistema para despejar  $Y(s)$  y hallar posteriormente su antitransformada para llegar a  $y(t)$ .

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Rightarrow Y(s) = R(s) \cdot T(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)(s^2+5s+6.5)}$$

Descomposición en sumandos:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)(s^2+5s+6.5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+5s+6.5}$$

$$A = \left. \frac{1}{(s+1)(s^2+5s+6.5)} \right|_{s=0} = \frac{1}{6.5} = 0.154$$

$$B = \left. \frac{1}{s(s^2+5s+6.5)} \right|_{s=-1} = -\frac{1}{2.5} = -0.4$$

$$1 = A(s+1)(s^2 + 5s + 6.5) + Bs(s^2 + 5s + 6.5) + (Cs + D)(s^2 + s)$$

↓

$$1 = (A + B + C)s^3 + (6A + 5B + C + D)s^2 + (11.5A + 6.5B + D)s + 6.5A$$

$$C = \frac{4}{16.25} = 0.246$$

$$D = 2 - \frac{19}{16.25} = 0.831$$

De este modo:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 5s + 6.5} = \frac{0.154}{s} - \frac{0.4}{s+1} + \frac{0.246s + 0.831}{s^2 + 5s + 6.5} = \frac{0.154}{s} - \frac{0.4}{s+1} + 0.246 \frac{s + 3.378}{(s + 2.5)^2 + 0.5^2}$$

$$Y(s) = \frac{0.154}{s} - \frac{0.4}{s+1} + 0.246 \left[ \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)^2 + 0.5^2} + \frac{0.878}{0.5} \frac{0.5}{(s + 2.5)^2 + 0.5^2} \right]$$

Haciendo la antitransformada de Laplace:

$$y(t) = 0.154 - 0.4e^{-t} + 0.246e^{-2.5t} \cos 0.5t + 0.432e^{-2.5t} \text{sen} 0.5t$$

5. (0.5 puntos) Determinar los siguientes valores más significativos de la respuesta del sistema  $y(t)$ :

- Salida  $y(t)$  en  $t = 0$  (cero);
- Salida  $y(t)$  en  $t = \infty$  (infinito);
- Tiempo al 50 % del Valor Final de la respuesta del sistema  $y(t)$ .

Es posible determinar estos valores a partir de la expresión de  $y(t)$  o mediante los teoremas de valor inicial y valor final.

- Expresión  $y(t)$ :

- Salida  $y(t)$  en  $t = 0$

$$\text{Valor inicial: } y(0) = 0.154 - 0.4e^{-0} + 0.246e^{-0} \cos 0 + 0.432e^{-0} \text{sen} 0$$

$$y(0) = 0$$

- Salida  $y(t)$  en  $t = \infty$

$$\text{Valor final: } y(\infty) = 0.154 - 0.4e^{-\infty} + 0.246e^{-\infty} \cos 0.5\infty + 0.432e^{-\infty} \text{sen} 0.5\infty$$

$$y(\infty) = 0.154$$

- Tiempo al 50 % del Valor Final de la respuesta del sistema  $y(t)$

Valor al 50% V.F.:

$$y(t_{50}) = 0.077 = 0.154 - 0.4e^{-t_{50}} + 0.246e^{-2.5t_{50}} \cos 0.5t_{50} + 0.432e^{-2.5t_{50}} \text{sen} 0.5t_{50}$$

La resolución de esta expresión hay que realizarla iterando.

Para  $t = 10$ :

$$y(10) = 0.154 - 0.4 \cdot e^{-10} + 0.246 \cdot e^{-25} \cos 5 + 0.432 \cdot e^{-25} \operatorname{sen} 5 = 0.154 - 1.816 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-12} - 5.7 \cdot 10^{-12} = 0.154$$

Para  $t = 1$ :

$$y(1) = 0.154 - 0.4 \cdot e^{-1} + 0.246 \cdot e^{-2.5} \cos 0.5 + 0.432 \cdot e^{-2.5} \operatorname{sen} 0.5 = 0.154 - 0.147 + 0.020 + 0.0004 = 0.027$$

Para  $t = 2$ :

$$y(2) = 0.154 - 0.4 \cdot e^{-2} + 0.246 \cdot e^{-5} \cos 1 + 0.432 \cdot e^{-5} \operatorname{sen} 1 = 0.154 - 0.054 + 8.9 \cdot 10^{-4} + 2.5 \cdot 10^{-3} = 0.103$$

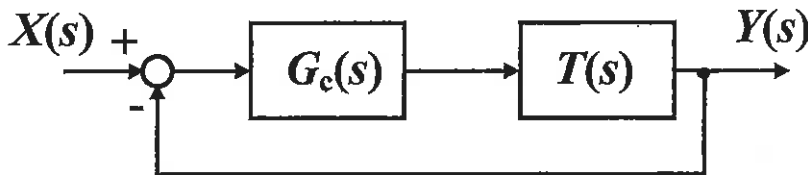
Para  $t = 1.5$ :

$$y(1.5) = 0.154 - 0.4 \cdot e^{-1.5} + 0.246 \cdot e^{-3.75} \cos 0.75 + 0.432 \cdot e^{-3.75} \operatorname{sen} 0.75 = 0.154 - 0.089 + 0.004 + 0.007 = 0.076$$

Este resultado es suficientemente próximo. Por lo tanto:

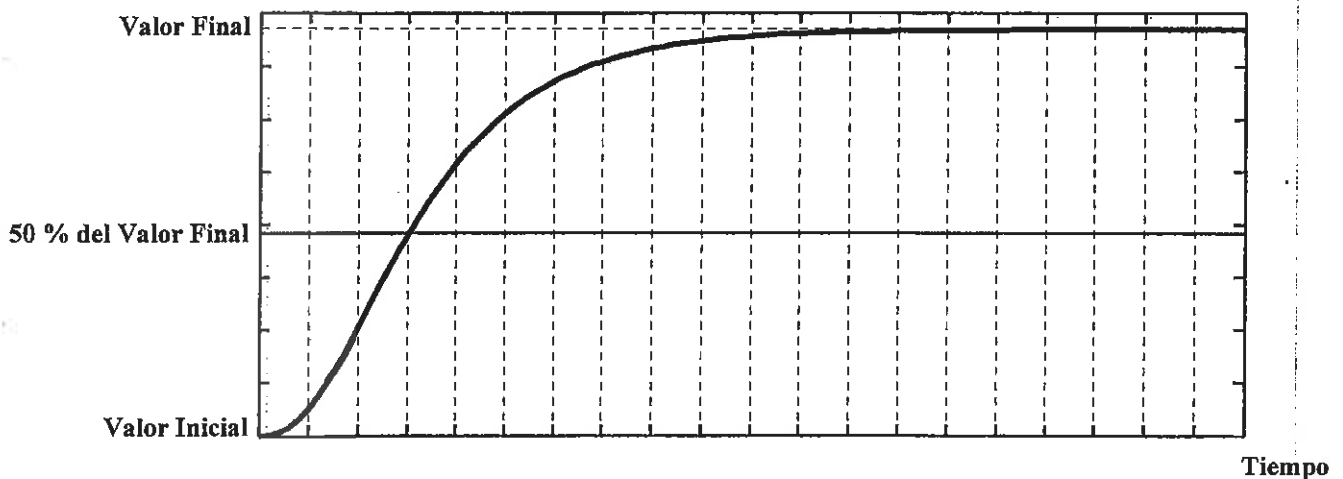
$$y(t_{50}) = 0.077 \Rightarrow t_{50} = 1.5$$

6. (0.75 puntos) Se desea modificar las prestaciones del sistema de adaptación de velocidad del tren, y para ello se introduce el sistema  $T(s)$  en un lazo de realimentación unitaria, junto con un controlador PID, tal y como muestra la figura:

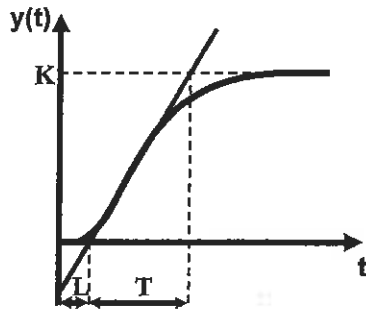


A partir de la respuesta  $y(t)$  representada en la siguiente figura, en donde la escala de tiempos no está especificada, utilizar el primer método de sintonización de Ziegler-Nichols (método del lazo abierto) para **sintonizar los parámetros del controlador PID, y hallar  $G_c(s)$** .

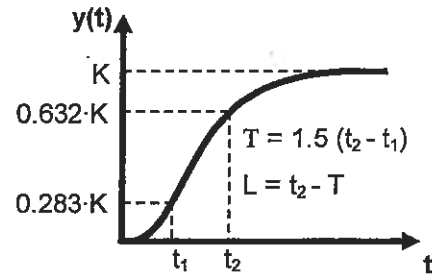
**Respuesta en lazo abierto del sistema  $y(t)$ :**



Utilizar para su resolución los valores calculados en el apartado 5, junto a la figura y tabla dadas a continuación.



$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \cdot e^{-Ls}$$

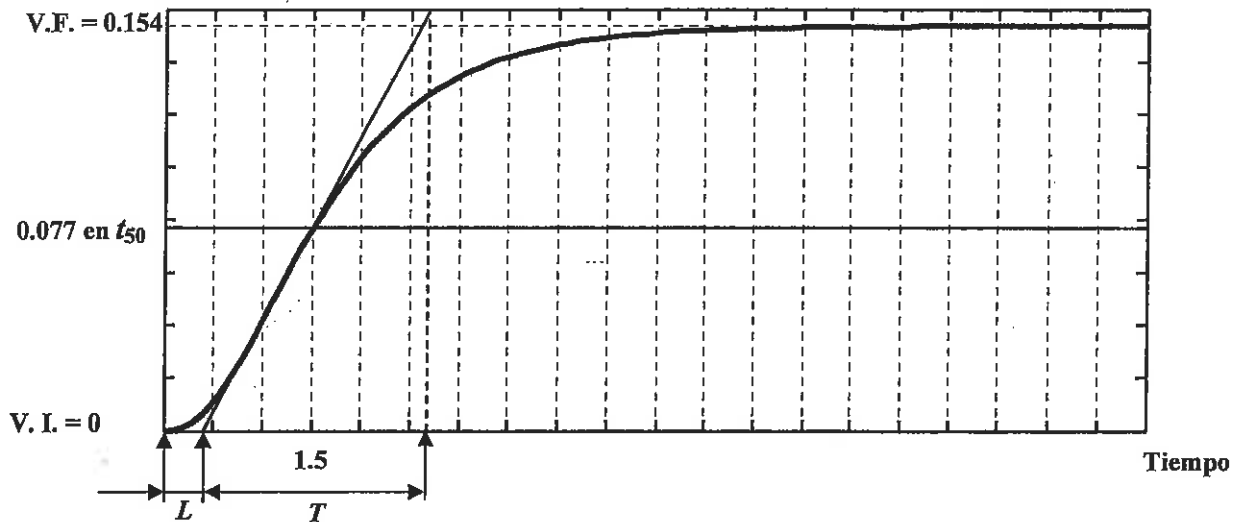


Controladores	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$T / (K \cdot L)$	-	-
PI	$0.9 \cdot T / (K \cdot L)$	$L/0.3$	-
PID	$1.2 \cdot T / (K \cdot L)$	$2L$	$0.5L$

### Solución 1:

Para aprovechar la gráfica y el método de la máxima pendiente (figura izquierda) para el cálculo de los parámetros  $K$ ,  $T$  y  $L$ , es necesario escalar el eje de tiempos. Para ello disponemos del tiempo calculado cuando la salida es del 50% del valor final. Este tiempo era de 1.5 (segundos), por lo que cada una de las divisiones de la gráfica de la respuesta mide 0.5 (segundos).

Se traza la recta de máxima pendiente como en la figura y se miden los parámetros.



$$K = 0.154$$

Los valores aproximados de los parámetros son:  $L = 0.4$

$$T = 2.3$$

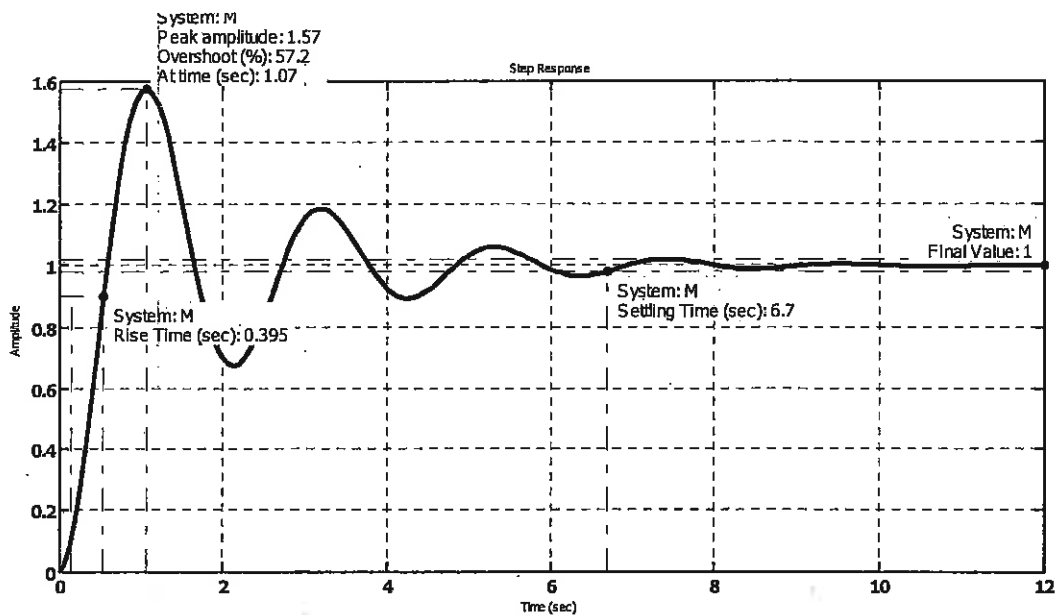
$$K_c = \frac{1.2 \cdot 2.3}{0.154 \cdot 0.4} = 44.8$$

A partir de estos valores y con la tabla de Ziegler- Nichols:  $T_i = 2 \cdot 0.4 = 0.8$

$$T_d = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

Por lo tanto:  $G_c(s) = K_c \frac{T_d \cdot s^2 + s + 1/T_i}{s} = 44.8 \frac{0.2s^2 + s + 1.25}{s}$

Respuesta simulada:



Solución 2:

Atendiendo al método de cálculo de los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  (figura derecha), se pueden hallar igualmente los parámetros  $K$ ,  $T$  y  $L$ . En esta ocasión hay que iterar sobre la expresión  $y(t)$ .

Los valores de la salida a esos tiempos son: 
$$\begin{cases} 0.632 \cdot K = 0.632 \cdot 0.154 = 0.0973 \\ 0.283 \cdot K = 0.283 \cdot 0.154 = 0.0436 \end{cases}$$

Para  $t = 1.1$ :

$$y(1.1) = 0.154 - 0.4 \cdot e^{-1.1} + 0.246 \cdot e^{-2.75} \cos 0.55 + 0.432 \cdot e^{-2.75} \text{sen} 0.55 = 0.154 - 0.133 + 0.016 + 0.0002 = 0.037$$

Para  $t = 1.2$ :

$$y(1.2) = 0.154 - 0.4 \cdot e^{-1.2} + 0.246 \cdot e^{-3} \cos 0.6 + 0.432 \cdot e^{-3} \text{sen} 0.6 = 0.154 - 0.120 + 0.012 + 0.0002 = 0.046$$

Para  $t = 1.9$ :

$$y(1.9) = 0.154 - 0.4 \cdot e^{-1.9} + 0.246 \cdot e^{-4.75} \cos 0.95 + 0.432 \cdot e^{-4.75} \text{sen} 0.95 = 0.154 - 0.06 + 0.002 + 6 \cdot 10^{-5} = 0.096$$

Por lo tanto: 
$$\begin{cases} t_1 = 1.2 \\ t_2 = 1.9 \end{cases}$$

$$K = 0.154$$

Calculando, los valores aproximados de los parámetros son:  $L = 0.85$

$$T = 1.05$$

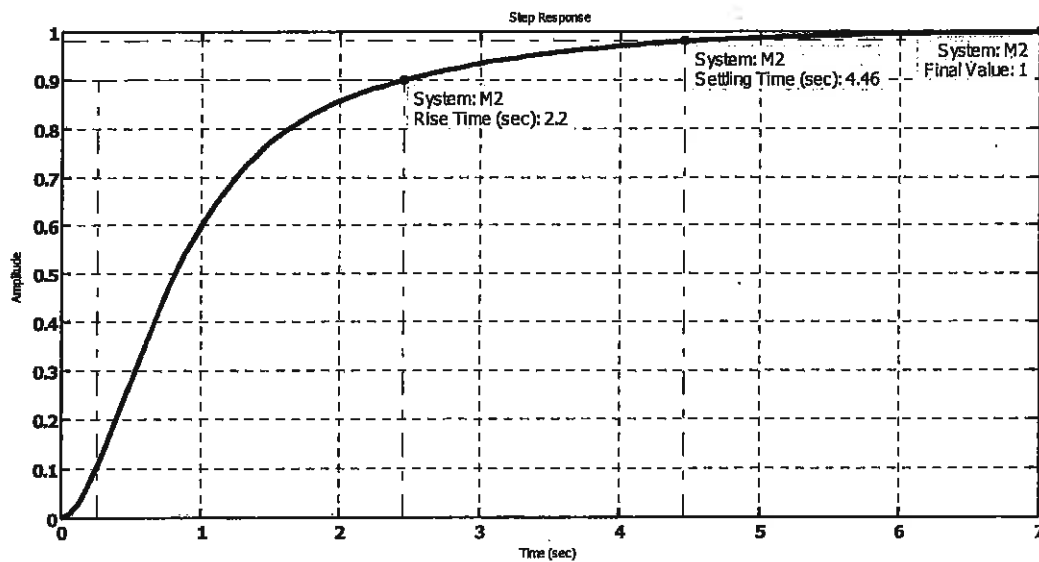
$$K_c = \frac{1.2 \cdot 1.05}{0.154 \cdot 0.85} = 9.63$$

A partir de estos valores y con la tabla de Ziegler- Nichols:  $T_i = 2 \cdot 0.85 = 1.7$

$$T_d = 0.5 \cdot 0.85 = 0.425$$

Por lo tanto:  $G_c(s) = K_c \cdot \frac{T_d \cdot s^2 + s + 1/T_i}{s} = 9.63 \frac{0.425s^2 + s + 0.59}{s}$

Respuesta simulada:



Handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to blurring and low contrast.



## INGENIERÍA DE SISTEMAS I

Curso: 2007/2008  
30 de Enero de 2008

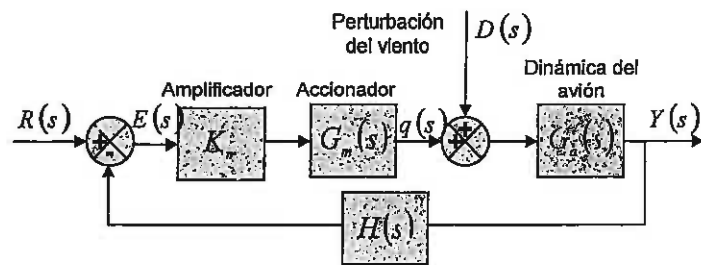
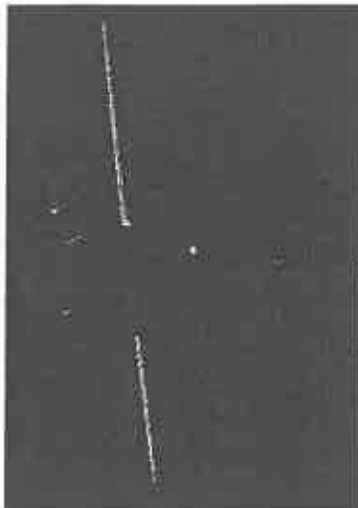
Nombre \_\_\_\_\_  
 Izena \_\_\_\_\_  
 1º Apellido \_\_\_\_\_  
 1 Deitura \_\_\_\_\_  
 2º Apellido \_\_\_\_\_  
 2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**2 Horas**

Grupo:

### PROBLEMA 1. (6 PUNTOS)

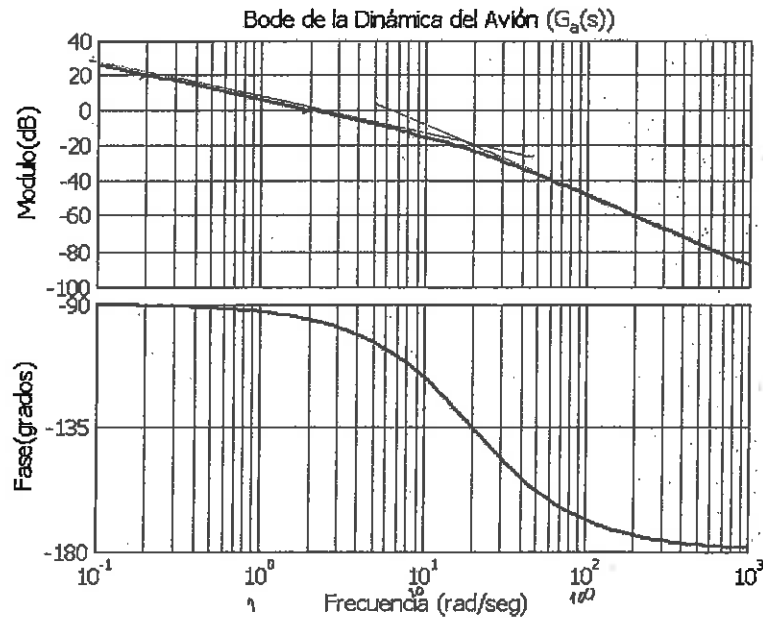
El diagrama de bloques de la *figura 1* muestra la dinámica de cabeceo (pitch) de un avión acrobático.



*Figura 1*

La *figura 2* presenta el diagrama de Bode correspondiente a la función de transferencia  $G_a(s)$ .

El accionador ante una entrada escalón unitario ofrece una respuesta  $q(t) = 10(1 - e^{-10t})$ . El sensor se puede modelar por un amplificador de ganancia 1.



*Figura 2*

Se pide:

- 1) Determinar la función de transferencia del sistema en lazo abierto. (1 punto)
- 2) Suponiendo un valor de la ganancia del amplificador  $k_m$  variable:
  - a) Obtener el valor de  $k_m$  para que el sistema se comporte como críticamente amortiguado. (0,75 puntos)
  - b) Obtener el valor de  $k_m$  para que el sistema se comporte como críticamente estable y la localización de los polos en dicha circunstancia. (1 punto)
  - c) Dibujar una aproximación al lugar de las raíces en función de  $k_m$  indicando ramas, asíntotas y puntos significativos. (1 punto)
  - d) Determinar el valor del error en estado estacionario, ante una entrada escalón unitario y una perturbación impulso unitario, antes de que el avión entre en inestabilidad. Razonar el resultado obtenido. (0,75 puntos)
- 3) Suponiendo un valor de  $k_m=1$  se desea incorporar un controlador en la cadena directa lo más sencillo posible que elimine el error en posición, pero no en velocidad.
  - a) Justificar el tipo de controlador a incorporar. Para la sintonización de controlador se emplea un método de Ziegler-Nichols; justificar el método a emplear. Calcular los parámetros de dicho controlador. (0,75 puntos)
  - b) Determinar el margen de ganancia del sistema tras la introducción de dicho controlador. (0,75 puntos)

*Ziegler-Nichols – Lazo Abierto*

<i>Tipo de Controlador</i>	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$T/LK$	$\infty$	0
PI	$0,9T/LK$	$L/0,3$	0
PID	$1,2T/LK$	$2L$	$0,5L$

*Ziegler-Nichols – Lazo Cerrado*

<i>Tipo de Controlador</i>	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,45K_{cr}$	$P_{cr}/1,2$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$P_{cr}/2$	$P_{cr}/8$

## SOLUCIÓN

1. Determinar la función de transferencia del sistema en lazo abierto.

La función de transferencia correspondiente a la dinámica del avión viene dada a partir del diagrama de Bode. Se trata de un sistema de fase mínima. Se observa que la pendiente de la asíntota de bajas frecuencias es de -20dB por década, lo cual indica un integrador puro en la función de transferencia. Además se observa un incremento de pendiente de -20dB por década a partir de  $\omega = 20$  rad/seg. Además la ganancia para  $\omega = 2$  rad/seg es de 0dB. Así pues,

$$G_a(s) = \frac{40}{s(s+20)} = \frac{2}{s(\frac{1}{20}s+1)} = \frac{40}{s(s+20)}$$

La función de transferencia correspondiente al accionador viene dada por su respuesta ante escalón unitario,  $g(t) = 10(1 - e^{-10t})$ . Se trata de un sistema de primer orden con cte. de tiempo  $T = 0,1$  seg y ganancia 10. Así pues,

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+10} = \frac{10s+100-10s}{s(s+10)} \quad G_m(s) = \frac{10}{0,1s+1} \rightarrow G_n(s) = \frac{100}{s+10} \quad Y(s) = \frac{100}{s(s+10)} = G_m(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema en lazo abierto es,

$$G_{ms} = \frac{100}{s+10}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_m G_m(s) G_a(s) = \frac{4000 K_m}{s(s+10)(s+20)}$$

2. Suponiendo un valor de la ganancia del amplificador  $k_m$  variable.  
a. Obtener el valor de  $k_m$  para que el sistema se comporte como críticamente amortiguado.

La ecuación característica del sistema realimentado es,

$$s(s+10)(s+20) + 4000 K_m = 0 \rightarrow s^3 + 30s^2 + 200s + 4000 K_m = 0$$

Se trata de un sistema de tercer orden que, para que su comportamiento sea críticamente amortiguado, debe presentar un polo doble ( $s = -\beta$ ) y un polo simple ( $s = -\alpha$ ) (presumiblemente muy alejado del polo doble). Entonces la ecuación característica debería tener la forma,

$$(s+\alpha)(s+\beta)^2 = 0 \rightarrow (s+\alpha)(s^2+2\beta s+\beta^2) = 0 \rightarrow s^3 + (\alpha+2\beta)s^2 + (\beta^2+2\alpha\beta)s + \alpha\beta^2 = 0$$

Igualando términos,

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 30 \\ \beta^2 + 2\alpha\beta = 200 \\ \alpha\beta^2 = 4000K_m \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 21,547 \\ \beta = 4,2265 \end{array} \rightarrow \boxed{K_m = 0,096}$$

Se puede observar como el polo simple ( $s = -21,547$ ) se encuentra muy alejado del polo doble ( $s = -4,2265$ ) tal y como se había supuesto.

- b. Obtener el valor de  $k_m$  para que el sistema se comporte como críticamente estable y la localización de los polos en dicha circunstancia.

Analizamos la estabilidad del sistema a partir de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado y aplicando Routh-Hurwitz,

$$s^3 + 30s^2 + 200s + 4000 K_m = 0$$

$s^3$	1	200
$s^2$	30	$4000K_m$
$s^1$	$200 - \frac{4000 K_m}{30}$	
$s^0$	$4000K_m$	

Para que el sistema sea estable debe de cumplirse,

$$\left. \begin{array}{l} 200 - \frac{4000 K_m}{30} > 0 \\ 4000 K_m > 0 \end{array} \right\} \rightarrow 0 < K_m < 1,5$$

Por lo tanto, el valor máximo de  $k_m$  antes de que el sistema se vuelva inestable es,

$$\boxed{K_m = 1,5}$$

Dos de los polos para dicha circunstancia los obtenemos a partir del polinomio auxiliar,

$$30s^2 + 4000K_m = 0 \Big|_{K_m=1,5} \rightarrow s^2 + 200 = 0 \rightarrow \boxed{s = \pm 14,14j}$$

Se trata de los dos polos en el eje imaginario. Existe un tercer polo en el eje real,

$$\left. \begin{array}{l} s^3 + 30s^2 + 200s + 4000 K_m = 0 \Big|_{K_m=1,5} \rightarrow s^3 + 30s^2 + 200s + 6000 = 0 \\ (s + \alpha)(s^2 + 14,14^2) = 0 \rightarrow (s + \alpha)(s^2 + 200) = 0 \rightarrow s^3 + \alpha s^2 + 200s + \alpha 200 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = 30 \rightarrow \boxed{s = -30}$$

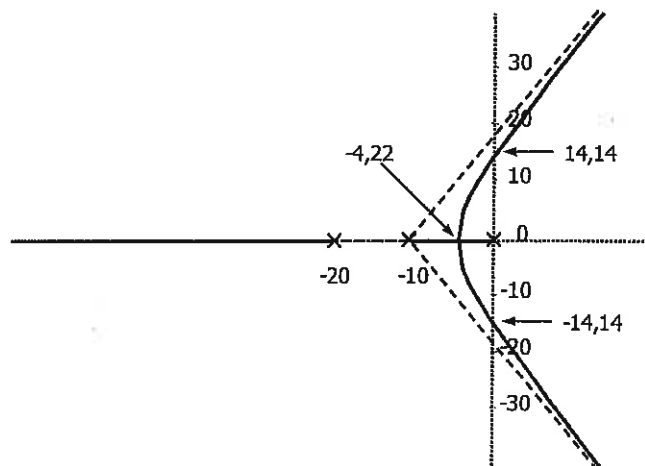
10 c. Dibujar el lugar de las raíces.

Se trata de un sistema de tercer orden en lazo abierto, por lo que el lugar de las raíces tendrá tres ramas. Obtenemos asíntotas y centroide,

$$\theta = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} \Big|_{\substack{k=0,1,2 \\ n=3 \\ m=0}} \rightarrow \begin{array}{l} \theta = 60 \\ \theta = 180 \\ \theta = 300 \end{array}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{k=1}^n p_k}{n-m} \Big|_{\substack{n=3 \\ m=0}} = \frac{-20-10}{3} \rightarrow \sigma_0 = -10$$

Los demás puntos significativos los hemos calculado en puntos anteriores. Por lo tanto el lugar de las raíces buscado es el que se presenta en la siguiente gráfica,



- d. Determinar razonando el valor mínimo del error en estado estacionario, ante una entrada escalón unitario y una perturbación impulso unitario, antes de que el avión entre en inestabilidad.

El error en estacionario, aplicando el principio de superposición, se puede calcular como la suma del error estacionario debido a la referencia más el error estacionario debido a la perturbación. Se trata de un sistema estable de tipo 1, por lo tanto, el error en estado estacionario ante una entrada escalón es nulo. La perturbación es un impulso y dado que el sistema es estable, el error en el estacionario debido a dicha perturbación también es nulo. Por lo tanto,

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssD} \rightarrow \boxed{e_{ss} = 0}$$

3. Suponiendo un valor de  $k_m=1$  se desea introducir un controlador en la cadena directa lo más sencillo posible que elimine el error en posición, pero no en velocidad.

- a. Justificar el tipo de controlador y el método de Ziegler Nichols a utilizar.

Dado que el sistema es de tipo 1 no es necesario elevar el tipo para eliminar el error en posición, por lo que el controlador más sencillo es el tipo P.

Por otra parte, dado que el sistema en lazo abierto presenta un integrador no es posible utilizar el método de Ziegler-Nichols en lazo abierto.

Por lo tanto, el controlador a emplear es un controlador P sintonizado mediante el método de Ziegler-Nichols en lazo cerrado. El valor de la  $K_{cr}$  se ha calculado anteriormente en el análisis de estabilidad ( $K_{cr} = 1,5$ ). Así pues,

$$K_c = 0,5K_{cr} \Big|_{K_{cr}=1,5} \rightarrow \boxed{K_c = 0,75}$$

- b. Calcular el margen de ganancia.

El margen de ganancia es la ganancia que se puede aportar al sistema antes de que se inestabilice expresado en dB's. Como las ganancias de  $G_a(s)$ ,  $G_m(s)$  y  $k_m$  se mantienen, únicamente hay que tener en cuenta la debida al controlador. Así pues,

$$MG = 20 \log(1,5) - 20 \log(0,75) \rightarrow \boxed{MG = 6dB}$$



Nombre \_\_\_\_\_  
 Izena \_\_\_\_\_  
 1º Apellido \_\_\_\_\_  
 1 Deitura \_\_\_\_\_  
 2º Apellido \_\_\_\_\_  
 2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:

1 Hora

Grupo:

PROBLEMA 2 (4 PUNTOS)

La *figura 1* muestra en el diagrama de bloques del sistema de control de eyección del piloto de un avión acrobático.

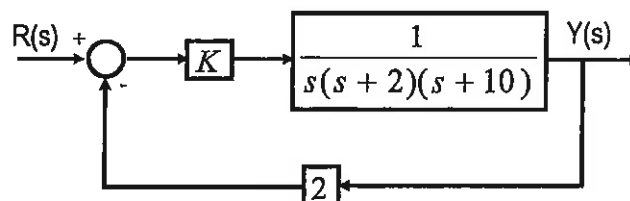
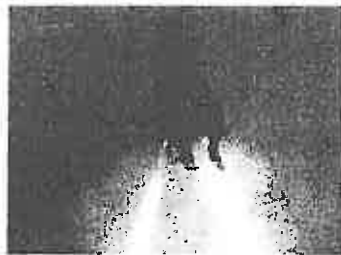


Figura 1

Se pide:

- 1) Trazar el diagrama polar de la función de transferencia en lazo abierto. (1 punto)
- 2) Trazar el diagrama de Nyquist y, sobre él, aplicar el criterio de estabilidad con objeto de determinar el rango de valores de  $K$  para el cual el sistema permanece estable. (1,5 puntos)
- 3) Diseñar un controlador utilizando el Lugar de las Raíces para conseguir que el sistema eyector tenga un tiempo de establecimiento menor que 1 segundo (criterio del 2%) y un error de velocidad  $\leq 10\%$ . (1,5 puntos)

SOLUCIÓN

1. Trazar el diagrama polar de la función de transferencia en lazo abierto.

La función de transferencia sinusoidal,

$$GH(s) = \frac{2K}{s(s+2)(s+10)} \rightarrow GH(j\omega) = \frac{2K}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+10)}$$

Módulo y argumento,

$$|GH| = \frac{2K}{\omega\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{100+\omega^2}}$$

$$\arg GH = \frac{-\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \frac{\omega}{10}$$

Para  $\omega \rightarrow 0$ ,

$$|GH| \rightarrow \infty; \quad \arg GH \rightarrow \frac{-\pi}{2}$$

Para  $\omega \rightarrow \infty$ ,

$$|GH| \rightarrow 0; \quad \arg GH \rightarrow \frac{-3\pi}{2}$$

Expresando GH en forma binómica,

$$GH = -\frac{24K}{(20-\omega^2)+144\omega^2} - j\frac{2K(20-\omega^2)}{\omega[(20-\omega^2)+144\omega^2]}$$

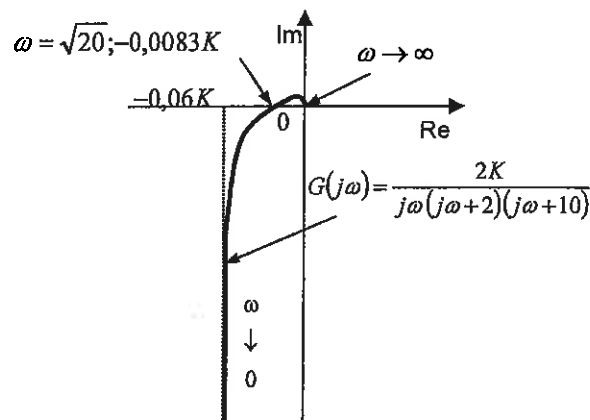
La parte real es negativa  $\forall \omega > 0$ .

Cortes con el eje imaginario: no tiene.

Cortes con el eje real.

$$\omega = \sqrt{20} \rightarrow |GH|_{\omega=\sqrt{20}} = 0.0083K; \arg GH_{\omega=\sqrt{20}} = -\pi$$

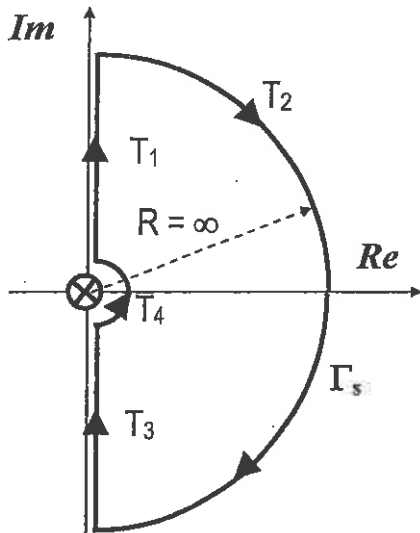
El diagrama polar será,



2. Trazar el diagrama de Nyquist y sobre él, aplicar el criterio de estabilidad con objeto de determinar el rango de valores de K para el cual el sistema permanece estable.

Diseñamos la trayectoria de Nyquist.





El recinto transformado de  $T_1$  es el diagrama polar ya trazado en el apartado anterior

Recinto transformado de  $T_2$ :

$$R \rightarrow \infty$$

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Sustituimos  $s \rightarrow Re^{j\theta}$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}}} GH(s) \Big|_{s=Re^{j\theta}} = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}}} \frac{2K}{Re^{j\theta}(Re^{j\theta}+2)(Re^{j\theta}+10)} = 0, \forall \theta$$

Es decir  $T_2$  se transforma en el origen del recinto transformado

Recinto transformado de  $T_3$ :

$$s = j\omega$$

$$0^- \rightarrow \omega \rightarrow -\infty$$

El recinto transformado  $T_3$  es el simétrico de  $T_1$  respecto al eje real.

Recinto transformado de  $T_4$ :

$$r \rightarrow 0$$

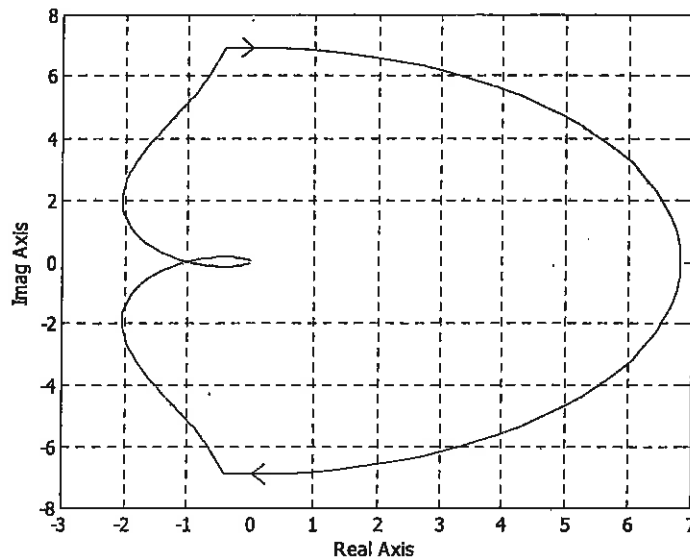
$$-\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Sustituimos  $s \rightarrow re^{j\theta}$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}}} GH(s) \Big|_{s=re^{j\theta}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}}} \frac{2K}{re^{j\theta}(re^{j\theta}+2)(re^{j\theta}+10)} \approx \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}}} \frac{2K}{20re^{j\theta}} = \frac{K}{10r} e^{-j\theta}$$

El módulo tiende a infinito y el ángulo varía entre  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ .

Por tanto, el diagrama de Nyquist queda:



Según el criterio de estabilidad de Nyquist  $Z = N - P$ . En nuestro caso  $P=0$ , luego para que el sistema sea estable, el diagrama de Nyquist no debe rodear al punto  $-1$ . El corte con el eje real se produce en el punto  $-0.0082K$ . Así pues,

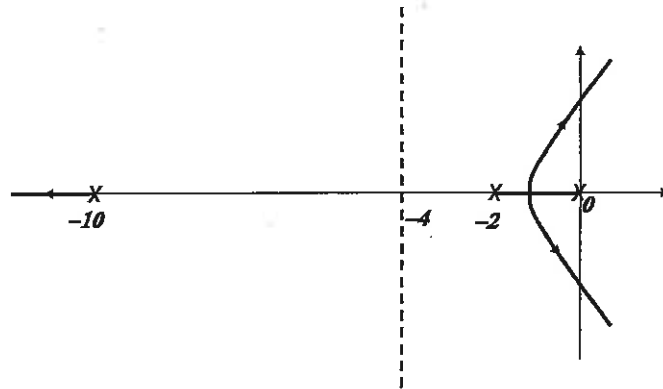
$$-0,0083K > -1 \rightarrow \boxed{K < 120}$$

3. Diseñar un controlador utilizando el Lugar de las Raíces para conseguir que el sistema eyector tenga un tiempo de establecimiento menor que 1 segundo (criterio del 2%), un comportamiento sobreamortiguado y un error de velocidad  $\leq 10\%$ .

En principio, podría bastar un controlador proporcional ya que el integrador de la planta garantiza  $e_p = 0$ .

Región de diseño,

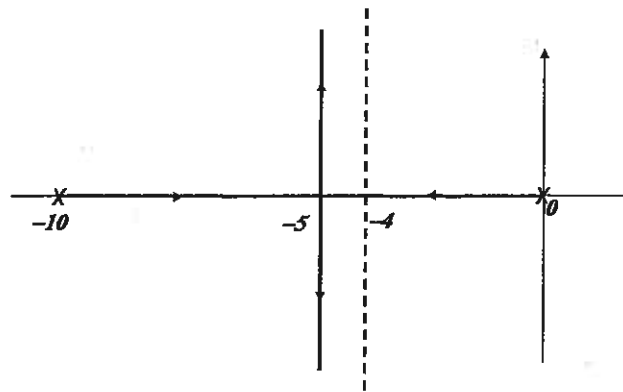
$$t_s = \frac{4}{\delta\omega_n} < 1 \rightarrow \delta\omega_n > 4$$



El trazado del LGR indica que no es posible conseguir polos en lazo cerrado dentro de la región de diseño. Con objeto de mejorar el transitorio, sin perjudicar la especificación de régimen permanente (manteniendo un sistema tipo 1), se introduce un PD, situando el cero de forma que cancele el polo situado en  $s = -2$

$$G_c(s) = K_c(1 + sTd) = K_c T_d \left(s + \frac{1}{T_d}\right) = 0.5K_c(s + 2)$$

$$GH(s) = 0.5K_c(s + 2) \frac{2}{s(s + 2)(s + 10)} \rightarrow GH(s) = \frac{K_c}{s(s + 10)}$$



Ahora si podemos seleccionar un  $K_{LR\min}$  que garantice la condición del tiempo de establecimiento:

$$\left| \frac{K_{LR\min}}{s(s + 10)} \right|_{s = -4} = 1 \rightarrow K_{LR\min} = 24$$

Para garantizar un error de velocidad  $\leq 10\%$ :

$$e_v = \frac{1}{k_v}; k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s K_c}{s(s + 10)} = \frac{K_c}{10}$$

$$\frac{10}{K_c} \leq 0.1 \rightarrow K_c \geq 100$$

En definitiva, los parámetros límite del controlador PD son:  $K_c = 100$  y  $Td = 0.5$ ,

$$\boxed{G_c(s) = 100(1 + 0.5s) \rightarrow G_c(s) = 50(s + 2)}$$

Nombre \_\_\_\_\_

Izena \_\_\_\_\_

1º Apellido \_\_\_\_\_

1 Deitura \_\_\_\_\_

2º Apellido \_\_\_\_\_

2 Deitura \_\_\_\_\_

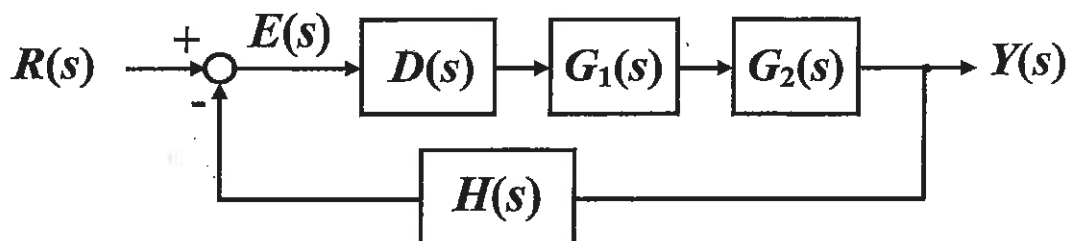
Tiempo:

1,5 Horas

Grupo:

**PROBLEMA 1 (5 PUNTOS)**

Se diseña un sistema de control para regular la temperatura de un horno de fundición, tal y como muestra la figura:



- Siendo:
- $G_1(s)$  → Función de transferencia del actuador (válvula de combustible)
  - $G_2(s)$  → Función de transferencia de la planta (horno de fundición)
  - $H(s)$  → Función de transferencia del sensor (termopar)
  - $D(s)$  → Función de transferencia del controlador

Inicialmente se pretende identificar cada uno de los bloques que componen el diagrama en base a las leyes físicas que gobiernan sus correspondientes comportamientos y a experimentos realizados con algunos de ellos de forma aislada.

1) Función de Transferencia del actuador-válvula:  $G_1(s)$

La salida del controlador  $D(s)$  proporciona una consigna de caudal ( $q_i(t)$ ). A partir de dicha consigna el actuador transmite un caudal de combustible a la planta ( $q_s(t)$ ). La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del actuador es:

$$\frac{d^2 q_s(t)}{dt^2} + 2 \frac{dq_s(t)}{dt} + q_s(t) = 2 \frac{dq_i(t)}{dt} + q_i(t)$$

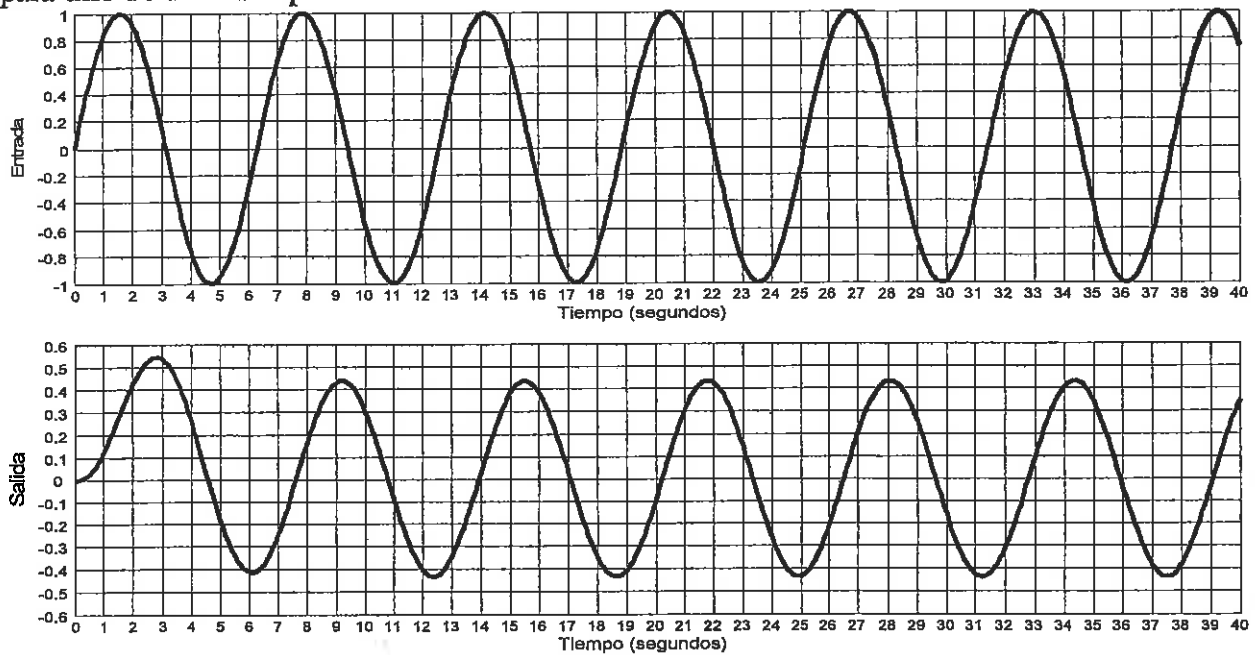
Calcular la Transformada de Laplace de esta expresión.

Hallar la Función de Transferencia  $G_1(s)$  que relaciona la variable de salida del actuador con la variable de entrada.

2) Función de transferencia de la planta:  $G_2(s)$

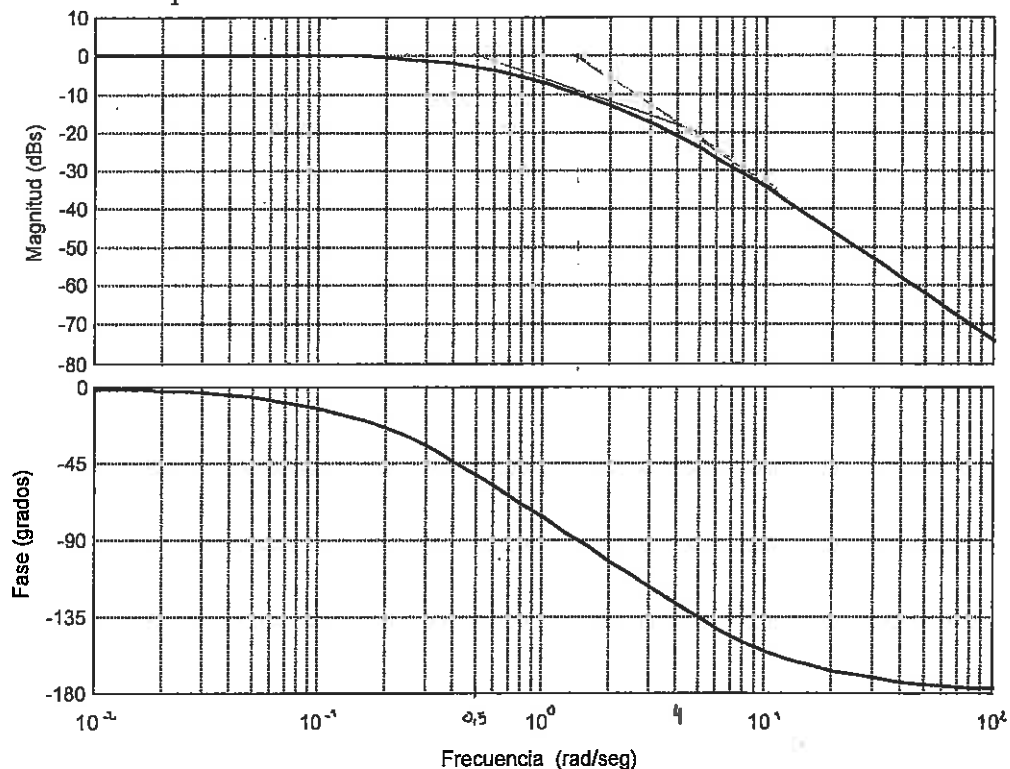
Para poder extraer un modelo de  $G_2(s)$  se realizan experimentos introduciendo a la entrada de la planta un conjunto de señales sinusoidales, barriendo un espectro amplio de frecuencias.

En la siguiente gráfica se observa conjuntamente en el tiempo, la entrada y la salida de  $G_2(s)$ , para uno de dichos experimentos. La entrada es una señal sinusoidal.



Extraer de esta gráfica (teniendo en cuenta sus correspondientes unidades), la frecuencia (rad/s) con la cual se ha hecho el experimento, así como los valores en Magnitud (dB) y Fase (grados), que se introducirán en el Diagrama de Bode correspondiente a  $G_2(s)$ .

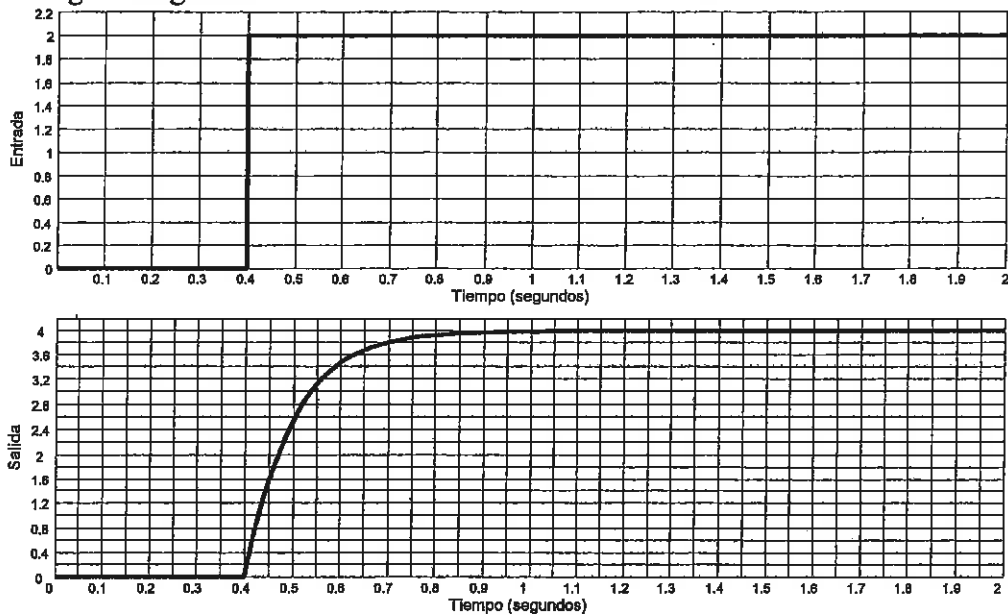
En la siguiente figura se muestra el Diagrama de Bode de  $G_2(s)$  para el rango de frecuencias utilizadas en la fase experimental anteriormente descrita.



Tomando como referencia el experimento descrito en el apartado anterior: Encontrar los valores del eje de frecuencias y a partir de él, determinar cuál es la Función de Transferencia de  $G_2(s)$ .

### 3) Función de transferencia del sensor: $H(s)$

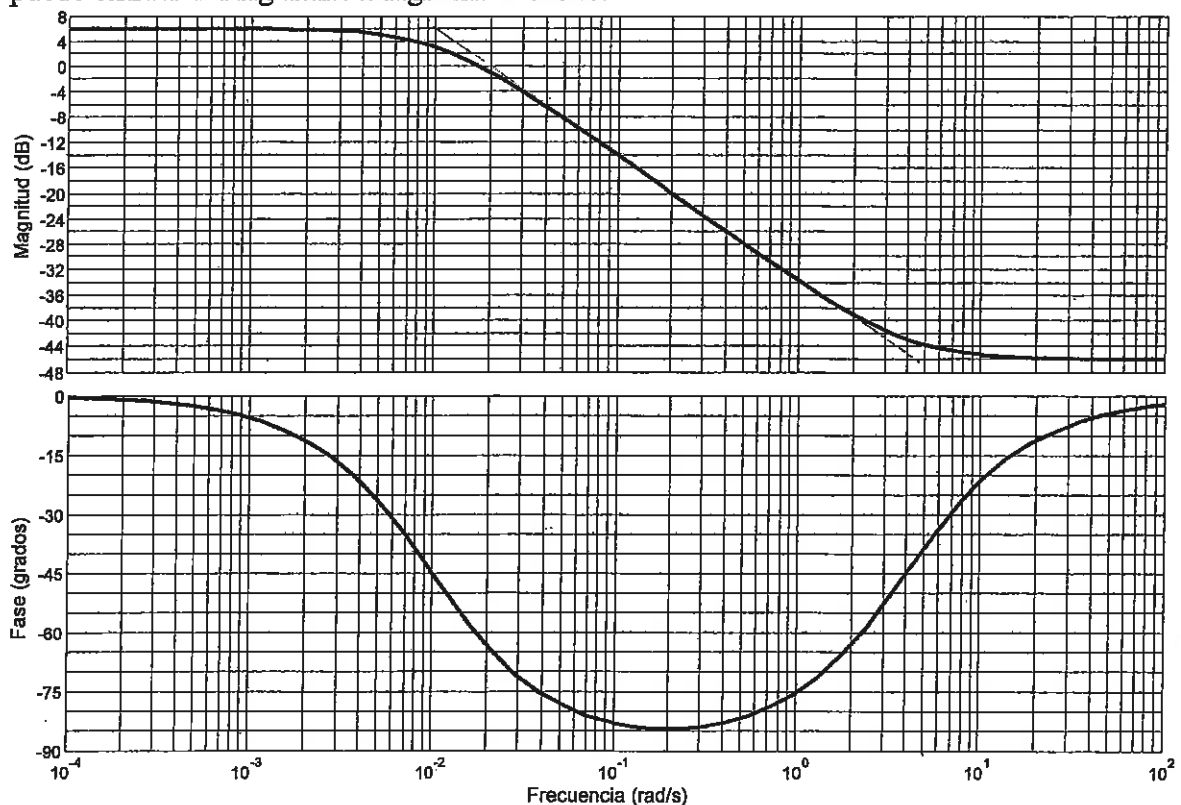
Para poder extraer un modelo de  $H(s)$  se utilizan experimentos en el dominio del tiempo. Concretamente a este dispositivo se le ha dado como entrada una de tipo escalón, dando como resultado la siguiente gráfica.



Analizando la gráfica anterior, calcular el modelo más sencillo posible para el sensor  $H(s)$ .

### 4) Función de Transferencia del controlador: $D(s)$

El modelo de  $D(s)$  tiene una configuración determinada a priori, cuya Función de Transferencia se puede extraer del siguiente Diagrama de Bode:



Analizando el Diagrama de Bode anterior, calcular el modelo del controlador  $D(s)$ .

5) Cálculo de sensibilidad.

Calcular la sensibilidad estática de la función de Transferencia en Lazo cerrado  $M(s)$  ante variaciones de la Ganancia Estática del controlador  $D(s)$ .

6) Modernización del sistema de control.

Con el fin de modernizar el comportamiento del proceso (horno de fundición), se desea sustituir tanto el controlador, como el sistema de medida.

Por ello, como primera mejora, se cambia el sensor que toma la salida de  $y(t)$  por otro de mejores prestaciones, el cuál presenta una función de transferencia:

$$H(s) = 1$$

Como segunda mejora se desea sustituir el controlador  $D(s)$  existente, por otro de tipo PID. Para la sintonización de los parámetros del controlador PID se ha optado por el **segundo método de Ziegler-Nichols**.

Determinar, a partir de la siguiente tabla, la función de transferencia del nuevo controlador.

Controladores	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$		
PI	$0.45K_{cr}$	$P_{cr}/1.2$	
PID	$0.6K_{cr}$	$P_{cr}/2$	$P_{cr}/8$

## SOLUCIÓN

1. Función de transferencia del actuador-válvula:  $G_1(s)$ .

La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del dispositivo es,

$$\frac{d^2 q_s(t)}{dt^2} + 2 \frac{dq_s(t)}{dt} + q_s(t) = 2 \frac{dq_i(t)}{dt} + q_i(t)$$

Aplicando transformada de Laplace tenemos,

$$s^2 Q_s(s) - s q_s(0) - q_s'(0) + 2[s Q_s(s) - q_s(0)] + Q_s(s) = 2[s Q_i(s) - q_i(0)] + Q_i(s)$$

Para hallar la función de transferencia hay que suponer condiciones iniciales nulas. Así pues,

$$[s^2 + 2s + 1] Q_s(s) = [2s + 1] Q_i(s) \rightarrow \frac{Q_s(s)}{Q_i(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 1} \rightarrow \boxed{G_1(s) = 2 \frac{s + 0,5}{(s + 1)^2}}$$

2. Función de transferencia de la planta:  $G_2(s)$ .

La señal de entrada ( $r(t)$ ) es una sinusoidal de amplitud 1 y periodo 6,28 segundos. Así pues,

$$r(t) = A \operatorname{sen} \omega t; \quad A = 1; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \operatorname{rad/s} \rightarrow r(t) = \operatorname{sen} t$$

$$y_u(t) = A |G_2(j\omega)|_{\omega=1} \operatorname{sen}(\omega t + \operatorname{Arg}[G_2(j\omega)]_{\omega=1})$$

La señal de salida en el estacionario ( $y_{ss}(t)$ ) es otra sinusoidal de amplitud 0,45, periodo 6,28 segundos y un desfase cercano a  $-90^\circ$ . Sabiendo que,

$$y_u(t) = A |G_2(j\omega)|_{\omega=1} \operatorname{sen}(\omega t + \operatorname{Arg}[G_2(j\omega)]_{\omega=1})$$

A partir de la respuesta y el diagrama de Bode que se presenta, la frecuencia de cruce correspondiente a la función de transferencia se encuentra en torno a  $1,4 \operatorname{rad/seg}$ . Además, el diagrama de Bode indica que se trata de un sistema de segundo orden (pendiente de asíntota en altas frecuencias de curva de módulo de  $-40 \operatorname{dBs/dec}$ ), de ganancia 1 (0 dBs en la asíntota de bajas frecuencias) y comportamiento sobreamortiguado. En este caso, las dos frecuencias de cruce del sistema sobreamortiguado pueden encontrarse a partir de las asíntotas sobre la curva de módulo, por una aproximación de caída de  $-3 \operatorname{dBs}$  para la primera frecuencia de cruce y  $-6 \operatorname{dBs}$  para la segunda frecuencia de cruce. De esta forma obtenemos  $1/T_1 = 0,5$  y  $1/T_2 = 4$ . Así pues,

$$G_2(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} \rightarrow G_2(s) = \frac{1}{(1 + 2s)(1 + 0,25s)} \rightarrow \boxed{G_2(s) = \frac{2}{(s + 0,5)(s + 4)}}$$

3. Función de transferencia del sensor:  $H(s)$ .

En este caso, ante una entrada de escalón de amplitud 2 obtenemos una respuesta correspondiente a un sistema de primer orden, donde dicha respuesta tiene una amplitud en el estacionario de 4. Así pues, la ganancia del sistema es 2. Además, el 63,2% del valor de amplitud final se consigue en un tiempo de 0,1 seg. Así pues,

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} \rightarrow H(s) = \frac{2}{0,1s + 1} \rightarrow \boxed{H(s) = \frac{20}{s + 10}}$$

4. Función de transferencia del controlador:  $D(s)$ .

Analizando el diagrama de Bode, se puede observar que se trata de un compensador mediante red de atraso. La función de transferencia de dicha red es por tanto,

$$D(s) = K_c \frac{1 + Ts}{1 + \beta Ts}; \quad \beta > 1$$

El valor de la ganancia del controlador viene dada por la asíntota de la curva de magnitud en bajas frecuencias (6dBs),

$$20 \log K_c = 6 \rightarrow K_c = 2$$

En cuanto a los valores de  $\beta$  y  $T$ ,

$$|H(j\omega)|_{\omega \gg 1} = 20 \log \frac{K_c}{\beta} \rightarrow 20 \log \frac{K_c}{\beta} = -46 \rightarrow \beta = 400$$

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} \xrightarrow{\omega_m=0,2} T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\beta}} = \frac{1}{0,2\sqrt{400}} \rightarrow T = 0,25$$

Así pues,

$$D(s) = 2 \frac{1+0,25s}{1+0,25 \cdot 400s} \rightarrow D(s) = 2 \frac{1+0,25s}{1+100s} \rightarrow \boxed{D(s) = 5 \cdot 10^{-3} \frac{s+4}{s+0,01}}$$

#### 5. Estudio de sensibilidad.

Para calcular la sensibilidad de la función de transferencia en lazo cerrado respecto de la ganancia del controlador, dividimos el controlador en su ganancia estática y la dinámica que introduce  $D(s) = K_c G_c(s)$ . De esta forma,

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c G_c(s) G_1(s) G_2(s)}{1 + K_c G_c(s) G_1(s) G_2(s) H(s)} = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s) H(s)}$$

$$S_{K_c}^{M(s)} = \frac{K_c}{M(s)} \frac{\delta M(s)}{\delta K_c} = \frac{K_c [1 + K_c G(s) H(s)] G(s) [1 + K_c G(s) H(s)] - K_c G(s) G(s) H(s)}{[1 + K_c G(s) H(s)]^2}$$

$$S_{K_c}^{M(s)} = \frac{1}{1 + K_c G(s) H(s)} \rightarrow S_{K_c}^{M(s)} = \frac{1}{1 + D(s) G_c(s) G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

En cuanto a la sensibilidad estática,

$$\lim_{s \rightarrow 0} S_{K_c}^{M(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_c G(s) H(s)} = \frac{1}{1 + K_c \lim_{s \rightarrow 0} G(s) H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2K_c}$$

Para los valores de nuestro sistema,

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow 0} S_{K_c}^{M(s)} = \frac{1}{5}}$$

#### 6. Modernización del sistema de control.

En este caso, se sustituye el sensor por otro que no introduce dinámica y ganancia estática 1 ( $H(s)=1$ ). Además se cambia el controlador introduciendo un PID.

El PID se sintoniza utilizando el método de Ziegler-Nichols en lazo cerrado. Para sintonizar el controlador utilizando este método es necesario encontrar dos parámetros: la ganancia que hace que el sistema en lazo cerrado se comporte como críticamente estable ( $K_m$ ) y el periodo de oscilación de la salida en esas circunstancias ( $P_m$ ). En este caso, para encontrar ambos parámetros empleamos el método Routh-Hurwitz:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s) G_1(s) G_2(s)}{1 + D(s) G_1(s) G_2(s) H(s)} = \frac{K_c G_1(s) G_2(s)}{1 + K_c G_1(s) G_2(s)}$$

$$1 + K_c G_1(s) G_2(s) = 0 \rightarrow 1 + K_c 2 \frac{s+0,5}{(s+1)^2} \frac{2}{(s+0,5)(s+4)} = 0 \rightarrow (s+1)^2 (s+4) + 4K_c = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 9s + 4 + 4K_c = 0$$

$s^3$	1	9
$s^2$	6	$4+4K_c$
$s^1$	$\frac{50-4K_c}{6}$	
$s^0$	$4+4K_c$	

Las condiciones de estabilidad son,

$$\left. \begin{aligned} 4+4K_c > 0 &\rightarrow K_c > -1 \\ 50-4K_c > 0 &\rightarrow K_c < 12,5 \end{aligned} \right\} -1 < K_c < 12,5$$



Entonces  $K_{cr} = 12,5$ . Para este valor el periodo crítico lo podemos obtener a partir de las raíces del polinomio auxiliar,

$$A(s) = 6s^2 + 4 + 4K_{cr} = 0 \rightarrow 6s^2 + 54 = 0 \rightarrow s = \pm j3$$

$$\omega_{cr} = 3 \rightarrow P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow P_{cr} = 2,09$$

Sustituyendo los valores obtenidos sobre la tabla,

$$\left. \begin{array}{l} K_c = 0,6K_{cr} \rightarrow K_c = 7,5 \\ T_i = P_{cr}/2 \rightarrow T_i = P_{cr}/2 = 1,047 \\ T_d = P_{cr}/8 \rightarrow T_d = P_{cr}/8 = 0,26 \end{array} \right\} G_{PID}(s) = K_c T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_i T_d}}{s} = 1,96 \frac{s^2 + 3,82s + 3,65}{s}$$

$$G_{PID}(s) = 1,96 \frac{(s+1,91)^2}{s}$$

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to blurring and low contrast.

Nombre \_\_\_\_\_

Izena \_\_\_\_\_

1º Apellido \_\_\_\_\_

1 Deitura \_\_\_\_\_

2º Apellido \_\_\_\_\_

2 Deitura \_\_\_\_\_

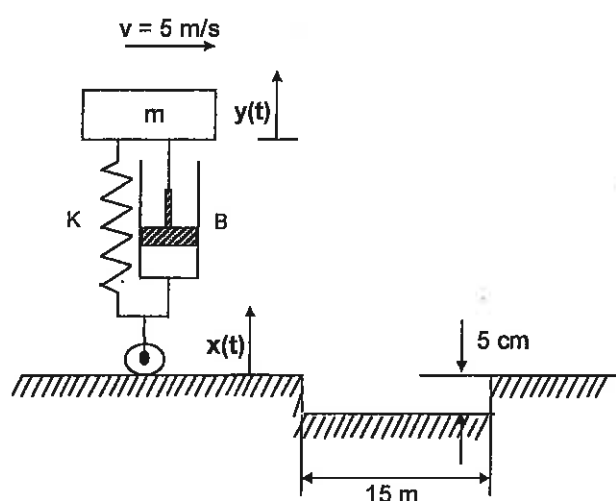
Tiempo:

1 Hora

Grupo:

PROBLEMA 2 (3 PUNTOS)

El modelo de un sistema de suspensión se puede representar simplificada de la siguiente forma:



$$M = 100 \text{ Kg}$$

$$K = 50000 \text{ N/m}$$

$$B = 1000 \text{ Ns/m}$$

$x(t)$ : punto de contacto del suelo

$y(t)$ : desplazamiento vertical de la masa

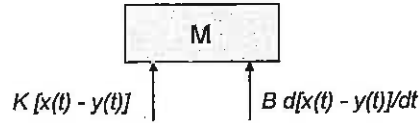
Se pide:

- 1) Determinar la ecuación diferencial que describe el sistema de suspensión, considerando el sistema lineal y condiciones iniciales de equilibrio.
- 2) Obtener la función de transferencia del sistema,  $G(s) = Y(s)/X(s)$ , calculando y representando sus polos y ceros en el plano  $s$ .
- 3) Obtener la expresión matemática de la entrada y representarla gráficamente en el tiempo.
- 4) Representar gráficamente la respuesta  $y(t)$  (evolución en el tiempo del desplazamiento vertical de la masa) ante la entrada  $x(t)$  propuesta. Se recomienda realizar una representación gráfica aproximada basada en las características de  $G(s)$  y evitando el cálculo de las transformadas y antittransformadas de Laplace. Razonar la representación gráfica.
- 5) ¿Qué modificaciones (aumentar o disminuir) se podría hacer en los parámetros  $K$  (constante elástica del muelle) y/o  $B$  (coeficiente de rozamiento viscoso del amortiguador) para disminuir la amplitud de las oscilaciones de la masa ante entradas como la representada en este ejercicio?

SOLUCIÓN

- Determinar la ecuación diferencial que describe el sistema de suspensión, considerando el sistema lineal y las condiciones iniciales nulas.

Las fuerzas que se aplican sobre la masa M son,



Por lo tanto,

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = B \left[ \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right] + K[x(t) - y(t)]$$

Así pues la ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema es,

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \left[ \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right] + K[y(t) - x(t)] = 0$$

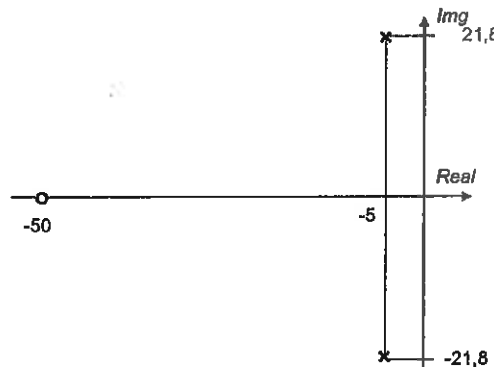
- Obtener la función de transferencia del sistema.

A partir de la ecuación diferencial, realizando la transformada de Laplace y aplicando condiciones iniciales nulas,

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) \xrightarrow{L} Y(s)[Ms^2 + Bs + K] = X(s)[Bs + K]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K} \rightarrow G(s) = \frac{1000s + 50000}{100s^2 + 1000s + 50000} \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{10(s + 50)}{s^2 + 10s + 500}}$$

Se trata de una función de transferencia que indica que el sistema es de segundo orden con un cero y dos polos. El cero se encuentra en  $s = -50$ . Los polos del sistema se encuentran en las raíces de denominador de la función de transferencia  $s = -5 \pm j21,8$ . Así pues, la representación de polos y ceros en el plano s es,



Dado que el cero correspondiente al sistema se encuentra muy alejado respecto de los polos, para el estudio temporal del sistema, se puede suponer que el sistema se comporta como un sistema equivalente de segundo orden puro,

$$G(s) = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K} \rightarrow G_{eq}(s) = \frac{K}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{K/M}{s^2 + B/Ms + K/M} \rightarrow \boxed{G_{eq}(s) = \frac{500}{s^2 + 10s + 500}}$$

- Obtener la expresión matemática de la entrada y representarla gráficamente en el tiempo.

Dado que se trata de un sistema de suspensión que se mueve a una velocidad de 5m/s, la distancia del escalón es de 15m y su altura es de 0,05m, la representación gráfica de la entrada sería,



Como se puede observar, la entrada  $x(t)$  se puede representar matemáticamente como la suma de dos escalones, uno de amplitud  $-0,05$  desde  $t_0=0s$ , y el otro de amplitud  $0,05$  desde  $t=3s$ ,

$$x(t) = -0,05\mu(t) + 0,05\mu(t-3); \quad \mu(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

Si lo expresamos en el dominio transformado de Laplace,

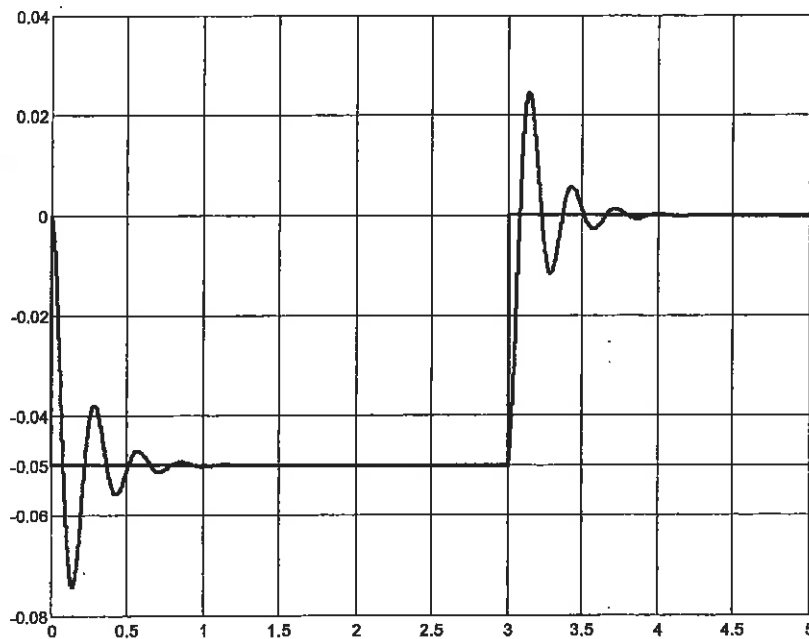
$$X(s) = -\frac{0,05}{s} + \frac{0,05}{s} e^{-3s}$$

4. Representar gráficamente la respuesta  $y(t)$  (evolución en el tiempo del desplazamiento vertical de la masa) ante la entrada  $x(t)$  propuesta.

Se trata de un sistema con un comportamiento subamortiguado en donde los polos dominantes tienen una componente imaginaria muy grande respecto de la componente real, por lo que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño. Esto supone sobreimpulsos de gran amplitud ante cambios de nivel.

$$s^2 + 10s + 500 = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 \quad \begin{cases} \delta\omega_n = 5 & \delta = 0,22 \\ \omega_n = 22,36 & \omega_d = 21,8 \end{cases}$$

Además el tiempo de establecimiento (por ejemplo para el 2%) es  $t_s = 4/5 = 0,8s$ , por lo cual se puede suponer que se llega al equilibrio antes de llegar al final del escalón. Por lo tanto la gráfica correspondiente a la salida para la entrada propuesta es,



5. ¿Qué modificaciones (aumentar o disminuir) se podría hacer en los parámetros  $K$  (constante elástica del muelle) y/o  $B$  (coeficiente de rozamiento viscoso del amortiguador) para disminuir la amplitud de las oscilaciones de la masa ante entradas como la representada en este ejercicio?

La oscilación en la respuesta del sistema se debe al comportamiento subamortiguado del sistema. La amplitud de las oscilaciones está directamente relacionada con el valor del coeficiente de amortiguamiento. De esta forma, para que disminuir la amplitud de las oscilaciones es necesario aumentar el coeficiente de amortiguamiento. Así pues, partiendo de la función de transferencia del sistema,

$$s^2 + B/M s + K/M = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K/M} \\ \delta\omega_n = B/2M \end{cases} \xrightarrow{M=100} \delta = \frac{B}{20\sqrt{K}}$$

Según indica la expresión, para aumentar el coeficiente de amortiguamiento es necesario aumentar el valor de  $B$  y/o disminuir el valor de  $K$ .

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Another small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Small handwritten mark or signature on the right side.

Nombre \_\_\_\_\_  
 Izena \_\_\_\_\_

1º Apellido \_\_\_\_\_  
 1 Deitura \_\_\_\_\_

2º Apellido \_\_\_\_\_  
 2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:

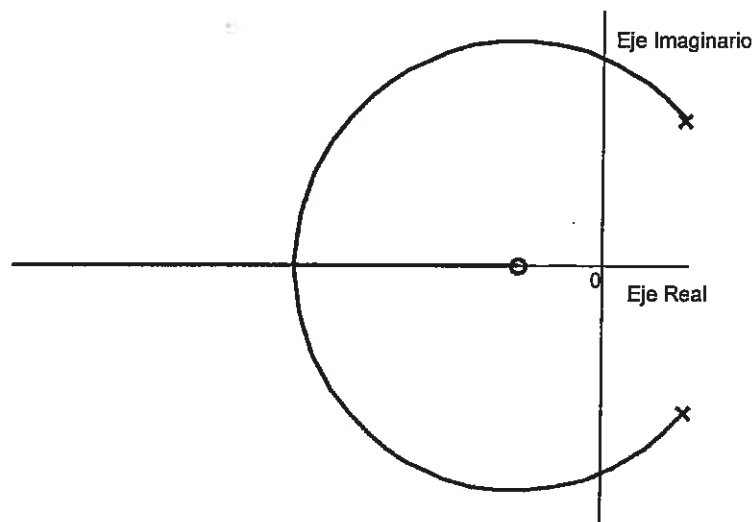
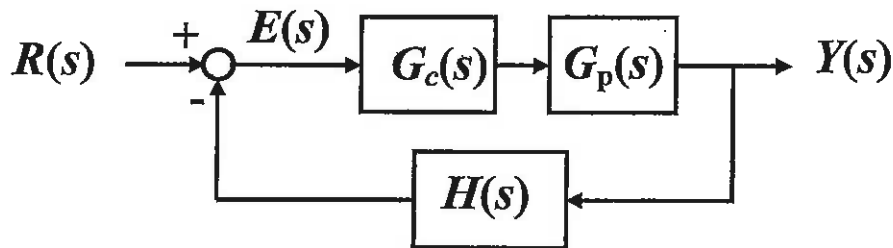
0,5 Horas

Grupo:

PROBLEMA 3 (2 PUNTOS)

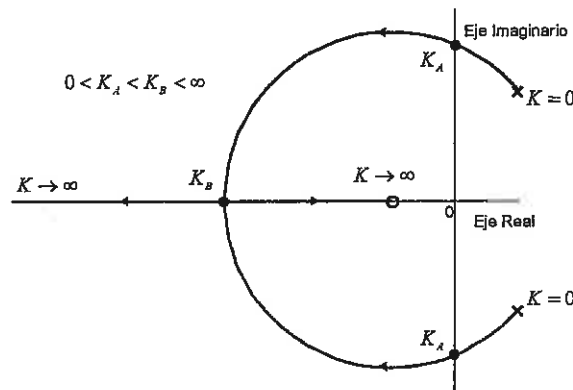
En el sistema de control de la *Figura 1*  $G_c(s)$  es un controlador proporcional de ganancia  $K$  positiva. Se sabe que el sistema en bucle cerrado presenta dos polos que en función del valor de  $K$  recorren las ramas representadas en lugar de las raíces de la *Figura 2*. Explicar cuál es el comportamiento del sistema en bucle cerrado cuando  $K$  aumenta, en cuanto a:

- 1) Estabilidad
- 2) Régimen permanente
- 3) Régimen transitorio



## SOLUCIÓN

El lugar de las raíces del sistema en lazo cerrado tiene dos ramas correspondientes a los dos polos del sistema que evolucionan con el aumento del valor de  $K$ . Los polos parten de los polos del sistema en lazo abierto y que llegan hasta los ceros del sistema en lazo abierto (uno finito y el otro en el infinito).



Para el estudio del sistema a partir del diagrama del lugar de las raíces dividimos el diagrama en tres tramos en función del valor de  $K$ :

Tramo I:  $0 < K < K_A$

Tramo II:  $K_A < K < K_B$

Tramo III:  $K_B < K < \infty$

### 1. Estudio de Estabilidad.

Para valores de  $K$  menores que  $K_A$  los polos del sistema en lazo cerrado tienen parte real positiva, por lo que el sistema será inestable para  $0 < K < K_A$ .

Para  $K = K_A$  los polos del sistema en lazo cerrado serán imaginarios puros conjugados, por lo que su comportamiento será críticamente estable.

Para valores de  $K$  mayores que  $K_A$  los polos del sistema en lazo cerrado tienen parte real negativa, por lo que el sistema será estable para  $K_A < K < \infty$ .

### 2. Estudio de Régimen Permanente.

Dado que el sistema en lazo cerrado no tiene ningún polo en el origen (integrador); siempre que el sistema sea estable ( $K > K_A$ ), el aumento del valor de  $K$  supone una disminución del error en estado estacionario. Es decir, el aumento del valor de  $K$  siempre mejora el comportamiento del sistema en régimen permanente.

### 3. Estudio de Régimen Transitorio.

Para el estudio del régimen transitorio es necesario analizar la evolución de los polos sobre las ramas del lugar de las raíces:

- $0 < K < K_A$ : Sistema inestable. Polos complejos conjugados con parte real positiva ( $\delta < 0$ ).
- $K = K_A$ : Sistema críticamente estable. Polos imaginarios puros conjugados ( $\delta = 0$ ).
- $K_A < K < K_B$ : Sistema subamortiguado. Polos complejos conjugados con parte real negativa ( $\delta < 1$ ). Excepto en una primera parte del tramo II, según se aumenta el valor de  $K$  los polos complejos conjugados tienen menor valor absoluto en su componente imaginaria y aumenta el valor absoluto de la componente real. Esto supone que con el aumento de  $K$  el valor de  $\delta$  aumenta, con lo cual el sobreimpulso disminuye. Al mismo tiempo, el tiempo de establecimiento disminuye. Es decir, el comportamiento transitorio del sistema mejora con el aumento de  $K$  dentro del tramo II.
- $K = K_B$ : Sistema críticamente amortiguado. Polo real negativo doble ( $\delta = 1$ ).
- $K_B < K < \infty$ : Sistema sobreamortiguado. Polos reales negativos ( $\delta > 1$ ). Cuanto mayor sea el valor de  $K$  un polo se aproxima hacia el cero finito del sistema en lazo abierto, mientras que el otro polo se acerca más al infinito.



Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_  
1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_  
2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:

1,5 Horas

Grupo:

PROBLEMA 2 (5 PUNTOS)

La curva de magnitud del diagrama de Bode de un sistema de control de fase mínima en bucle abierto, GH, está resumida en la siguiente tabla, en la cual se dan las pendientes de las asíntotas.

Frecuencias (rad/s)	Pendiente
$0 < \omega < 20$	-20 dB/dec.
$20 < \omega < 100$	-40 dB/dec.
$100 < \omega < \infty$	-60 dB/dec.

El sensor de medida de la salida tiene una ganancia  $H = 0,75$ .

Sabiendo que la curva real de magnitud pasa por el nivel de 0 dB en el punto de abscisa  $\omega = 55$  rad/s

Se pide:

- 1) Determinar la función de transferencia en lazo abierto.
- 2) Analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante los márgenes de ganancia y fase. Razonar los resultados obtenidos.
- 3) Si se cierra el lazo mediante un controlador proporcional, calcular el valor al que debe sintonizarse su ganancia para obtener un margen de ganancia de 6 dB. Calcular el nuevo margen de fase.
- 4) Diseñar un nuevo controlador, el más sencillo posible, de forma que cumpla las siguientes especificaciones:
  - Error estacionario en velocidad del 1%
  - Ancho de banda equivalente de 12 Hz ( $\omega = 2\pi f$ )

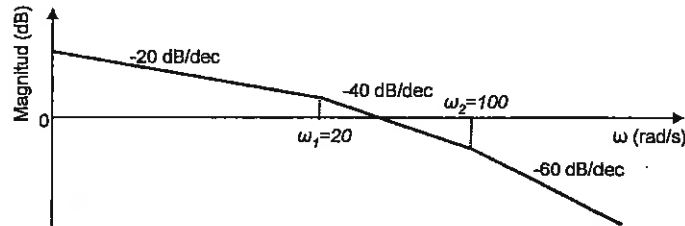
Indicar claramente los valores de los parámetros del controlador y la función de transferencia del mismo.

- 5) A partir del sistema de control que cumple las especificaciones del punto anterior, calcular el valor del error en estado estacionario en unidades de salida ante una entrada rampa  $r(t) = 2,5t$ .

## SOLUCIÓN

- Determinar la función de transferencia en lazo abierto.

Atendiendo a los valores de la tabla suministrada, la gráfica asintótica de la curva de magnitud del diagrama de Bode sería la siguiente:



Dado que se trata de un sistema de fase mínima, la función de transferencia correspondiente al sistema en lazo abierto sería:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s \left(1 + \frac{s}{20}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega (1 + j0,05\omega)(1 + j0,01\omega)}$$

Para encontrar el valor de la ganancia observamos que para  $\omega = 55 \text{ rad/s}$  la magnitud es de  $0 \text{ dB}$ ,

$$|G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=55} = 0 \rightarrow \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{20^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}}} = 1 \rightarrow K = 183,6758$$

Así pues, la función de transferencia del sistema en lazo abierto sería

$$G(s)H(s) = \frac{183,67}{s \left(1 + \frac{s}{20}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

- Analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante los márgenes de ganancia y fase.

Para determinar el margen de fase es necesario conocer la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_g$ . La frecuencia de cruce de ganancia es dato  $\omega_g = 55 \text{ rad/s}$ , por lo que para el cálculo del margen de fase,

$$MF = 180 + \text{Arg}[G(j\omega)H(j\omega)]_{\omega=\omega_g} \rightarrow MF = 180 - 90 - \arctg \frac{\omega_g}{20} - \arctg \frac{\omega_g}{100} \xrightarrow{\omega_g=55} \boxed{MF = -8,83^\circ}$$

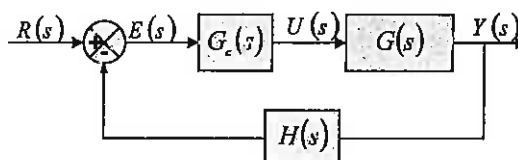
Para determinar el margen de ganancia es necesario conocer la frecuencia de fase crítica  $\omega_f$ . Por lo que para el cálculo del margen de ganancia,

$$\left. \begin{aligned} \text{Arg}[G(j\omega)H(j\omega)]_{\omega=\omega_f} = -180 &\rightarrow -90 - \arctg \frac{\omega_f}{20} - \arctg \frac{\omega_f}{100} = -180 \rightarrow \omega_f = 44,7 \text{ rad/s} \\ MG = -20 \log |G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\omega_f} &= -20 \log \frac{183,67}{\omega_f \sqrt{1 + \frac{\omega_f^2}{20^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega_f^2}{100^2}}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{MG = -3,7 \text{ dB}}$$

Como se puede observar, tanto el margen de fase como el margen de ganancia son negativos. Por tanto, en las condiciones indicadas el sistema en lazo cerrado es inestable.

- Calculo de controlador proporcional que garantice un margen de ganancia de  $6 \text{ dB}$ .

El diagrama de bloques correspondiente al sistema de control compensado tendrá la siguiente forma,



Las especificaciones del estacionario son las mismas que para el controlador proporcional, así que  $K_c = 0,54$ . En cuanto a las especificaciones de ancho de banda, es necesario encontrar el valor de  $T_d$  que permita una frecuencia de cruce de ganancia de  $\omega_g = 75,4 \text{ rad/s}$ .

$$20 \log |G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\omega_g} = 0 \rightarrow \frac{100 \sqrt{1+T_d \omega_g^2}}{\omega_g \sqrt{1+\frac{\omega_g^2}{20^2}} \sqrt{1+\frac{\omega_g^2}{100^2}}} = 1 \xrightarrow{\omega_g=75,4} T_d = 0,047 \text{ seg.}$$

Así pues, el controlador PD que cumple las especificaciones sería:

$$G_c(s) = 0,54(1 + 0,047s)$$

NO Ahora, realicemos los cálculos para una red de adelanto. En este caso, las ecuaciones del controlador y de la función de transferencia en lazo abierto serán:

$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}; \quad 0 < \alpha < 1$$

$$G_{LA}(s) = G_c(s)G(s)H(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \frac{183,67}{s \left(1+\frac{s}{20}\right) \left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

Las especificaciones del estacionario siguen siendo las mismas que para el controlador proporcional, así que  $K_c = 0,54$ . En cuanto a las especificaciones de ancho de banda, es necesario encontrar los valores de  $\alpha$  y  $T$  que permitan una frecuencia de cruce de ganancia de  $\omega_g = 75,4 \text{ rad/s}$ .

$$20 \log |K_c G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\omega_g} + 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0 \text{ dB} \rightarrow \frac{100}{\omega_g \sqrt{1+\frac{\omega_g^2}{20^2}} \sqrt{1+\frac{\omega_g^2}{100^2}}} = \sqrt{\alpha} \xrightarrow{\omega_g=75,4} \alpha = 0,0737$$

$$T = \frac{1}{\omega_g \sqrt{\alpha}} \xrightarrow{\omega_g=75,4} T = 0,0488$$

Así pues, la red de adelanto que cumple las especificaciones sería:

$$G_c(s) = 0,54 \frac{1 + 0,0488s}{1 + 0,0036s}$$

5. Calcular el valor del error en estado estacionario en unidades de salida, ante una entrada rampa  $r(t) = 2,5t$ .

Se trata de un sistema tipo 1, por lo que el error estacionario ante una entrada en velocidad de amplitud  $A = 2,5$  en unidades de entrada viene dado por,

$$e_{ssv} = \frac{A}{K_v} \xrightarrow[\kappa_v=100]{A=2,5} e_{ssv} = 0,025$$

Para encontrar el valor del error en unidades de salida basta con dividir el error en unidades de entrada entre la ganancia del sensor  $H = 0,75$  en unidades de entrada viene dado por,

$$e_{ssv} = \frac{e_{ssv}}{H} \xrightarrow[H=0,75]{e_{ssv}=0,025} e_{ssv} = 0,0333$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema con un controlador proporcional ( $G_c(s) = K_c$ ) será:

$$G_{La}(s) = K_c G(s) H(s) = \frac{183,67 K_c}{s \left(1 + \frac{s}{20}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

Para aumentar el margen de ganancia es necesario reducir la ganancia del lazo. Para nuestro caso, es necesario introducir un valor de  $K_c < 1$  de tal forma que el módulo de la función de transferencia en bucle abierto a la frecuencia de cruce de fase llegue a  $6 \text{ dB}$  ( $MG_f$ ). La frecuencia de cruce de fase no se modifica con la variación de  $K_c$ , así que  $\omega_f = 44,7 \text{ rad/s}$ .

$$MG_f = -20 \log |K_c G(j\omega) H(j\omega)|_{\omega=\omega_f} = -20 \log |G(j\omega) H(j\omega)|_{\omega=\omega_f} - 20 \log |K_c| = MG - 20 \log K_c$$

Como se puede observar, el margen de ganancia final para el sistema compensado con un control proporcional es el margen de ganancia del sistema no compensado menos la magnitud que introduce el controlador. Así pues,

$$MG - 20 \log K_c = 6 \text{ dB} \xrightarrow{\Delta MG = -3,7 \text{ dB}} -20 \log K_c = 6 - (-3,7) = 9,7 \rightarrow \boxed{K_c = 0,3273}$$

El nuevo margen de fase para el sistema con el control proporcional será,

$$20 \log |K_c G(j\omega) H(j\omega)|_{\omega=\omega_g} = 0 \rightarrow \frac{183,67 \cdot 0,3273}{\omega_g \sqrt{1 + \frac{\omega_g^2}{20^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega_g^2}{100^2}}} = 1 \rightarrow \omega_g = 31,1 \text{ rad/s}$$

$$MF = 180 + \text{Arg}[G(j\omega) H(j\omega)]_{\omega=\omega_g} \rightarrow MF = 180 - 90 - \arctg \frac{\omega_g}{20} - \arctg \frac{\omega_g}{100} \rightarrow \boxed{MF = 15,5^\circ}$$

4. Diseñar el controlador más sencillo de forma que cumpla las siguientes especificaciones: error estacionario en velocidad del 1%, ancho de banda equivalente de 12 Hz.

El ancho de banda del sistema en lazo cerrado es posible aproximarlos por la frecuencia de cruce de ganancia. Dado que en el sistema sin compensar la frecuencia de cruce de ganancia es  $\omega_g = 55 \text{ rad/s}$  y se desea aumentar hasta 12 Hz ( $\omega_c = 2\pi \cdot 12$ ,  $\omega_g = 75,4 \text{ rad/s}$ ), se puede realizar el aumento del ancho de banda de tres formas:

- introducir un controlador proporcional que modifique la ganancia del sistema: esta opción no parece válida dado que, si bien con el control proporcional permite ajustar el error, no es posible ajustar el ancho de banda al mismo tiempo.
- introducir un controlador PD ideal: permite ajustar el error y aumentar el ancho de banda.
- introducir una red de adelanto: al igual que el PD ideal, permite ajustar el error y aumentar el ancho de banda.

Realicemos los cálculos para un controlador proporcional. En este caso, las ecuaciones del controlador y de la función de transferencia en lazo abierto serán:

$$G_c(s) = K_c$$

$$G_{La}(s) = G_c(s) G(s) H(s) = \frac{183,67 K_c}{s \left(1 + \frac{s}{20}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

Atendiendo a las especificaciones del estacionario,

$$e_{sv} = \frac{1}{K_v} = 1\% = 0,01 \rightarrow K_v = 100$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{La}(s) = 183,67 K_c \rightarrow \boxed{K_c = 0,5444}$$

Dado que el controlador necesario reduce la ganancia, el ancho de banda disminuye, por lo que un controlador proporcional no cumple especificaciones.

Realicemos los cálculos para el PD ideal. En este caso, las ecuaciones del controlador y de la función de transferencia en lazo abierto serán:

$$G_c(s) = K_c (1 + T_d s)$$

$$G_{La}(s) = G_c(s) G(s) H(s) = \frac{183,67 K_c (1 + T_d s)}{s \left(1 + \frac{s}{20}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_  
1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_  
2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

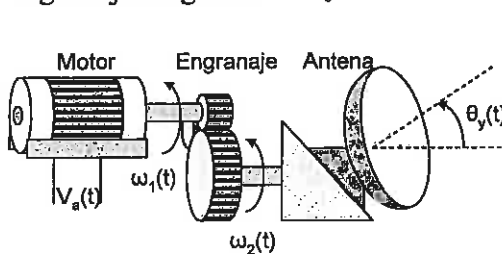
Tiempo:  
**1,5 Horas**

Grupo:

**PROBLEMA 1 (5 PUNTOS)**

El sistema de la *Figura 1* se corresponde con el mecanismo de posicionamiento angular de una antena. El movimiento se produce mediante un motor de corriente continua acoplado a la antena mediante un sistema de engranaje reductor. La inclinación del plato de la antena  $\theta_y(t)$  se controla variando la tensión de alimentación del motor  $V_a(t)$ .

La posición de la antena se mide mediante un potenciómetro acoplado en el eje de salida del engranaje de ganancia  $K_\theta$ .



*Figura 1*

$R_i$	1 $\Omega$	Resistencia del inducido del motor
$L_i$	0.0 Hr	Inductancia del inducido del motor
$K_m$	0.05 Nwm/A	Cte de par del motor
$K_b$	1.6 V/rad seg <sup>-1</sup>	Cte eléctrica del motor.
$J$	0.03 Kgm <sup>2</sup>	Inercia total en el eje del motor
$B$	0.05 Nwm/rad.seg <sup>-1</sup>	Fricción viscosa total en el eje del motor
$n$	5	Relación de reducción del engranaje
$K_\theta$	1 V/rad	Ganancia del potenciómetro

*Modelo matemático del motor:*

$$e_b(t) = K_b \omega_1(t)$$

$$T_m(t) = K_m i(t)$$

$$V_a(t) = R_i i(t) + L_i \frac{di(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$J \frac{d\omega_1(t)}{dt} + B \omega_1(t) = T_m(t)$$

$V_a$  Tensión de entrada

$e_b$  Fuerza contraelectromotriz

$T_m$  Par motor

Se pide:

- 1) Obtener el diagrama de bloques indicando sobre el diagrama todas las señales involucradas y unidades de cada una de ellas. A partir del diagrama de bloques, calcular la función de transferencia entre  $\theta_y(t)$  y  $V_a(t)$ .
- 2) Diseñar en el lugar de las raíces el controlador más sencillo y de menor ganancia para el control de posición angular que cumpla las siguientes especificaciones: error estacionario en posición nulo, sobreimpulso menor o igual que el 4,3% y tiempo de establecimiento (5%) menor o igual que 1 segundo.
- 3) El viento provoca sobre la antena un par resistente de 1 Nwm en el eje de salida que a través del engranaje se opone al par motor. Con el controlador calculado en el apartado anterior; redibujar el diagrama de bloques completo del sistema de control indicando la posición correspondiente a la acción del viento. Calcular la influencia de la acción del viento en régimen permanente sobre el ángulo de la antena.

## SOLUCIÓN

1. Obtener el diagrama de bloques y calcular la función de transferencia entre  $\theta_y(t)$  y  $V_a(t)$ .

Las ecuaciones del modelo matemático correspondientes al motor son:

$$\begin{aligned} e_b(t) &= K_b \omega_1(t) \\ T_m(t) &= K_m i_1(t) \\ V_a(t) &= R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + e_b(t) \\ J \frac{d\omega_1(t)}{dt} + B \omega_1(t) &= T_m(t) \end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas, teniendo en cuenta que la inductancia del inducido es nula y desarrollando,

$$\left. \begin{aligned} e_b(s) &= K_b \omega_1(s) \\ V_a(s) - e_b(s) &= R_1 I_1(s) \\ T_m(s) &= K_m I_1(s) \end{aligned} \right\} T_m(s) = \frac{K_m}{R_1} [V_a(s) - e_b(s)]$$

$$\omega_1(s) = T_m(s) \frac{1}{Js + B}$$

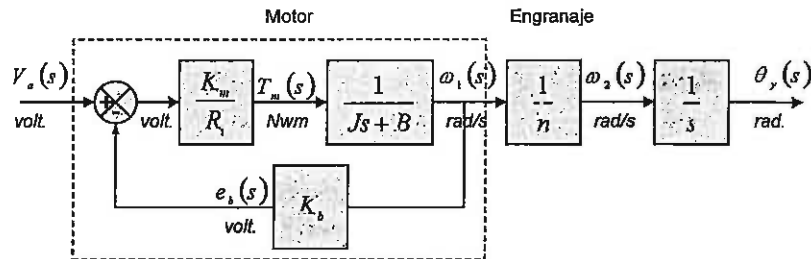
Para el engranaje,

$$\omega_2(t) = \frac{1}{n} \omega_1(t) \xrightarrow{L} \omega_2(s) = \frac{1}{n} \omega_1(s)$$

Y dado que se trata de una salida en posición,

$$\frac{d\theta_y(t)}{dt} = \omega_2(t) \xrightarrow{L} \theta_y(s) = \frac{1}{s} \omega_2(s)$$

Así pues, el diagrama de bloques correspondiente al mecanismo de posicionamiento angular de la antena es el siguiente:



La función de transferencia sería,

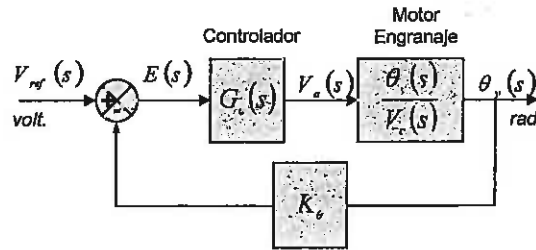
$$\frac{\theta_y(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{ns} \frac{\frac{K_m}{R_1} \frac{1}{Js + B}}{1 + \frac{K_b K_m}{R_1} \frac{1}{Js + B}} = \frac{1}{ns} \frac{K_m}{R_1 Js + R_1 B + K_b K_m} = \frac{K_m}{n(R_1 B + K_b K_m)} \frac{1}{s \left[ \frac{R_1 J}{R_1 B + K_b K_m} s + 1 \right]}$$

Sustituyendo para los valores reales,

$$\frac{\theta_y(s)}{V_a(s)} = \frac{0,05}{5 \cdot (1 \cdot 0,05 + 1,6 \cdot 0,05)} \frac{1}{s \left[ \frac{1 \cdot 0,03}{1 \cdot 0,05 + 1,6 \cdot 0,05} s + 1 \right]} \rightarrow \frac{\theta_y(s)}{V_a(s)} = \frac{0,0769}{s(0,2308s + 1)} \rightarrow \frac{\theta_y(s)}{V_a(s)} = \frac{0,33}{s(s + 4,33)}$$

2. Diseñar en el lugar de las raíces el control de posición angular más sencillo que cumpla las siguientes especificaciones: error en posición nulo, sobrepulso menor que el 4,3% y tiempo de establecimiento (5%) menor que 1 segundo.

El sistema de control propuesto tendría el siguiente diagrama simplificado de bloques,



La función de transferencia en lazo abierto del sistema sería entonces,

$$\frac{\theta_v(s)}{E(s)} = G_c(s) \frac{\theta_v(s)}{V_a(s)} K_o = \frac{0,33 G_c(s)}{s(s+4,33)}$$

Para conseguir un error de posición nulo el sistema en lazo abierto debería tener al menos un integrador (sistema tipo 1 o superior). Dado que el sistema en lazo abierto ya posee el integrador, parece que bastaría con un controlador proporcional  $G_c(s) = K_c$ . Para este tipo de controlador la función de transferencia en lazo cerrado sería,

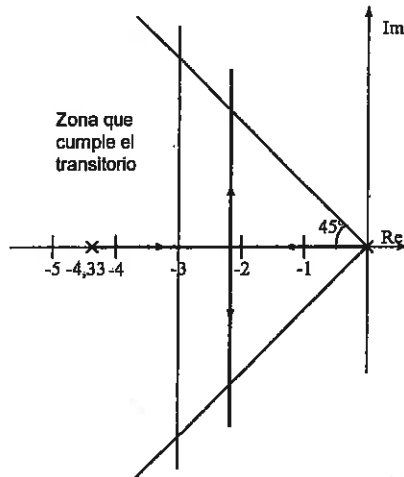
$$\frac{\theta_v(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{0,33 K_c}{s^2 + 4,33s + 0,33 K_c}$$

Para que se cumplan las especificaciones del transitorio,

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 0,043 \rightarrow \delta \geq 0,707 \rightarrow \cos\theta \geq 0,707 \rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

$$t_s|_{5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} \leq 1 \rightarrow \delta\omega_n \geq 3$$

Dibujemos el lugar de las raíces junto con las especificaciones del transitorio,



Como se puede observar, no existe intersección entre el lugar de las raíces y las condiciones de transitorio. Por lo tanto, el controlador propuesto no es válido. Introducimos la acción derivativa en el controlador para dar paso a un PD  $G_c(s) = K_c(T_d s + 1)$ . Para simplificar el problema, colocamos el cero aportado por el PD sobre el polo finito del sistema en lazo abierto. Es decir  $T_d = 0,2308$ . De esta forma,

$$G_c(s) = K_c 0,2308(s + 4,33)$$

$$\frac{\theta_v(s)}{E(s)} = G_c(s) \frac{\theta_v(s)}{V_a(s)} K_o = \frac{0,0769 K_c}{s}$$

$$\frac{\theta_v(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{0,0769 K_c}{s + 0,0769 K_c}$$

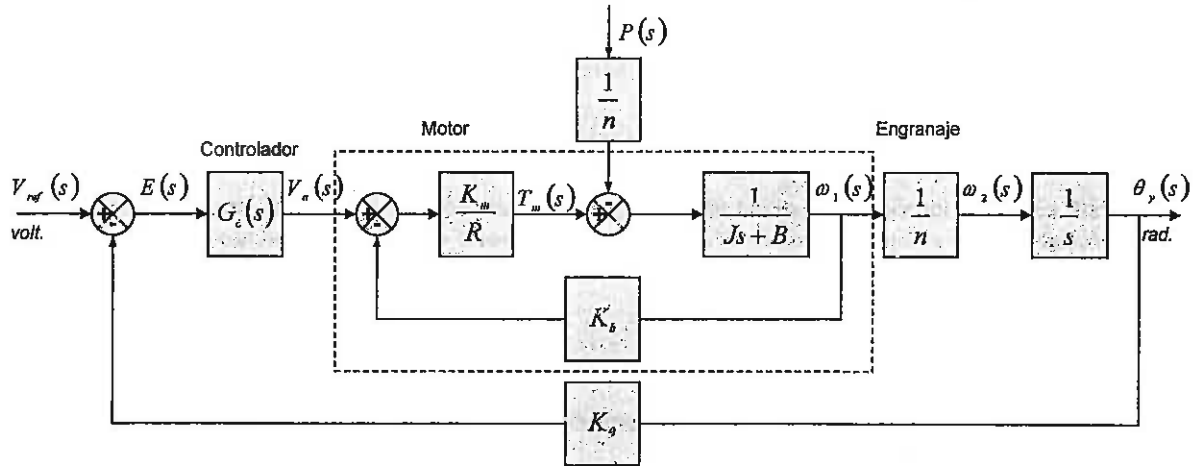
Se trata de un sistema de primer orden en donde es necesario encontrar el valor de  $K_c$ . Lo hacemos a partir del tiempo de establecimiento,

$$t_s|_{5\%} = 3T = 1 \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{0,0769 K_c} = 1 \rightarrow K_c = 39$$

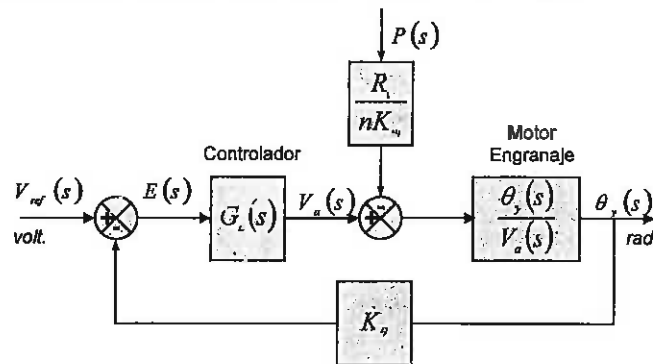
Así pues el controlador más sencillo que cumple las especificaciones es,

$$G_c(s) = 39 \cdot 0,2308(s + 4,33) \rightarrow \boxed{G_c(s) = 39(0,2308s + 1)} \rightarrow \boxed{G_c(s) = 9(s + 4,33)}$$

3. El esquema de control con el par resistente  $P(s)$  en el eje de salida del engranaje se muestra en la siguiente figura. Hacer notar cómo se divide por  $n$  el par resistente para llevarlo al eje de entrada del engranaje.



Simplificando el diagrama de bloques buscando funciones de transferencia ya calculadas,



Buscamos la función de transferencia que relaciona la perturbación con la salida del sistema,

$$\frac{\theta_y(s)}{P(s)} = \frac{R_1}{nK_m} \frac{\frac{\theta_y(s)}{V_a(s)}}{1 + G_c(s) \frac{\theta_y(s)}{V_a(s)} K_b} = \frac{-1,33}{(s+3)(s+4,33)} = \frac{-1,33}{s^2 + 7,33s + 13}$$

Para calcular el ángulo de la antena respecto de una perturbación de 1 Nwm en régimen permanente aplicamos el teorema del valor final,

$$\left. \begin{aligned} \theta_{y_{ss}} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\theta_y(s)}{P(s)} P(s) \\ P(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \theta_{y_{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-1,33}{s^2 + 7,33s + 13} \frac{1}{s} \rightarrow \boxed{\theta_{y_{ss}} = -0,1025 \text{ rad.}}$$



Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_  
1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_  
2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**1,5 Horas**

Grupo:

**PROBLEMA 1 (5 PUNTOS)**

El sistema de control representado en la *Figura 1* se corresponde con el de un banco de pruebas en vacío para la multiplicadora de un aerogenerador. Inicialmente, el controlador ( $G_c(s)$ ) es un controlador proporcional de ganancia unidad. El amplificador ( $K_a$ ) es una ganancia de amplificación de tensión de valor 10. La constante del motor ( $K_t$ ) tiene un valor de 10 Nwm/v. La carga en el motor ( $G_q(s)$ ) presenta una respuesta ante una entrada escalón unitario tal como la representada en la *Figura 2*. La constante contraelectromotriz del motor ( $K_b$ ) tiene un valor de 0.1 v/rpm. La reductora presenta un factor de reducción en la velocidad de rotación ( $K_r$ ) de 1/50. La multiplicadora tiene una función de transferencia que presenta el diagrama de Bode de la *Figura 3*. El sensor se puede modelar por una ganancia ( $K_s$ ) de valor de 0.005 v/rpm.

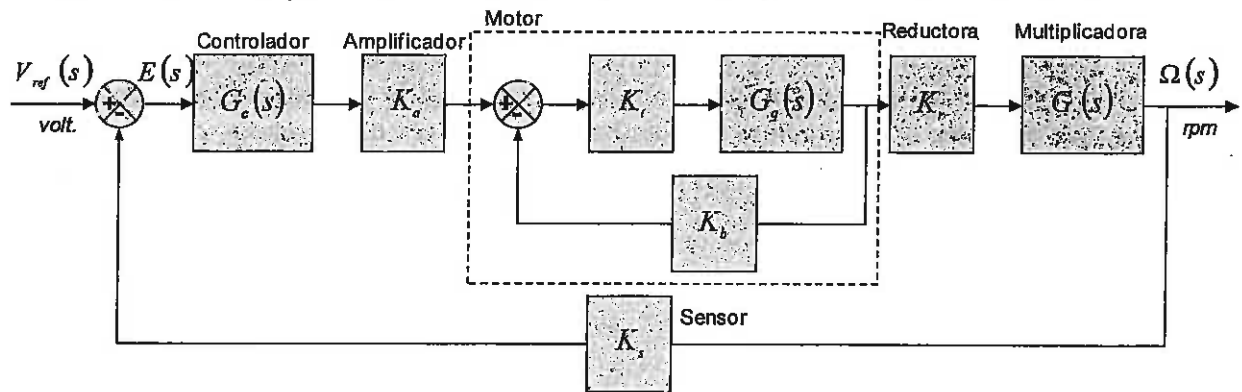


Figura 1

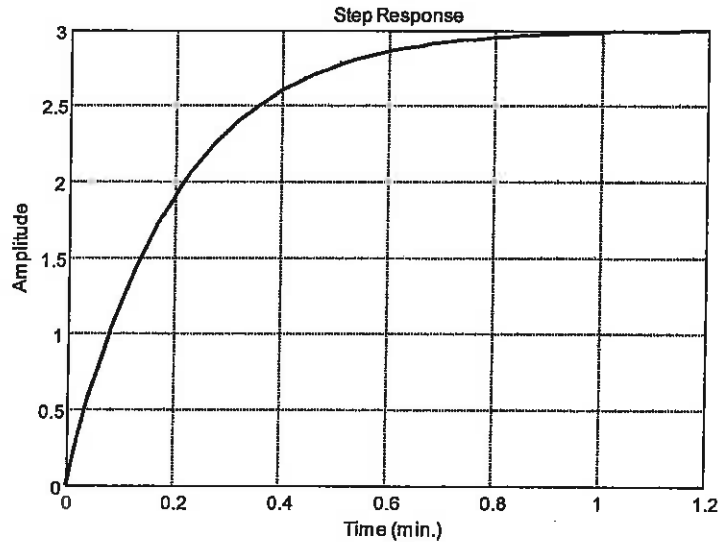


Figura 2

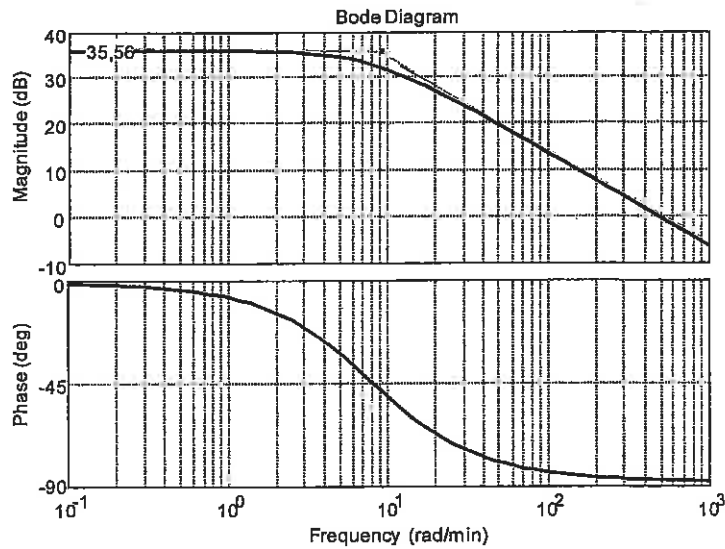


Figura 3

Se pide:

- 1) Obtener la función de transferencia en lazo abierto correspondiente al sistema de control.
- 2) Se observa una perturbación que se opone al par del eje del motor:
  - a) Dibujar el diagrama de bloques del sistema de control con la perturbación y obtener la expresión de la salida en función de la entrada de referencia y la perturbación.
  - b) Obtener el valor del error en estado estacionario en unidades de salida ante una entrada de referencia constante de 10 voltios y una perturbación también constante de 100 Nwm.
- 3) Sin tener en cuenta el efecto de la perturbación, diseñar un nuevo controlador en el lugar de las raíces de forma que se trate del controlador más sencillo y de mayor ganancia para que el control cumpla las siguientes especificaciones: error estacionario en posición nulo, sobreimpulso menor o igual que el 4,3% y tiempo de establecimiento (5%) menor o igual que 24 segundos.

SOLUCIÓN

1. Obtener la función de transferencia en lazo abierto correspondiente al sistema de control.

La función de transferencia correspondiente al sistema en lazo abierto será:

$$G_{La}(s) = G_c(s)K_a G_m(s)K_r G_i(s)K_s$$

La función de transferencia  $G_m(s)$  se corresponde con la función de transferencia del bloque motor:

$$G_m(s) = \frac{K_r G_q(s)}{1 + K_r G_q(s)K_b}$$

La función de transferencia correspondiente a la carga del motor puede obtenerse a partir su respuesta escalón unitario. Observando dicha respuesta se puede observar que se trata de un sistema de primer orden con una ganancia estática de 3 y constante de tiempo de 0,2 minutos. Por lo tanto:

$$G_q(s) = \frac{K_q}{T_q s + 1} \left. \begin{array}{l} K_q = 3 \\ T_q |_{63\%K_q} = 0,2 \end{array} \right\} G_q(s) = \frac{3}{0,2s + 1} \rightarrow G_q(s) = \frac{15}{s + 5}$$

Por tanto, sustituyendo valores, la función de transferencia del motor será:

$$G_m(s) = \frac{10 \cdot \frac{15}{s + 5}}{1 + 10 \cdot \frac{15}{s + 5} \cdot 0,1} \rightarrow G_m(s) = \frac{150}{s + 20}$$

La función de transferencia correspondiente a la multiplicadora en vacío puede obtenerse a partir de del diagrama de bode. Observando dicho diagrama se puede observar que se trata de un sistema de primer orden con una ganancia estática de 35,56dBs y una frecuencia de cruce de 8 rad/min. Por lo tanto:

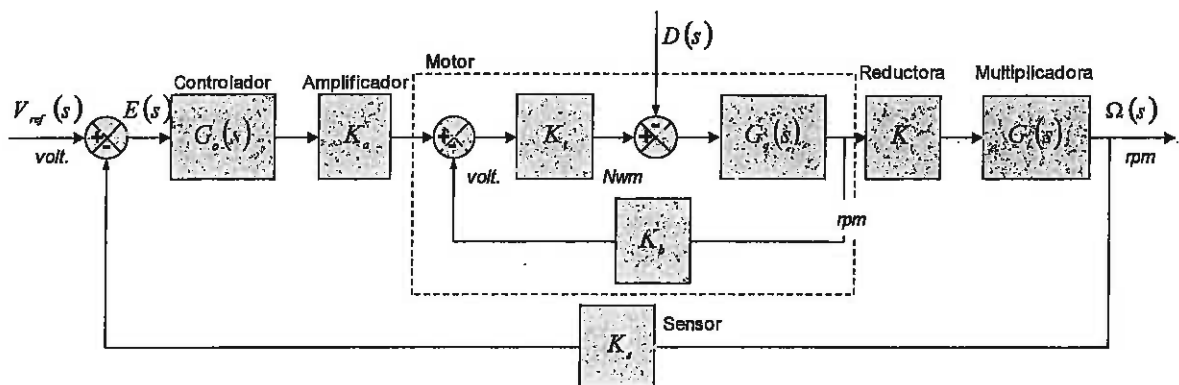
$$G_i(s) = \frac{K_i}{T_i s + 1} \left. \begin{array}{l} 20 \log K_i = 35,56 \rightarrow K_i = 60 \\ T_i = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{8} = 0,125 \end{array} \right\} G_i(s) = \frac{60}{0,125s + 1} \rightarrow G_i(s) = \frac{480}{s + 8}$$

Sustituyendo todos los valores sobre la función de transferencia en lazo abierto:

$$G_{La}(s) = 1 \cdot 10 \cdot \frac{150}{s + 20} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{480}{s + 8} \cdot 0,005 \rightarrow G_{La}(s) = \frac{72}{(s + 8)(s + 20)} \rightarrow G_{La}(s) = \frac{72}{s^2 + 28s + 160}$$

2.a Obtener la expresión de la salida en función de la entrada y la perturbación.

El sistema de control con la perturbación puede representarse según el siguiente diagrama de bloques:



Aplicando el principio de superposición:

$$\Omega(s) = M_v(s)V(s) + M_D(s)D(s)$$

$$M_v(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} \Big|_{D(s)=0} = \frac{G_c(s)K_a G_m(s)K_r G_i(s)}{1 + G_c(s)K_a G_m(s)K_r G_i(s)K_s} \rightarrow M_v(s) = \frac{G_c(s)K_a K_r G_q(s)K_r G_i(s)}{1 + K_r G_q(s)K_b + G_c(s)K_a K_r G_q(s)K_r G_i(s)K_s}$$

$$M_D(s) = \frac{\Omega(s)}{D(s)} \Big|_{V(s)=0} \left\{ \begin{array}{l} \left[ -\Omega(s)K_c G_c(s)K_a - \Omega(s) \frac{1}{K_r G_r(s)} K_b \right] K_r - D(s) \\ \Omega(s) \left[ 1 + G_c(s)K_a K_r G_c(s)K_r + K_r G_c(s)K_b \right] = -G_c(s)K_r G_c(s)D(s) \end{array} \right.$$

$$M_D(s) = \frac{-G_c(s)K_r G_c(s)}{1 + K_r G_c(s)K_b + G_c(s)K_a K_r G_c(s)K_r G_c(s)K_r}$$

Sustituyendo valores:

$$M_v(s) = \frac{14400}{s^2 + 28s + 232}$$

$$M_D(s) = \frac{-144}{s^2 + 28s + 232}$$

Así pues,

$$\Omega(s) = \frac{14400}{s^2 + 28s + 232} V(s) - \frac{144}{s^2 + 28s + 232} D(s)$$

- 2.b Obtener el valor del error en estado estacionario en unidades de salida ante una entrada constante de 10 voltios y una perturbación también constante de 100 Nwm.

Aplicando el principio de superposición para el error en unidades de entrada:

$$e_{ue} = e_{uv} + e_{ud}$$

El error correspondiente a la entrada es:

$$e_{uv} = \frac{1}{1 + K_p} \cdot 10; \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{Ld}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{72}{s^2 + 28s + 160} = 2 \quad \rightarrow \quad e_{uv} = \frac{1}{1 + 0,45} \cdot 10 \quad \rightarrow \quad e_{uv} = 6,89 \text{ volt.}$$

El error correspondiente a la perturbación es:

$$\left. \begin{array}{l} e_{ud} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_D(s) \\ E_D(s) = V(s) - \Omega(s)K_r \Big|_{V(s)=0} = -M_D(s)K_r D(s) \\ D(s) = \frac{100}{s} \end{array} \right\} e_{ud} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{144}{s^2 + 28s + 232} \cdot 0,005 \cdot \frac{100}{s} \quad \rightarrow \quad e_{ud} = 0,31 \text{ volt.}$$

Por lo tanto, el error en unidades de entrada es:

$$e_{ue} = e_{uv} + e_{ud} = 6,89 + 0,31 = 7,2 \text{ volt.}$$

Y el error en unidades de salida es:

$$e_{us} = \frac{1}{K_r} e_{ue} = \frac{7,2}{0,005} \quad \rightarrow \quad e_{us} = 1440 \text{ rpm}$$

3. Diseñar en el lugar de las raíces el controlador de posición más sencillo y mayor ganancia que cumpla las siguientes especificaciones: error en posición nulo, sobreimpulso menor que el 4,3% y tiempo de establecimiento (5%) menor que 24 segundos.

Partiendo de la función de transferencia en lazo abierto y, dado que se trata de un sistema tipo 0, para conseguir un error de posición nulo el sistema en lazo abierto debería tener al menos un integrador (sistema tipo 1 o superior). Así pues, es necesario partir de un controlador PI:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1/T_i}{s}$$

El cero del PI lo colocamos por simplicidad sobre el polo más dominante  $s = -8$  ( $T_i = 0,125$ ). En estas circunstancias, la función de transferencia en lazo abierto sería,

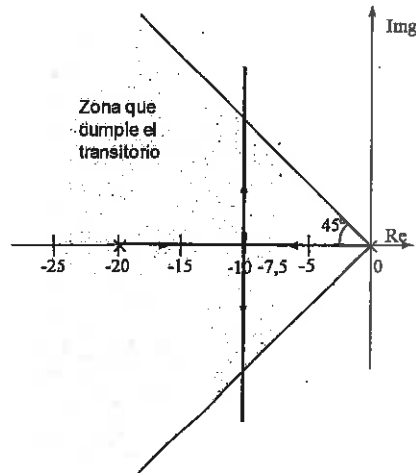
$$G_{Ld}(s) = \frac{72K_c}{s(s + 20)}$$

Para que se cumplan las especificaciones del transitorio: sobreimpulso menor que el 4,3% y tiempo de establecimiento (5%) menor que 24 segundos (0,4 minutos),

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 0,043 \rightarrow \delta \geq 0,707 \rightarrow \cos\theta \geq 0,707 \rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

$$t_s|_{5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} \leq 0,4 \rightarrow \delta\omega_n \geq 7,5$$

Dibujando el lugar de las raíces junto con las especificaciones del transitorio,



Como se puede observar existe intersección entre el lugar de las raíces y las condiciones de transitorio, por lo que parece que la elección del tipo de controlador es correcta.

Para calcular el valor de  $K_c$  empleamos la condición del módulo y, dado que buscamos la mayor ganancia, calculamos el valor de  $K_c$  que hace que los polos del sistema en lazo cerrado se encuentren en  $s = -10 \pm 10j$ ,

$$K = |s| |s + 20| \Big|_{s=-10+10j} = |-10+10j| |10+10j| = 200 \rightarrow K = 72K_c \rightarrow K_c = 2,77$$

Así pues el controlador más sencillo que cumple las especificaciones es,

$$G_c(s) = 2,77 \frac{s+8}{s}$$

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page, appearing as a vertical column of characters.

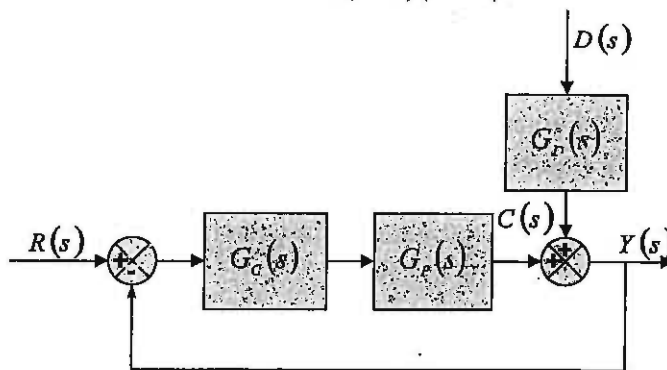
Nombre \_\_\_\_\_  
 Izena \_\_\_\_\_  
 1º Apellido \_\_\_\_\_  
 1 Deitura \_\_\_\_\_  
 2º Apellido \_\_\_\_\_  
 2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**1,5 Horas**

Grupo:

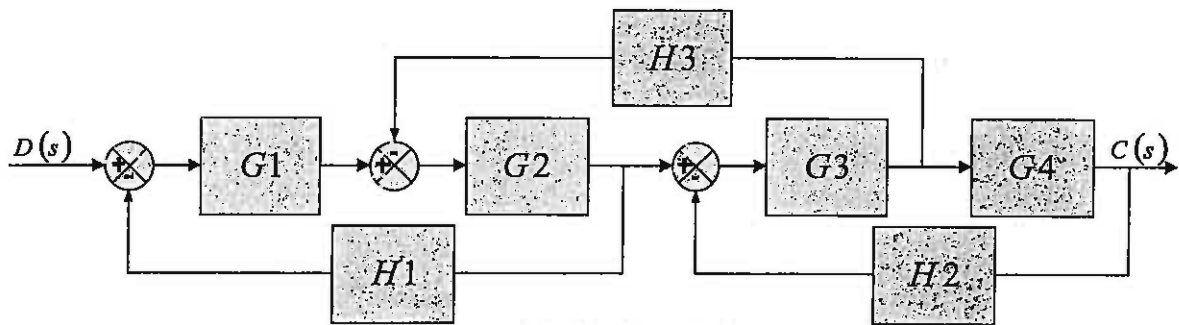
**PROBLEMA 2 (5 PUNTOS)**

La *Figura 1* representa el diagrama de bloques de un sistema de control donde  $R(s)$  es la entrada de referencia,  $G_c(s)$  es un controlador,  $G_p(s) = \frac{50}{s(s+5)(s+10)}$  y  $D(s)$  es una perturbación.



*Figura 1: Diagrama de bloques del sistema de control*

El diagrama de bloques del subsistema  $G_D(s)$  es el mostrado en la *Figura 2*.



*Figura 2: Subsistema  $G_D(s)$*

En la *Figura 3* se muestra el diagrama de módulo de Bode del sistema sin perturbación en lazo abierto para un controlador proporcional.

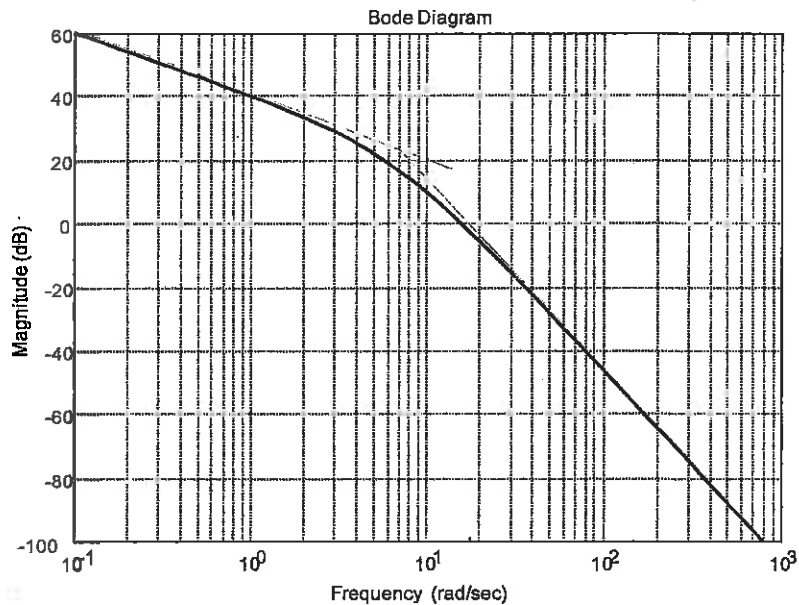


Figura 3: Diagrama de Bode de módulo en lazo abierto

### Se pide:

- 1) Aplicando las leyes del álgebra de bloques obtener la función de transferencia del subsistema  $G_D(s)$  mostrado en la Figura 2. Particularizar la función de transferencia del subsistema para los siguientes valores:  $G1 = 1/2$ ;  $G2 = 1/s$ ;  $G3 = 1$ ;  $G4 = 1/s$ ;  $H1 = -s$ ;  $H2 = s$ ;  $H3 = 10$ .
- 2) Para una perturbación nula, determinar analíticamente el margen de fase del sistema e indicar si en esas condiciones el sistema es estable.
- 3) En las mismas condiciones del apartado anterior, se pretende mejorar la estabilidad sustituyendo el controlador proporcional por otro proporcional derivativo. Calcular el valor de la ganancia del nuevo controlador ( $K_c$ ) para garantizar un error de velocidad del 10%.
- 4) Siguiendo en las mismas condiciones y utilizando el valor de  $K_c$  obtenido en el apartado anterior y una constante de tiempo derivativo  $T_d = 0,2$ , calcular analíticamente la salida del sistema  $y(t)$  cuando se le somete a una entrada de referencia impulso unitario.
- 5) Empleando el mismo controlador del apartado anterior, calcular la salida en estado estacionario del sistema  $y_{ss}(t)$  cuando se le somete a una entrada de referencia escalón de amplitud 5 y en presencia de una perturbación  $d(t) = 0,25 \text{ sen } 20t$ .



$$e_{av} = \frac{1}{k_v} = 0,1 \rightarrow k_v = 10$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{LA}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c (1 + T_d s) \frac{50}{s(s+5)(s+10)} = K_c$$

$$\left. \begin{array}{l} e_{av} = \frac{1}{k_v} = 0,1 \rightarrow k_v = 10 \\ k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{LA}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c (1 + T_d s) \frac{50}{s(s+5)(s+10)} = K_c \end{array} \right\} \boxed{K_c = 10}$$

4. Para el valor de  $K_c$  obtenido en el apartado anterior y  $T_d = 0,2$ , calcular analíticamente la salida del sistema  $y(t)$  cuando se le somete a una entrada de referencia impulso unitario.

El controlador tendrá una función de transferencia  $G_c(s)$ :

$$G_c(s) = K_c (T_d s + 1) = 10(1 + 0,2s) \rightarrow G_c(s) = 2(s + 5)$$

De esta forma, la función de transferencia en lazo abierto será:

$$M_{RLA}(s) = G_c(s) G_p(s) = 2(s + 5) \frac{50}{s(s + 5)(s + 10)} = \frac{100}{s(s + 10)}$$

Como se puede observar, se trata de un sistema tipo 1. La función de transferencia en lazo cerrado debida a la entrada de referencia (en ausencia de perturbación) se puede calcular como:

$$M_R(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{D(s)=0} = \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)} \rightarrow M_R(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

Podemos calcular la salida del sistema debida a la entrada de referencia impulso unitario como:

$$\left. \begin{array}{l} Y_R(s) = M_R(s) R(s) \\ r(t) = \delta(t) \rightarrow R(s) = 1 \end{array} \right\} Y_R(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100} \cdot 1 = \frac{11,55 \cdot 8,66}{(s + 5)^2 + 8,66^2} \rightarrow \boxed{y_r(t) = 11,55 e^{-5t} \text{sen} 8,66t}$$

5. Empleando el mismo controlador del apartado anterior, calcular la salida en estado estacionario del sistema  $y_{ss}(t)$  cuando se le somete a una entrada de referencia escalón de amplitud 5 y una perturbación  $d(t) = 0,25 \text{sen} 20t$ .

Dado que el sistema es lineal es posible aplicar el principio de superposición:

$$Y(s) = M_R(s) R(s) + M_D(s) D(s) \rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{M_R(s) R(s)\} + L^{-1}\{M_D(s) D(s)\} = y_r(t) + y_d(t)$$

$$y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ssr}(t) + y_{ssd}(t)$$

Dado que se trata de un sistema estable tipo 1, el sistema es capaz de seguir a una entrada escalón sin error en el estacionario. La entrada de referencia es un escalón de amplitud 5 y tenemos realimentación unitaria; por lo tanto, la componente de la salida en estado estacionario correspondiente a la entrada de referencia será:

$$y_{ssr}(t) = 5$$

Por otra parte, dado que la entrada de perturbación es una señal sinusoidal  $d(t) = 0,25 \text{sen} 20t$ , la componente de la salida del sistema en estado estacionario debida a la perturbación puede calcularse como:

$$y_{ssd}(t) = 0,25 |M_D(j\omega)|_{\omega=20} \text{sen}(t + \text{Arg}[M_D(j\omega)]_{\omega=20})$$

La función de transferencia en lazo cerrado debida a la perturbación (en ausencia de referencia) será:

$$M_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} \Big|_{R(s)=0} = G_D(s) \frac{1}{1 + G_c(s) G_p(s)} \rightarrow M_D(s) = \frac{0,5}{s(s+10)} \frac{s(s+10)}{s^2 + 10s + 100} \rightarrow M_D(s) = \frac{0,5}{s^2 + 10s + 100}$$

Se puede observar que el sistema sigue siendo estable. Por lo tanto, desarrollando la función de transferencia sinusoidal y calculando el módulo y argumento para  $\omega = 20 \text{rad/s}$ :

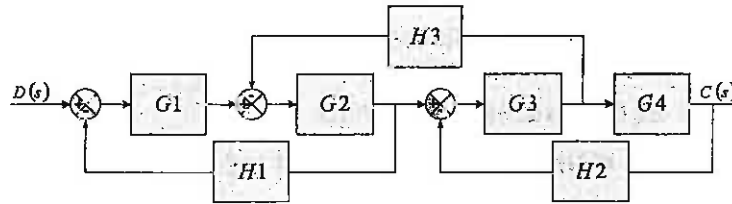
$$M_D(j\omega) = \frac{0,5}{100 - \omega^2 + j10\omega} \left\{ \begin{array}{l} |M_D(j\omega)| = \frac{0,5}{\sqrt{(100 - \omega^2)^2 + (10\omega)^2}} \\ \text{Arg}[M_D(j\omega)] = -\arctan \frac{10\omega}{100 - \omega^2} \end{array} \right. \Big|_{\omega=20} \left\{ \begin{array}{l} |M_D(j\omega)| = 1,38 \cdot 10^{-3} \\ \text{Arg}[M_D(j\omega)] = -146,31^\circ = -2,55 \text{rad} \end{array} \right.$$

De esta forma, la componente de la salida en estado estacionario del sistema correspondiente a la perturbación será:

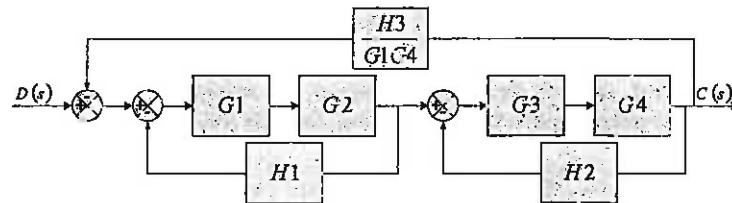
SOLUCIÓN

1. Obtener la función de transferencia del subsistema  $G_D(s)$ .

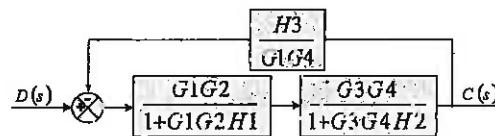
Aplicando algebra de bloques,



Moviendo el sumador a la izquierda del bloque G1 y el punto de bifurcación a la derecha de G4,



Realizando las dos realimentaciones de la cadena directa,



Resolviendo la realimentación,

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G1G2G3G4}{[1+G1G2H1][1+G3G4H2]+G2G3H3}$$

Desarrollando,

$$\frac{C(s)}{D(s)} = G_D(s) = \frac{G1 G2 G3 G4}{1 + G1 G2 H1 + G3 G4 H2 + G2 G3 H3 + G1 G2 G3 G4 H1 H2}$$

Particularizando para los valores aportados  $G1 = 1/2$ ;  $G2 = 1/s$ ;  $G3 = 1$ ;  $G4 = 1/s$ ;  $H1 = -s$ ;  $H2 = s$ ;  $H3 = 10$ :

$$G_D(s) = \frac{0,5}{s(s+10)}$$

2. Determinar analíticamente el margen de fase del sistema.

La función de transferencia del sistema en lazo abierto es:

$$G_{La}(s) = \frac{50K_c}{s(s+5)(s+10)} \rightarrow G_{La}(j\omega) = \frac{50K_c}{j\omega(5+j\omega)(10+j\omega)} \begin{cases} |G_{La}(j\omega)| = \frac{50K_c}{\omega\sqrt{5^2+\omega^2}\sqrt{10^2+\omega^2}} \\ Arg[G_{La}(j\omega)] = -90 - \arctan\frac{\omega}{5} - \arctan\frac{\omega}{10} \end{cases}$$

De la inspección de la gráfica se observa que la frecuencia de cruce de ganancia es  $\omega_g \approx 16 \text{ rad/s}$ . Así pues,

$$MF = 180 + Arg[G_{La}(j\omega)]_{\omega_g} \rightarrow MF = 90 - \arctan\frac{\omega_g}{5} - \arctan\frac{\omega_g}{10} \xrightarrow{\omega_g=16} MF = -40,64^\circ$$

Dado que el margen de fase es negativo, el sistema es inestable.

3. Calcular el valor de  $K_c$  en un control proporcional derivativo para garantizar un error de velocidad del 10%.

El nuevo controlador tiene una función de transferencia  $G_c(s) = K_c(1+T_d s)$ , por lo tanto,

$$y_{ss}(t) = 3,47 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}(20t - 2,55)$$

Así pues, la salida en estado estacionario del sistema en las condiciones especificadas será:

$$y_{ss}(t) = 5 + 3,47 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}(20t - 2,55)$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title, which is mostly illegible due to blurring.

Handwritten text in the middle section of the page, appearing as a list or series of notes.

Main body of handwritten text, consisting of several paragraphs of notes or a list of items, which is significantly blurred and difficult to read.

Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_

1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_

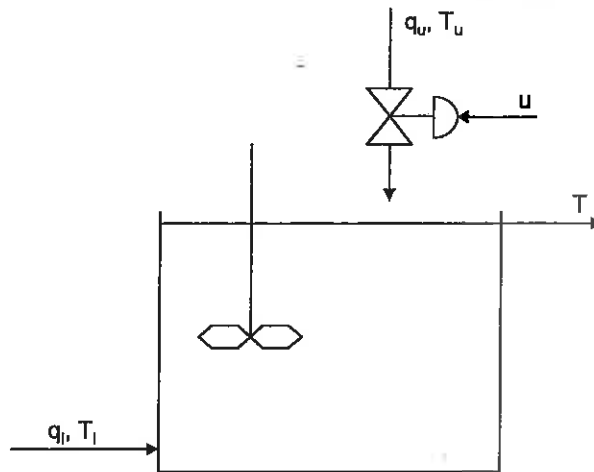
2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**1h 15 minutos**

Grupo  
**Talde**

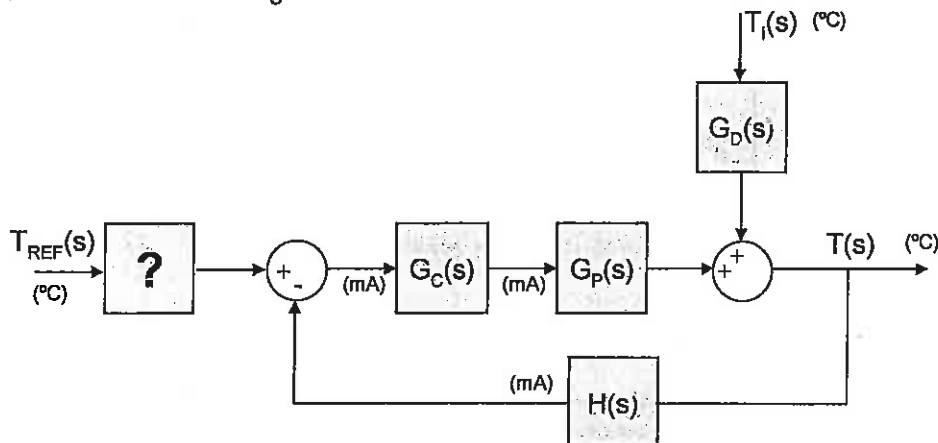
**PROBLEMA 1**

Sea el proceso de la Figura 1, en el que un caudal de líquido  $q_i$  a una temperatura  $T_i$  se introduce en un tanque perfectamente agitado. Dicho líquido se mezcla con otro cuyo caudal  $q_u$  que es manipulable mediante una válvula automática que recibe una señal eléctrica  $u$  (entre 0 y 20 mA) de un controlador. Este líquido entra a una temperatura  $T_u$  sensiblemente más elevada que la anterior y se emplea para calentar la mezcla. La mezcla de líquido sale del tanque por rebose a una temperatura  $T$ .



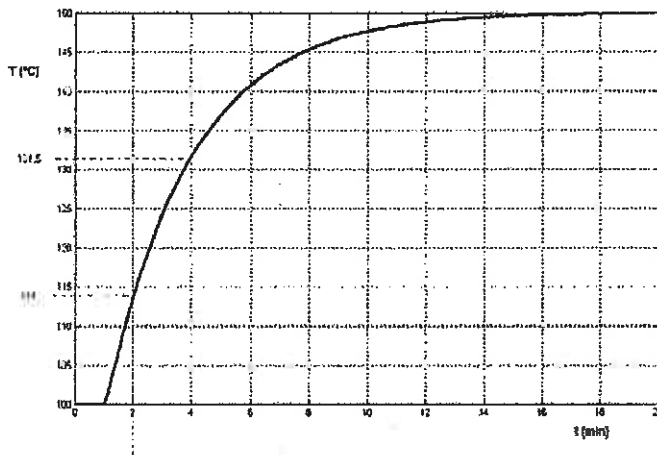
**Figura 1:** Mezcla de dos líquidos a distinta temperatura

Con el objetivo de controlar la temperatura  $T$  de la mezcla, se desea diseñar un esquema de control realimentado como se ve en la Figura 2.



**Figura 2:** Sistema de control de temperatura

Para obtener el modelo de proceso,  $G_P(s)$ , se ha realizado una experiencia en bucle abierto. En ella se observa que estando el sistema en estado estacionario y siendo la temperatura  $T$  de  $100\text{ }^\circ\text{C}$ , dicha temperatura evoluciona como indica la Figura 3 cuando la señal a la válvula,  $u$ , se incrementa de  $4$  a  $6\text{ mA}$ .



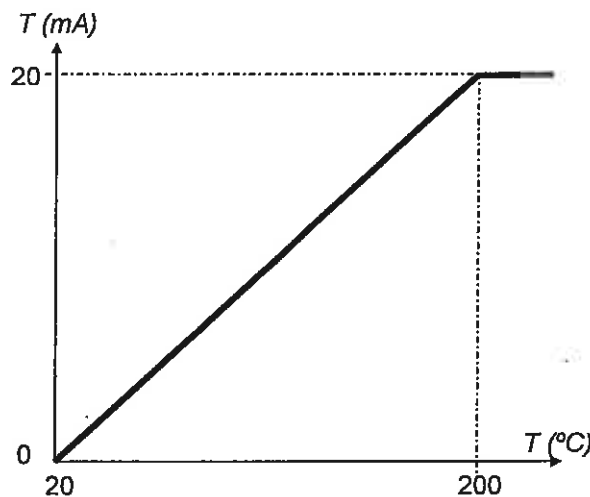
$$T = \frac{3}{2}(t_{63,2\%} - t_{28,3\%})$$

$$t_m = t_{63,2\%} - T$$

**Figura 3:** Respuesta en bucle abierto de la temperatura a un incremento de  $2\text{ mA}$  en la variable  $u$

Por otro lado se sabe que la temperatura  $T_i$  sufre variaciones impuestas aguas arriba. Cuando  $T_i$  sea mayor que la nominal, la mezcla lógicamente saldrá más caliente. Las demás variables, el caudal  $q_i$  y la temperatura  $T_u$ , se mantienen sensiblemente constantes. La función de transferencia  $G_D(s)$  de ganancia  $10\text{ }^\circ\text{C}/^\circ\text{C}$  y constante de tiempo  $11,5\text{ minutos}$  representa la evolución de la temperatura  $T$  ante variaciones en la temperatura  $T_i$ .

Para la medida de la temperatura se dispone de un sensor-transmisor  $H(s)$  cuya característica es lineal en el rango representado en la Figura 4.



**Figura 4:** Característica del sensor de temperatura

1. Calcular las funciones de transferencia indicadas en el diagrama de bloques, indicando las unidades de las relaciones que representan
  - $G_P(s)$ , que relaciona la temperatura  $T$  en  $^\circ\text{C}$  y la señal a la válvula  $u$ , en  $\text{mA}$
  - $G_D(s)$ , modelo de evolución ante la perturbación
  - $H(s)$ , ganancia del sensor
  - Bloque ?

### Cálculo de $G_p(s)$ :

El modelo aproximado de proceso  $G_p(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-t_m}$  lo obtenemos de la gráfica de respuesta de la temperatura ante variaciones en la señal a la válvula de la Figura 3:

$$\text{Ganancia estática: } K = \frac{\Delta T}{\Delta u} = \frac{150 - 100 \text{ (}^\circ\text{C)}}{6 - 4 \text{ (mA)}} = 25 \frac{^\circ\text{C}}{\text{mA}}$$

La constante de tiempo y retardo o tiempo muerto lo calculamos mediante el método de los dos puntos:

$$\bar{T} = 100^\circ\text{C} \Rightarrow T_{63,2\%} = 100^\circ + 0,63 * 50^\circ = 131,5^\circ\text{C} \Rightarrow t_{63,2\%} = 4 \text{ min}$$

$$T_{28,3\%} = 100^\circ + 0,28 * 50^\circ = 114^\circ\text{C} \Rightarrow t_{28,3\%} = 2 \text{ min}$$

$$\tau = \frac{3}{2}(t_{63,2\%} - t_{28,3\%}) = 3 \text{ min} ; t_m = t_{63,2\%} - \tau = 1 \text{ min}$$

$$G_p(s) = \frac{25}{1+3s} e^{-s} \frac{^\circ\text{C}}{\text{mA}}$$

### Cálculo de $G_D(s)$ :

Según el enunciado:  $G_D(s) = \frac{10}{1+11,5s} \frac{^\circ\text{C}}{^\circ\text{C}}$

### Cálculo de $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{20 - 0}{200 - 20} \frac{\text{mA}}{^\circ\text{C}} = 0,11 \frac{\text{mA}}{^\circ\text{C}}$$

### Bloque ?:

Este bloque debe ser una ganancia que transforme el valor de la referencia dada en  $^\circ\text{C}$  a su valor equivalente en  $\text{mA}$ , que es la unidad de señal que debe alimentar al controlador. Dicha ganancia será la misma que  $H(s) = 0,11 \text{ mA}/^\circ\text{C}$

2. Estudiar la estabilidad del sistema mediante el cálculo analítico de los márgenes de ganancia y fase. Representar gráficamente ambos márgenes sobre los diagrama de Bode de  $G(s)H(s)$  de la Figura 5. ¿Existe algún límite para la ganancia del controlador?

$$G(s)H(s) = G_p H = \frac{25 \cdot 0,11}{1+3s} e^{-s} \frac{\text{mA}}{\text{mA}}$$

Cálculo de  $\omega_f$ :

$$\text{Arg}GH(j\omega_f) = -\omega_f - \arctg 3\omega_f = -180^\circ \Rightarrow \omega_f = 1,76 \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

$$MG = -20 \log |GH(j\omega_f)| = 5,82 \text{ dB}$$

Cálculo de  $\omega_g$ :

$$|GH(j\omega)| = \frac{2,75}{\sqrt{1+9\omega^2}}$$

$$|GH(j\omega_g)| = 1 \Rightarrow \omega_g = 0,85 \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

$$MF = \pi + \text{Arg}GH(j\omega_g) = \pi - \omega_g - \arctg 3\omega_g$$

$$MF = 62,7^\circ$$

El sistema es estable para  $K_c = 1$

Diagrama de bode:

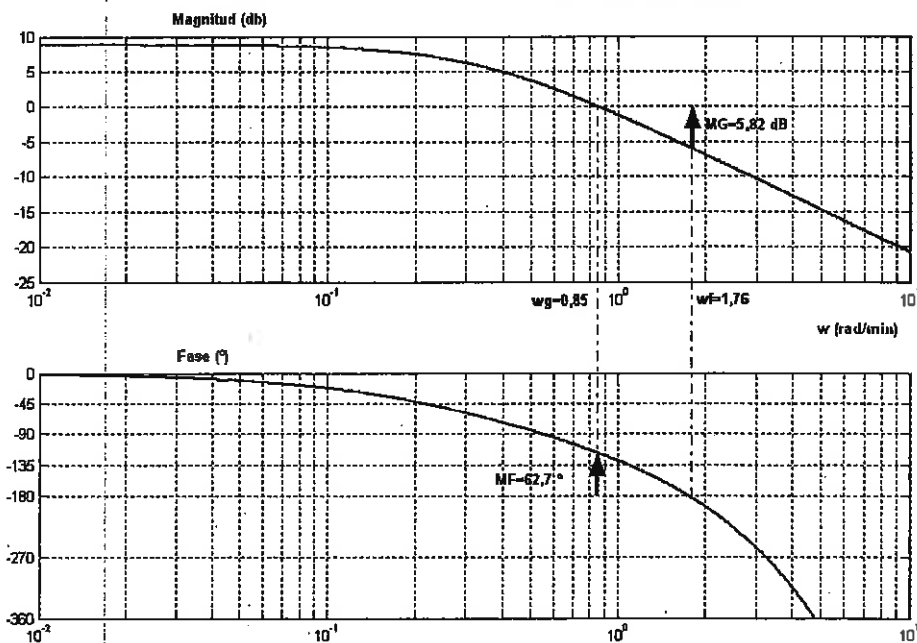


Figura 5: Diagramas de Bode de  $G(s)H(s)$

La ganancia del controlador se podría aumentar hasta el límite de la estabilidad, que lo podemos obtener a partir de la definición de MG.

$$MG = 5,82 \text{ dB}; \Rightarrow K_{cr} = 1,95$$

- Suponer que se provoca un incremento de  $10^\circ\text{C}$  en la referencia para la temperatura. Transcurrida una hora, se detecta una disminución de  $2^\circ\text{C}$  en la temperatura de entrada  $T_i$ . Siendo  $G_C(s)$  un controlador proporcional de ganancia  $K_C = 1$ , calcular la temperatura de la mezcla en estado estacionario ante las variaciones producidas en estas variables.

Primero tenemos que calcular la respuesta del sistema  $T(s)$  a variaciones en las dos entradas contempladas, la de referencia  $T_{REF}(s)$  y la de perturbación  $T_i(s)$ .



$$T(s) = \frac{G_C G_P}{1 + G_C G_P H} T_{REF}(s) + \frac{G_D}{1 + G_C G_P H} T_i(s)$$

$$T(s) = \frac{\frac{25Kc}{1+3s} e^{-s} \text{ (}^\circ\text{C)}}{1 + \frac{25.0,11Kc}{1+3s} e^{-s} \text{ (mA)}} \cdot \frac{10 \text{ (}^\circ\text{C)}}{s} \cdot 0,11 \frac{\text{(mA)}}{\text{ (}^\circ\text{C)}} + \frac{10}{1+11,5s} \frac{\text{ (}^\circ\text{C)}}{\text{ (}^\circ\text{C)}} \cdot \frac{-2 \text{ (}^\circ\text{C)}}{s} e^{-60s} =$$

$$= \frac{25Kc \cdot e^{-s}}{1+3s+25.0,11Kc \cdot e^{-s}} \frac{1,1}{s} \text{ (}^\circ\text{C)} - \frac{10(1+3s)}{(1+11,5s)(1+3s+25.0,11Kc \cdot e^{-s})} \cdot \frac{-2}{s} e^{-60s} \text{ (}^\circ\text{C)}$$

$$T_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s T(s)$$

$$T_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{25Kc}{1+3s+25.0,11Kc} \frac{1,1}{s} - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10(1+3s)}{(1+11,5s)(1+3s+25.0,11Kc)} \cdot \frac{-2}{s} e^{-60s}$$

$$T_{ss} = \frac{25 \cdot 1,1Kc}{1+25.0,11Kc} - \frac{20}{1+25.0,11Kc} \text{ (}^\circ\text{C)} = -4,76 \text{ }^\circ\text{C}$$

4. Para eliminar el efecto de la perturbación, se añade un lazo adicional al sistema de control realimentado, como se ve en la Figura 6. Calcular cual debe ser la ganancia  $K_F$  de la nueva función de transferencia  $G_F(s)$ , para que saltos escalón en la perturbación  $T_i$  no afecten a la salida  $T$  en estado estacionario.

$$G_F(s) = -K_F \frac{3s+1}{11,5s+1}$$

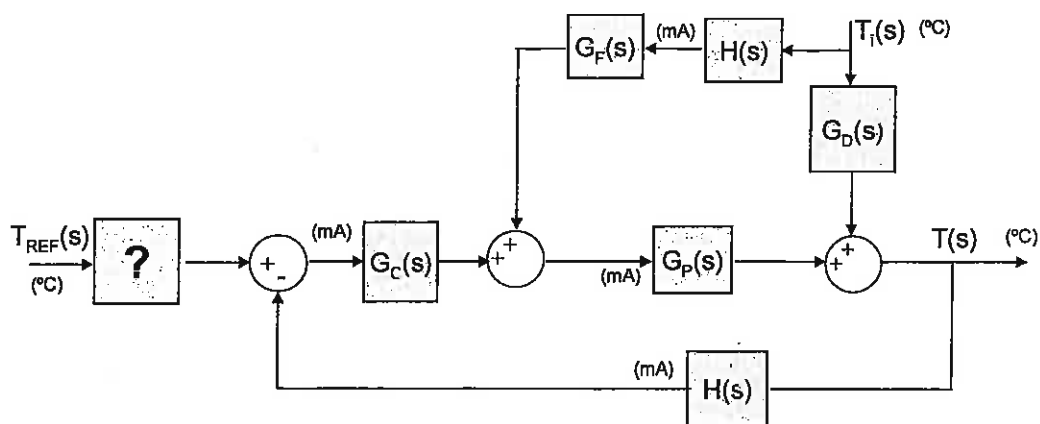


Figura 6: Diagrama de bloques del nuevo sistema de control

Para asegurar que variaciones en  $T_i$  no afecten a  $T$ , se debe cumplir que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{T(s)}{T_i(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_D + H G_F G_P}{1 + G_C G_P H} = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} (G_D + H G_F G_P) = 0$$

$$\frac{10}{1+11,5s} - 0,11K_F \frac{3s+1}{11,5s+1} \cdot \frac{25}{1+3s} e^{-s} = 0$$

$$10 - 2,75K_F = 0 \Rightarrow K_F = 3,63$$

5. Utilizando un método de modelado teórico en lugar del método experimental utilizado en el apartado 1 para la obtención de un modelo  $G_p(s)$  de la planta, se ha obtenido la función de transferencia de cuarto orden siguiente:

$$G_p(s) = \frac{125}{(3s+1)\left(\frac{s}{3}+1\right)(0.25s+1)(s+5)} \text{ } ^\circ C / mA$$

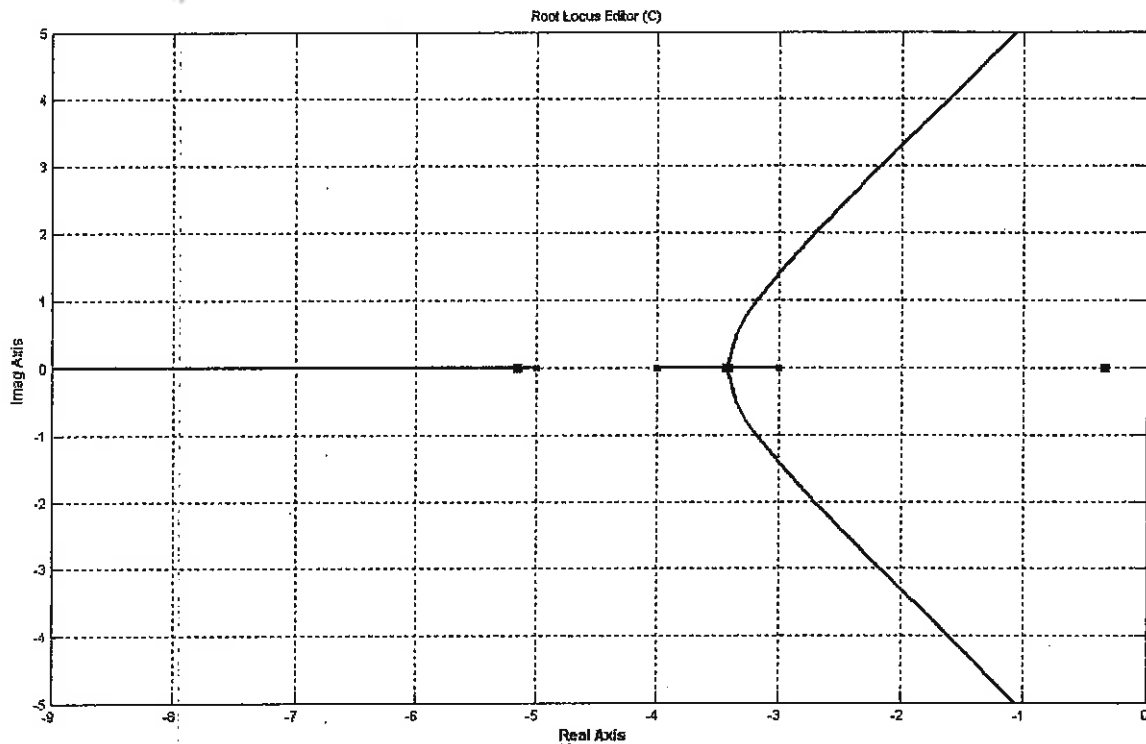
Para el control de la misma se utiliza un controlador PD.

- a. ¿Cuál es el valor dado a  $T_d$ ? ¿Por qué? Dibujar el lugar de las raíces aproximado del nuevo sistema.

La función de transferencia en bucle abierto del sistema será ahora:

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{125 \cdot 0,11 \cdot K_c (T_d s + 1)}{(3s+1)\left(\frac{s}{3}+1\right)(0.25s+1)(s+5)} \\ &= \frac{125 \cdot 0,11 \cdot K_c (3s+1)}{(3s+1)\left(\frac{s}{3}+1\right)(0.25s+1)(s+5)} = \frac{13,75 \cdot K_c}{\left(\frac{s}{3}+1\right)(0.25s+1)(s+5)} \end{aligned}$$

El cero de controlador PD hemos utilizado para anular el polo dominante de la planta, de forma que el lugar de las raíces del sistema queda ahora:



b. Cuál debe ser el valor de  $K_c$  para que uno de los polos del sistema en bucle cerrado sea doble.

La ecuación característica es:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$13,75.K_c + \left(\frac{s}{3} + 1\right)(0.25s + 1)(s + 5) = 0$$

$$165.K_c + (s + 3)(s + 4)(s + 5) = 0$$

Para que uno de los polos de bucle cerrado del sistema sea doble, la ecuación característica debe ser de la forma:  $(s + a)(s + b)^2 = 0$

Luego,

$$165.K_c + (s + 3)(s + 4)(s + 5) = (s + a)(s + b)^2$$

Desarrollando ambos lados de la igualdad:

$$s^3 + 12s^2 + 47s + 165K_c + 60 = s^3 + (2b + a)s^2 + (2ab + b^2)s + ab^2$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de  $s$ :

$$\begin{cases} 2b + a = 12 \\ 2ab + b^2 = 47 \\ ab^2 = 165K_c + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 - 2b \\ \stackrel{a=12-2b}{\Rightarrow} 3b^2 - 24b + 47 = 0 \\ \Rightarrow b = \begin{cases} 4.5 \\ 3.42 \end{cases} \end{cases}$$

El polo doble no puede estar en  $s = -4.5$  dado que ese punto del eje real no pertenece al LGR. Luego,

$$b = 3.42$$

$$a = 12 - 2b = 5.15$$

$$ab^2 = 165K_c + 60 \Rightarrow \underline{K_c = 0.0024}$$

Handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



**INGENIERÍA DE SISTEMAS I**

Curso: 2006/2007

10/Septiembre/2007

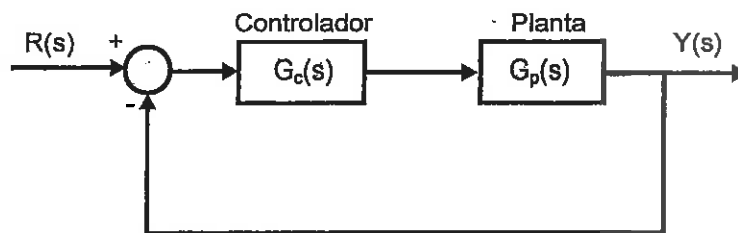
Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_  
1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_  
2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**45 minutos**

Grupo  
Taldea

**PROBLEMA 2**

En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación unitaria para controlar una planta cuya función de transferencia viene dada por  $G_p(s)$ .



$$G_p(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)}$$

Se desea diseñar un controlador  $G_c(s)$  de forma que el sistema controlado cumpla las siguientes especificaciones:

- Coefficiente estático de velocidad,  $k_v = 100$ .
- Margen de fase  $\geq 45^\circ$ .
- El error provocado por señales de entrada sinusoidales cuya frecuencia sea inferior a 0,2 rad/s debe ser menor que un 2%.
- Las perturbaciones sinusoidales a la entrada cuya frecuencia sea superior a 100 rad/s se deben reducir a la salida a una magnitud no superior a un 5% del valor de entrada

Se pide:

- Sobre el papel semilogarítmico proporcionado, realice el trazado del diagrama de Bode asintótico de la función de transferencia en lazo abierto, eligiendo su ganancia de forma que  $k_v = 100$ . Utilice segmentos rectilíneos para el trazado del diagrama de fase.

$$G_p(j\omega) = \frac{10}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}; \quad k_v = 100 \rightarrow K_p G_p(j\omega) = \frac{100}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}$$

La función de transferencia sinusoidal tiene un polo en el origen y un polo en  $\omega_c = 10$  rad/s

$$\text{Para } \omega = 1 \text{ rad/s} \rightarrow \left| K_p G_p(j\omega) \right|_{\omega=1} = \frac{100}{\sqrt{1 + 0.1^2}} \approx 100 \rightarrow (40 \text{ dB})$$

En línea verde continua se muestra el trazado pedido.

2. Sobre el diagrama de Bode, verifique si el sistema cumple las especificaciones: mida el margen de fase y dibuje las zonas prohibidas correspondientes al cumplimiento de las dos especificaciones relativas a entradas sinusoidales.

- Sobre el Bode se mide:  $MF \approx 20^\circ$
- Para las perturbaciones sinusoidales de alta frecuencia:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)} \rightarrow \left| \frac{Y(s)}{R(s)} \right| = \left| \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)} \right| \leq 0.05$$

$$\text{Si } \omega \gg \rightarrow K_p G_p(j\omega) \ll 1 \rightarrow \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \approx |K_p G_p(j\omega)| \leq 0.05 \rightarrow (-26 \text{ dB})$$

- Para el error cometido con señales de entrada sinusoidales de frecuencia menor que 0.2 rad/s:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + K_p G_p(s)} \rightarrow \left| \frac{E(j\omega)}{D(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1 + K_p G_p(j\omega)} \right| \leq 0.02$$

$$\text{Si } \omega \ll \rightarrow K_p G_p(j\omega) \gg 1 \rightarrow \left| \frac{E(j\omega)}{D(j\omega)} \right| \approx \left| \frac{1}{K_p G_p(j\omega)} \right| \leq 0.02 \rightarrow |K_p G_p(j\omega)| \geq 50 (34 \text{ dB})$$

Sobre el diagrama se muestran las zonas prohibidas con trama rayada.

3. Indique cuales de las especificaciones se cumplen y cuales no y justifique de forma razonada la elección de un compensador de adelanto, de atraso, o de adelanto-atraso, como posible solución para tratar de obtener un diseño que cumpla todos los requisitos exigidos.

Especificación de Margen de fase:  $MF \approx 20^\circ < 45^\circ \rightarrow$  NO SE CUMPLE

Especificación de Coeficiente Estático de Error de Velocidad:  $k_v = 100 \rightarrow$  SI SE CUMPLE

Especificación de error frente a señales de entrada sinusoidales de baja frecuencia:

$$\left| \frac{E(j\omega)}{D(j\omega)} \right|_{\omega < 0.2} \leq 2\% \rightarrow \text{SI SE CUMPLE}$$

Especificación de atenuación de perturbaciones sinusoidales de alta frecuencia:

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right|_{\omega > 100} \geq 5\% \rightarrow \text{NO SE CUMPLE}$$

4. Diseñe y calcule la función de transferencia  $G_c(s)$  del compensador que ha elegido.

Mediante un compensador de adelanto o atraso se puede mejorar el margen de fase. Sin embargo, el de adelanto aumenta el ancho de banda, lo cual es perjudicial para el cumplimiento de la especificación de atenuación de entradas sinusoidales de alta frecuencia. Por tanto, en principio, y a falta de comprobarlo numéricamente, parece razonable la utilización de un compensador de atraso.

La frecuencia  $\omega_g$  a la cual se cumpliría la especificación de  $MF \geq 45^\circ$  es  $\omega_g = 10 \text{ rad/s}$

A esa frecuencia, la función de transferencia sinusoidal presenta un módulo de 20 dB, cantidad que debe atenuar la red en  $\omega_g$ :

$$20 \text{ dB} = -20 \log \frac{1}{\beta} \rightarrow \beta = 10$$

Desplazando la frecuencia  $1/T$  una década a la izquierda:

$\frac{1}{T} = 0.1 \cdot \omega_g \rightarrow T = 1$  y por tanto, la función de transferencia de la red de atraso es:

$$G_c(s) = \frac{1+s}{1+10s}$$

5. Sobre el diagrama de Bode trazado en el apartado 1, dibuje con línea de puntos el nuevo diagrama de Bode asintótico del sistema compensado, y compruebe el cumplimiento de todas las especificaciones.

La nueva función de transferencia sinusoidal en lazo abierto es:

$$K_p G_c G_p(s) = 10 \cdot \frac{1+s}{1+10s} \cdot \frac{10}{s(1+0.1s)} \rightarrow K_p G_c G_p(j\omega) = \frac{100 \left(1 + j\frac{\omega}{1}\right)}{j\omega \left(1 + j\frac{\omega}{0.1}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

Tiene un polo en el origen, un polo real en  $\omega_{c1} = 0.1$ , un cero real en  $\omega_{c2} = 1$ , y un polo real en  $\omega_{c3} = 10$ .

$$k_v = 100$$

$$\left| K_p G_p(j\omega) \right|_{\omega=1} \approx 10\sqrt{2} \text{ (23 dB)}$$

El nuevo diagrama de Bode se dibuja en rojo y línea discontinua.

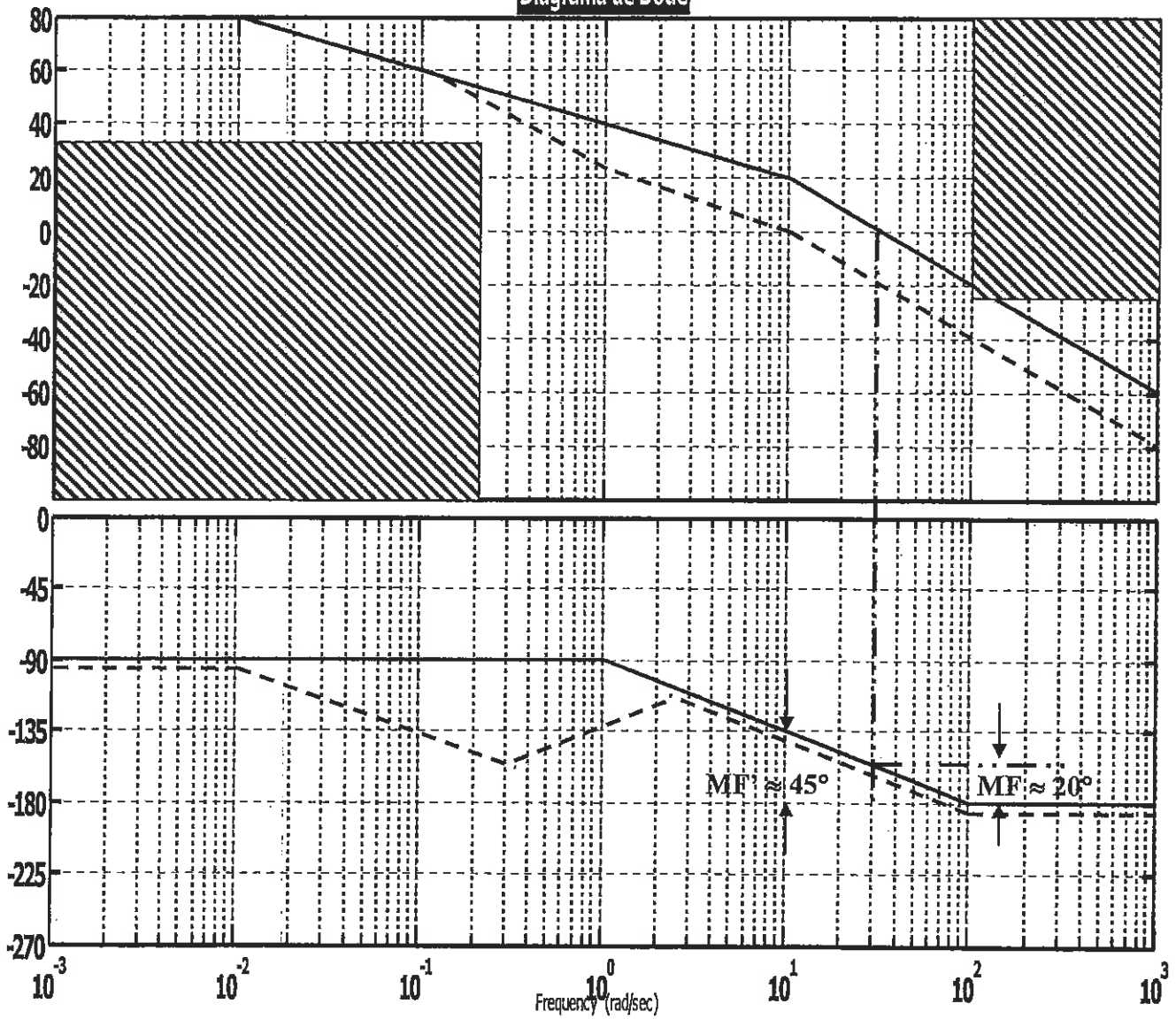
NOTA: La nueva curva de fase se ha desplazado ligeramente para apreciarla mejor.

El nuevo margen de fase es de  $MF \approx 45^\circ$

Se observa que el diagrama de Bode de módulo no pasa por las zonas prohibidas, luego se cumplen las especificaciones relativas a señales sinusoidales de alta y baja frecuencia.

En definitiva el compensador de atraso diseñado permite conseguir las especificaciones pedidas.

Diagrama de Bode





Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_

1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_

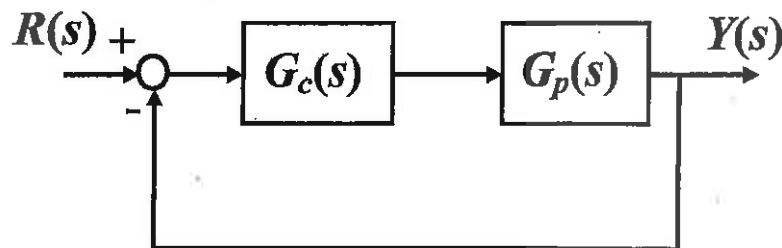
2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**90 minutos**

Grupo:

**PROBLEMA 1 (5 PUNTOS)**

Sea el sistema de control de la figura:



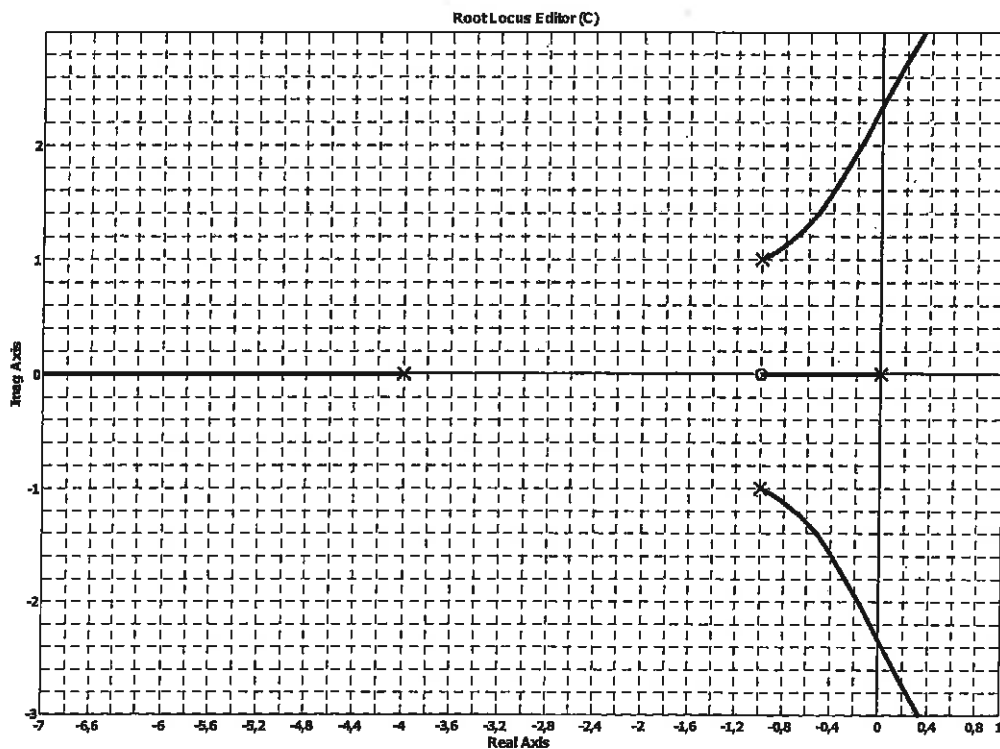
En él se dispone de:

- Un proceso  $G_p(s)$
- Un controlador  $G_c(s)$

Se sabe que:

- El proceso  $G_p(s)$  tiene una **Ganancia Estática** igual a 1.
- El controlador es del tipo **PI**.

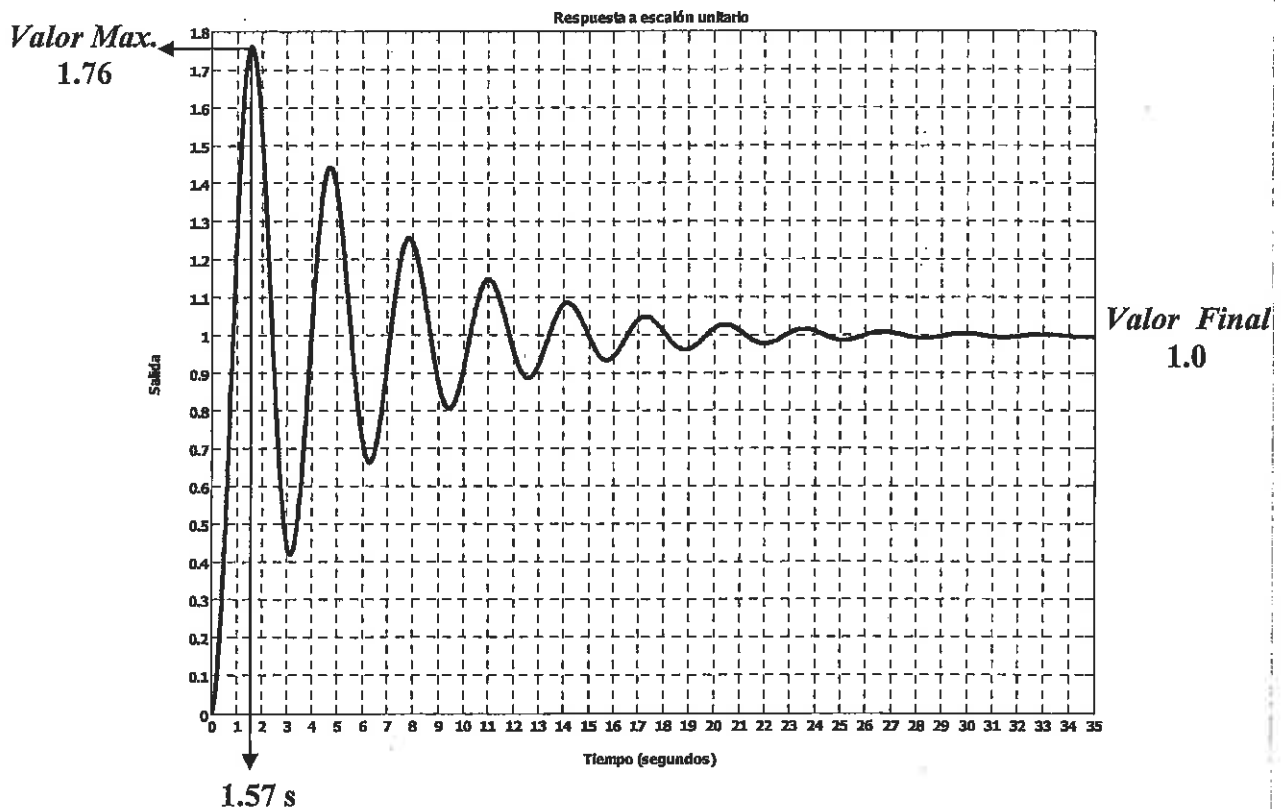
En el proceso de diseño, para lograr ciertas especificaciones, se ha obtenido el siguiente Lugar de las Raíces, correspondiente a la Función de Transferencia de Lazo Abierto del sistema de control de la figura anterior:



Se pide:

1. (1 punto) Determinar la función de transferencia  $G_p(s)$  del proceso.

En el proceso de diseño se ha sintonizado el controlador de tal manera que la respuesta que presenta el sistema  $y(t)$  ante una entrada escalón unitario es semejante a la de un sistema de segundo orden. En su representación se pueden medir los siguientes valores:



2. (2 puntos) En base a las medidas anteriores y empleando el lugar de las raíces, resolver las siguientes cuestiones:
  - (0.25 puntos) Sobre el plano  $s$  representar gráficamente, de forma aproximada, la ubicación de los polos y ceros de la función de transferencia de lazo cerrado del sistema.
  - (0.75 puntos) Calcular numéricamente dichos polos y ceros.
  - (0.5 puntos) Función de transferencia  $G_c(s)$  del controlador.
  - (0.5 puntos) Función de transferencia en lazo cerrado del sistema.

Continuando con el proceso de diseño, se desea trabajar con una nueva especificación. En este caso se desea que el sistema no supere un error en estado estacionario:

$$e_{ss} \leq 10 \%$$

ante una entrada como la siguiente:  $r(t) = 2 \cdot t$

3. (1 punto) Analizar y calcular si esto es posible con el sistema de control que se dispone.
4. (1 punto) En caso de tener que modificar el controlador, ¿cuál sería la  $G_c(s)$  más sencilla en este caso? Razonar la solución aportada.

## SOLUCIÓN

- Determinar la función de transferencia  $G_p(s)$  del proceso.

Dado que  $G_c(s)$  es un controlador PI, su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c + \frac{K_c}{T_i} \frac{1}{s} = \frac{K_c(T_i \cdot s + 1)}{T_i \cdot s} = \frac{K_c \left( s + \frac{1}{T_i} \right)}{s}$$

En ella se observa que el controlador introduce un polo en el origen y un cero.

Del lugar de las raíces se desprende que el proceso  $G_p(s)$  está compuesto por el resto de polos:

$$\begin{aligned} s_1 &= -4 \\ s_2 &= -1 + j1 \\ s_3 &= -1 - j1 \end{aligned}$$

La función de transferencia  $G_p(s)$  será de la forma:

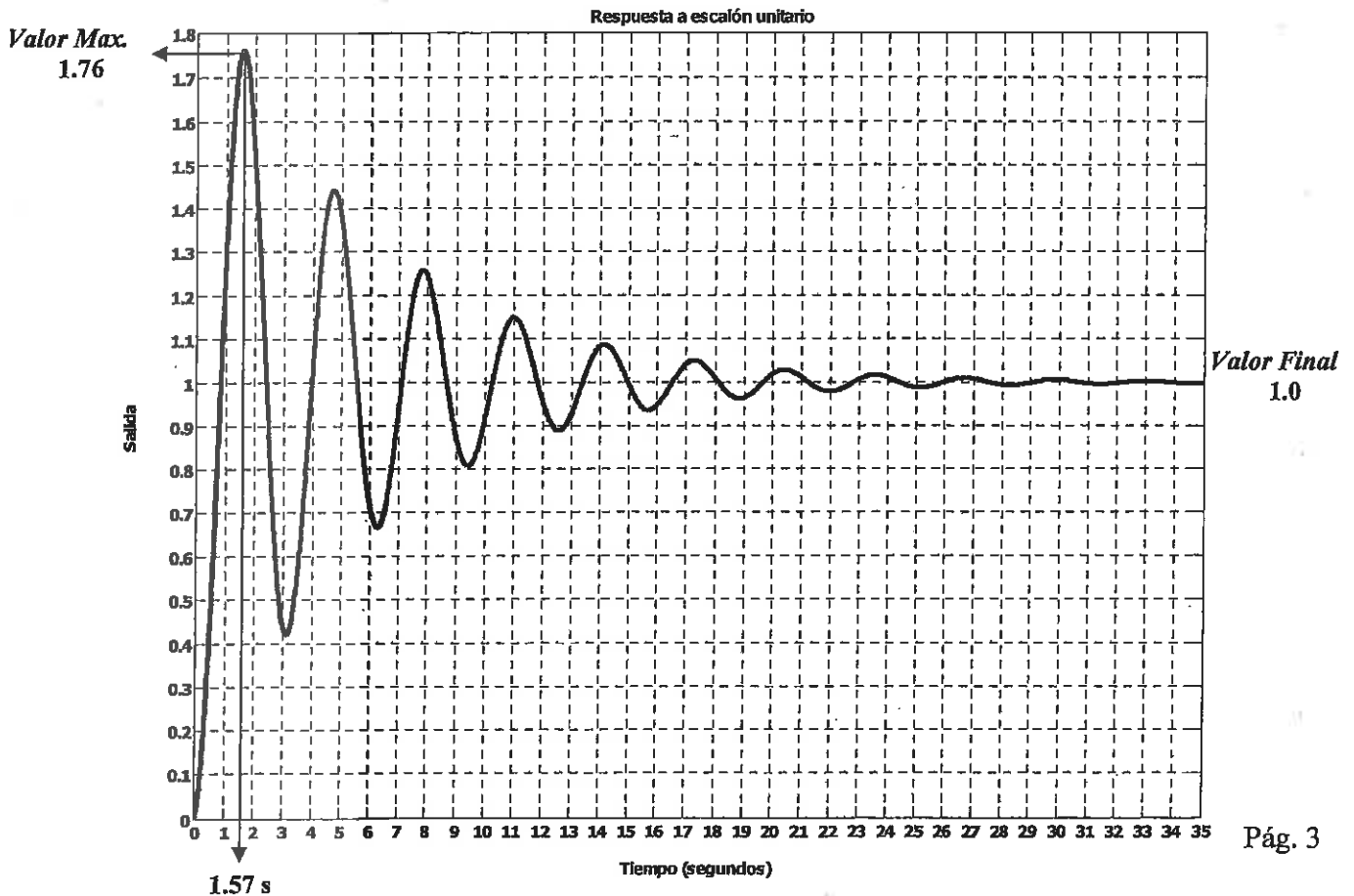
$$G_p(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

$$G_p(s) = \frac{K}{(s+4)(s+1+j1)(s+1-j1)} = \frac{K}{(s+4)(s^2+2s+2)}$$

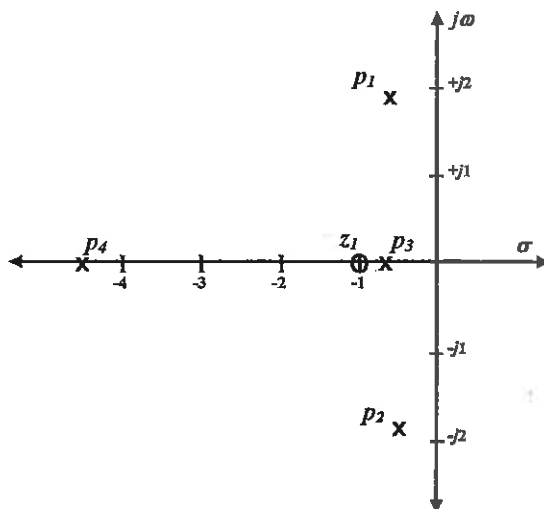
Como se sabe que la ganancia estática de  $G_p(s)$  es 1:  $K = 8$

$$G_p(s) = \frac{8}{(s+4)(s^2+2s+2)}$$

- En el proceso de diseño se ha sintonizado el controlador de tal manera que la respuesta que presenta el sistema  $y(t)$  ante una entrada escalón unitario es semejante a la de un sistema de segundo orden. En su representación se pueden medir los siguientes valores:



- a. Sobre el plano  $s$  representar gráficamente, de forma aproximada, la ubicación de los polos y ceros de la función de transferencia de lazo cerrado del sistema



- b. Calcular numéricamente dichos polos y ceros.

Por la respuesta  $y(t)$  de la figura se puede ver que estamos ante un sistema que presenta una estabilidad relativa poco adecuada, mostrando grandes oscilaciones y con una atenuación no demasiado pronunciada. Esto nos indica que a pesar de ser un sistema de orden 4 existen dos polos complejos conjugados dominantes, los cuales marcan la dinámica de la respuesta del sistema.

Si para el estudio de  $y(t)$  se considera simplificar todo a un sistema de segundo orden, se pueden emplear las expresiones de Máxima Sobreoscilación y Tiempo de Pico para extraer los parámetros característicos del mismo.

Así, como punto de partida se tiene:

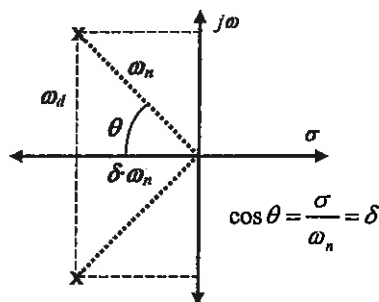
$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a \cdot s + b} \rightarrow \text{forma normalizada} \rightarrow G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Dado que para el cálculo de la ubicación de todos los polos de la función de transferencia en lazo cerrado es necesario emplear la representación real sobre el lugar de las raíces, nos limitamos a calcular  $\delta$  y  $\omega_d$ .

A partir de los puntos de la gráfica de  $y(t)$ ,

$M_p = \frac{B}{A} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100(\%)$	$M_p = \frac{B}{A} = \frac{1.76 - 1}{1} \cdot 100(\%) = 76\%$
$M_p = e^{\frac{\pi \cdot \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}$	$M_p = e^{\frac{\pi \cdot \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}} = 0.76 \quad \delta = 0.087$
$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1.57 \quad \omega_d = 2 \text{ rad/s}$

Sabiendo que:



Se calcula  $\omega_n$  de:  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$   $\omega_n = 2.0076 \cong 2 \text{ rad/s}$

Y se dan las ubicaciones de los polos complejos conjugados:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.1746 + j2 \\ s_2 &= -0.1746 - j2 \end{aligned}$$

Se comprueba gráficamente que en el lugar de las raíces coinciden estas ubicaciones.

El resto de ubicaciones se extraen de la Ecuación Característica del sistema.

$$1 + G_c(s)G_p(s) = 0 \rightarrow 1 + K_c \frac{s+1/T_i}{s} \frac{8}{(s+4)(s^2+2s+2)} = 0$$

La ubicación del cero es conocida:  $T_i = 1$ .

Para calcular inicialmente el valor de  $K_c$  se empleará el criterio del módulo sobre la ecuación característica, evaluando sobre uno de los polos calculados.

$$s_1 = -0.1746 + j2 \rightarrow K_c = \left| \frac{s(s+4)(s^2+2s+2)}{8(s+1)} \right|_{s_1} = \frac{|s_1||s_1+4||s_1^2+2s_1+2|}{8|s_1+1|} = 2.02$$

Llevando el valor de  $K_c$  a la ecuación característica y dividiendo ésta por el producto de las dos raíces calculadas:

$$\begin{aligned} 1 + 2.02 \frac{s+1}{s} \frac{8}{(s+4)(s^2+2s+2)} &= 0 \\ s(s+4)(s^2+2s+2) + 16.16(s+1) &= s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 24.16s + 16.16 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Dividiendo: } \frac{s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 24.16s + 16.16}{s^2 + 0.348s + 4.03} = s^2 + 5.652s + 4$$

Trabajando con el polinomio de segundo orden resultante de la división:

$$\begin{aligned} s_3 &= -0.8295 \\ s_4 &= -4.8225 \end{aligned}$$

(Nota: Sobre el plano  $s$  han quedado representados los polos como  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$ .)

- c. Función de transferencia  $G_c(s)$  del controlador.

La función de transferencia  $G_c(s)$  del controlador es:

$$G_c(s) = K_c + \frac{K_c}{T_i} \frac{1}{s} = \frac{K_c(T_i \cdot s + 1)}{T_i \cdot s} = \frac{K_c \left( s + \frac{1}{T_i} \right)}{s} = 2.02 \frac{(s+1)}{s} \rightarrow \boxed{G_c(s) = 2.02 \frac{(s+1)}{s}}$$

- d. Función de transferencia en lazo cerrado del sistema.

La función de transferencia en lazo cerrado será:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{2.02 \frac{(s+1)}{s} \frac{8}{(s+4)(s^2+2s+2)}}{1 + 2.02 \frac{(s+1)}{s} \frac{8}{(s+4)(s^2+2s+2)}} \rightarrow \boxed{M(s) = \frac{16.16(s+1)}{s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 24.16s + 16.16}}$$

3. Continuando con el proceso de diseño, se desea trabajar con una nueva especificación. En este caso se desea que el sistema no supere un error en estado estacionario:

$$e_{ss} \leq 10\%$$

ante la siguiente entrada:  $r(t) = 2 \cdot t$ . Analizar y calcular si esto es posible con el sistema de control que se dispone.

Dado que la entrada es de tipo rampa, se trata de trabajar con el error de velocidad en estado estacionario. Dicho error responde a las siguientes expresiones:

$$e_p = e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot A / s^2}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G_p(s)} = \frac{A}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G_p(s)$$

Al hablar del 10 % la expresión del error es:  $e_v = \frac{1}{K_v} \leq 0.1 \rightarrow K_v \geq 10$

$$\text{De este modo: } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot 2.02 \cdot \frac{(s+1)}{s} \cdot \frac{8}{(s+4)(s^2+2s+2)} = 2.02$$

Por lo que no cumple la especificación solicitada. Para intentar que la cumpla es necesario aumentar el valor de  $K_c$  del controlador. Dicho valor sería:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_c \cdot \frac{(s+1)}{s} \cdot \frac{8}{(s+4)(s^2+2s+2)} \geq 10$$

Por lo tanto  $K_c \geq 10$ . Pero es necesario comprobar si para esos valores de  $K_c$  el sistema es estable. Para ello se aplica el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación característica:

$$s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 8s + 8 \cdot K_c \cdot (s+1) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (8+8 \cdot K_c)s + 8 \cdot K_c = 0$$

$s^4$	1	10	$8 \cdot K_c$
$s^3$	6	$8+8 \cdot K_c$	
$s^2$	$\frac{52-8 \cdot K_c}{6}$	$8 \cdot K_c$	
$s^1$	$\frac{(52-8 \cdot K_c)(8+8 \cdot K_c) - 288 \cdot K_c}{52-8 \cdot K_c}$		
$s^0$	$8 \cdot K_c$		

Las diversas condiciones para cumplir la estabilidad del sistema proporcionan las desigualdades,

$$\left. \begin{array}{l} K_c > 0 \\ K_c < 6,5 \\ K_c < 3,1 \end{array} \right\} \rightarrow 0 < K_c < 3,1$$

Por lo tanto no se puede obtener el error solicitado ( $K_c \geq 10$ ), dado que el sistema se haría inestable.

4. Para cumplir las condiciones impuestas es necesario modificar la estructura del controlador  $G_c(s)$ . La incorporación de un cero en la función de transferencia en lazo abierto desplazaría el lugar de las raíces hacia la izquierda, dotando de mayor estabilidad al sistema, llegando a hacerlo estable para todo valor de  $K_c$ . Esto supone incorporar una acción derivativa al controlador. Esto modifica la función de transferencia del controlador  $G_c(s)$ , convirtiéndose éste en un controlador PID:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_c}{T_i \cdot s} + K_c T_d s = K_{PID} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s}$$

Manteniendo el cero del controlador existente de anteriores secciones ( $s_1 = -1$ ), la ubicación del nuevo cero se realiza buscando cancelar la acción debida al polo real de la función de transferencia en lazo abierto más cercano al origen. En nuestro caso  $s_2 = -4$ . Resolviendo en la para la función del controlador,

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = -1 \\ s_2 = -4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} T_i = 1,25 \\ T_d = 0,2 \end{array} \right\} G_c(s) = K_{PID} \frac{0,25s^2 + 1,25s + 1}{s}$$

Para el cálculo de  $K_{PID}$  es necesario calcular de nuevo  $K_v$ :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_{PID} \frac{0.25s^2 + 1.25s + 1}{s} \frac{8}{(s+4)(s^2 + 2s + 2)} = 10 \rightarrow K_v \geq 10 \rightarrow K_{PID} \geq 10$$

El nuevo controlador con menor ganancia sería:

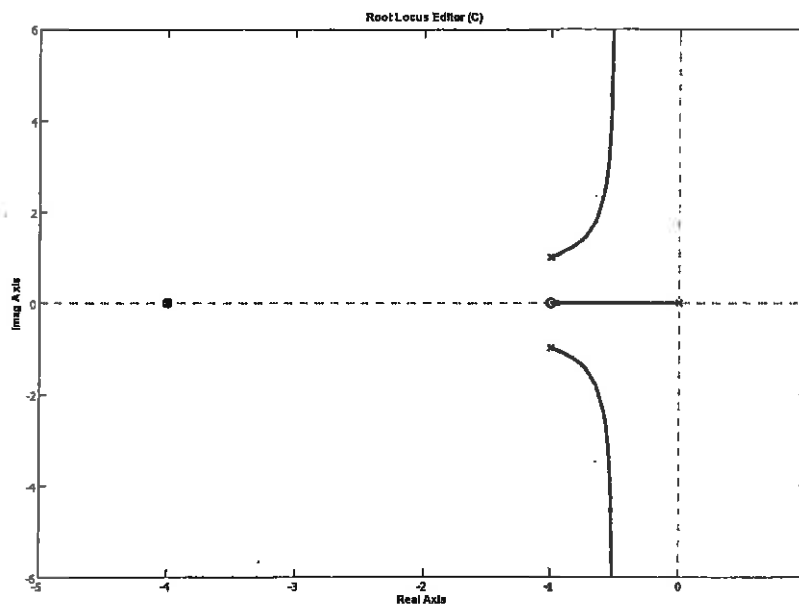
$$G_c(s) = 10 \cdot \frac{0.25s^2 + 1.25s + 1}{s} \rightarrow \boxed{G_c(s) = 2.5 \cdot \frac{s^2 + 5s + 4}{s}}$$

Para comprobar si se pueden alcanzar estos valores, por lo tanto si el sistema es estable, se puede inicialmente recurrir al nuevo trazado del lugar de las raíces:

A considerar dos asíntotas:

$$\varphi_0 = \frac{(2l+1)180^\circ}{N_p - N_z} = (2l+1)90^\circ \begin{cases} +90^\circ \\ +270^\circ \end{cases}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Ceros}}{N_p - N_z} = \frac{(0 - 4 - 1 + j1 - 1 - j1) - (-1 - 4)}{2} = -0.5$$



También se puede analizar la nueva ecuación característica:

$$1 + G_c(s) \cdot G_p(s) = 1 + K_{PID} \frac{0.25s^2 + 1.25s + 1}{s} \frac{8}{(s+4)(s^2 + 2s + 2)} = 1 + K_{PID} \frac{0.25(s+1)(s+4)}{s} \frac{8}{(s+4)(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 2 \cdot K_{PID} \cdot (s+1) = s^3 + 2s^2 + (2 + 2 \cdot K_{PID})s + 2 \cdot K_{PID} = 0$$

$s^3$	1	$2 + 2 \cdot K_{PID}$
$s^2$	2	$2 \cdot K_{PID}$
$s^1$	$2 + K_{PID}$	
$s^0$	$2 \cdot K_{PID}$	

Las diversas condiciones para cumplir la estabilidad del sistema proporcionan las desigualdades,

$$\left. \begin{array}{l} 2 + K_{PID} > -2 \\ K_{PID} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow K_{PID} > 0$$

Así pues, el sistema es estable para todo  $K_{PID}$  positivo y por lo tanto se cumplen todas las condiciones.

Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title, which is mostly illegible due to blurring.

A vertical line of text or a page number running down the right side of the page.

1

4

2



Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_  
1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_  
2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:  
**90 minutos**

Grupo:

**PROBLEMA 2 (5 PUNTOS)**

La figura 1 muestra el sistema de control de un proceso, en el que  $G_p$  representa el proceso,  $G_c$  el controlador y  $K_s$  el sensor.

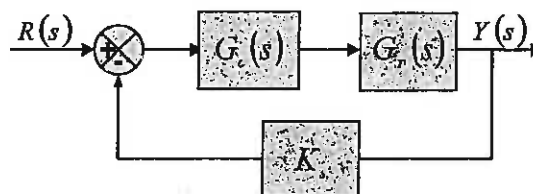


Figura 1

El proceso se comporta como un sistema de fase mínima y su diagrama de módulo de Bode se muestra en la figura 2.

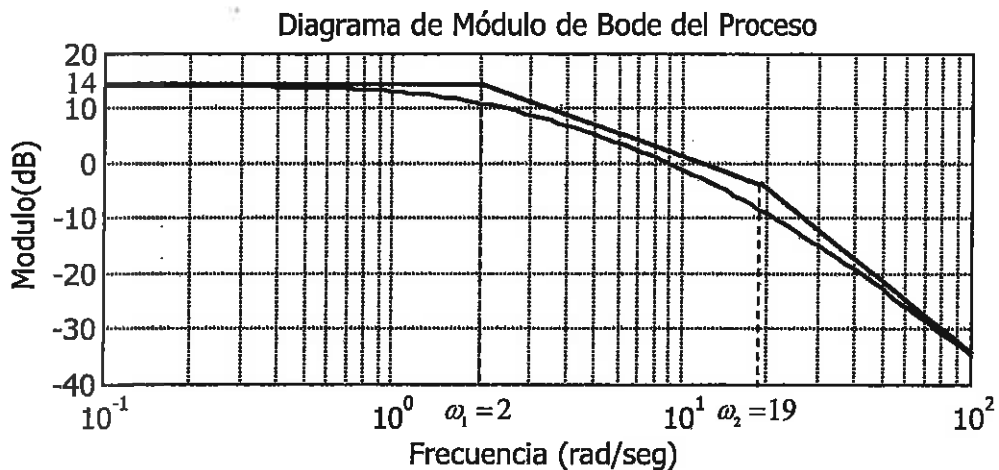


Figura 2

La ganancia del sensor es  $K_s = 1$ .

Se desea diseñar un controlador PID de forma que el sistema de control cumpla las siguientes especificaciones:

- El error estacionario ante una entrada rampa debe ser de un 10%.
- Si utilizamos las tres acciones del controlador PID, el sistema en bucle cerrado tendrá 2 ceros. La frecuencia de transición (cruce) de los ceros deberá ser  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$  rad/seg.
- EL diagrama de Nyquist que se utiliza para el estudio de estabilidad del sistema, corta el eje real cuando  $\omega = 3$  rad/s.

Se pide:

- 1) Obtener la función de transferencia del proceso  $G_p$ . (0,5 puntos)
- 2) Obtener la expresión de la función de transferencia de un controlador PID ideal. ¿Cuántos polos y ceros tiene? (0,5 puntos)
- 3) Calcular los valores de los tres parámetros del PID que hagan que el sistema cumpla las especificaciones anteriores. (1,25 puntos)
- 4) Dibujar el diagrama de Nyquist completo y analizar la estabilidad del sistema mediante el criterio de Nyquist. (1,25 puntos)
- 5) Si la referencia para este sistema tiene componentes de frecuencia  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , ¿en cuánto se atenuarán a la salida? (0,5 puntos)
- 6) Calcula la respuesta del sistema en estado estacionario cuando al sistema se le aplica una señal de referencia  $r(t) = 1 + \text{sen}10t$ . Dibuja aproximadamente dicha respuesta temporal en el estacionario. (1 punto)

## SOLUCIÓN

- Determinar la función de transferencia del proceso.

La función de transferencia correspondiente al proceso viene dada a partir de su diagrama de módulo de Bode. Se trata de un sistema de fase mínima. Se observa que la pendiente de la asíntota de bajas frecuencias es de 0dB por década, por lo que se trata de un sistema sin integradores ni derivadores puros. Además se observa un cambio de pendiente de -20dB por década a partir de  $\omega_1 = 2 \text{ rad/seg}$  ( $T_1 = 0,5 \text{ seg}$ ) y otro cambio de pendiente de -20dB por década a partir de  $\omega_2 = 19 \text{ rad/seg}$  ( $T_2 = 0,0526 \text{ seg}$ ). Además la ganancia en la asíntota de bajas frecuencias es de 14dB. Así pues,

$$20 \log |G_p|_{\omega \rightarrow 0} = 20 \log K = 14 \text{ dB}$$

$$K = 10^{14/20} = 5$$

$$G_p = \frac{5}{(1+0,5s)(1+0,0526s)} = \frac{190}{(s+2)(s+19)}$$

El polo en  $s_1 = -2$  es dominante con respecto a  $s_2 = -19$ . Por lo tanto es posible realizar una reducción de orden en el sistema,

$$G_p \approx \frac{5}{(1+0,5s)(1+0,0526s)} \approx \frac{10}{s+2} \rightarrow \boxed{G_p(s) = \frac{10}{s+2}}$$

- Obtener la expresión de la función de transferencia de un controlador PID ideal. ¿Cuántos polos y ceros tiene?

A partir de la ecuación diferencial correspondiente a un PID ideal,

$$u(t) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$U(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s) = K_c \left( \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right) E(s) \rightarrow G_c(s) = \frac{K_c}{T_i} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

$$\boxed{G_c(s) = K_c T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d}}{s}}$$

En un PID ideal se observan dos ceros y un polo en el origen.

- Calcular los valores de los tres parámetros del PID que hagan que el sistema cumpla las especificaciones.

El error estacionario ante una entrada rampa debe ser de un 10%. Así pues, partiendo de la función de transferencia en lazo abierto y aplicando coeficientes estáticos de error,

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{10K_c T_d \left( s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d} \right)}{s(s+2)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0,1; \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10K_c T_d \left( s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d} \right)}{s(s+2)} = \frac{5K_c}{T_i} = 10 \rightarrow K_c = 2T_i$$

La frecuencia de transición (cruce) de los ceros del sistema en lazo cerrado deberá ser  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ rad/seg}$ , La función de transferencia del sistema en lazo cerrado será,

$$\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{10K_c}{T_i} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s(s+2) + \frac{10K_c}{T_i} (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} = \frac{10K_c}{T_i} \frac{T_i T_d \left( s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d} \right)}{(1+10K_c T_d) s^2 + (2+10K_c) s + \frac{10K_c}{T_i}}$$

Así pues,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{T_i T_d}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T_i T_d = 2$$

Dado que el diagrama de Nyquist que se utiliza para el estudio de estabilidad del sistema, corta el eje real cuando  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ , para dicha frecuencia la parte imaginaria de la función de transferencia sinusoidal del sistema en lazo abierto debe ser nula. La función de transferencia sinusoidal en lazo abierto viene dada como,

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{10K_c T_d \left( s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d} \right)}{s(s+2)}$$

$$G_c(j\omega)G_p(j\omega) = \frac{10K_c T_d \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 + j\omega \frac{1}{T_d} \right)}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{10K_c T_d}{\omega^2(\omega^2+4)} \left[ -\omega^2 \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) + \frac{2\omega^2}{T_d} - j\omega \left[ \frac{\omega^2}{T_d} + 2 \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) \right] \right]$$

Así pues,

$$\text{Im}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)]_{\omega=3} = 0 \rightarrow \frac{\omega^2}{T_d} + 2 \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) = 0 \rightarrow \frac{\omega^2}{T_d} + 1 - 2\omega^2 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{T_d}{2T_d - 1}} = 3$$

$$\frac{T_d}{2T_d - 1} = 9 \rightarrow T_d = \frac{9}{17}$$

A partir de las especificaciones hemos obtenido,

$$\begin{array}{l} K_c = 2T_i \\ T_i T_d = 2 \\ T_d = \frac{9}{17} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} K_c = 7,55 \\ T_i = 3,77 \text{ seg.} \\ T_d = 0,53 \text{ seg.} \end{array}$$

4. Dibujar el diagrama de Nyquist completo y analizar la estabilidad del sistema mediante el criterio de Nyquist.

Partimos de la función de transferencia sinusoidal del sistema en lazo abierto anteriormente calculada,

$$G_c(j\omega)G_p(j\omega) = \frac{10K_c T_d}{\omega^2(\omega^2+4)} \left[ -\omega^2 \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) + \frac{2\omega^2}{T_d} - j\omega \left[ \frac{\omega^2}{T_d} + 2 \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) \right] \right]$$

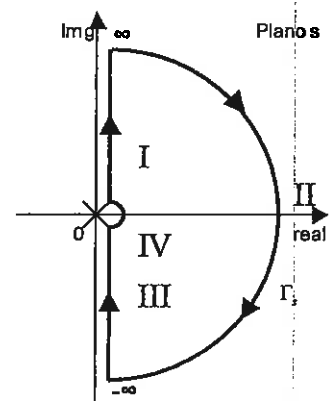
Los valores de módulo y argumento son,

$$|G_c(j\omega)G_p(j\omega)| = \frac{10K_c T_d \sqrt{\left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right)^2 + \left( \omega \frac{1}{T_d} \right)^2}}{\omega \sqrt{4 + \omega^2}}$$

$$\text{Arg}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)] = \arctan \left[ \frac{\omega \frac{1}{T_d}}{\frac{1}{T_i T_d} - \omega^2} \right] - 90^\circ - \arctan \left[ \frac{\omega}{2} \right]$$

Como tenemos un polo en el origen, vamos a utilizar la trayectoria de Nyquist indicada en la figura,

- Tramo I:  $s = j\omega$  y varía a lo largo del eje imaginario positivo desde  $\omega = 0^+$  hasta  $\omega = +\infty$ .
- Tramo II: Semicírculo de radio infinito que abarca todo el semiplano real



positivo.

3. Tramo III:  $s = j\omega$  y varía a lo largo del eje imaginario negativo desde  $\omega = -\infty$  hasta  $\omega = 0^-$ .
4. Tramo IV: Está constituido por un semicírculo de radio  $\varepsilon$ , infinitesimal, que rodea al polo situado en el origen. Esto permite a la trayectoria de Nyquist pasar del valor  $j0^-$  al  $j0^+$  sin pasar por el origen.

Calculamos el lugar de Nyquist para cada uno de los tramos,

1. Tramo I:  $s = j\omega$  y varía a lo largo del eje imaginario positivo desde  $\omega = 0^+$  hasta  $\omega = +\infty$

$$\omega = 0^+ \begin{cases} G_c(j\omega)G_p(j\omega) = \frac{10K_c T_d}{4} \left[ \frac{2}{T_d} - \frac{1}{T_i T_d} \right] - j\infty = 32,77 - j\infty \\ |G_c(j\omega)G_p(j\omega)| = \infty \\ \text{Arg}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)] = -90^\circ \end{cases}$$

$$\omega = +\infty \begin{cases} G_c(j\omega)G_p(j\omega) = 10K_c T_d + j0 = 40 + j0 \\ |G_c(j\omega)G_p(j\omega)| = 10K_c T_d = 40 \\ \text{Arg}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)] = 0^\circ \end{cases}$$

Determinamos los cortes con el eje real y con el eje imaginario. Partimos de los cortes con el eje real ( $\text{Im}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)] = 0$ ). Determinamos los corte con el eje real y el valor de  $G_c(j\omega)G_p(j\omega)$  en esos puntos,

$$\text{Im}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)] = \frac{10K_c T_d}{\omega(\omega^2 + 4)} \left[ \frac{\omega^2}{T_d} + 2 \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) \right] = 0 \rightarrow \omega = 3$$

$$G_c(j\omega)G_p(j\omega)_{\omega=3} = -\frac{10K_c T_d}{\omega^2 + 4} \left[ \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) - \frac{2}{T_d} \right] = 37,77$$

Para los cortes con el eje Imaginario ( $\text{Re}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)] = 0$ ). Determinamos los cortes con el eje imaginario y los valores de  $G_c(j\omega)G_p(j\omega)$  en esos puntos

$$\text{Re}[G_c(j\omega)G_p(j\omega)] = -\frac{10K_c T_d}{\omega^2 + 4} \left[ \left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right) - \frac{2}{T_d} \right] = 0 \rightarrow \omega = \pm j1,81$$

Dado que da como resultado un valor de  $\omega$  imaginario no hay cortes con el eje imaginario.

2. Tramo II: Semicírculo de radio infinito que abarca todo el semiplano real positivo. Para trazar este tramo se sustituye  $s = Re^{j\varphi}$  en donde  $R \rightarrow \infty$  y  $\varphi$  varía de  $+90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Para nuestro caso,

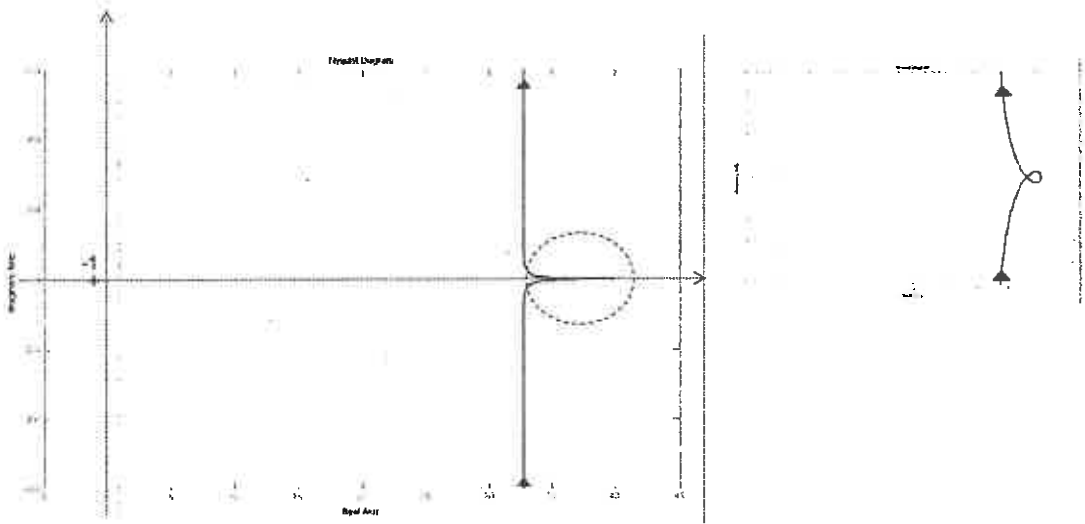
$$\lim_{s \rightarrow \infty} [G_c(s)G_p(s)]_{s=Re^{j\varphi}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{10K_c T_d \left( R^2 e^{j2\varphi} + \frac{1}{T_d} R e^{j\varphi} + \frac{1}{T_i T_d} \right)}{R e^{j\varphi} (R e^{j\varphi} + 2)} = 10K_c T_d = 40$$

Se trata del punto  $G_c(j\omega)G_p(j\omega) = 40$ .

3. Tramo III: Es simétrico al tramo I respecto del origen.
4. Tramo IV: En este tramo, la trayectoria de Nyquist pasa del valor  $s = j0^-$  al  $s = j0^+$ , a lo largo de un semicírculo de radio infinitesimal  $\varepsilon$ . Los puntos de este semicírculo pueden representarse por un vector giratorio  $s = \varepsilon e^{j\varphi}$  en donde  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $\varphi$  varía de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ .

$$\lim_{s \rightarrow 0} [G_c(s)G_p(s)]_{s=\varepsilon e^{j\varphi}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{10K_c T_d \left( \varepsilon^2 e^{j2\varphi} + \frac{1}{T_d} \varepsilon e^{j\varphi} + \frac{1}{T_i T_d} \right)}{\varepsilon e^{j\varphi} (\varepsilon e^{j\varphi} + 2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{10K_c / T_i}{2\varepsilon e^{j\varphi}} \right] = \frac{5K_c / T_i}{\varepsilon} e^{-j\varphi} = \text{Re}^{j\theta}$$

El lugar de Nyquist correspondiente al tramo IV se corresponde con un semicírculo de radio infinito ( $R = \infty$ ) que gira en sentido contrario al de la trayectoria de Nyquist del tramo IV, es decir, de  $+90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Además dado que  $\theta = -\varphi$ , todos los valores de la trayectoria correspondientes a este tramo se encuentran en el semiplano derecho (por ejemplo, para  $\varphi = -45^\circ \rightarrow \theta = 45^\circ$ , y para  $\varphi = 45^\circ \rightarrow \theta = -45^\circ$ ).



5. Si la referencia para este sistema tiene componentes de frecuencia  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , ¿en cuánto se atenuarán a la salida? Partimos de la función de transferencia sinusoidal del sistema en lazo cerrado,

$$M(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{10K_c}{T_i} \frac{T_i T_d \left( s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d} \right)}{(1 + 10K_c T_d) s^2 + (2 + 10K_c) s + \frac{10K_c}{T_i}}$$

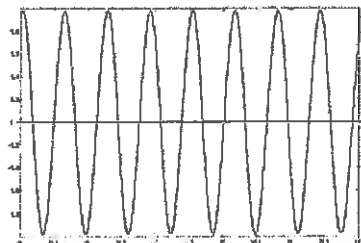
$$M(j\omega) = 10K_c T_d \frac{\left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 + \frac{1}{T_d} j\omega \right)}{\frac{10K_c}{T_i} - (1 + 10K_c T_d) \omega^2 + (2 + 10K_c) j\omega}$$

La atenuación buscada se corresponde con el módulo de la función de transferencia sinusoidal en lazo cerrado para  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ,

$$|M(j\omega)| = 10K_c T_d \frac{\sqrt{\left( \frac{1}{T_i T_d} - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{T_d^2}}}{\sqrt{\left( \frac{10K_c}{T_i} - (1 + 10K_c T_d) \omega^2 \right)^2 + (2 + 10K_c)^2 \omega^2}} \rightarrow \boxed{|M(j\omega)|_{\omega=10} = 0,9755}$$

6. Calcula la respuesta del sistema en estado estacionario cuando al sistema se le aplica una señal de referencia  $r(t) = 1 + \text{sen}10t$ . Dibuja aproximadamente dicha respuesta temporal en el estacionario.

La señal de entrada se puede descomponer en dos señales. La primera un escalón unitario y la segunda una sinusoidal de amplitud 1 y frecuencia 10 rad/seg. Aplicando el principio de superposición, la salida será la correspondiente a la suma de las respuestas a cada una de las entradas por separado. Dado que el controlador es un PID con acción integral que eleva el tipo del sistema, el error ante una entrada escalón es nulo, por lo que la salida en el estacionario correspondiente al escalón unitario será una señal constante de valor unidad. Respecto de la salida en el estacionario correspondiente a la sinusoidal de amplitud 1 y frecuencia 10 rad/seg, será otra sinusoidal de la misma frecuencia y de amplitud 0,9755. Sumando ambas señales de salida,



Nombre \_\_\_\_\_  
 Izena \_\_\_\_\_  
 1º Apellido \_\_\_\_\_  
 1 Deitura \_\_\_\_\_  
 2º Apellido \_\_\_\_\_  
 2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:

1,5 Horas

Grupo:

PROBLEMA 1 (5 PUNTOS)

En la *Figura 1* se muestra un sistema de control de nivel de agua en un tanque y en la *Figura 2* su correspondiente diagrama de bloques en donde se desea controlar el nivel ( $h$ ) de dicho tanque.

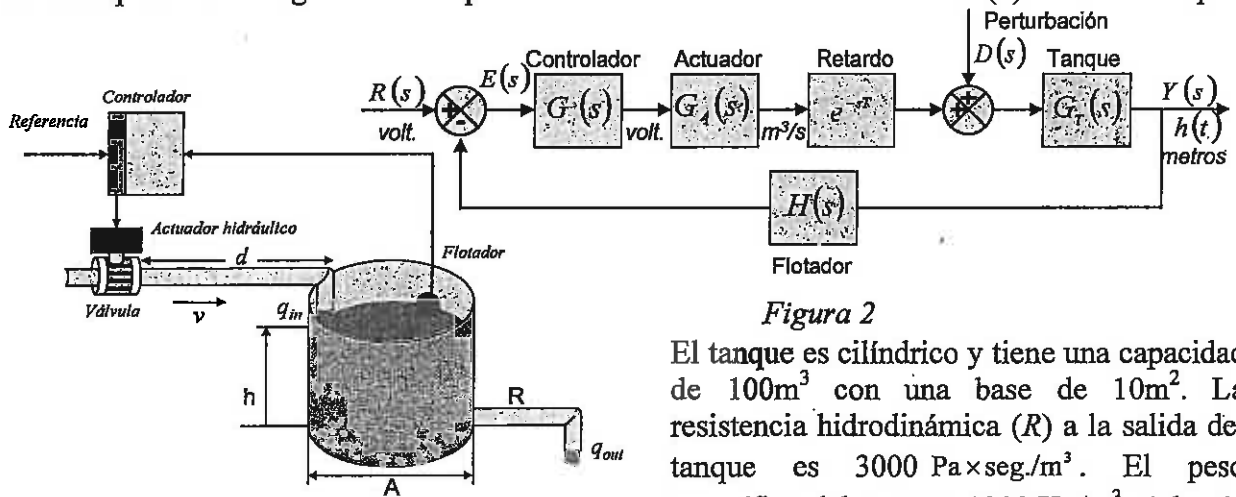


Figura 1

Figura 2

El tanque es cilíndrico y tiene una capacidad de  $100\text{m}^3$  con una base de  $10\text{m}^2$ . La resistencia hidrodinámica ( $R$ ) a la salida del tanque es  $3000\text{ Pa}\cdot\text{seg}/\text{m}^3$ . El peso específico del agua es  $1000\text{ Kg}/\text{m}^3$ . Además se supone que el tanque trabaja en régimen laminar.

El actuador hidráulico tiene una respuesta indicada *Figura 3* ante un incremento de 1 voltio a 3 voltios en su entrada.

El flotador presenta una respuesta indicada *Figura 4* ante un impulso unitario en su entrada.

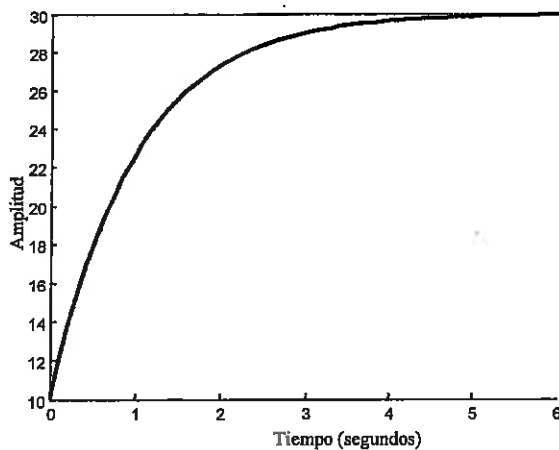


Figura 3

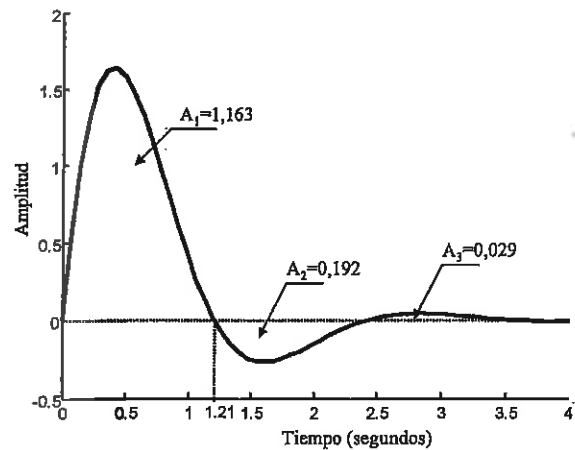


Figura 4

Se supone que el flujo sobre la tubería tiene una velocidad constante es de 0,5m/s y la longitud de tubería desde la válvula hasta la entrada al tanque es de 5m.

La perturbación se corresponde con pérdidas en la tubería que une la válvula con el tanque.

El controlador utilizado en un principio es un controlador proporcional de ganancia  $K_c$ .

Se pide:

- 1) Determinar las funciones de transferencia de cada uno de los componentes del sistema.
  - a) Realizar el desarrollo completo del modelo del tanque. (1 punto)
  - b) Comprobar que la respuesta temporal del tanque ( $y(t)$ ) ante una entrada rampa unitaria es la reflejada por la siguiente expresión matemática. (0,5 puntos)

$$y(t) = 3 \left( t - 30 + 30e^{-\frac{t}{30}} \right)$$

- c) Identificar la función de transferencia correspondiente al actuador hidráulico. (0,5 puntos)
  - d) Identificar la función de transferencia correspondiente al flotador. (0,75 puntos)
  - e) Calcular la función de transferencia del sistema en lazo abierto. (0,25 puntos)
- 2) Calcular el máximo valor de  $K_c$  antes de que el sistema se vuelva inestable. En el desarrollo, se puede suponer que bajo las circunstancias indicadas es posible aplicar reducción de sistemas para el análisis de estabilidad. (1 punto)
- 3) Calcular la salida y el error (en unidades de salida) en régimen estacionario ante una entrada de referencia de 5 voltios y una perturbación de  $-0,02\text{m}^3/\text{s}$  para un controlador proporcional con una ganancia  $K_c=0,1$ . (1 punto)



SOLUCIÓN

1. Determinar las funciones de transferencia de cada uno de los elementos del sistema.

a) Realizar el desarrollo completo del modelo del tanque.

La cantidad de líquido almacenada en un tanque en un pequeño intervalo de tiempo se puede calcular como la diferencia entre el flujo de entrada y el flujo de salida. Así pues,

$$(q_m - q_{out}) dt = dV$$

Teniendo en cuenta la capacidad del tanque y suponiendo líquidos incompresibles  $dV = A dh$ ,

$$q_m - q_{out} = A \frac{dh}{dt}$$

En régimen laminar se puede suponer que la relación entre la presión y el caudal es lineal por lo que la expresión de la resistencia puede formularse como,

$$R = \frac{dp}{dq} = \frac{p_1 - p_2}{q}$$

Como la presión depende de la altura  $h$ , ya que la presión es el peso de la columna de líquido en este caso de la columna de altura  $h$  ( $\rho h$ ) ( $\rho$  representa el peso específico del líquido), incorporando la  $\rho$  en  $R_f$ , podemos decir que,

$$q_{out} = \frac{h}{R_f}$$

Así pues,

$$q_m - \frac{h}{R_f} = A \frac{dh}{dt} \rightarrow q_m = \frac{h}{R_f} + A \frac{dh}{dt}$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal invariante de primer orden. Aplicando Laplace y contemplando condiciones iniciales nulas,

$$Q_m(s) = \frac{1}{R_f} (AR_f s + 1) H(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia correspondiente al tanque es,

$$G_r(s) = \frac{H(s)}{Q_m(s)} = \frac{R_f}{AR_f s + 1}$$

Dado que la densidad del agua es de  $1000 \text{ Kg/m}^3$  y que la resistencia hidrodinámica  $R$  es de  $3000 \text{ Paxseg/m}^3$ ,  $R_f=3$ . El área de la base del tanque es  $10\text{m}^2$ . Así pues, la función de transferencia correspondiente al tanque es,

$$G_r(s) = \frac{3}{30s + 1} = \frac{0,1}{s + 1/30}$$

b) Comprobar que la respuesta del tanque ante una rampa unitaria es,

$$y(t) = 3 \left( t - 30 + 30e^{-\frac{t}{30}} \right)$$

Calculando la transformada de Laplace de la respuesta,

$$Y(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{90}{s} + \frac{90}{s + 1/30} = \frac{0,1}{s^2(s + 1/30)} = \frac{3}{s^2(30s + 1)}$$

En este caso la entrada directa al tanque es  $q(t) = t$ , con lo cual tenemos,

$$\left. \begin{array}{l} G_r(s) = \frac{Y(s)}{Q(s)} \\ q(t) = t \rightarrow Q(s) = \frac{1}{s^2} \end{array} \right\} G_r(s) = \frac{3}{s^2(30s + 1)} \rightarrow \boxed{G_r(s) = \frac{3}{30s + 1} = \frac{0,1}{s + 1/30}}$$

c) Identificar la función de transferencia correspondiente al actuador hidráulico.

Se observa que la respuesta del sistema correspondiente al actuador hidráulico se corresponde con la respuesta de un sistema de primer orden. Dado que el incremento en la entrada es de 2 voltios y el incremento en la amplitud de salida es de 20 m<sup>3</sup>/s la ganancia es 10 ( $K = 10$ ). Además el tiempo que se tarda en tener en la salida el 63,2% respecto al incremento en la salida es de 1 segundo ( $T = 1$ ). Por lo tanto,

$$G_A(s) = \frac{K}{Ts+1} \rightarrow \boxed{G_A(s) = \frac{10}{s+1}}$$

d) Identificar la función de transferencia correspondiente al flotador.

Se observa que la respuesta del sistema correspondiente al flotador se corresponde con la respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado. En este caso se representa la respuesta del flotador ante un impulso unitario. Dado que el impulso es la derivada temporal del escalón, es posible calcular los parámetros de la función de transferencia de flotador aplicando la propiedad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo respecto de la diferenciación, en donde si  $r_1(t) = dr_2(t)/dt$ , entonces  $y_1(t) = dy_2(t)/dt$  (para nuestro caso  $r_1(t)$  sería un impulso unitario y  $r_2(t)$  un escalón unitario). De esta forma,

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \int_0^{\infty} y_1(t) dt = A_1 + A_2 + A_3 \rightarrow y_{ss} = 1,163 - 0,192 + 0,029 = 1 \\ y(t_p) &= \int_0^{t_p} y_1(t) dt = A_1 \xrightarrow{t_p=1,21} y(t_p) = 1,163 \\ M_p &= \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} \rightarrow M_p = 0,163 \end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas de correspondientes a ganancia, sobreimpulso y tiempo de pico,

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_F(s) \frac{1}{s} = G_F(0) = K \xrightarrow{y_{ss}=1} K = 1 \\ M_p &= e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \xrightarrow{M_p=0,163} \delta = 0,5 \\ t_p &= \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \xrightarrow{t_p=1,21} \omega_n = 3 \end{aligned}$$

Así pues,

$$G_F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow \boxed{G_F(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9}}$$

e) Calcular la función de transferencia del sistema en lazo abierto.

La función de transferencia en lazo abierto será,

$$G_{Ld}(s) = K_c G_A(s) G_T(s) G_F(s) e^{-sT}$$

Falta por calcular el tiempo de retardo correspondiente a la tubería. Dado que, el flujo sobre la tubería tiene una velocidad constante es de 0,5m/s y la longitud de tubería desde la válvula hasta la entrada al tanque es de 5m, el tiempo que tarda en recorrer el agua el trayecto desde la válvula hasta el tanque es de  $T = 10$  s. Por tanto,

$$G_{Ld}(s) = K_c \frac{10}{s+1} \frac{0,1}{s+1/30} \frac{9}{s^2 + 3s + 9} e^{-10s}$$

2. Calcular el máximo valor de  $K_c$  antes de que el sistema se vuelva inestable.

En este punto es necesario calcular el valor de  $K_c$  que hace que el sistema sea críticamente estable. En ese caso el margen de fase debe de ser de 0°.

Como se indica, bajo estas circunstancias es posible aplicar reducción de sistemas. Podemos observar que se trata de un sistema de cuarto orden, en donde los polos se encuentran ubicados en  $s = -1/30$ ,  $s = -1$  y  $s = -1,5 \pm 5,2j$ . Tenemos un polo dominante que nos permite reducir la función de transferencia hasta un sistema de primer orden más un retardo, siempre conservando la energía del sistema.

$$G_{Ld}(s) \approx K_c \frac{1}{s+1/30} e^{-10s} = \frac{30K_c}{30s+1} e^{-10s}$$

Dado que el margen de fase debe de ser de  $0^\circ$ ,

$$MF = 180 + \text{Arg}[G_{LA}(\omega_g)] = 0 \rightarrow 180 - \arctan 30\omega_g - 57,3\omega_g = 0 \rightarrow \omega_g = 0,175$$

Buscamos el valor de  $K_c$  a partir de la frecuencia de cruce de ganancia,

$$|G_{LA}(j\omega_g)| = \frac{30K_c}{\sqrt{1+900\omega_g^2}} = 1 \rightarrow \boxed{K_c = 0,178}$$

3. Calcular la salida y el error (en unidades de salida) en estado estacionario ante una entrada de referencia de 5 voltios y una perturbación de  $-0,02\text{m}^3/\text{s}$ .

Inicialmente vamos a calcular la salida del sistema en estado estacionario. Para ello, podemos aplicar el principio de superposición junto con el teorema del valor final,

$$Y(s) = G_R(s)R(s) + G_D(s)D(s) = Y_R(s) + Y_D(s) \rightarrow y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_R(s) + \lim_{s \rightarrow 0} sY_D(s) = y_{r,ss} + y_{d,ss}$$

Para el valor de la salida debido a la entrada de referencia,

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{D(s)=0} = \frac{K_c G_A(s) G_T(s) e^{-sT}}{1 + K_c G_A(s) G_T(s) G_F(s) e^{-sT}} \rightarrow G_R(s) \approx \frac{0,1e^{-10s}}{s + 1/30 + 0,1e^{-10s}}$$

$$y_{r,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_R(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0,1e^{-10s}}{s + 1/30 + 0,1e^{-10s}} \frac{5}{s} = \frac{0,5}{0,133} = 3,75\text{m}$$

Para el valor de la salida debido a la perturbación,

$$G_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} \Big|_{R(s)=0} = \frac{G_T(s)}{1 + K_c G_A(s) G_T(s) G_F(s) e^{-sT}} \rightarrow G_D(s) \approx \frac{0,1}{s + 1/30 + 0,1e^{-10s}}$$

$$y_{d,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_D(s)D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0,1}{s + 1/30 + 0,1e^{-10s}} \frac{-0,02}{s} = \frac{-0,002}{0,133} = -0,015\text{m}$$

Así pues,

$$y_{ss} = y_{r,ss} + y_{d,ss} = 3,75 - 0,015 \rightarrow \boxed{y_{ss} = 3,735\text{m}}$$

Ahora calculamos el error en estado estacionario en unidades de salida. Para ello calculamos la salida ideal para una entrada de referencia de 5 voltios.

$$y_{0,ss} = \frac{5}{H_0}$$

$H_0$  es la ganancia estática correspondiente al sensor (en nuestro caso la ganancia estática del flotador es 1). Por lo tanto, la salida ideal para una entrada de referencia de 5 voltios es 5m. Y, por tanto, el error en estado estacionario en unidades de salida es,

$$e_{ss} = y_{0,ss} - y_{ss} = 5 - 3,735 \rightarrow \boxed{e_{ss} = 1,265\text{m}}$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title, written in a cursive script.

A horizontal line of text, likely a separator or a specific section header, written in a cursive script.

Nombre \_\_\_\_\_  
Izena \_\_\_\_\_

1º Apellido \_\_\_\_\_  
1 Deitura \_\_\_\_\_

2º Apellido \_\_\_\_\_  
2 Deitura \_\_\_\_\_

Tiempo:

1,5 Horas

Grupo:

PROBLEMA 2 (5 PUNTOS)

Se desea diseñar un sistema de control automático para el gobierno de un transbordador, para lo cual se propone el siguiente diagrama de bloques:

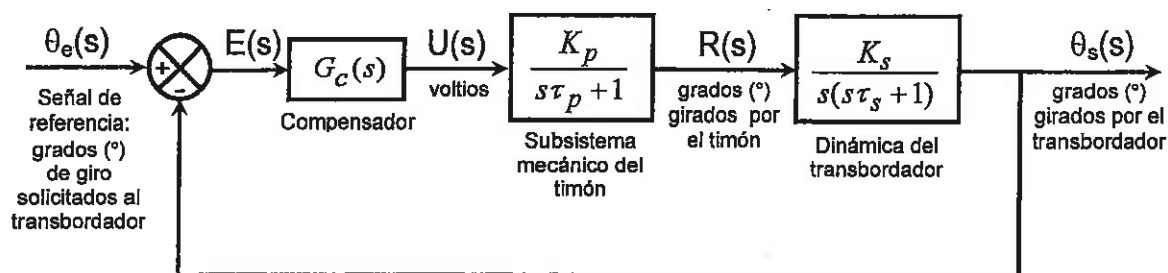


Figura 1: Sistema de control de rumbo del transbordador en lazo cerrado



En dicho sistema:  $K_p = 10$ ;  $K_s = 0,5$ ;  $\tau_p = 0,2$ ;  $\tau_s = 5$

Figura 2: Timón del transbordador

- 1) Diseñar un compensador de adelanto de fase  $G_c(s)$  de forma que el sistema de control presente un error de velocidad  $e_v \leq 10\%$  y un margen de fase  $MF \geq 30$ .
- 2) Verificar si se cumplen las especificaciones de diseño y, en caso de no ser así, indicar las razones y posibles soluciones.
- 3) Dibujar el lugar geométrico de las raíces del sistema compensado.

El efecto de la corriente se puede tratar como una perturbación y modelar su efecto mediante un factor constante  $K_c$ , siempre que el ángulo entre el timón y la dirección de la corriente se mantenga relativamente constante. En la Figura 3 se muestra el diagrama de bloques en lazo abierto utilizado para su estudio.

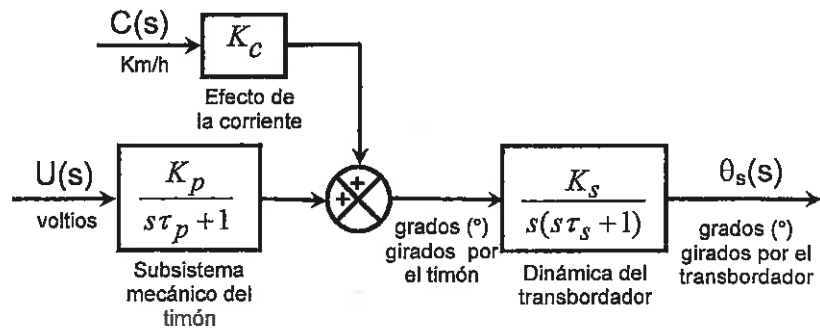


Figura 3: Influencia de la corriente sobre el sistema en lazo abierto

- 4) En estas condiciones, es decir, teniendo en cuenta que el sistema permanece en lazo abierto, calcular  $\theta_s(t)$  para  $\theta_e(t) = 0$  si la corriente  $c(t)$  que incide sobre el timón lleva una velocidad constante de  $A$  km/h.

SOLUCIÓN

1. Diseñar un compensador de adelanto de fase  $G_c(s)$  de forma que el sistema de control presente un error de velocidad  $e_v \leq 10\%$  y un margen de fase  $MF \geq 30$ .

Partimos de un sistema que en lazo abierto tiene la siguiente función de transferencia,

$$G_{LA}(s) = \frac{K_p}{s\tau_p + 1} \cdot \frac{K_s}{s(\tau_s + 1)} = \frac{5}{s(0,2s + 1)(5s + 1)}$$

El compensador basado en red de adelanto va a tener la siguiente estructura,

$$G_c(s) = K_c \frac{1 + \alpha s}{1 + \alpha \tau s}; \quad 0 < \alpha < 1$$

Para calcular el compensador seguimos los siguientes pasos,

1. *Ajustar el valor de la ganancia.* Lo hacemos en función de de la especificación de error,

$$\left. \begin{aligned} e_{ss} &= \frac{1}{K_v} \leq 0,1 \rightarrow K_v \geq 10 \\ K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \frac{5}{s(0,2s + 1)(5s + 1)} = 5K_c \end{aligned} \right\} K_c \geq 2$$

2. *Calcular el Margen de Fase inicial.* Para ello partimos de la función de transferencia en lazo abierto en la que ya se introduce el valor de la ganancia correspondiente al compensador,

$$\left. \begin{aligned} MF_{mic} &= 180 + \text{Arg}[K_c G_{LA}(j\omega)]_{\omega=\omega_g} = 180 - 90 - \arctg 0,2\omega_g - \arctg 5\omega_g \\ |K_c G_{LA}(j\omega)|_{\omega=\omega_g} &= 1 \rightarrow \frac{10}{\omega_g \sqrt{0,04\omega_g^2 + 1} \sqrt{25\omega_g^2 + 1}} = 1 \rightarrow \omega_g = 1,38 \text{ rad/seg} \end{aligned} \right\} MF_{mic} = -7,18^\circ$$

3. *Calcular el valor de  $\alpha$ .* Este parámetro se encuentra en función del máximo valor de adelanto que introduce el compensador. Para compensar el error debido al desplazamiento de la frecuencia de cruce de ganancia, se realiza un incremento del 10% en el incremento del margen de fase necesario,

$$\left. \begin{aligned} \Delta MF &= 1,1[MF_{esp} - MF_{mic}] = 1,1[30 - (-7,18)] \approx 41^\circ \\ \alpha &= \frac{1 - \text{sen} \Delta MF}{1 + \text{sen} \Delta MF} \end{aligned} \right\} \alpha = 0,2$$

4. *Calcular el valor de  $\tau$ .* Este parámetro se encuentra en función del valor de la nueva frecuencia de cruce de ganancia,

$$\left. \begin{aligned} |K_c G_{LA}(j\omega)|_{\omega=\omega'_g} + 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} &= 0 \text{ dB} \rightarrow \frac{10}{\omega'_g \sqrt{0,04\omega'^2_g + 1} \sqrt{25\omega'^2_g + 1}} = \sqrt{0,2} \rightarrow \omega'_g = 2,03 \\ \omega'_g &= \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}} \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega'_g \sqrt{\alpha}} \end{aligned} \right\} \tau = 1,1$$

El compensador resultado es,

$$G_c(s) = 2 \frac{1 + 1,1s}{1 + 0,22s}$$

2. Verificar si se cumplen las especificaciones de diseño y, en caso de no ser así, indicar las razones y posibles soluciones.

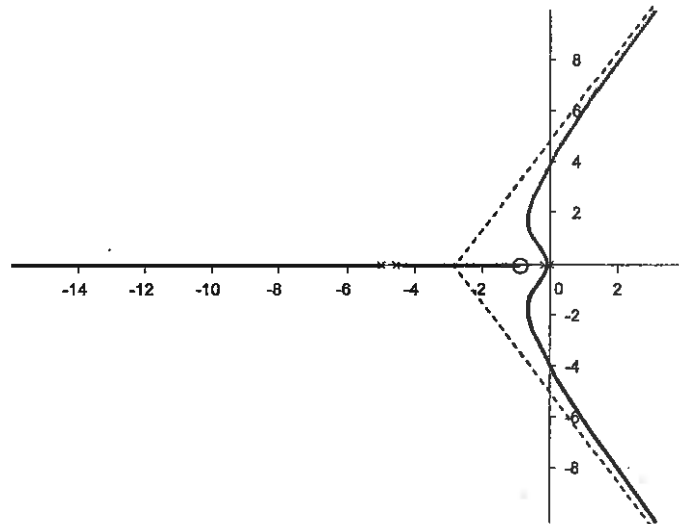
Para verificar que se trata de un compensador que hace que se cumplan las especificaciones no es necesario comprobar el error dado que se la ganancia introducida hace cumplir las condiciones. Por tanto es necesario comprobar únicamente el margen de fase que se obtiene para el sistema de control,

$$MF = 180 + \text{Arg} \left[ K_c \frac{1+j\tau\omega}{1+j\alpha\tau\omega} \cdot \frac{K_p}{1+j\tau_p\omega} \cdot \frac{K_i}{j\omega(1+j\tau_i\omega)} \right]_{\omega=\omega_c} = 180 + \text{Arg} \left[ 2 \frac{1+j1,1\omega}{1+j0,22\omega} \cdot \frac{10}{1+j0,2\omega} \cdot \frac{0,5}{j\omega(1+j5\omega)} \right]_{\omega=2,03}$$

$$MF = 180 + \text{arctg}1,1\omega_c' - \text{arctg}0,22\omega_c' - \text{arctg}0,2\omega_c' - 90 - \text{arctg}5\omega_c' \xrightarrow{\omega_c' \rightarrow 2,03} MF = 25^\circ$$

Se obtiene un margen de fase inferior a la especificación esto es debido a que la aproximación del 10% en el incremento del margen de fase es insuficiente para suplir el desplazamiento que sufre la frecuencia del cruce de ganancia. Para solucionar dicho problema sería necesario un incremento mayor al 10% en el incremento del margen de fase o la utilización de otro sistema de compensación (por ejemplo, redes de adelanto en cascada).

3. Dibujar el lugar geométrico de las raíces del sistema compensado.



4. Calcular  $\theta_s(t)$  para  $\theta_s(t) = 0$  si la corriente  $c(t)$  que incide sobre el timón lleva una velocidad constante de  $A$  km/h. La función de transferencia del sistema bajo estas circunstancias es,

$$\frac{\theta_s(s)}{C(s)} = \frac{K_c K_s}{s(s\tau_s + 1)}$$

Ante una entrada  $c(t) = A$  donde  $C(s) = A/s$ , la salida será,

$$\theta_s(s) = \frac{K_c K_s}{s(s\tau_s + 1)} \frac{A}{s}$$

Pasando del dominio transformado de Laplace al dominio del tiempo,

$$\theta_s(s) = \frac{K_c K_s}{s(s\tau_s + 1)} \frac{A}{s} = \frac{P_1}{s} + \frac{P_2}{s^2} + \frac{P_3}{1+s\tau_s}$$

Aplicando teorema de los residuos,

$$P_1 = \frac{d}{ds} [\theta_s(s) C(s) \cdot s] \Big|_{s=0} = -AK_c K_s \tau_s$$

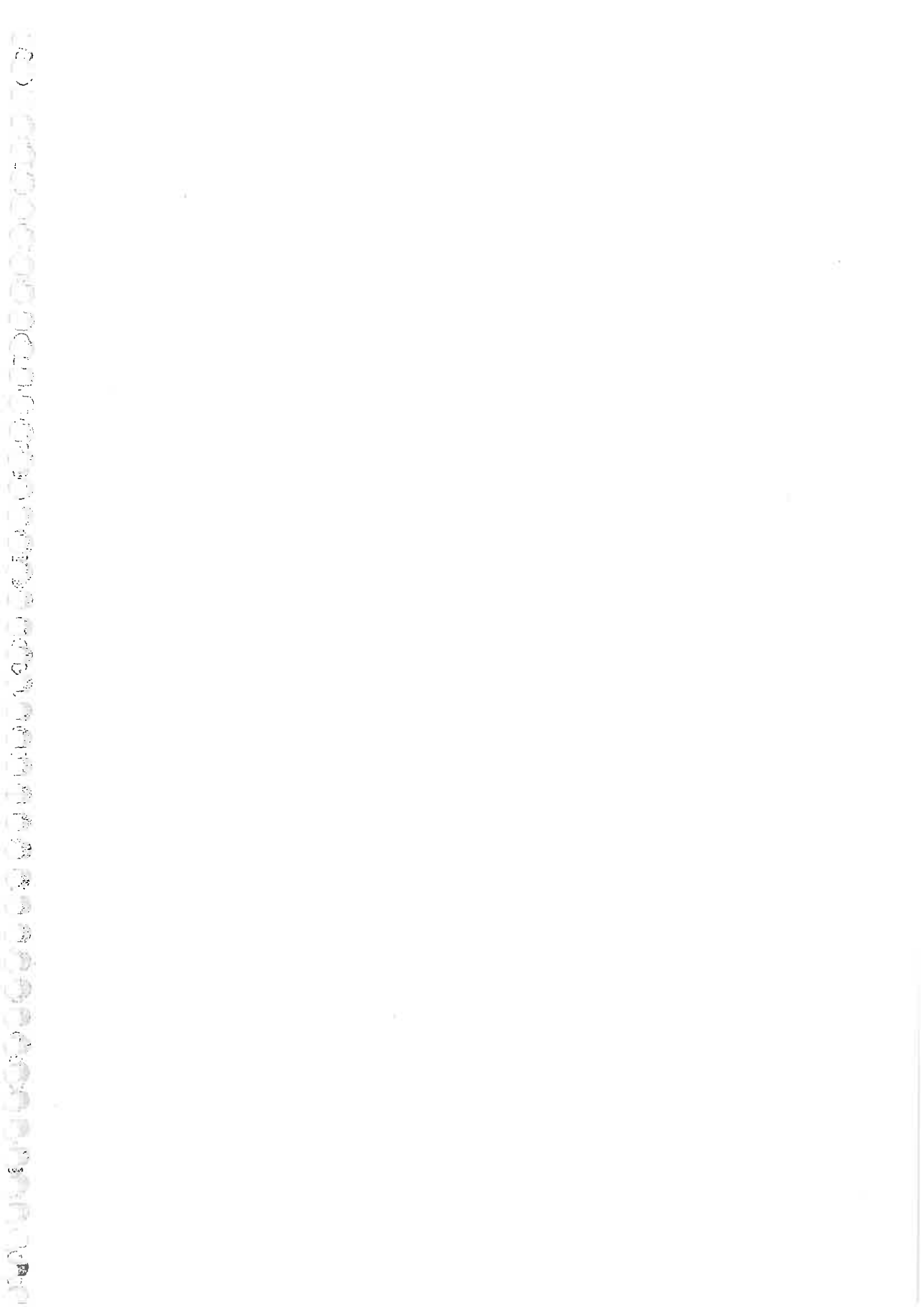
$$P_2 = \theta_s(s) C(s) \cdot s^2 \Big|_{s=0} = AK_c K_s$$

$$P_3 = \theta_s(s) C(s) \cdot (1 + \tau_s s) \Big|_{s=-1/\tau_s} = AK_c K_s \tau_s^2$$

Por lo tanto,

$$\theta_s(t) = P_1 + P_2 t + \frac{P_3}{\tau_s} e^{-\frac{t}{\tau_s}} \rightarrow \theta_s(t) = AK_c K_s \left[ t - \tau_s + \tau_s e^{-\frac{t}{\tau_s}} \right] \xrightarrow[\tau_s=5, K_s=0,5]{\tau_s=5} \boxed{\theta_s(t) = AK_c 0,5 \left[ t - 5 + 5e^{-\frac{t}{5}} \right]}$$







## SEMINARIO 3

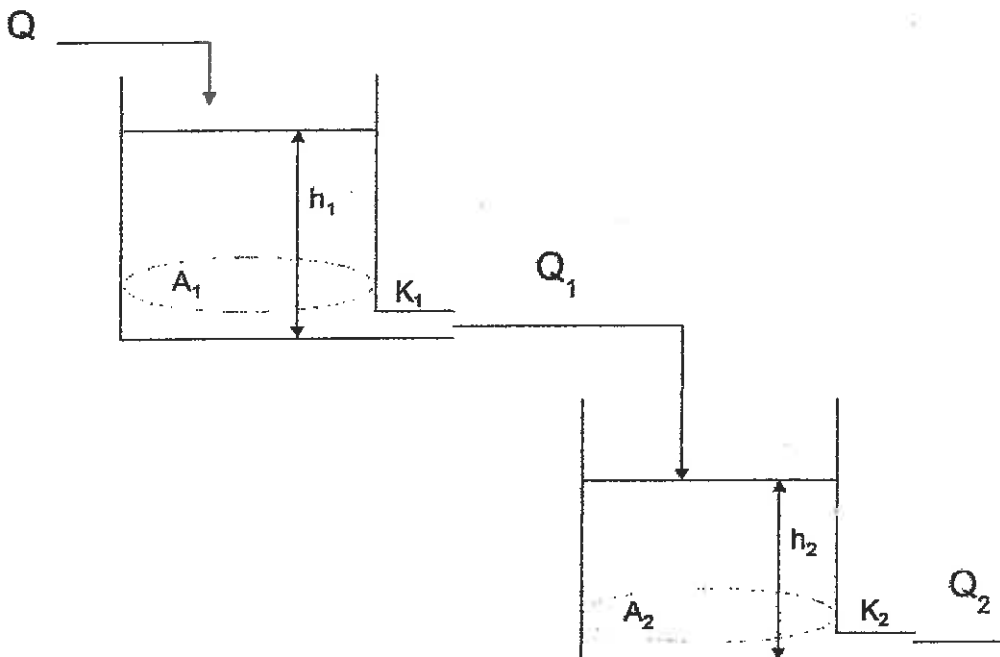
### PROBLEMAS PARA HACER EN CASA:

1. Partiendo de las funciones de transferencia obtenidas en el seminario 2 para el sistema de dos tanques independientes, supóngase que se dispone de 2 tanques de las siguientes características:

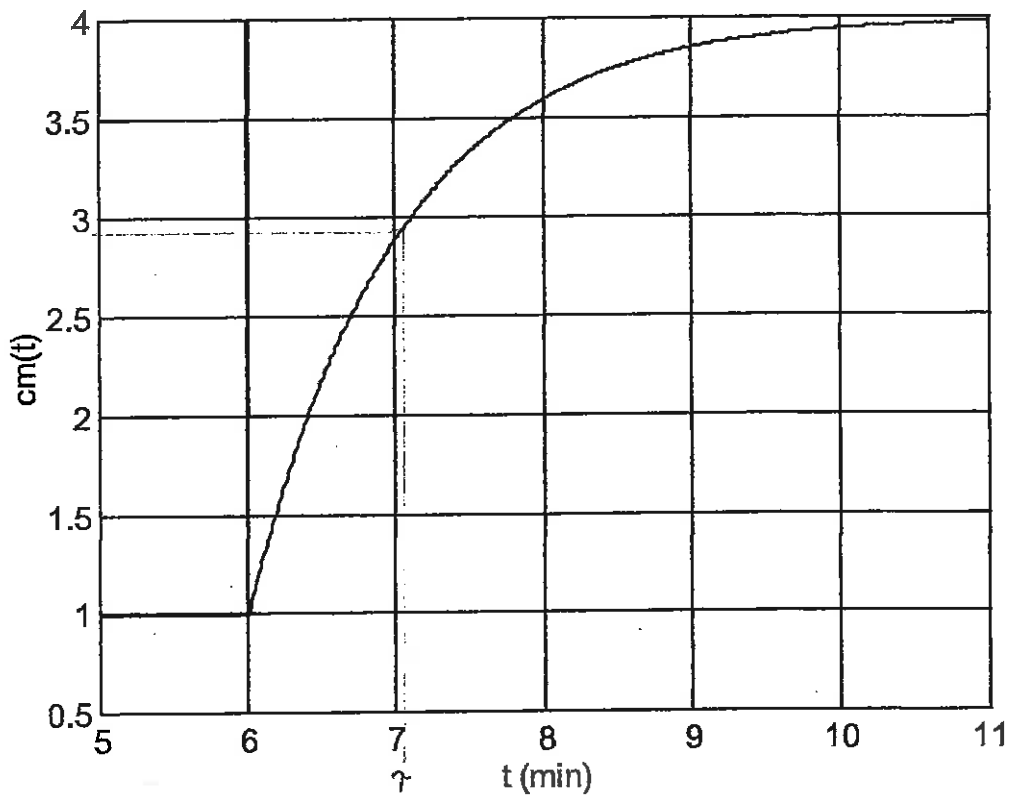
- Areas:  $A_1=A_2=5\text{m}^2$ ,
- coeficientes de descarga:  $K_1=100$ ,  $K_2=200$ ,
- niveles en el punto de operación:  $h_{10}=4\text{m}$ ,  $h_{20}=1\text{m}$ ,  $Q_0=200\text{ l/min}$

Se pide:

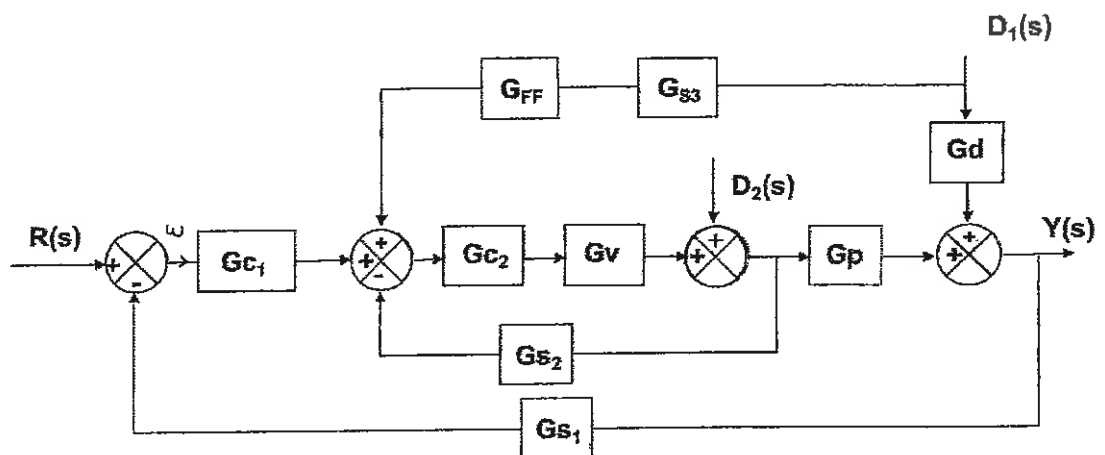
- Razone y dibuje de forma aproximada la evolución temporal del nivel en los dos tanques,  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  cuando el caudal de entrada se incrementa en  $2\text{ l/s; min}$
- Indique sobre la respuesta los valores significativos ( $t_s$ ,  $y_{ss}$ ,  $t_s\dots$ ) siempre que pueda.

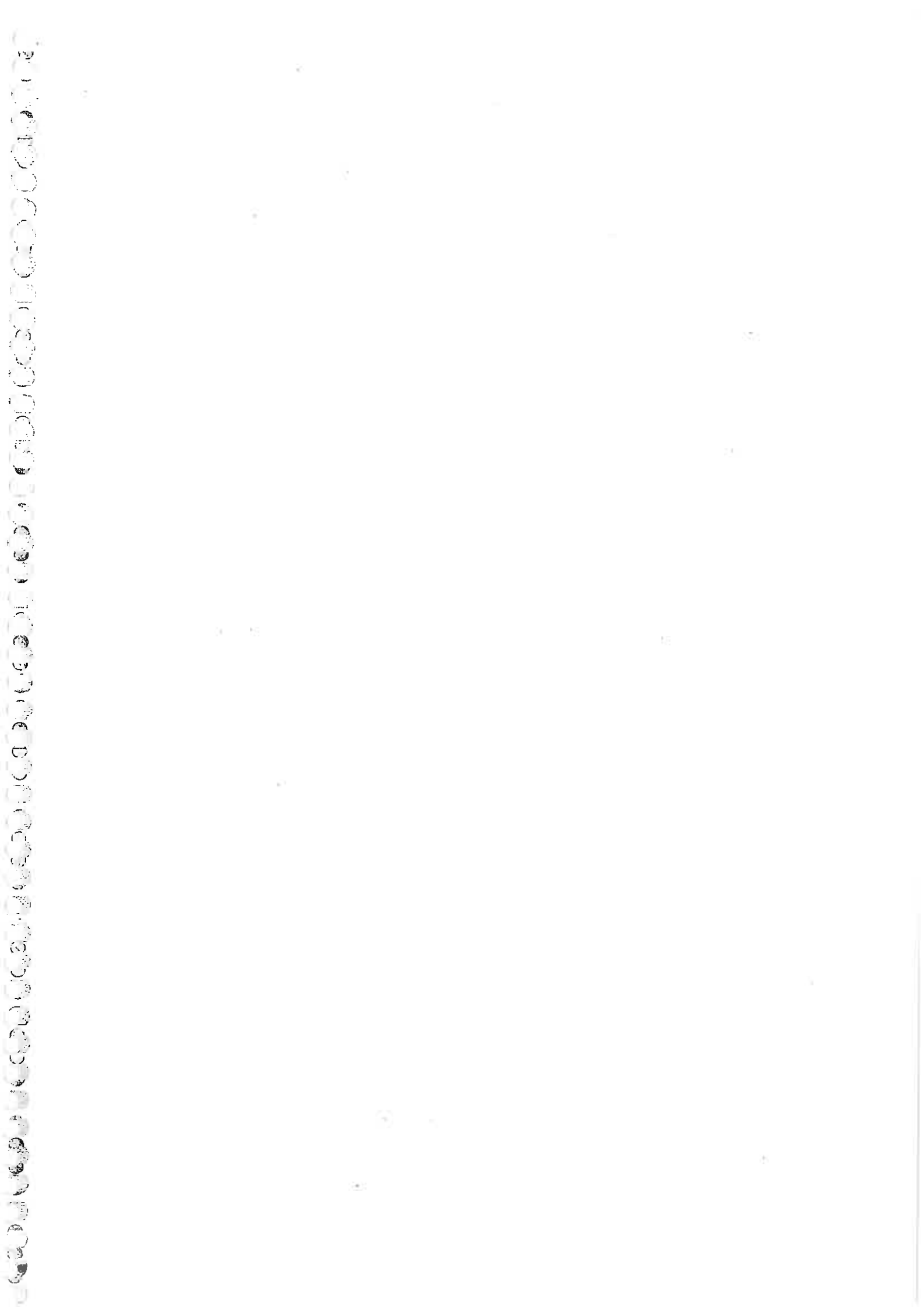


2. La concentración cáustica de una corriente de proceso se mide mediante una célula de conductividad. Para determinar las características del proceso se provoca en  $t=6$  un cambio escalón de valor  $3\text{ Kg/m}^3$  en la concentración cáustica que pasa a través de la célula,  $c(t)$  (entrada al sistema). La concentración medida  $c_m(t)$  (salida del sistema) es la representada en la figura. Determinar la función de transferencia entre  $C_m(s)$  y  $C(s)$ .



3. Reducir el siguiente diagrama de bloques calculando las funciones de transferencia necesarias para  $Y(s)$ :





PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN EL SEMINARIO:

4. Sea un termómetro que tarda 60 segundos en dar la temperatura de un cuerpo. Suponiendo que se comporta como un sistema de 1º orden, deduzca su  $G(s)$  (criterio del 2%)
5. Dibujar la forma de respuesta indicando los parámetros significativos de los sistemas con las siguientes funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{5}{s + 2,5}$$

$$G(s) = \frac{s + 2}{s + 1}$$

$$G(s) = \frac{-1}{2s + 1}$$

6. Se conoce la respuesta de un sistema a impulso unitario:

$$y(t) = 5 - 5e^{-t}$$

¿Es posible conocer su función de transferencia?

# seminario 3.

## 1. TANQUE 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt} = Q(t) - Q_1(t) \\ \text{Flujo turbulento} \Rightarrow Q_1(t) = K_1 \sqrt{h_1(t)} \end{array} \right.$$

Linealizamos  $\rightarrow f(h_1, h_1, Q) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} - Q(t) + K_1 \sqrt{h_1(t)} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{P_0} = \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{h}} = A_1 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \Big|_{P_0} = A_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = -1 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial Q} \Big|_{P_0} = -1$$

$$A_1 \cdot \Delta \dot{h}_1 + \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}} \Delta h_1 - \Delta Q = 0$$

## TANQUE 2

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \\ \text{Flujo turbulento} \Rightarrow Q_2(t) = K_2 \sqrt{h_2(t)} ; Q_1(t) = K_1 \sqrt{h_1(t)} \end{array} \right.$$

Linealizamos  $\rightarrow f(h_2, h_2, h_1) = A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} - K_1 \sqrt{h_1(t)} + K_2 \sqrt{h_2(t)} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{h}_2} = A_2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{h}_2} \Big|_{P_0} = A_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_2} = \frac{K_2}{2\sqrt{h_2}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial h_2} \Big|_{P_0} = \frac{K_2}{2\sqrt{h_2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_1} = -\frac{K_1}{2\sqrt{h_1}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial h_1} \Big|_{P_0} = -\frac{K_1}{2\sqrt{h_1}}$$

$$A_2 \cdot \Delta \dot{h}_2 + \frac{K_2}{2\sqrt{h_2}} \Delta h_2 - \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}} \Delta h_1 = 0$$

Aplicamos la TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$A_1 \cdot s \cdot \Delta H_1(s) + \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}} \Delta H_1(s) = \Delta Q(s)$$

$$G_1(s) = \frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{A_1 s + \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}}} = \frac{2\sqrt{h_1}/K_1}{\frac{2A_1\sqrt{h_1}}{K_1} s + 1}$$

$$A_2 \cdot s \cdot \Delta H_2(s) + \frac{K_2}{2\sqrt{h_2}} \Delta H_2(s) = \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}} \Delta H_1(s)$$

$$G_2'(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta H_1(s)} = \frac{K_1/2\sqrt{h_1}}{A_2 \cdot s + K_2/2\sqrt{h_2}} = \frac{\frac{K_1}{K_2} \cdot \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}{\frac{2A_2\sqrt{h_2}}{K_2} s + 1}$$

Queremos obtener  $G_2(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q(s)}$

$$G_2(s) = G_1(s) \cdot G_2'(s) = \frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q(s)} \cdot \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta H_1(s)} = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q(s)}$$

Sustituimos por los datos del problema

$$G_1(s) = \frac{2 \cdot \sqrt{4} / 100}{\frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{4}}{100} s + 1} \longrightarrow G_1(s) = \frac{0,04}{0,2 s + 1}$$

$$G_2'(s) = \frac{\frac{100}{200} \sqrt{1/4}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{4}}{200} s + 1} \longrightarrow G_2'(s) = \frac{0,25}{0,05 \cdot s + 1}$$

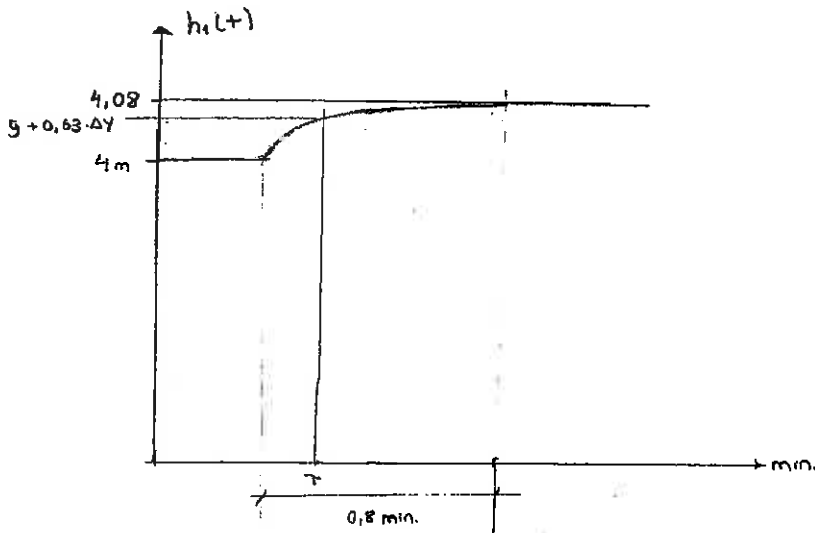
$$G_2(s) = \frac{0,04}{0,2 s + 1} \cdot \frac{0,25}{0,05 s + 1} = \frac{0,01}{0,01 s^2 + 0,25 s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 25 s + 100}$$



a) Evolución temporal del nivel en los dos tanques a un escalón 2.  
 Valores significativos.

TANQUE 1



$$G_1(s) = \frac{0,04}{0,2s + 1}$$

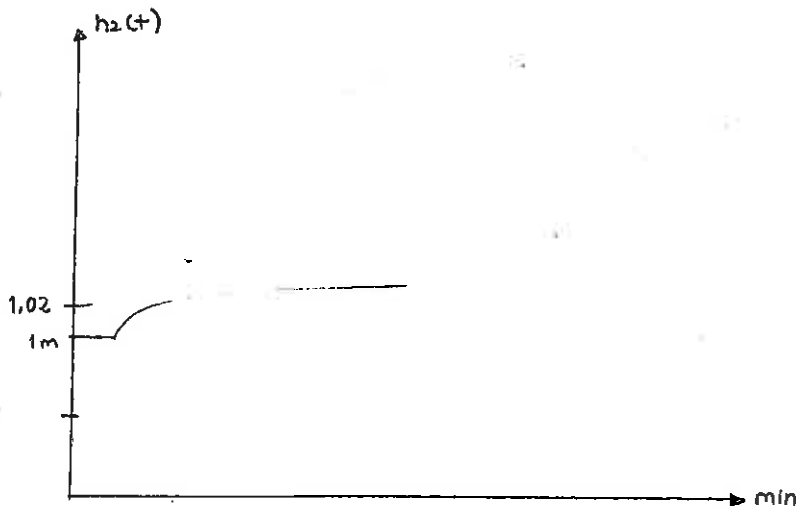
$$\tau = 0,2 \text{ min}$$

$$\tau_s(2\%) = 4\tau = 0,8 \text{ min}$$

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta U} \rightarrow \Delta Y = K \cdot \Delta U = 0,04 \cdot 2 = 0,08$$

$$G_1(s) = \frac{H_1(s)}{Q(s)} \rightarrow H_1(s) = G_1(s) \cdot Q(s)$$

TANQUE 2



$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 25s + 100}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = 10 \\ \delta = 1,25 > 1 \end{array} \right. \text{ sistema sobreamortiguado}$$

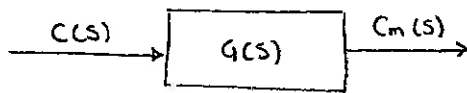
$$K = 0,01$$

$$\text{polos} \Rightarrow s_1 = -5$$

$$s_2 = -20$$

$$K \cdot U = 0,01 \cdot 2 = 0,02 = \Delta Y$$

## EJERCICIO 2.



En  $t=6$  cambio escalon de valor  $3 \text{ kg/m}^3$ .

La salida se comporta como un sistema de segundo orden.

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \text{donde} \quad K = \frac{\Delta Y}{\Delta u} = \frac{4 - 1}{3} = 1$$

$$\bar{y} + 0,63 \cdot \Delta Y = 1 + 0,63 \cdot 3 = 2,89 \longrightarrow t = 7 \rightarrow \tau = 7 - 6 \rightarrow \tau = 1 \text{ min}$$

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

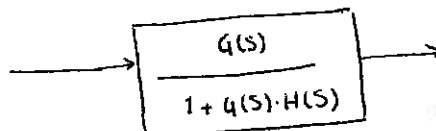
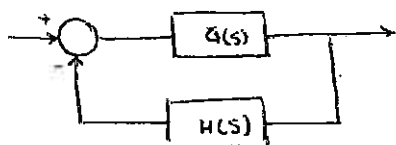
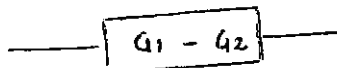
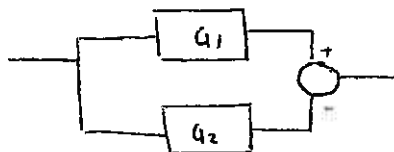
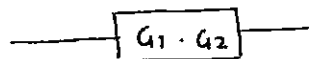
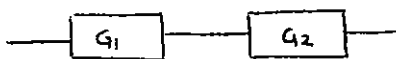
mediante la hipotesis del 2%.  $\rightarrow 3\tau = t_s = 11 \rightarrow \tau = \frac{11}{3} = 6,66 = 7 - 6 \rightarrow \tau = 1$

## EJERCICIO 3.

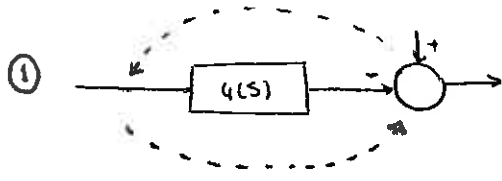
3 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA  $\rightarrow$  1 por cada entrada.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} ; \frac{Y(s)}{D_1(s)} ; \frac{Y(s)}{D_2(s)}$$

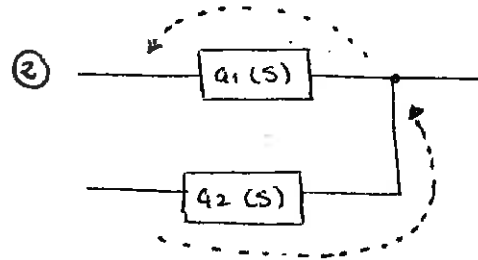
1) lo primero que simplificamos son las ESTRUCTURAS SIMPLES.



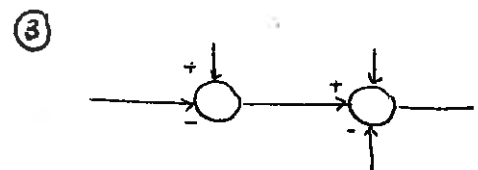
II)



Podemos cambiar el sumador de posición



Podemos cambiar el punto de bifurcación de posición

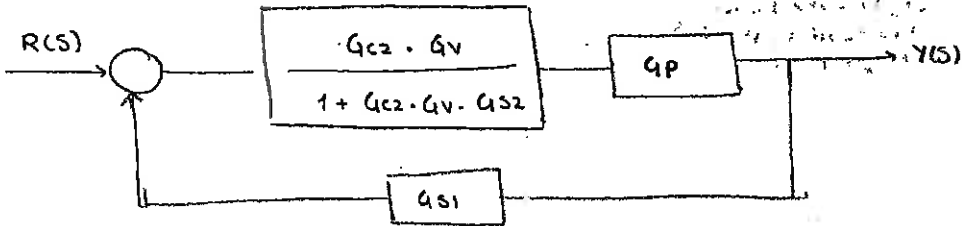
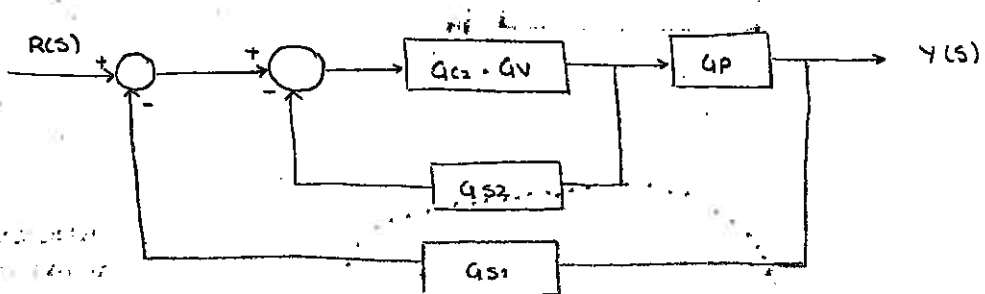


Dos sumadores podemos recomponerlos como queramos.

Reducir el siguiente diagrama de bloques calculando las funciones de transferencia necesarias para  $Y(s)$ .

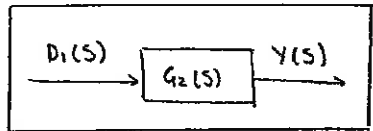
$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad \begin{matrix} D_1=0 \\ D_2=0 \end{matrix}$$

$$R(s) \rightarrow G_1(s) \rightarrow Y(s) \quad \begin{matrix} D_1=0 \\ D_2=0 \end{matrix}$$

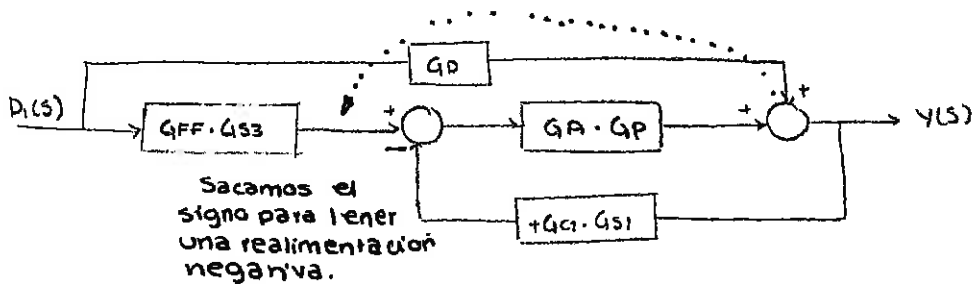
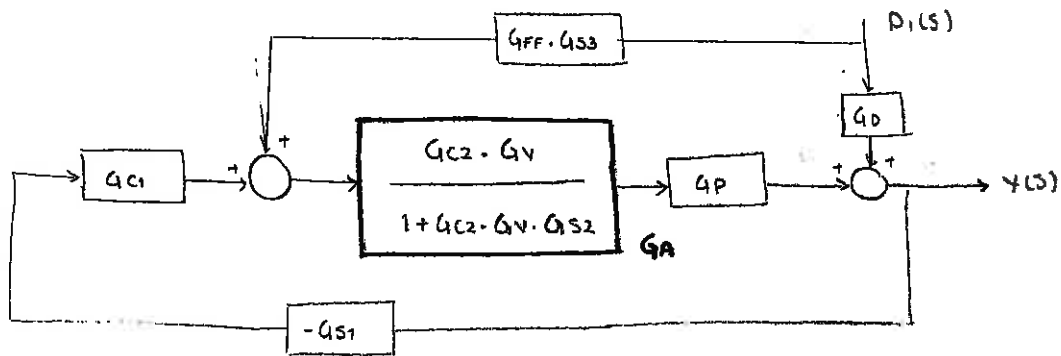
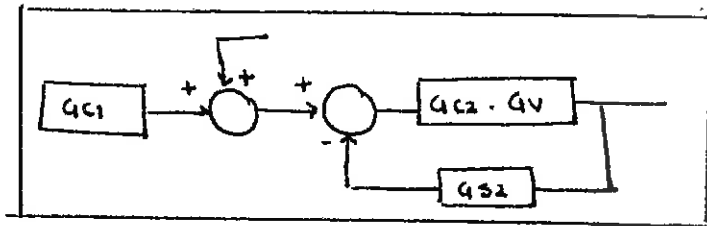
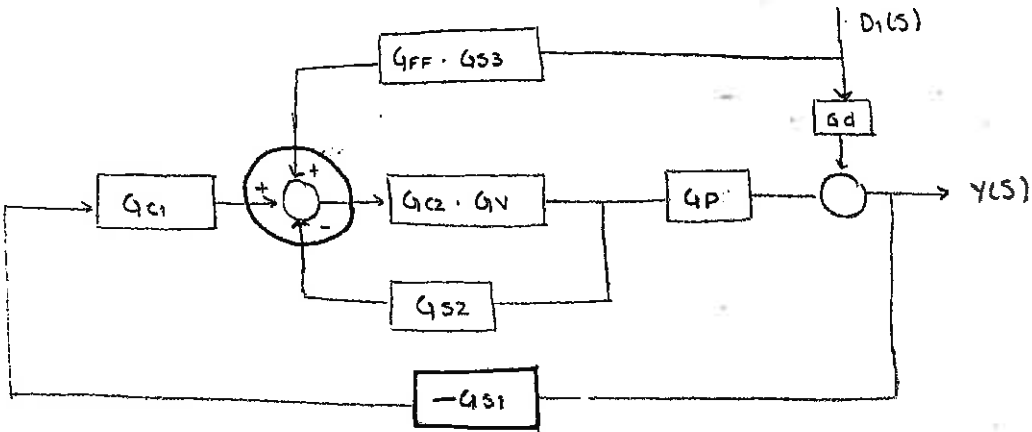


$$G_1(s) = \frac{\frac{G_{c2} \cdot G_v \cdot G_p}{1 + G_{c2} \cdot G_v \cdot G_{s2}}}{1 + \frac{G_{c2} \cdot G_v \cdot G_{s1} \cdot G_p}{1 + G_{c2} \cdot G_v \cdot G_{s2}}} = \frac{G_{c2} \cdot G_v \cdot G_p}{1 + G_{c2} \cdot G_v \cdot G_{s2} + G_{c2} \cdot G_v \cdot G_{s1} \cdot G_p} = G_1(s)$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)} \quad \left| \begin{array}{l} R(s) = 0 \\ D_2(s) = 0 \end{array} \right.$$

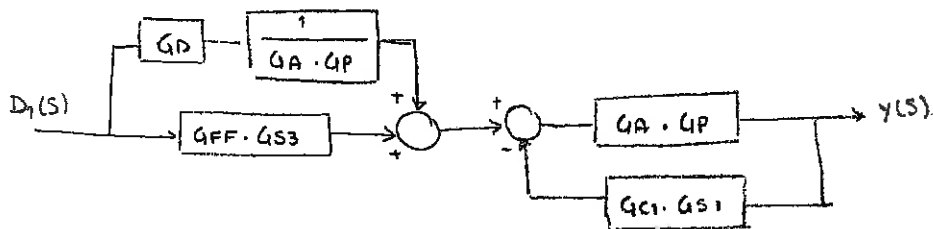


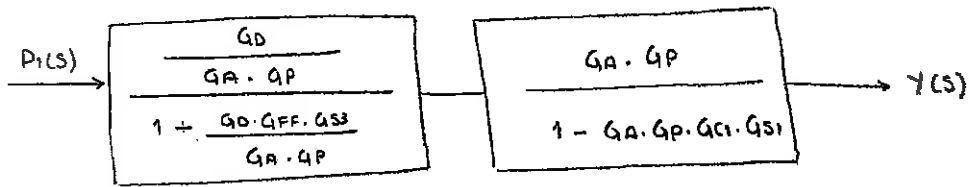
Al desaparecer el sumador  $G_{s1}$  se resta, introducimos el signo en el bloque



Sacamos el signo para tener una realimentación negativa.

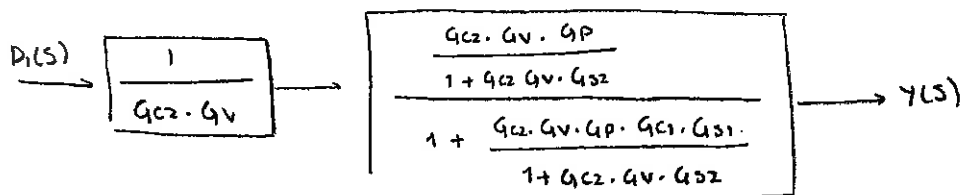
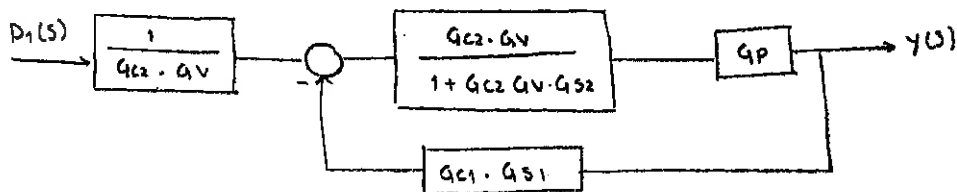
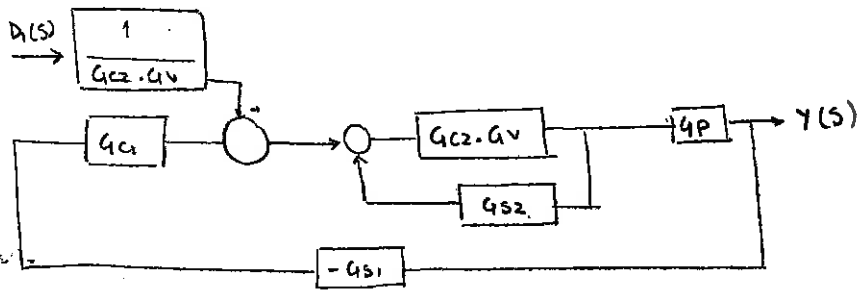
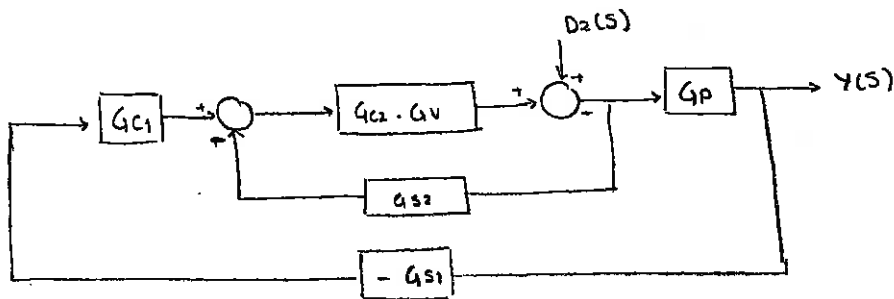
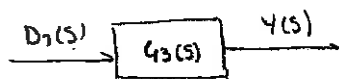
Movemos el sumador a la izquierda de un bloque.





$$G_2(s) = \left( \frac{G_D}{G_A \cdot G_P - G_D \cdot G_{FF} \cdot G_{S3}} \right) \left( \frac{G_A \cdot G_P}{1 - G_A \cdot G_P \cdot G_{C1} \cdot G_{S1}} \right) \quad \text{con } G_A = \frac{G_{C2} \cdot G_V}{1 + G_{C2} \cdot G_V \cdot G_{S2}}$$

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)} \quad \left. \begin{array}{l} R(s) = 0 \\ D_1(s) = 0 \end{array} \right\}$$



$$D_3(s) = \frac{1}{G_{c2} \cdot G_v} \cdot \frac{G_{c2} \cdot G_v \cdot G_P}{1 + G_{c2} \cdot G_v \cdot G_{S2} + G_{c2} \cdot G_v \cdot G_P \cdot G_{c1} \cdot G_{S1}}$$

EJERCICIO 4

SISTEMA DE PRIMER ORDEN  $\Rightarrow \frac{K}{\tau s + 1}$

$t_s = 4\tau = 60 \rightarrow \tau = \frac{60}{4} = 15 \text{ s}$

$K = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = 1 \Rightarrow$  Nos interesa que un grado del termómetro represente un grado del cuerpo.

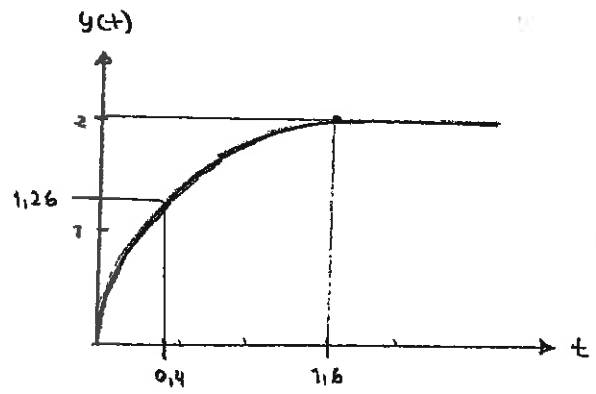
$$G(s) = \frac{1}{15s + 1}$$

EJERCICIO 5.

Dibujar la forma respuesta indicando los parámetros significativos de los sistemas con las siguientes funciones de transferencia.

a)  $G(s) = \frac{s}{s + 2,5} = \frac{2}{0,4s + 1}$  SISTEMA DE PRIMER ORDEN

$\left\{ \begin{array}{l} K=2 \text{ amplifica} \\ \tau = 0,4 \rightarrow T_s (2\%) = 1,6 \\ \Delta Y = K \cdot \Delta U = 2 \text{ cido unitario.} \end{array} \right.$

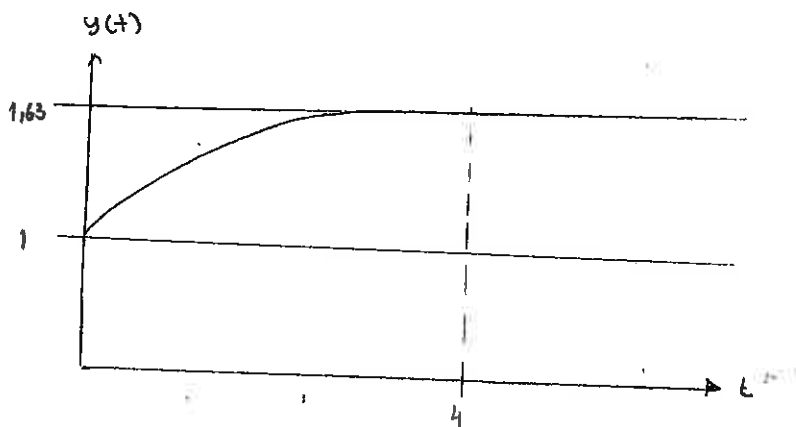


$0,63 \cdot \Delta Y = 0,63 \cdot 2 = 1,26$

$$b) \quad G(s) = \frac{s+2}{s+1} = \frac{s+1}{s+1} + \frac{1}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 1 \rightarrow t_s(2\%) = 4 \\ K = 1 \text{ no modifica} \\ \Delta Y = \Delta U = 1. \end{array} \right.$$

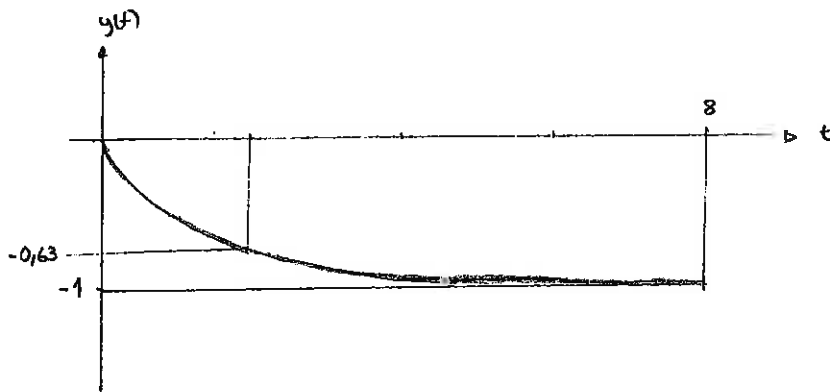
$$0,63 \cdot 1 = 0,63 = y(\tau)$$



$$c) \quad G(s) = \frac{-1}{2s+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 2 \rightarrow t_s(2\%) = 2\tau = 8 \\ K = -1 \text{ ganancia negativa} \rightarrow \text{atenua.} \\ \Delta Y = \Delta U \cdot K = -1 \end{array} \right.$$

$$y(\tau) = 0,63 \cdot (-1) = -0,63$$



### EJERCICIO 6.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \text{ donde } U(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s)$$

Aplicando la transformada de Laplace.

$$G(s) = Y(s) = \frac{5}{s} - 5 \frac{1}{s+1} = 5 \left[ \frac{s+1-s}{s(s+1)} \right]$$

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)}$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header, which is mostly illegible due to blurring and low contrast.

1

2

Handwritten notes or a small diagram in the middle of the page, including some illegible characters and possibly a small sketch.

3

4

5

6

7

8

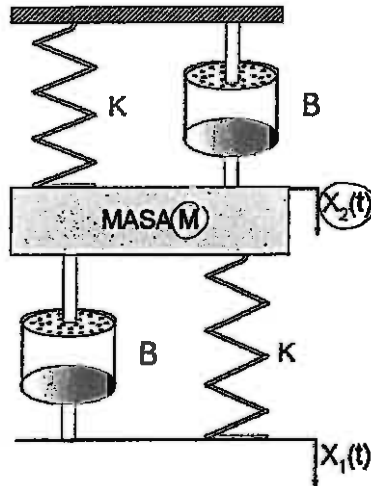
9



## SEMINARIO 4

### PROBLEMAS PARA HACER EN CASA:

1. Sea el sistema de la figura:



Suponga que interesa conocer el desplazamiento de la masa  $M$ ,  $x_2(t)$ , a partir de su posición de equilibrio cuando se aplica un desplazamiento  $x_1(t)$  conocido.

Se pide:

- Calcular la función de transferencia  $G(s)=X_2(s)/X_1(s)$ .
- Analice, en función de los valores de los parámetros  $M$ ,  $B$  y  $K$ , cómo será el desplazamiento  $x_2(t)$  si se aplica un incremento constante a  $x_1(t)$ . ¿Qué puede decir de la influencia del coeficiente del muelle, de coeficiente del amortiguador y de la masa en la forma en que responde? ¿Cómo influyen dichos parámetros en la posición del cero?
- Dibuje la posición de los polos y ceros de la función de transferencia si el valor de los parámetros del sistema  $M$ ,  $B$  y  $k$  es el siguiente:  $M = 1$  kg,  $K = 0.5$  N/m,  $B=0,95$  Ns/m. Razone cómo responderá el sistema a una entrada de 1 m. en  $x_1$ .

2. Resolver el problema 19 de la colección de problemas del tema 5:

3. Resolver el problema 24 de la colección de problemas del tema 5:

### PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN EL SEMINARIO:

Durante el seminario se discutirán los tres problemas anteriores y se resolverán los problemas 23 y 27 de la colección de problemas del tema 5.

Handwritten text in the upper right section of the page.

Handwritten text in the middle right section of the page.

Handwritten text in the middle section of the page.

Handwritten text in the lower middle section of the page.

Handwritten text in the middle left section of the page.

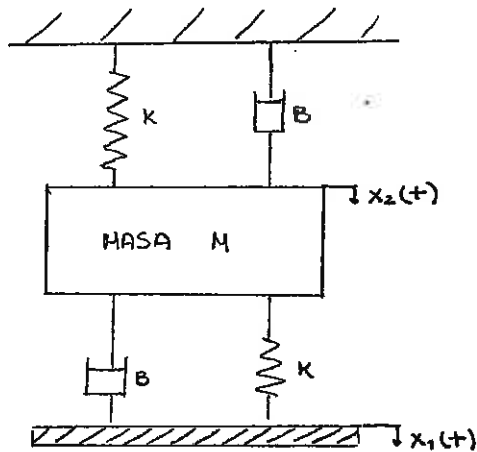
Handwritten text in the upper left section of the page.

Handwritten text in the lower left section of the page.

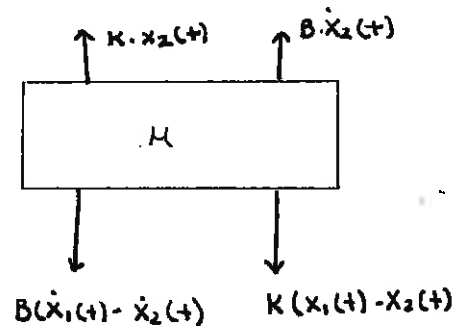
Handwritten text in the bottom left section of the page.

# Seminario 4.

## EJERCICIO 1



D. Sólido libre



En el equilibrio:

$$B(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + K(x_1(t) - x_2(t)) - Kx_2(t) - B\dot{x}_2(t) = M\ddot{x}_2(t)$$

$$B\dot{x}_1(t) + Kx_1(t) = M\ddot{x}_2(t) + 2B\dot{x}_2(t) + 2Kx_2(t)$$

Aplicamos la transformada de Laplace:

$$B \cdot s \cdot X_1(s) + K \cdot X_1(s) = M \cdot s^2 X_2(s) + 2Bs X_2(s) + 2K X_2(s)$$

A) Función de transferencia  $G(s) = X_2(s) / X_1(s)$

$$G(s) = \frac{Bs + K}{Ms^2 + 2Bs + 2K} \rightarrow G(s) = \frac{B/M s + K/M}{s^2 + \frac{2B}{M} s + \frac{2K}{M}}$$

B) ¿Cómo será el desplazamiento  $x_2(t)$  si se aplica un incremento constante a  $x_1(t)$ ?

Los parámetros característicos de  $G(s)$ :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2K}{M}}$$

$$2s \cdot \omega_n = \cancel{2}s \sqrt{\frac{2K}{M}} = \frac{2B}{M} \rightarrow s = \sqrt{\frac{B^2}{2MK}} \rightarrow s = \frac{B}{\sqrt{2MK}}$$

\* Si el cero está por delante de los polos y pegado al origen, estos parámetros no se cumplen. Pero suponemos que el cero no tiene influencia en el sistema.

Dependencia del valor de  $\delta$ :

\*  $0 < \delta < 1 \Rightarrow 0 < \frac{B}{\sqrt{2KM}} < 1 \Rightarrow 0 < B < \sqrt{2KM}$  SISTEMA subamortiguado.

\*  $\delta > 1 \Rightarrow B > \sqrt{2KM}$  SISTEMA sobre-amortiguado.  
 $\delta = 1 \Rightarrow B = \sqrt{2KM}$

\*  $\delta = 0 \Rightarrow B = 0$  SISTEMA sin amortiguamiento

c) Polos:  $s^2 + \frac{2B}{M}s + \frac{2K}{M} = 0 \rightarrow s = \frac{-\frac{2B}{M} \pm \sqrt{\frac{4B^2}{M^2} - \frac{8K}{M}}}{2} = -\frac{B}{M} \pm \sqrt{\frac{B^2}{M^2} - \frac{2K}{M}}$

Dependiendo de los valores de  $M, B, K$  variará la posición de

los polos:

$\frac{B^2}{M^2} - \frac{2K}{M} > 0 \rightarrow \frac{B^2}{M} - 2K > 0 \rightarrow \boxed{B^2 > 2KM}$  Polos reales

$\frac{B^2}{M^2} - \frac{2K}{M} < 0 \rightarrow \frac{B^2}{M} - 2K < 0 \rightarrow \boxed{B^2 < 2KM}$  Polos complejos conjugados.

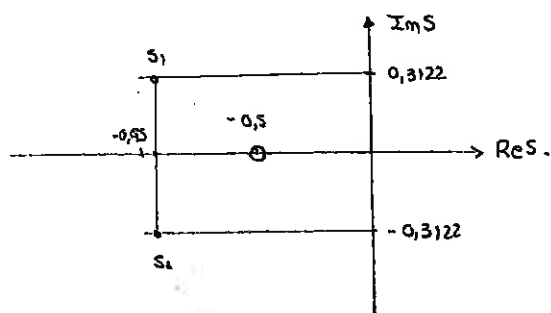
Si  $M = 1 \text{ kg}$   
 $K = 0,5 \text{ N/m}$   
 $B = 0,95 \text{ Ns/m}$

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{s + 0,5}{s^2 + 1,9s + 1}$$

Polos  $\Rightarrow s^2 + 1,9s + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{s_{1,2} = -0,95 \pm 0,3122j}$  polos complejos conjugados.

Ceros  $\Rightarrow \boxed{s = -0,5}$  cero estable

Representación gráfica:



\* Los polos tienden a retrasar la respuesta.

\* Los ceros tienden a adelantar la respuesta.

El cero tiene gran importancia en este caso porque está próximo al origen.

$$X_2(s) = G(s) \cdot X_1(s) \text{ donde } X_1(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow X_2(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

El sistema responderá como un sistema de orden 3, con un polo dominante en  $s=0$ , otros dos polos complejos conjugados  $s_1$  y  $s_2$  y un cero.

$\xi \approx 1 \rightarrow$  La respuesta al escalón será una oscilación amortiguada. El cero dominante provocará una respuesta más rápida y un incremento del sobreimpulso.

### EJERCICIO 2. (19)

Asociar las siguientes funciones de transferencia con las respuestas a entrada escalón.

✓ (C)  $G_1(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$

SISTEMA SEGUNDO ORDEN 1 cero.	}	$\omega_n = 1$	Polos $\Rightarrow s_{1,2} = -0,5 \pm 0,86j$ Polos complejos conjugados.
		$\xi = 0,5$	
		Cero $\Rightarrow s = 0 \rightarrow$ sobreimpulso y mayor rapidez	
		CERO DOMINANTE	

ESTACIONARIO  $y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) \cdot \frac{1}{s} = 0.$

✓ (A)  $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$

SISTEMA DE PRIMER ORDEN	}	$K=1 \rightarrow$ no modifica.
		$T=1 \rightarrow t_s(2\%) = 4$
		$\Delta Y = K \cdot \Delta U = 1$

✓ (I)  $G_3(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$

SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN.	}	$\omega_n = 1$	Polos $\Rightarrow s_1 = -1 ; s_2 = -1$ Polos reales dobles.
		$\xi = 1$ sistema sobreamortiguado	
		$K = 1$	

✓ (G)  $G_4(s) = \frac{1}{s+10} = \frac{0,1}{0,1s+1}$

SISTEMA DE PRIMER ORDEN	}	$K = 0,1$ amplifica
		$T = 0,1 \rightarrow t_s(2\%) = 0,4$
		$\Delta Y = K \cdot \Delta U = 0,1$
		Polo $\rightarrow s = -10$

✓ (F)  $G_5(s) = \frac{10}{s+10} = \frac{1}{0,1s+1}$   $\left. \begin{array}{l} K=1 \text{ no modifica.} \\ T=0,1 \rightarrow t_s(2\%) = 0,4 \\ \Delta Y = K \cdot \Delta U = 1 \end{array} \right\}$  SISTEMA DE PRIMER ORDEN

✓ (E)  $G_6(s) = \frac{-s+1}{s^2+s+1} = - \left( \frac{s-1}{s^2+s+1} \right)$   $\left. \begin{array}{l} \omega_n = 1 \\ \delta = 0,5 \text{ sistema subamortiguado} \\ \text{Polos: } s_{1,2} = -0,5 \pm 0,866j \\ \text{Cero: } s=1 \text{ cero inestable} \end{array} \right\}$

✓ (B)  $G_7(s) = \frac{1}{s^2+0,5s+1}$   $\left. \begin{array}{l} \omega_n = 1 \\ \delta = +0,25 \text{ sistema subamortiguado} \\ K=1 \text{ no modifica} \\ \text{Polos: } s_{1,2} = -0,25 \pm 0,968j \text{ complejas conjugadas.} \end{array} \right\}$

$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$Y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) \cdot s = 1$

✓ (D)  $G_8(s) = \frac{-s+1}{s+1} = -1 + \frac{2}{s+1}$   $\left. \begin{array}{l} T=1 \rightarrow t_s(2\%) = 4 \\ K=2 \\ \Delta Y = K \cdot \Delta U = 2. \end{array} \right\}$  SISTEMA DE PRIMER ORDEN CON UN CERO.

$\frac{-s+1}{s+1} \left| \frac{s+1}{-1} \right. \left. \begin{array}{l} -1 + \frac{2}{s+1} \end{array} \right.$

✓ (H)  $G_9(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s+1}$   $\left. \begin{array}{l} \omega_n = 1 \\ \delta = 1 \text{ sistema sobreamortiguado} \\ \text{Polos: } s_{1,2} = -1 \\ \text{Cero: } s = -1/3 = -0,333 \text{ ADELANTA LA RESPUESTA} \end{array} \right\}$

### EJERCICIO 3. (ej 24)

Gráfica correspondiente a un sistema de segundo orden cuando se le excita con un escalón de amplitud 2.

#### DOS FORMAS:

- Expresar la curva de forma analítica (matemáticamente) y realizar la transformada de Laplace. Muy complicado

② Los sistemas que utilizamos son lineales. ¿Nos suena la respuesta? Es la respuesta de un sistema de segundo orden a un impulso (no a un escalón). Teniendo en cuenta esto, podemos calcular la función de transferencia.

$$\left[ \begin{array}{l} Y_1(s) = G_1(s) \cdot R_1(s) \text{ con } R_1(s) = 2 \Rightarrow Y_1(s) = 2 \cdot G_1(s) \\ G_1(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2s\omega_n s + \omega_n^2} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Respuesta} \\ \text{a un} \\ \text{impulso.} \\ Y_{ss} = 0 \end{array} \right\}$$

Nos dan la respuesta a un ESCALÓN

$$Y_2(s) = G_2(s) \cdot R_2(s) \text{ con } R_2(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow Y_2(s) = \frac{2}{s} \cdot G_2(s)$$

$$\boxed{Y_1(s) = Y_2(s)} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{impulso} \quad \text{escalón} \\ Y_1(s) = Y_2(s) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{impulso} \quad \text{escalón} \\ Y_1(s) = 2G_1(s) = \frac{2}{s} G_2(s) = Y_2(s) \end{array}$$

MISMA  
RESPUESTA

↳ La derivada de la  
respuesta escalón  
= respuesta impulso

$$\boxed{G_2(s) = s \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2s\omega_n s + \omega_n^2}}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y(\text{escalón}(+p)) = a_1 = 2,32$$

$$y_{\text{escalón}(\infty)} = Y_{ss} = a_1 - a_2 = 2,32 - 0,32 = 2$$

$$M_p = \frac{y(+p) - Y_{ss}}{Y_{ss}} = \frac{2,32 - 2}{2} = 0,16 = \exp\left(-\frac{\pi s}{\sqrt{1-s^2}}\right)$$

$$-0,83 = -\frac{\pi s}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$\begin{array}{l} 3,35 = (3,35 + \pi^2) s^2 \rightarrow \boxed{s = 0,5} \\ 41,44 = 11,14 s^2 = \frac{2}{\omega_n^2} \rightarrow 41,44 = 51,38 s^2 \end{array}$$

**82089** SISTEMA subamortiguado

$$t_p = 3,6 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - 0,5^2}} \rightarrow \text{then } \omega_n = \pi \Rightarrow \boxed{\omega_n = \pi} \rightarrow \boxed{\omega_n = 1}$$

$$G(s) = \frac{1 \cdot s}{s^2 + s + 1}$$

EJERCICIO 23.

A) MAYOR A MENOR OSCILACIÓN

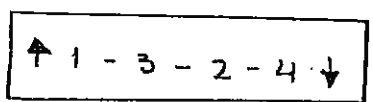
Depende del parámetro de amortiguamiento  $\delta$

Ecuación característica  $\rightarrow$  sistemas 2º orden  $\Rightarrow s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Los polos: 
$$s_{1,2} = \frac{-2\delta\omega_n \pm \sqrt{4\delta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{\delta^2 - 1}}{\delta}\right) \rightarrow \begin{matrix} \theta_1 = \theta_3 \\ \theta_2 = \theta_4 \end{matrix} > (\theta_1 = \theta_3) > (\theta_2 = \theta_4)$$

Cuanto mayor  $\delta \Rightarrow$  menor oscilación  $\Rightarrow \delta_1 = \delta_3 > \delta_2 = \delta_4$

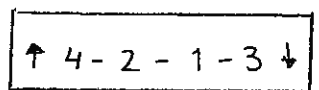


El ① y el ③ tienen mayor  $\omega_d \Rightarrow$  parte imaginaria  

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}$$

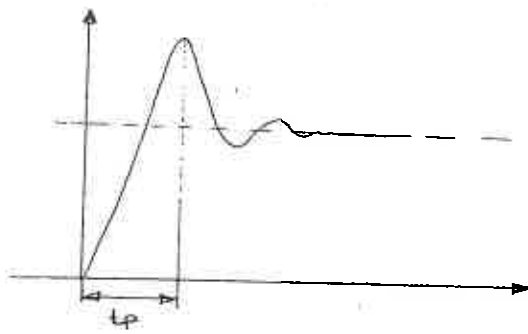
B) MAYOR A MENOR TIEMPO DE PICO

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$
  $\leftarrow$  sistemas subamortiguados.

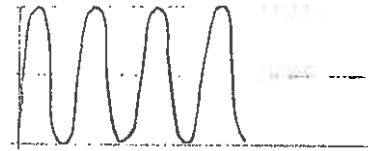




- Tiempo de pico de un sistema sobreamortiguado  $\Rightarrow$  No tiene  $\delta = 0$  no oscila
- Tiempo de pico de un sistema subamortiguado



Si  $\delta = 0 \Rightarrow$  Amortiguamiento 0,  
oscilación mantenida  $\omega_d = \omega_n$



En nuestro ejemplo:

① y ②  $\Rightarrow$  sistema subamortiguado  $\Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$

③  $\Rightarrow$  sistema de segundo orden, con polos complejos conjugados y un cero,

④  $\Rightarrow$  sistema de tercer orden, 3 polos complejos conjugados.

- Un CERO por delante con dos polos complejos conjugados hará que la respuesta sea más rápida. El cero creará un sobreimpulso si es un cero dominante.

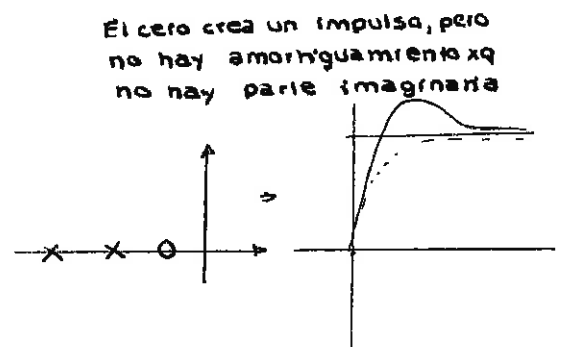
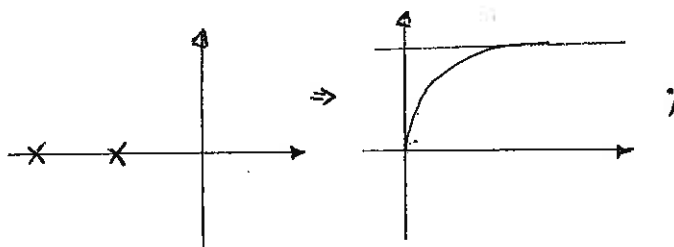
- Cuántos más POLOS tengamos, más lenta es la respuesta.

MAYOR RAPIDEZ  $\Rightarrow$  MAYOR PENDIENTE  $\Rightarrow$  MENOR  $t_p$ .

- Si no hay parte imaginaria, no hay oscilación.

- Cuánto más cerca esté el cero del origen, más modifica la respuesta.

Ejemplo:



## EJERCICIO 27

Obtener el sistema de orden reducido.

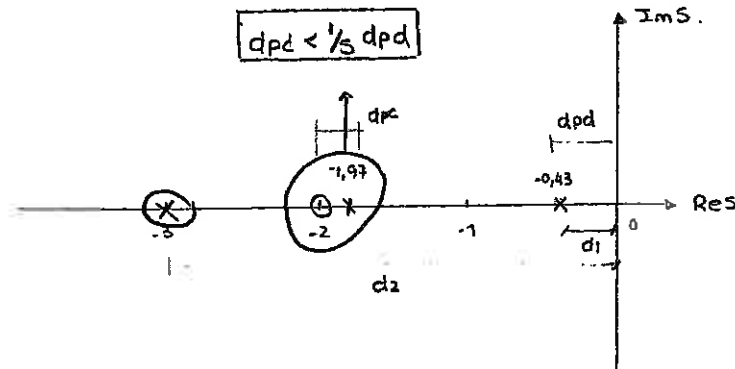
Obtenemos la FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$T(s) = \frac{\frac{0,05}{s+0,4}}{1 + \frac{0,05}{(s+0,4)(s+2)}} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{0,05 (s+2)}{[(s+0,4)(s+2) + 0,05] (s+3)}$$

$$\frac{s^2 + 2,4s + 0,8 + 0,05}{s^2 + 2,4s + 0,85} = (s+0,43)(s+1,97)$$

$$T_s = \frac{0,05 (s+2)}{(s+0,43)(s+1,97)(s+3)}$$

Representación gráfica



⊙ Los polos y ceros cercanos entre sí, se pueden cancelar (se sustituyen por la ganancia que aportan en ESTADO ESTACIONARIO)

$$T_{s1} = \frac{0,05 \cdot 2}{(s+0,43)(s+3) \cdot 1,97}$$

⊙ Polos o ceros no dominantes, respecto los dominantes se pueden despreciar

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{3}{0,43} \approx 7 > 5 \quad \text{El polo 3 es despreciable}$$

$$T_s = \frac{0,05 \cdot 2}{(s+0,43) \cdot 3 \cdot 1,97}$$

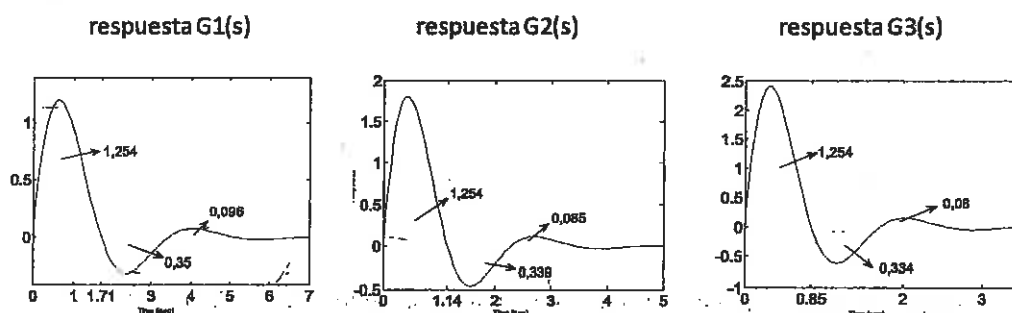
$$T_s = \frac{0,017}{s+0,43}$$

Cuando descomponemos una fracción de Laplace, sólo buscamos los ceros. Pero ante un sistema con cero y sin cero, donde el cero es muy próximo al polo (residuo muy pequeño), se puede despreciar.

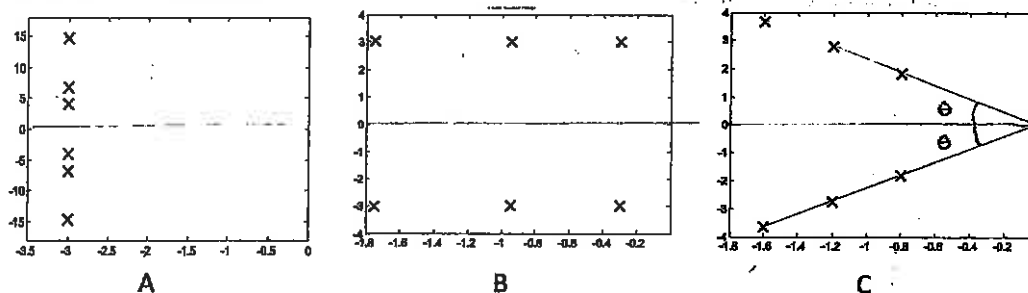
## SEMINARIO 5

### PROBLEMAS PARA TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO:

1. Sean tres sistemas de segundo orden sub-amortiguados, de función de transferencia  $G1(s)$ ,  $G2(s)$  y  $G3(s)$  respectivamente, cuyas respuestas a entrada impulso unitario son las de la figura:



- a) ¿Qué tienen en común las tres funciones de transferencia? Justifique la respuesta  
 b) ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde al diagrama de polos de los tres sistemas? Marque sobre ella los polos que corresponden a cada función de transferencia. Justifique la respuesta.



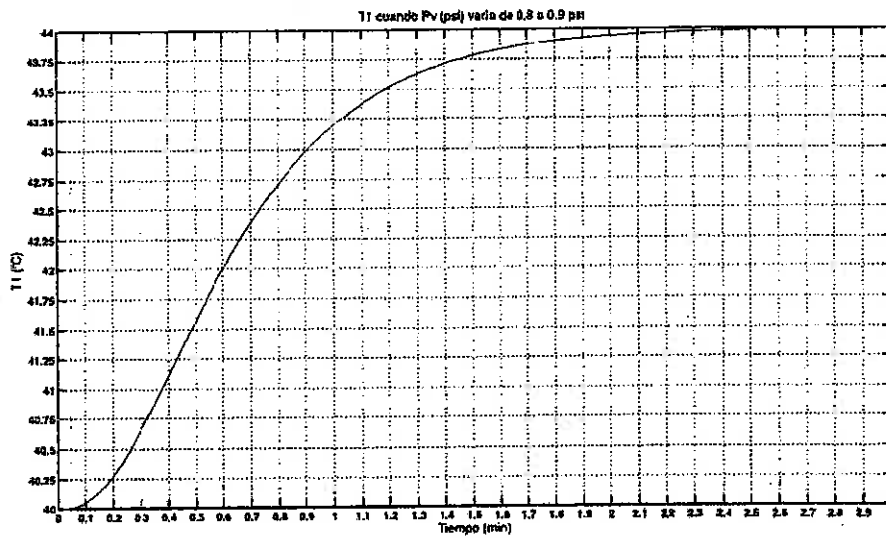
2. Señale en el plano  $s$  la región en la que se encuentran todos los sistemas de segundo orden sin ceros cuyas respuestas a entrada escalón tienen las siguientes características:

$$t_s \leq 4s \text{ (criterio 98\%)} ; M_p \leq 20\%$$

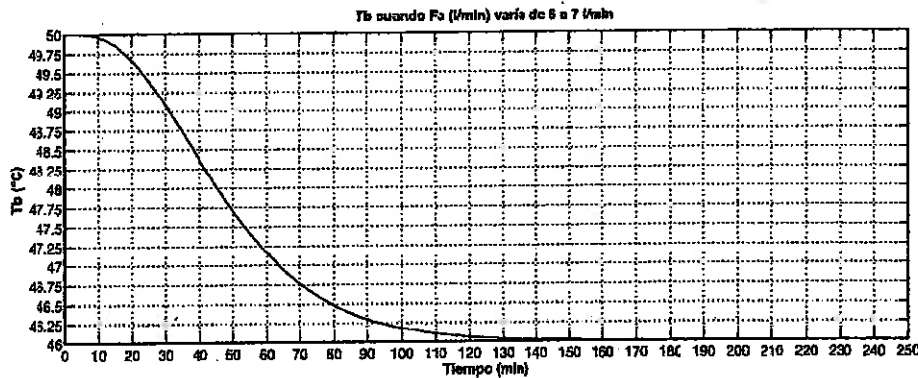
3. Sea un intercambiador de calor al que entra un caudal de líquido que se desea calentar. Se sabe que el sistema se encuentra en un estado de equilibrio en el que la temperatura de entrada es de  $20^\circ\text{C}$ , la temperatura de salida es de  $40^\circ\text{C}$  y la presión de vapor de calentamiento es de  $0.8 \text{ psi}$ , que corresponde a una apertura de la válvula de vapor del 50%.

La figura siguiente representa la evolución de la temperatura a la salida del intercambiador cuando se incrementa la apertura de la válvula de forma que la presión de vapor pasa a ser de  $0.9 \text{ psi}$ .

Encuentre un modelo aproximado que relacione la temperatura de salida con la presión del vapor.



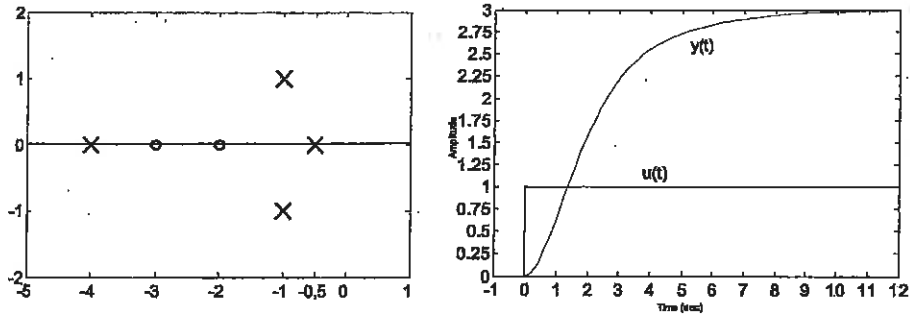
4. Sea un tanque en el que se mantiene un líquido caliente a  $50^{\circ}\text{C}$ . En estado estacionario el líquido entra y sale del tanque a razón de 5 l/min. La figura representa la variación de la temperatura del líquido contenido en el tanque cuando en un instante determinado el caudal de entrada de líquido aumenta bruscamente y se mantiene a 7 l/min. Obtener un modelo aproximado de la dinámica de la temperatura del líquido en el tanque a variaciones en el caudal de entrada.



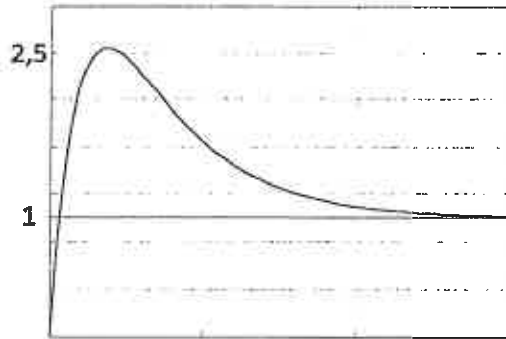
**PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN EL SEMINARIO:**

Durante el seminario se discutirán los tres problemas anteriores y se resolverán los siguientes:

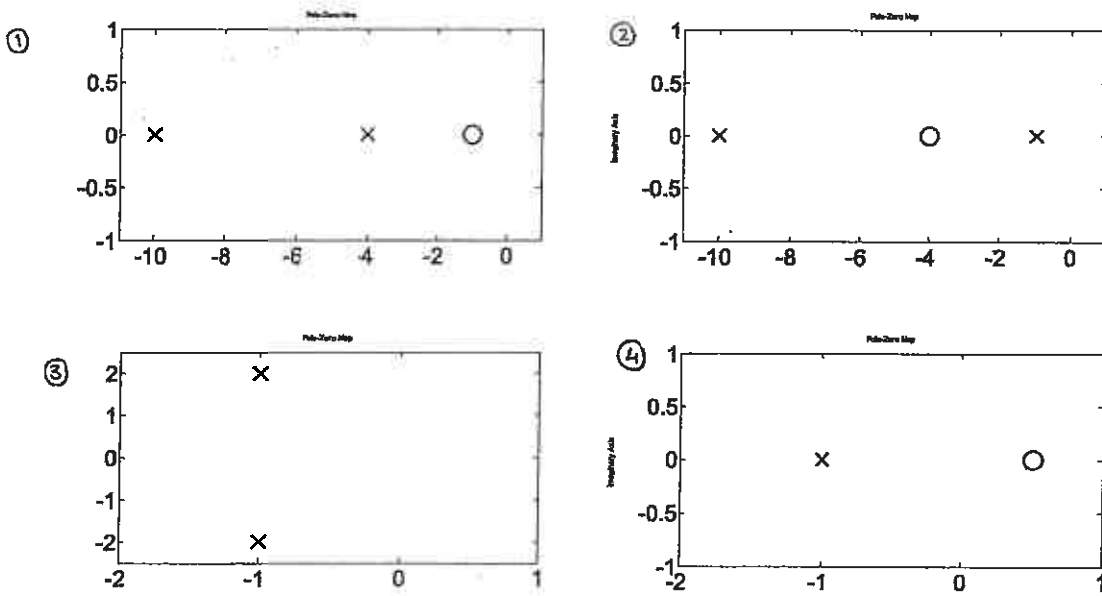
5. Se conocen el diagrama de polos y ceros de un sistema y su respuesta a escalón unitario, que se ilustran en las siguientes figuras. Obtenga la función de transferencia:



6. Sea un proceso del que se conoce su respuesta a escalón unitario, que es la representada en la figura:



Razone, SIN REALIZAR CÁLCULOS MATEMÁTICOS, cuál de los siguientes diagramas de polos y ceros es el que corresponde a dicha respuesta a escalón.

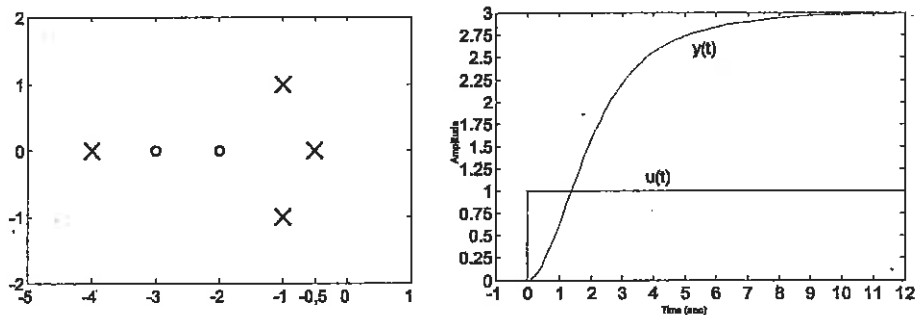


**D**

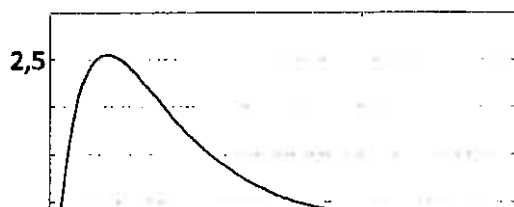
**PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN EL SEMINARIO:**

Durante el seminario se discutirán los tres problemas anteriores y se resolverán los siguientes:

5. Se conocen el diagrama de polos y ceros de un sistema y su respuesta a escalón unitario, que se ilustran en las siguientes figuras. Obtenga la función de transferencia:



6. Sea un proceso del que se conoce su respuesta a escalón unitario, que es la representada en la figura:



# Seminario 5.

## EJERCICIO 1.

RESPUESTAS A ENTRADA IMPULSO  $Y(S) = G(S)$ .

a) ¿Qué tienen en común las tres funciones transferencia?

- El valor de la respuesta cuando llega al estado estacionario:

$$Y_{ss1} = Y_{ss2} = Y_{ss3} = 0$$

- Tienen el mismo valor de  $y(t_p) = a_1 = 1,254$ .

- Tienen el mismo valor de máximo sobrepulso.  $M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$

b) ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde al diagrama de polos de los tres sistemas?

- (A) - Polos complejos conjugados (sistema subamortiguado)
- Misma parte real  $\Rightarrow$   $\sigma_{wn}$  igual para todos los polos.
  - Distinta parte imaginaria;  $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$

- (B) - Polos complejos conjugados (sistema subamortiguado)
- Misma parte imaginaria, misma frecuencia de oscilación
  - Distinta parte real

- $\Rightarrow$  (C) - Polos complejos conjugados (sistema subamortiguado)
- Distinta parte real e imaginaria.
  - mismo  $\theta =$
- } Corresponde al diagrama de los 3 sistemas.

## EJERCICIO 2.

Sistema de segundo orden sin ceros, cuyas respuestas a entrada escalón tienen las siguientes características.

$$t_s \leq 45 \text{ (criterio del 98\%)}$$

$$M_p \leq 20\%$$

$$T(S) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2s\omega_n \zeta + \omega_n^2}$$

$$t_s = \frac{4}{\delta \cdot \omega_n} \Rightarrow t_s \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{\delta \cdot \omega_n} \leq 1 \Rightarrow \omega_n \geq \frac{1}{\delta} \Rightarrow \boxed{\omega_n \geq 2,19}$$

$$M_p = 100 \exp\left(-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \leq 20 \Rightarrow -\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = \ln(0,2)$$

$$\frac{\pi^2 \delta^2}{(1-\delta^2)} = \ln^2(0,2)$$

$$\delta^2 (\pi^2 + \ln^2(0,2)) = \ln^2(0,2)$$

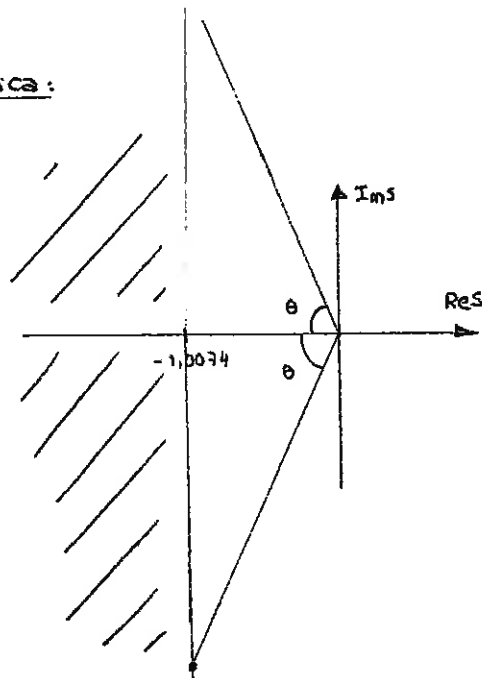
$$\delta^2 = \frac{\ln^2(0,2)}{\pi^2 + \ln^2(0,2)} = 0,2078$$

$$\boxed{\delta \leq 0,46}$$

SISTEMA subamortiguado

$$\boxed{\delta = \oplus 0,456}$$

Representación gráfica:



$$-\delta \cdot \omega_n = -1,0074 \quad \text{PARTE REAL}$$

$$\omega_n \sqrt{\delta^2 - 1} = 1,949 i \quad \text{PARTE IMAGINARIA}$$

$$\theta = 62,66 = \arctan\left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 1}}\right)$$

$$\boxed{\omega = 0,000 \text{ s}}$$

### EJERCICIO 3:

EQUI  $\left\{ \begin{array}{l} T_{\text{entrada}} = 20^\circ\text{C} \\ T_{\text{salida}} = 40^\circ\text{C} \\ P_{\text{calentamiento}} = 0,8 \text{ psi} \Rightarrow \text{Apertura de la válvula de vapor al } 50\% \end{array} \right.$

Respuesta a entrada escalón de 0,1 psi



El comportamiento de la respuesta, es similar a la respuesta de un sistema de primer grado al que se le aplica un escalón.

$$y(s) = G(s) \cdot u(s) \quad \text{donde} \quad u(s) = 0,1/s$$

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{44 - 40}{0,1} = 40$$

$$t_s = 3 \text{ min} = 4\tau \rightarrow \tau = 0,75$$

$$G(s) = \frac{40}{0,75 s + 1}$$

#### EJERCICIO 4.

Temperatura estacionaria = 50 °C

Velocidad estacionaria = 5 l/min

Aplicamos un escalón de 2 l/min

Podemos aproximar el modelo a un sistema de primer orden con ganancia negativa.

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{46 - 50}{2} = -2$$

$$t_s = 240 \text{ min} = 4\tau \rightarrow \tau = 60$$

$$G(s) = \frac{-2}{60 s + 1}$$

## EJERCICIO 5.

Obtener la función de transferencia a partir de los diagramas

$$\text{SISTEMA: } 4 \text{ polos} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = -0,5 \\ s_2 = -4 \\ s_3 = -1 + j \\ s_4 = -1 - j \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ polos reales.} \\ 2 \text{ polos complejos conjugados} \end{array} \right.$$

$$2 \text{ ceros} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = -3 \\ s = -2 \end{array} \right.$$

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta u} = \frac{3}{1} = 3$$

obtenemos que:

$$G(s) = \frac{3(s+3)(s+2)}{(s+0,5)(s+4)(s^2+2s+2)}$$

El mapa de polos sólo nos da información del transitorio.

## EJERCICIO 6.

→ No hay oscilación  $\Rightarrow \zeta = 1 \rightarrow$  Parte imaginaria 0.

→ sobreimpulso  $\Rightarrow$  cero cerca del origen.

④ No  $\rightarrow$  tiene un cero inestable, la respuesta se comportaría de forma rara

③ No  $\rightarrow$  No tiene ceros.

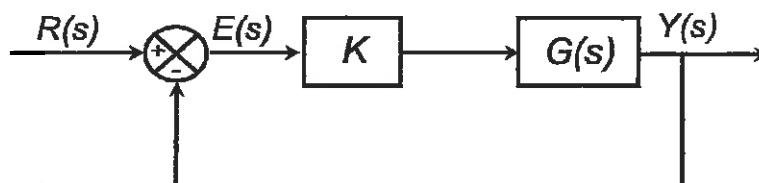
② No

$\Rightarrow$  ① Es la correcta el cero dominante le hace que la respuesta sea más rápida y un sobreimpulso

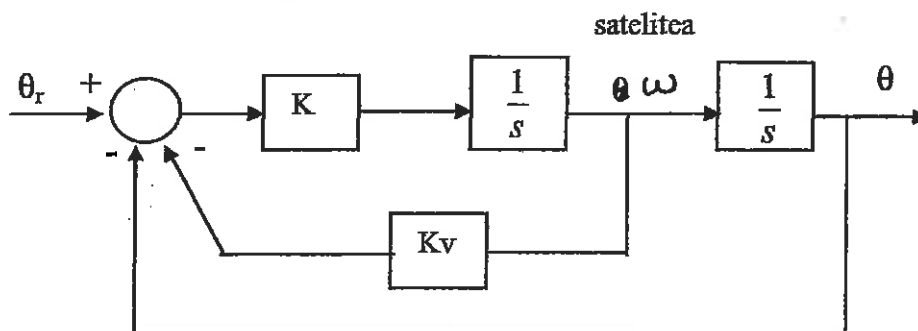
## SEMINARIO 6

### PROBLEMAS PARA TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO:

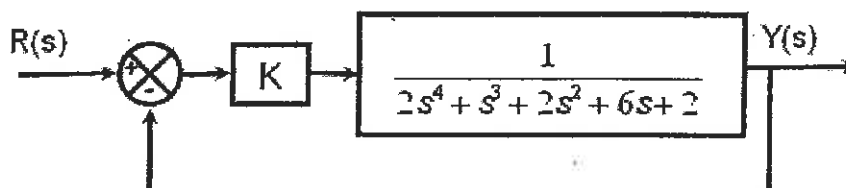
1. Sea el siguiente sistema realimentado, con  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+7)}$ :



- a) ¿Cuánto tardaría en desaparecer casi completamente la parte transitoria de la respuesta si no hubiera realimentación? Justifique la respuesta.
  - b) Calcular la ecuación característica del sistema en bucle cerrado.
  - c) ¿Dónde debería ubicarse el polo dominante para dividir al menos por dos el tiempo calculado en el apartado a)?
  - d) ¿Qué valor de K lo logrará? Justifique la respuesta.
2. La figura representa el diagrama de bloques del sistema de control de un satélite, siendo  $\theta$  la posición angular que se desea controlar.



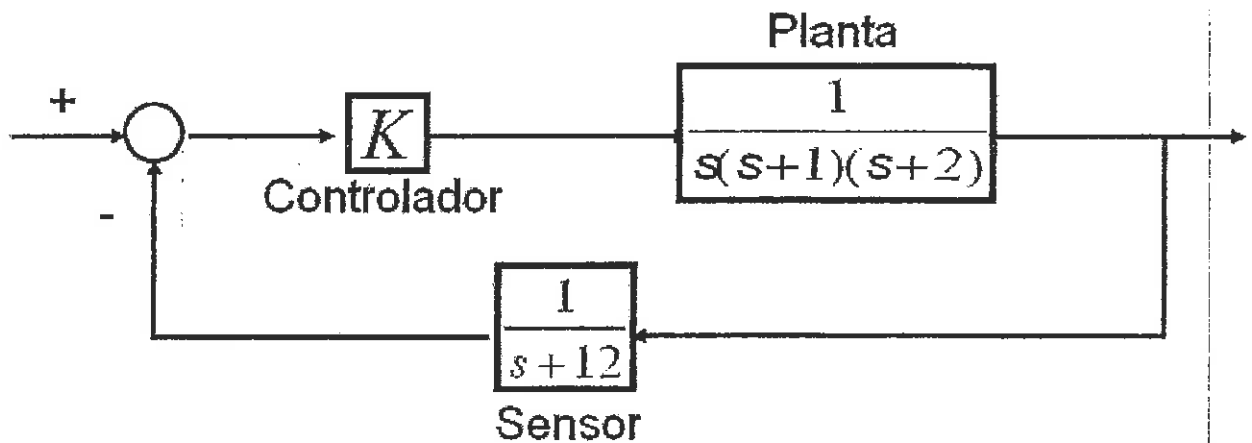
- a) Calcular la función de transferencia en bucle cerrado
  - b) Calcular el valor en estado estacionario que tendrá la salida del sistema realimentado a referencia  $\theta_r = 10^\circ$ .
  - c) Calcular la relación que debe existir entre  $K_v$  y  $K$  para que la respuesta a escalón en  $\theta_r$  responda lo más rápido posible y sin sobreimpulso.
3. Analice la estabilidad del siguiente sistema realimentado:



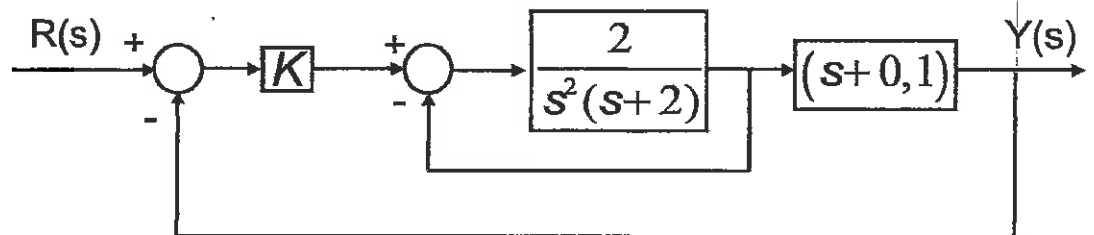
PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN EL SEMINARIO:

Durante el seminario se discutirán los tres problemas anteriores y se resolverán los siguientes:

4. Calcule los valores de  $K$  para los que el sistema de la figura es estable. Hallar la  $K_u$  para el cual el sistema es críticamente estable, así como su periodo de oscilación,  $T_u$ .



5. Calcule el valor de  $K$  que hace que el sistema realimentado sea críticamente estable, así como su periodo de oscilación,  $T_u$ .



# Seminario 6.

## EJERCICIO 1.

a) ¿Cuanto tardaría en desaparecer casi completamente la parte transitoria de la respuesta si no hubiese realimentación?

La FUNCION de TRANSFERENCIA:

$$T_a(s) = \frac{K}{(s+1)(s+7)} = \frac{K}{s^2 + 8s + 7} \quad \left. \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{7} \\ \xi = 4/\sqrt{7} = 1,51 \end{array} \right\} \text{ SISTEMA sobreamortiguado}$$

Podemos despreciar el polo no dominante  $d = \frac{7}{1} > 5$ .

$$T_a(s) = \frac{K/7}{s+1} \rightarrow \tau = 1 \rightarrow \boxed{+s(2\%) = 4\tau = 4 \text{ seg}}$$

- El polo más cercano es el más lento.
- El polo más lejano es el más rápido.

$$\frac{1}{s+p} \Rightarrow e^{-pt} = e^{-t/\tau}$$

Las definiciones de las formulas que tenemos son para sistemas subamortiguados. Como los dos polos son reales  $\rightarrow$  se trata de un sistema sobreamortiguado  $\Rightarrow$  Las formulas no son aplicables.

b) Calcular la ecuación característica del sistema en bucle cerrado.

$$T_b(s) = \frac{K}{(s+1)(s+7) + K} \Rightarrow \boxed{\text{Ec. carac.} \rightarrow s^2 + 8s + 7 + K = 0}$$

c) ¿Donde debería ubicarse el polo dominante para dividir al menor por 2 el tiempo calculado en a)?

$$\text{La función de transferencia simplificada: } T_s(s) = \frac{K'}{\tau s + 1}$$

Si queremos que  $\tau = 2 \Rightarrow T = 0,5 \Rightarrow T_s(s) = \frac{K}{0,5s+1}$  donde el polo

dominante es  $s = -\frac{1}{T} = -\frac{1}{0,5} \Rightarrow \boxed{s = -2}$

d) ¿Que valor de  $K$  lo logrará?

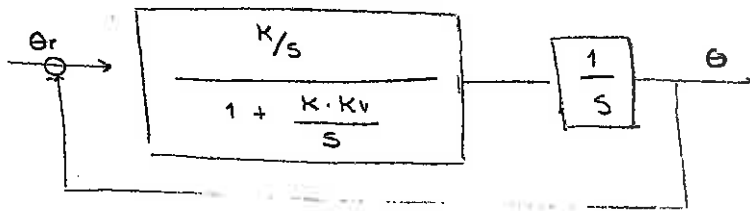
$$s^2 + 8s + 7 + K = (s+2)(s+2) = s^2 + (2+2)s + 2 \cdot 2$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 8 = 2 + 2 \rightarrow a = 6 \\ 7 + K = 2a = 12 \rightarrow \boxed{K = 5} \end{cases}$$

## EJERCICIO 2.

a) Calcular la función de transferencia en bucle cerrado.



$$T(s) = \frac{\frac{K}{s + K \cdot K_v} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K}{s(s + K \cdot K_v)}} = \frac{K}{s^2 + K \cdot K_v s + K}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{K}{s^2 + K K_v s + K}}$$

b) Calcular el valor en estado estacionario que tendrá la salida del sistema realimentado a  $\theta_r = 10$ .

$$\theta(s) = G(s) \cdot \theta_r(s) \quad \text{donde } \theta_r(s) = \frac{10}{s} \Rightarrow \theta(s) = G(s) \cdot \frac{10}{s}$$

$$Y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \theta(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot \frac{10}{s} \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} 10 \cdot \frac{k}{s^2 + k \cdot k_v s + k} = 10$$

$$Y_{ss} = 10$$

Teorema del valor final  $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$



Condición **NECESARIA** para poder aplicarlo es que el sistema sea **ESTABLE**

Hay que justificar la estabilidad y si no se puede hay que suponerlo y luego comprobarlo (DEJARLO CLARO EN EXAMEN).

c) Calcular la relación que debe existir entre  $k_v$  y  $k$  para que la respuesta a escalon en  $\theta_r$  responda lo más rápido posible y sin sobreimpulso.

$$\omega_n = \sqrt{k}$$

$$2s \cdot \omega_n = k \cdot k_v \Rightarrow s = \frac{k \cdot k_v}{2\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k \cdot k_v^2}}{2}$$

Para que no haya sobreimpulso  $\Rightarrow 0 < s < 1$

+ Para que responda lo más rápido posible  $\Rightarrow \boxed{s = 1}$  No oscila

$\hookrightarrow$  Parte imaginaria es cero.

$$\frac{\sqrt{k \cdot k_v^2}}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{k \cdot k_v^2 = 4}$$

### EJERCICIO 3

Analice la estabilidad del siguiente sistema realimentado.

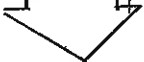
$$T(s) = \frac{K}{2s^4 + s^3 + 2s^2 + 6s + 2 + K}$$

① Polinomio de HURWITZ :  $2s^4 + s^3 + 2s^2 + 6s + (2+K) = 0$

② Para que el sistema sea ESTABLE todos los elementos de la primera columna de la tabla de ROUTH serán positivos.

③

$s^4$	2	2	$2+K$
$s^3$	1	6	0
$s^2$	-10	$2+K$	
$s^1$	$6 - \frac{2+K}{10}$		
$s^0$			



$$b_1 = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 6}{1} = -10$$

$$c_1 = \frac{2 \cdot 2 + 6 \cdot K}{6} = \frac{2}{3} + K$$

$$c_1 = \frac{-60 + 2+K}{-10} = 6 + \frac{2+K}{10}$$

INESTABLE  $\Rightarrow$  No todas las raíces tienen la parte real negativa.



## EJERCICIO 4

Calcule los valores de  $K$  para los que el sistema de la figura es estable. Hallar la  $K_u$  para el cual el sistema es críticamente estable, así como su periodo de oscilación.

$$G(s) = \frac{K/s(s+1)(s+2)}{1 + K/s(s+1)(s+2)(s+12)} \Rightarrow \phi(s) = \frac{K(s+12)}{s(s+1)(s+2)(s+12) + K}$$

① Polinomio de HURWITZ:  $(s^2+s)(s+2)(s+12) + 1 = 0$

$$(s^3 + 2s^2 + s^2 + 2s)(s+12) + 1 = (s^3 + 3s^2 + 2s)(s+12) + 1 = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 12s^3 + 36s^2 + 24s + 1 = 0$$

$$s^4 + 15s^3 + 38s^2 + 24s + K = 0$$

② Para que el sistema sea ESTABLE todos los términos de la primera columna de la tabla de ROUTH tienen que ser positivos.

③

$s^4$	1	38	K
$s^3$	15	24	0
$s^2$	36,4	K	0
$s^1$	$24 - 0,41K$	0	
$s^0$	K		

$$b_1 = \frac{15 \cdot 38 - 24}{15} = 36,4$$

$$b_2 = \frac{24K}{24} = K$$

$$c_1 = \frac{36,4 \cdot 24 - 15K}{36,4} = 24 - 0,41K$$

PERIODO OSCILACIÓN

SISTEMA ESTABLE

si  $K > 0$   
 $24 - 0,41K > 0$

$$0 < K < 58,24$$

SISTEMA CRÍTICAMENTE ESTABLE

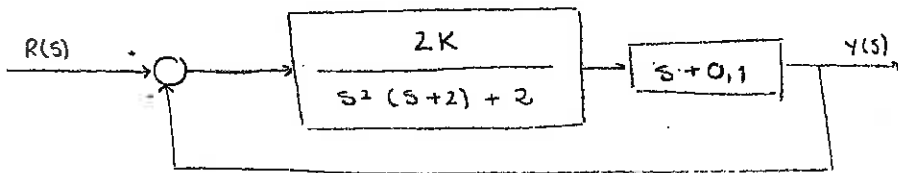
$$\Rightarrow K = 58,24$$

valor que hace que una fila entera sean 0. Todos los polos en el eje imaginario  $s = 0$ .

PERIODO OSCILACIÓN  $\Rightarrow 36,4s^2 + 58,24 = 0 \Rightarrow s = \pm 1,26j$

$$\omega = 1,26 \rightarrow T_u = \frac{2\pi}{\omega} = s$$

# EJERCICIO 5



$$G(s) = \frac{2K(s+0,1)}{s^2(s+2) + 2 + 2Ks + 0,2K}$$

① POLINOMIO DE HURWITZ :

$$s^3 + 2s^2 + 2Ks + 2 + 0,2K = 0$$

se cumple la condición necesaria

$s^3$	1	2K	0
$s^2$	2	2+0,2K	0
$s^1$	1,9K-1	0	
$s^0$	2+0,2K		

$$b_1 = \frac{4K - 2 - 0,2K}{2} = -1 + 1,9K$$

$$c_1 = \frac{(1,9K-1)(2+0,2K) - 0}{(1,9K-1)}$$

SISTEMA ESTABLE

$$\text{si } \begin{cases} 1,9K - 1 > 0 \rightarrow K > 0,52 \\ 2 + 0,2K > 0 \rightarrow K > -10 \end{cases}$$

SISTEMA CRÍTICAMENTE ESTABLE

$$\Rightarrow 1,9K - 1 = 0 \Rightarrow K = 0,52$$

PERIODO DE OSCILACIÓN

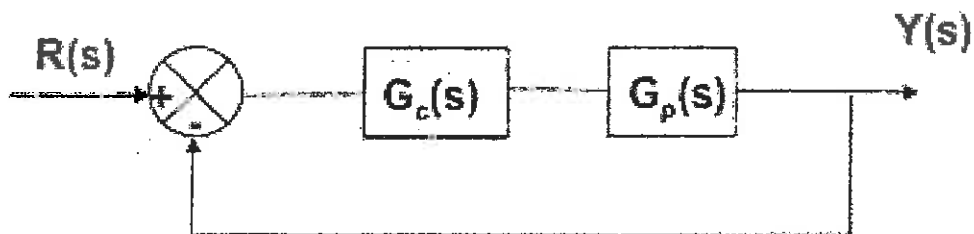
$$2s^2 + 2 + 0,2 \cdot 0,52 = 0 \Rightarrow s = \pm 1,0256j \Rightarrow \omega = 1,0256$$

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega} = 6,126$$

## SEMINARIO 7

### PROBLEMAS PARA TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO:

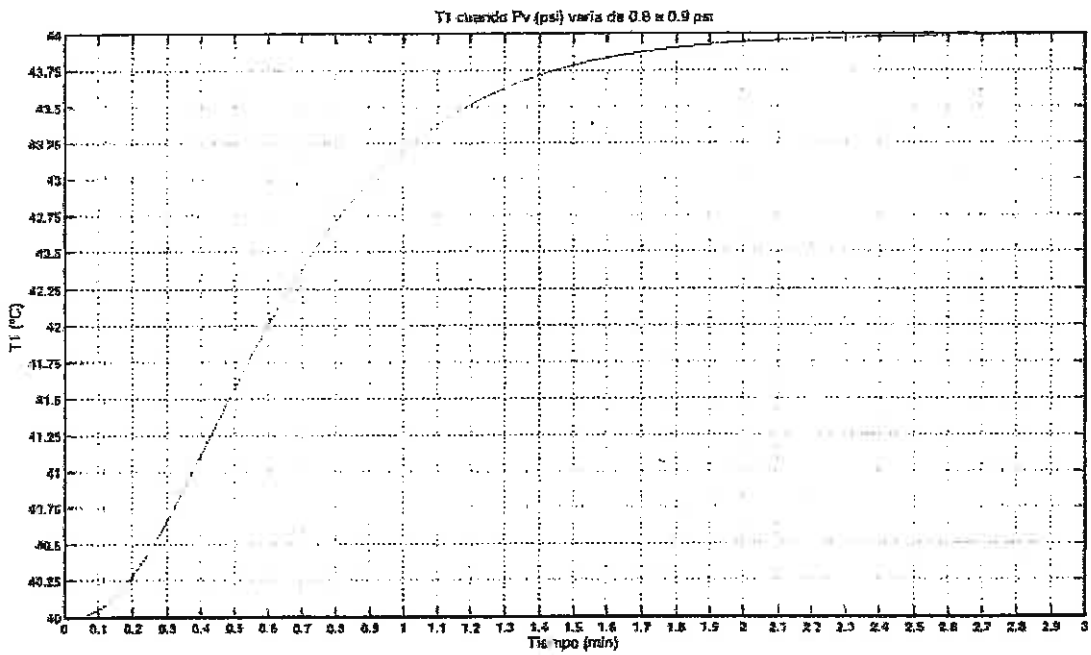
1. Sea el siguiente sistema realimentado, con  $G(s) = \frac{16}{s(s+4)}$ :



- a) Se desea diseñar un controlador para el sistema de la figura de forma que el error de velocidad,  $e_{ss}$ , a rampa de pendiente 2 sea 0,1. Razone el tipo de algoritmo que es necesario y calcule sus parámetros. ¿Dónde se ubican los polos del sistema en lazo cerrado?
  - b) Para el mismo sistema realimentado, diseñe un sistema de control tal que los polos en bucle cerrado sean  $s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{3}$
  - c) ¿Es posible cumplir las dos con el controlador elegido?
2. Para el mismo sistema realimentado pero ahora con  $G(s) = \frac{1}{s^2}$
- c) Diseñe un controlador de forma que los polos del sistema en bucle cerrado se ubiquen en  $s_{1,2} = -1 \pm j$
3. Dado el sistema de función de transferencia:  $G(s) = \frac{0,5}{(s+1)(s+5)}$  se desea diseñar un controlador por realimentación que cumpla las siguientes especificaciones:  $t_s(2\%) \leq 2s$ ,  $M_p \leq 4,3\%$ ,  $e_p' \leq 35\%$
- a) dibuje en el plano  $s$  la donde deben ubicarse los polos
  - b) Razone el tipo de algoritmo a diseñar que cumpla todas las especificaciones
  - c) Calcule los parámetros del controlador
4. Sea un intercambiador de calor al que entra un caudal de una mezcla líquida para que sea calentada. Suponer el sistema trabajando en un punto de operación en el que la temperatura de entrada es de 20 °C, la temperatura de salida es de 40 °C, con una presión del vapor de calentamiento de 0.8 psi dada por una apertura del 50% de la válvula de vapor correspondiente.

La curva de la figura siguiente representa la evolución de la temperatura de salida del intercambiador cuando, en un instante determinado, se incrementa la apertura de la válvula de forma que la presión del vapor pasa a ser de 0.9 psi. Diseñe un controlador PID por Ziegler-Nichols para que la temperatura a la salida siga sin error a cambios escalón en la referencia.

**NOTA:** la primera parte de este problema se resolvió en el seminario 5.

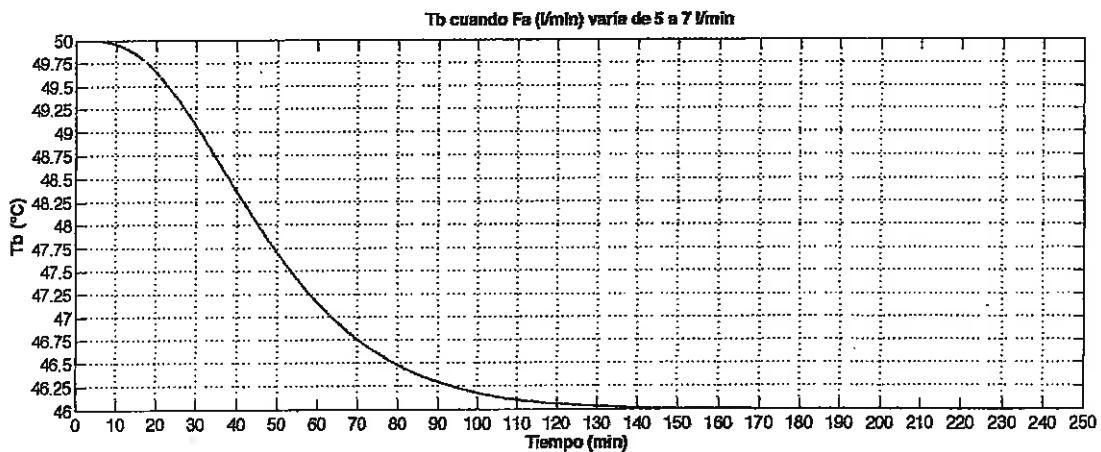


**PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN EL SEMINARIO:**

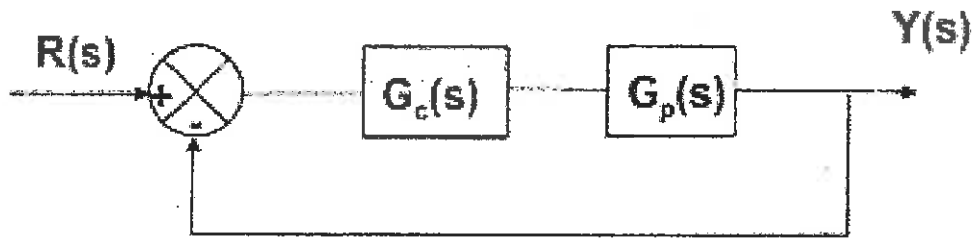
Durante el seminario se discutirán los cuatro problemas anteriores y se resolverán los tres siguientes:

- Sea un tanque en el que se mantiene un líquido caliente a 50 °C. En estado estacionario, el líquido entra y sale del tanque a razón de 5 l/min. La figura representa la variación de la temperatura del líquido contenido en el tanque cuando en un instante determinado ( $t=0$  en la figura) el caudal de entrada de líquido aumenta y se mantiene a 7 l/min. Diseñe un controlador PID que asegure error estacionario nulo a entrada escalón.

**NOTA:** la primera parte de este problema se resolvió en el seminario 5.



6. Sea el siguiente sistema realimentado, con  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$ :



- Se desea diseñar un controlador para el sistema de la figura de forma que el error de posición,  $e_p$ , a escalón sea 0. Razone el tipo de algoritmo que es necesario y calcule sus parámetros. ¿Dónde se ubican los polos del sistema en lazo cerrado?
- Diseñe ahora un controlador para que además de seguir sin error a entradas escalón en la referencia, los polos dominantes en bucle cerrado presenten un coeficiente de amortiguamiento  $\delta=0,7$ . ¿Dónde se ubican los polos del sistema en lazo cerrado?

**NOTA:** Este problema fue planteado en la teoría del tema 6 - Sistemas Realimentados-I para el análisis de su estabilidad con un controlador proporcional.

7. Para el mismo sistema realimentado pero ahora con  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ :

- Diseñe un controlador PID para dicho sistema utilizando un método de sintonía experimental
- Diseñe analíticamente un nuevo controlador de forma que la respuesta escalón presente un sobre-impulso máximo del 30% y un tiempo de establecimiento no mayor de 3 segundos. Para ello, primero ubique los polos de bucle abierto y sombree la zona del plano  $s$  en la que deberán ubicarse los polos de bucle cerrado. A continuación, razone cuál será el tipo de controlador más adecuado y calcule el valor de sus parámetros.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page, appearing as a vertical column of characters.

## EJERCICIO 1.

$$G(s) = \frac{16}{s(s+4)}$$

$$A) G_{BA}(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) = G_c(s) \cdot \frac{16}{s(s+4)} \quad \text{SISTEMA DE TIPO 1.}$$

Con utilizar un controlador P será suficiente:  $G_c(s) = K_p$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{16 \cdot K_p \cdot s}{s(s+4)} = \frac{16 K_p}{4} = 4 K_p = K_v \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} \cdot 2 = 0,1 \Rightarrow \boxed{K_p = 5}$$

$$G_{BAC}(s) = \frac{\frac{80}{s(s+4)}}{1 + \frac{80}{s(s+4)}} = \frac{80}{s^2 + 4s + 80}$$

Los polos:  $s = -2 \pm 8,7j$  Polos complejos conjugados.

B) Queremos disminuir la parte imaginaria

$$G_{BAC}(s) = \frac{16 K_p}{s^2 + 4s + 16 K_p}$$

$$s = -2 \pm j\sqrt{3} \rightarrow -s\omega_n = -2 \rightarrow s^2 = \frac{4}{\omega_n^2} \Rightarrow s = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\omega_n \sqrt{1 - s^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \omega_n^2 (1 - s^2) = 3$$

$$\omega_n^2 \left(1 - \frac{4}{\omega_n^2}\right) = 3$$

$$\omega_n^2 - 4 = 3 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{7}$$

$$16 \cdot K_p = \omega_n^2 = 7 \Rightarrow \boxed{K_p = 0,4375}$$

c) No, porque se tiene que utilizar que

$$e_{ss} < 0,1 \Rightarrow K_p > 5 \quad \left. \begin{array}{l} K_p = 0,4375 \\ \end{array} \right\} \text{Incompatible.}$$

## EJERCICIO 2.

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad G_{BC} = \frac{1/s^2}{1 + 1/s^2} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{donde } s = \pm j$$

$G_{BA}(s) = G_c(s) \cdot \frac{1}{s^2}$  Los polos sin el controlador, en bucle cerrado se encuentran en

Por lo tanto, debemos añadir un controlador de tipo: PD

$$PD \Rightarrow G_c(s) = K_c (1 + s \cdot T_d)$$

$$G_{BC}(s) = \frac{1}{s^2 + K_c \cdot T_d s + K_c}$$

$$s_{1,2} = \frac{-K_c \cdot T_d \pm \sqrt{(K_c \cdot T_d)^2 - 4K_c}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{K_c \cdot T_d}{2} = -1 \Rightarrow K_c \cdot T_d = +2 \\ \frac{(K_c \cdot T_d)^2 - 4K_c}{4} = -1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{(K_c \cdot T_d)^2 - 4K_c}{4} = -1$$

$$1 - K_c = -1 \Rightarrow K_c = 2 \\ T_d = 1$$

$$\boxed{G_c(s) = 2(1 + s)}$$



### EJERCICIO 3.

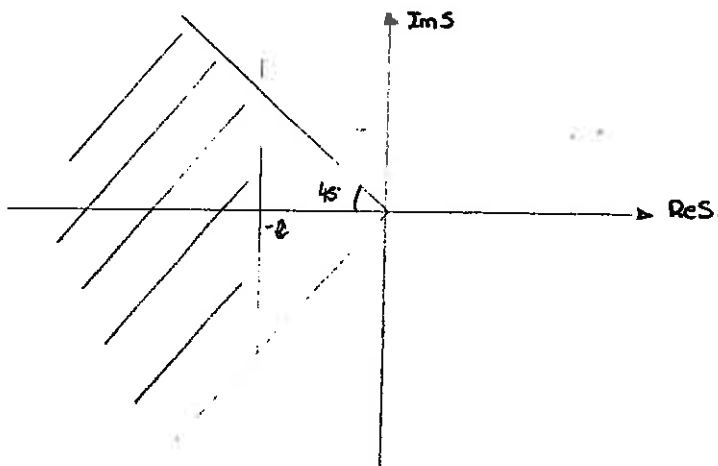
$$G(s) = \frac{0,5}{(s+1)(s+5)} \quad t_s(2\%) \leq 2 \text{ seg} \quad ; \quad MP \leq 4,3\% \quad ; \quad e_p \leq 35\%$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{s\omega_n} \leq 2 \text{ seg} \Rightarrow 2 \leq s\omega_n$$

$$MP = \frac{4,3}{100} \geq \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Rightarrow 10 \leq (\pi^2 + 10)\zeta^2$$

$$\zeta \geq 0,7 \quad \cos\theta \geq 0,7 \Rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

Plano donde se ubican los polos.



Razonar el tipo de controlador:

$$\text{En BA} \Rightarrow G_{BA}(s) = G(s) \cdot G_c(s) = \frac{0,5}{(s+1)(s+5)} \cdot G_c(s)$$

$$\text{En BC} \Rightarrow G_{BC}(s) = \frac{0,5}{s^2 + 6s + (5 + 0,5K_c)}$$

Regimen transitorio

$$s\omega_n \geq 2 \Rightarrow 2s\omega_n = 6 \Rightarrow 2 \cdot 0,7\omega_n = 6 \Rightarrow \omega_n = 4,28 \Rightarrow \omega_n^2 = 18,63$$

$$5 + 0,5K_c = 18,63$$

$$K_c = 26,73$$

$$5 + 0,5 \cdot G_c(s) >$$

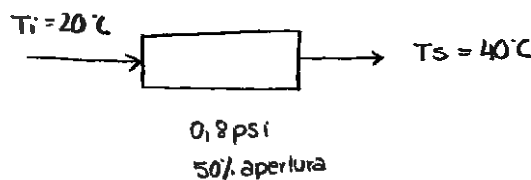
En régimen permanente:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} \quad \text{donde} \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K_c G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,5 K_c}{(s+1)(s+5)} = 0,1 K_c$$

$$e_p = \frac{1}{1+0,1K_c} \leq \frac{35}{100} \Rightarrow 1 \leq 0,35 + 0,035 K_c$$

$$K_c > 18,57$$

#### EJERCICIO 4



#### MÉTODO DE ZIEGER - NICHOLS.

- Lazo abierto  $\Rightarrow$  curva forma de S  $\leftarrow$  Nuestro caso
- Lazo cerrado  $\Rightarrow$  no curva forma S

Sistema de primer orden con retardo:

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{\tau s + 1}$$

$$q(s) = \frac{40 \cdot e^{-0,3s}}{0,45s + 1}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{44-40}{0,1} = 40$$

$$y(t_{63}) = y(t_m + \tau) = 0,631 \cdot 4 = 2,524 \Rightarrow t_m + \tau = 0,75 \Rightarrow t_m = 0,75 - \tau = 0,3$$

$$y(t_{28}) = y\left(t_m + \frac{\tau}{3}\right) = 0,281 \cdot 4 = 1,124 \Rightarrow t_m + \frac{\tau}{3} = 0,4$$

$$0,7 - \tau + \frac{\tau}{3} = 0,4 \Rightarrow \frac{2}{3}\tau = 0,3 \Rightarrow \tau = 0,45$$

Queremos un controlador PID:

$$K_c = \frac{1,2}{K} \left( \frac{T}{t_m} \right) = \frac{1,2}{40} \cdot \left( \frac{0,45}{0,3} \right) = 0,045$$

$$T_i = 2 t_m = 2 \cdot 0,3 = 0,6$$

$$T_d = 0,5 t_m = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$$

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$G_c(s) = 0,045 \left( 1 + \frac{1}{0,6s} + 0,15s \right)$$

### EJERCICIOS

$$\left. \begin{array}{l} V_i = 5 \text{ l/min} \\ V_f = 7 \text{ l/min} \end{array} \right\} K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{46 - 50}{7 - 5} = -2$$

Aproximamos a una función de primer orden con ganancia negativa: FUNCIÓN POHT

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-t_m s}}{\tau s + 1}$$

$$t_m + \tau = 60 = t_{63} \rightarrow t_m = 60 - \tau \rightarrow t_m = 15$$

$$t_m + \frac{\tau}{3} = 10 = t_{28} \rightarrow 60 - \frac{2}{3}\tau = 30 \rightarrow \tau = 45$$

$$G(s) = \frac{-2 \cdot e^{-15s}}{45s + 1}$$

$$\text{PID} \Rightarrow G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \cdot s \right)$$

$$K_p = \frac{1,2}{-2} \left( \frac{45}{15} \right) = -1,8$$

$$T_i = 2 t_m = 2 \cdot 15 = 30$$

$$T_d = 0,5 T_m = 0,5 \cdot 2 = 1$$

$$G_c(s) = -1,8 \left( 1 + \frac{1}{30s} + s \right)$$



## EJERCICIO 7

Tenemos que aplicar el segundo método de Ziegler - Nichols en lazo cerrado.

En el método de lazo abierto se inestabiliza,

Le llamamos los polos en lazo cerrado al eje imaginario, en el límite de estabilidad, la mayor  $K$  posible sin que el sistema sea inestable  $\Rightarrow K_c$ ,  $\Rightarrow$  METODO HURWITZ  $\Rightarrow$  una fila sea cero.  
frecuencia oscilación crítica

Una vez obtenida  $K_c$  con las tablas elegimos el controlador.  
 $T_u$

Cerrar el lazo, meter un escalon y subir hasta que oscile  
Buscar el límite de estabilidad  $\rightarrow$  Ruth Hurwitz

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K_c$
$s^1$	$\frac{6-K_c}{3}$	0
$s^0$	$K_c$	0

$$K_{critica} = 6 \rightarrow 3s^2 + 6 = 0 \rightarrow s = \pm \sqrt{2}j$$

$$w_{critica} = \sqrt{2} \rightarrow T_{critica} = 4,44$$

Tipo controlador PID.

$$\begin{cases} K_c = 0,75 \cdot K_{ultima} = 0,75 \cdot K_{critica} \\ T_i = 0,625 \cdot T_{ultimo} = 0,625 \cdot T_{critica} \\ T_d = 0,1 \cdot T_{ultimo} = 0,1 \cdot T_{critica} \end{cases}$$

Tendríamos que comprobar si se cumple  $M_p \leq 30\%$ , y  $t_s \leq 3s$ .



Dado un sistema según la figura,



$$G(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+5)}$$

Diseñar un controlador que cumpla las especificaciones siguientes:

- a)  $t_{1/2\%} \leq 2 \text{ seg}$ ,  $M_p \leq 4,3\%$ ,  $e_{ss} \leq 3,5\%$
- b)  $t_{1/2\%} \leq 2 \text{ seg}$ ,  $M_p \leq 4,3\%$ ,  $e_{ss} = 0$
- c)  $t_{1/2\%} \leq 1 \text{ seg}$ ,  $M_p \leq 4,3\%$ ,  $e_{ss} \leq 20\%$
- d)  $t_{1/2\%} \leq 1 \text{ seg}$ ,  $M_p \leq 4,3\%$ ,  $e_{ss} = 0$

a)  $t_{1/2\%} \leq 2 \text{ seg}$ ,  $M_p \leq 4,3\%$ ,  $e_{ss} \leq 3,5\%$

1. Seleccionar el controlador más sencillo. Dado que se trata de un sistema tipo 0 y el error ante la entrada escalón es finito, puede bastar con un controlador proporcional (P).

2. Representar en el plano s. Es necesario buscar los polos para que se cumplan las condiciones del transitorio y estacionario con la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado a partir del módulo del lugar de las raíces.

Las condiciones de la dinámica del sistema vienen dadas por el tiempo de establecimiento y el sobrepulso,

$$t_{1/2\%} = \frac{4}{\delta \omega_n} \leq 2 \Rightarrow \delta \omega_n \geq 2$$

$$M_p = e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \leq 4,3\% \rightarrow \frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = -\ln 0,043 \Rightarrow \delta \geq 0,707 \rightarrow \cos \theta = 0,707 \Rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

Para determinar el lugar de las raíces, se parte de la función de transferencia en lazo abierto, que para un controlador proporcional es,



$$G_o(s) = K_c$$

$$G_{L1}(s) = \frac{0,5K_c}{(s+1)(s+5)}$$

$$G_{L2}(s) = \frac{0,5K_c}{s^2+6s+5+0,5K_c}$$

3. Validar el diseño. Falta por determinar el valor de la ganancia del controlador y realizar la simulación de resultados.

✓ Especificaciones del régimen estacionario,

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} K_c G(s)} = \frac{1}{1 + K_c G(0)} \leq 0,35 \Rightarrow K_c \geq 18,57$$

✓ Especificaciones del régimen transitorio: Como se observa en el lugar de las raíces, los valores de  $K_c$  que cumplen las especificaciones dadas se encuentran entre los valores que se obtienen al aplicar el criterio del módulo para los polos  $p_1 = -2$  y  $p_2 = -3+3j$

$$K_{lim} = |s + \frac{1}{T_i} + s|_{s=3} = 3 \rightarrow K_c = 6$$

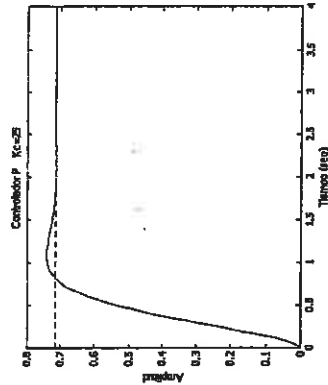
$$K_{lim} = |s + \frac{1}{T_i} + s|_{s=-3+3j} = 13 \rightarrow K_c = 26$$

$$6 < K_c < 26$$

El intervalo de  $K_c$  que cumple las especificaciones es  $K_c \in [8,57, 26]$ . Por ejemplo, para  $K_c = 25$  las ecuación de transferencia del sistema en lazo cerrado es la siguiente,

$$G_{LC}(s) = \frac{12,5}{s^2 + 6s + 17,5} \rightarrow s_{1,2} = -3 \pm 2,9j$$

Para verificar el diseño se realiza la simulación.



b)  $t_{1/2\%} \leq 2 \text{ seg}$ ,  $M_p \leq 4,3\%$ ,  $e_{ss} = 0$

1. Seleccionar el controlador más sencillo. Dado que se trata de un sistema tipo 0 y el error ante la entrada escalón es cero, es necesario utilizar la acción integral que introduce un cero en el origen. Es decir, un principio el controlador elegido es el PI.

Para determinar el valor de la constante de tiempo integral  $T_i$ , vamos a cancelar el polo más dominante de la función de transferencia en lazo abierto ( $\sigma = -1$ ), de forma que  $-1/T_i = -1$ , así que  $T_i = 1$ .

2. Representar en el plano s. Es necesario buscar los polos para que se cumplan las condiciones del transitorio y estacionario con la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado a partir del módulo del lugar de las raíces.

Las condiciones de la dinámica del sistema vienen dadas por el tiempo de establecimiento y el sobrepulso,

$$t_{1/2\%} = \frac{4}{\delta \omega_n} \leq 2 \Rightarrow \delta \omega_n \geq 2$$

$$M_p = e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \leq 4,3\% \rightarrow \frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = -\ln 0,043 \Rightarrow \delta \geq 0,707 \rightarrow \cos \theta = 0,707 \Rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

Para determinar el lugar de las raíces, se parte de la función de transferencia en lazo abierto, que para un controlador proporcional e integral (PI) es,







$$G_c(s) = \frac{K_c(s+1)}{s}$$

$$G_{Lc}(s) = K_c \frac{s+1}{s} = \frac{0.5 K_c}{s(s+5)}$$

$$G_{Lc}(s) = \frac{0.5 K_c}{s^2 + 5s + 0.5 K_c}$$

3. **Validar el diseño:** Faltó por determinar el valor de la ganancia del controlador y realizar la simulación de transición.

✓ Especificaciones del régimen estacionario: sistema es de tipo 1, por lo que  $e_{ss} = 0$ .

✓ Especificaciones del régimen transitorio: Como se observa en el lugar de los polos, los valores de  $K_c$  que cumplen las especificaciones dadas se encuentran entre los valores que se obtienen al aplicar el criterio del módulo para los polos  $p_1 = -2$  y  $p_2 = -2.5 + 2.5j$

$$K_{c_{min}} = |p_1 + 5|_{p_1=-2} = 6 \rightarrow K_{c_1} = 12$$

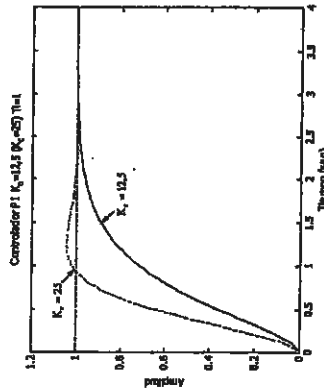
$$K_{c_{max}} = |p_2 + 5|_{p_2=-2.5+2.5j} = 12.5 \rightarrow K_{c_2} = 25$$

$$12 < K_c < 25$$

El intervalo de  $K_c$  que cumple las especificaciones es  $K_c \in [12, 25]$ . Por ejemplo, para el punto de ruptura ( $\zeta = 2.5$ )  $K_c = 6.25$  y por tanto,  $K_c = 12.5$ , de donde la ecuación de transferencia del sistema en lazo cerrado es la siguiente,

$$G_{Lc}(s) = \frac{6.25}{(s+2.5)^2} = \frac{6.25}{s^2 + 5s + 6.25}$$

Para verificar el diseño se realiza la simulación.



La simulación nos muestra que el tiempo de establecimiento no se cumple. Para lo cual que se cumple aumentamos la ganancia y, por ejemplo, para el valor máximo  $K_c = 25$  ( $\zeta = -2.5 \pm 2.5j$ ), tenemos,

$$G_{Lc}(s) = \frac{12.5}{(s+2.5)^2 + 2.5^2} = \frac{12.5}{s^2 + 5s + 12.5}$$

c)  $t_{1\%} \leq 1 \text{ seg}$ ,  $M_p \leq 4.3\%$ ,  $e_{ss} \leq 20\%$

1. **Seleccionar el controlador más sencillo:** Dado que se trata de un sistema tipo 0 y el error ante la entrada es finito, puede usarse un controlador proporcional (P).

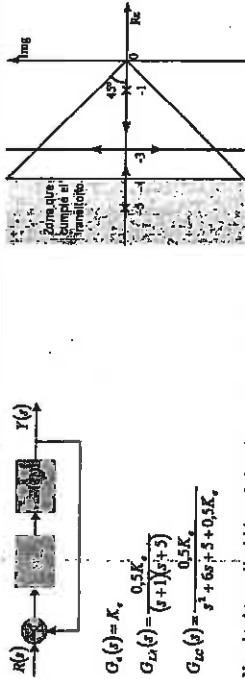
2. **Representar en el plano s:** Es necesario buscar los polos para que se cumplan las condiciones del transitorio y contrastarlas con la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado a partir del módulo del lugar de los polos.

Las condiciones de la ubicación del sistema vienen dadas por el tiempo de establecimiento y el sobrepaso,

$$t_{1\%} = \frac{4}{\delta \omega_n} \leq 1 \Rightarrow \delta \omega_n \geq 4$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi} \leq 4.3\% \rightarrow \frac{\delta \zeta}{\sqrt{1-\delta^2}} = -\ln 0.043 \Rightarrow \delta \geq 0.707 \rightarrow \cos \theta = 0.707 \Rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

Para determinar el lugar de los polos, es parte de la función de transferencia en lazo abierto, que para un controlador proporcional es,



$$G_o(s) = K_c$$

$$G_{Lc}(s) = \frac{0.5 K_c}{(s+1)(s+5)}$$

$$G_{Lc}(s) = \frac{0.5 K_c}{s^2 + 6s + 5 + 0.5 K_c}$$

No existe intersección del lugar de los polos con las especificaciones impuestas, por lo tanto se introduce la acción derivativa (PD). Es necesario ajustar el cero y para ello se utiliza el criterio de cancelación polo-cero cancelando el polo más cercano al polo más dominante ( $\zeta = -1$ ), de forma que  $-1/T_D = -1$ , así que  $T_D = 1$ .



Las nuevas funciones de transferencia del controlador, del sistema en lazo abierto y del sistema en lazo cerrado son las siguientes,

$$G_c(s) = K_c(s+1) \Rightarrow G_{Lc}(s) = K_c(s+1) \frac{0.5}{(s+1)(s+5)} = \frac{0.5 K_c}{s+5}$$

$$G_{Lc}(s) = \frac{0.5 K_c}{s+5}$$

3. **Validar el diseño:** Faltó por determinar el valor de la ganancia del controlador y realizar la simulación de resultados.

✓ Especificaciones del régimen estacionario,

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} K_o G(s)} = \frac{1}{1 + K_c G(0)} \leq 0.2 \Rightarrow K_c \geq 40$$

Para que se cumpla la condición del valor del error en el estacionario el valor de  $K_c$  de ser mayor o igual que 40, lo cual puede ser obtenida a la entrada del actuador. Tomamos el valor mínimo para que se cumpla la condición del error en estado estacionario ( $K_c = 40$ ) y seguimos adelante.

✓ Especificaciones del régimen transitorio,

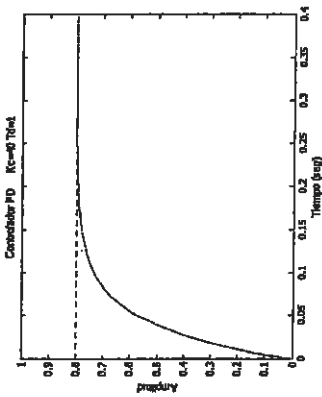
$$G_{Lc}(s) = \frac{20}{s+25} \rightarrow \begin{cases} t_{1\%} = 4T = 4 \cdot \frac{1}{25} = 0.16 \text{ seg} \\ M_p = 0\% \text{ (sistema de 1º orden)} \end{cases}$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es,

$$s + 5 + 0.5 K_c = 0 \rightarrow s = -5 - 0.5 K_c, \quad K_c = 40 \rightarrow s = -25$$

Para verificar el diseño se realiza la simulación.





d)  $t_{1,PM} \leq 110ms$ ,  $M_p \leq 4.3\%$ ,  $\epsilon_{ss} = 0$

1. *Seleccionar el controlador más sencillo:* Dado que se trata de un sistema tipo 0 y el error más la entrada es cero, es necesario utilizar la acción integral que introduzca un cero en el origen. Es decir, en principio el controlador debería ser el PI.

Para determinar el valor de la constante de tiempo integral  $T_i$ , vamos a encontrar el polo más dominante de la función de transferencia en lazo abierto ( $s = -1$ ), de forma que  $-1/T_i = -1$ , así que  $T_i = 1$ .

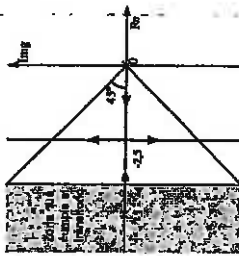
2. *Representar en el plano s:* Es necesario buscar los polos para que se cumplan las condiciones del transitorio y estacionariedad con la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado a partir del método del lugar de las raíces.

Las condiciones de la dinámica del sistema vienen dadas por el tiempo de establecimiento y el sobrepaso:

$$t_{1,PM} = \frac{4}{\delta\omega_n} \leq 1 \Rightarrow \delta\omega_n \geq 4$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \theta} \leq 4.3\% \rightarrow \frac{\delta\zeta}{\sqrt{1-\delta^2}} = -\ln 0.043 \Rightarrow \delta \geq 0.707 \rightarrow \cos \theta = 0.707 \Rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

Para determinar el lugar de las raíces, se parte de la función de transferencia en lazo abierto, que para un controlador proporcional e integral (PI) es:



$$G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s}$$

$$G_{LA}(s) = K_c \frac{s+1}{s} \frac{0.5}{(s+1)(s+5)} = \frac{0.5K_c}{s(s+5)}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{0.5K_c}{s^2 + 5s + 0.5K_c}$$

No existe intersección del lugar de las raíces con las especificaciones impuestas, por lo tanto se introduce la acción derivativa (PD). Es necesario ajustar el cero derivativo y para ello se utiliza el criterio de cancelación polo-cero cancelando el polo restante ( $s = -5$ ).



Las nuevas funciones de transferencia en lazo abierto y en lazo cerrado son las siguientes:

$$G_c(s) = \frac{K_c(s+1)(s+5)}{s} \Rightarrow G_{LA}(s) = \frac{K_c(s+1)(s+5)}{s} \frac{0.5}{(s+1)(s+5)} = \frac{0.5K_c}{s} \Rightarrow G_{LC}(s) = \frac{0.5K_c}{s+0.5K_c}$$

3. *Validar el diseño:* Faltó por determinar el valor de la ganancia del controlador y realizar la simulación de resultados.

- ✓ Especificaciones del régimen estacionario: sistema de tipo 1, por lo que  $\epsilon_{ss} = 0$ .
- ✓ Especificaciones del régimen transitorio:

$$K_{est} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{LA}(s) = 4 \rightarrow K_c > 8 \rightarrow G_{LC}(s) = \frac{4}{s+4} \rightarrow \begin{cases} t_{1,PM} = 47 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \\ M_p = 0\% \text{ (sistema de 1º orden)} \end{cases}$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$s + 0.5K_c = 0 \rightarrow s = -0.5K_c \xrightarrow{K_c=8} s = -4$$

