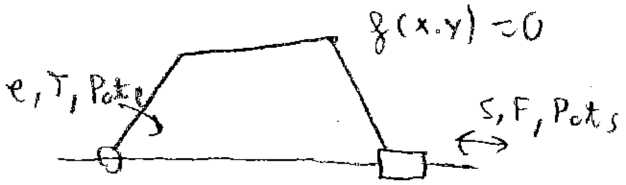
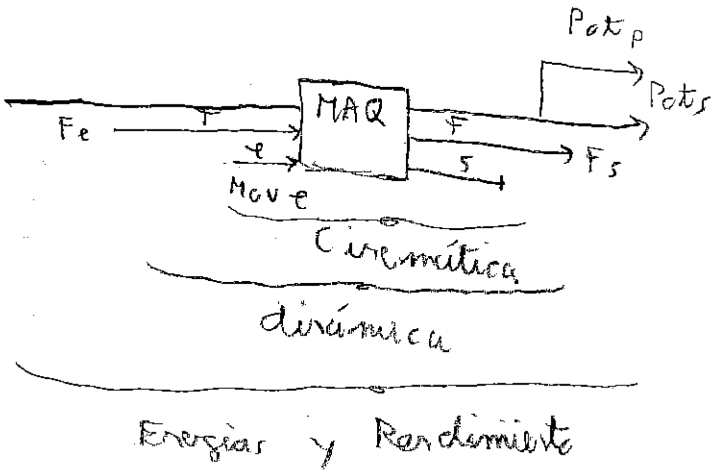
TEMA 1

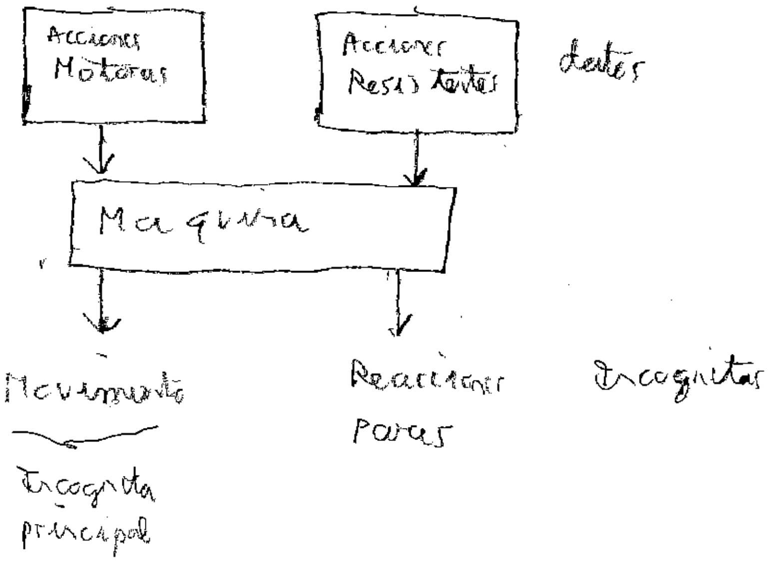
Introducción a la dinámica de Maquinaria

$M \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas} \\ \text{Momentos} \end{array} \right\}$ Acciones

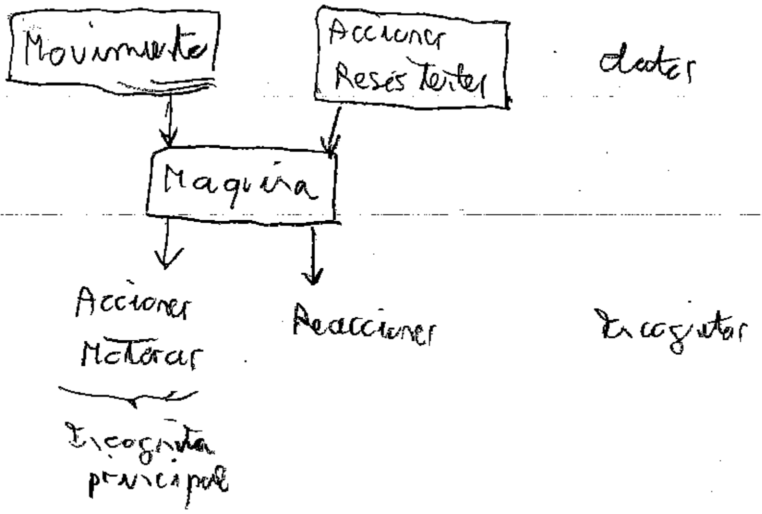




Problema dinámico directo



Problema dinámico inverso (Problema cinetostático)



2- Analisis dinámico en el diseño de máquinas

Esquema Pg 14

1- Fijar una función objetivo y despues definir el mecanismo mas adecuado mediante un proceso de sintesis estructural.

2- De esto obtenemos el tipo de mec, el nº de elementos, de pares y su secuencia de unión

3- Sintesis dimensional → da las dimensiones de los elementos, longitudes, posiciones y orientaciones relativas.

4- Analisis cinemático que dará como resultado las variables cinemáticas.

5- Despues se hace una estimación inicial de las secciones de los elementos → Dimensiones secundarias.

6- Con esas dimensiones secundarias se obtiene una distribución másica, y con el resultado del analisis cinemático y las acciones resistentes, se resuelve el prob dinámico inverso. Esto da como resultado las reacciones en los pares y las acciones motoras.

Pero puede ocurrir que las reacciones en los pares predigan fallo a fatiga en los materiales → se ocurre revisar las dimensiones secundarias.

Por último resolver el prob directo para ver si el mov se ajusta al predicho.

Sistema físico real

Hipotesis simplificativa → ↓

Modelo matemático

principios dinamica ↓

Ecuaciones de gobierno

Metodo de resolución ↓

Interpretación de resultados

Principios de la estática

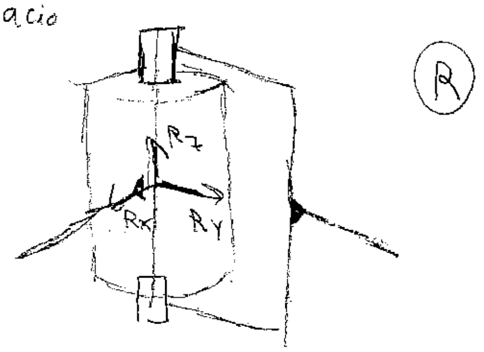
Principio de d'Alembert

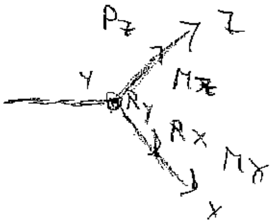
lo que hace es incluir las fuerzas de inercia como fuerzas externas

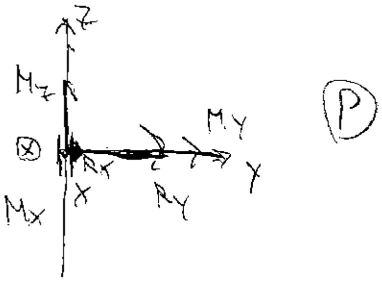
$$\delta W_{ap} = \sum_i \overrightarrow{F_{ap}}^i \delta \vec{r_i} = 0$$

En el espacio

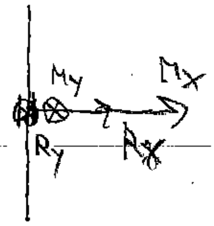
Clase I



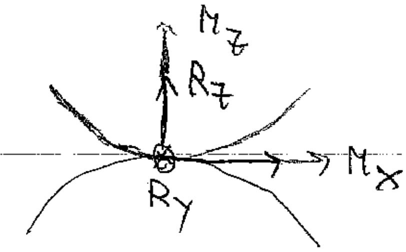




Clase II Ⓒ



Ⓛ C.



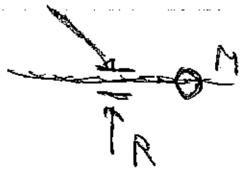
Clase III Esferico . Ⓔ

Plano

En el Plano

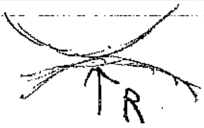
Clase I

Ⓡ

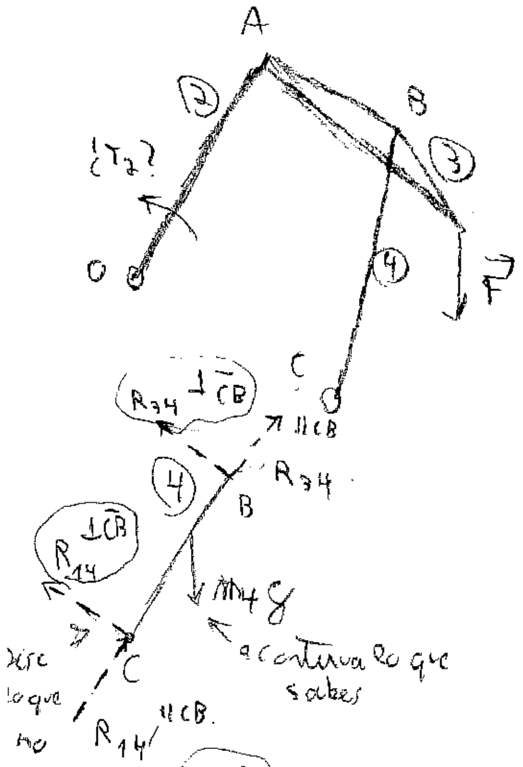


Ⓟ

Clase II Ⓛ

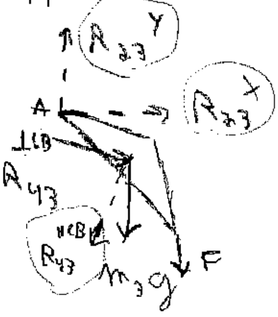


Ejemplo Tema 1



$$M_C = 0 \Rightarrow R_{34}^{\perp \overline{CB}}$$

$$\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{14}^{\perp \overline{CB}}$$

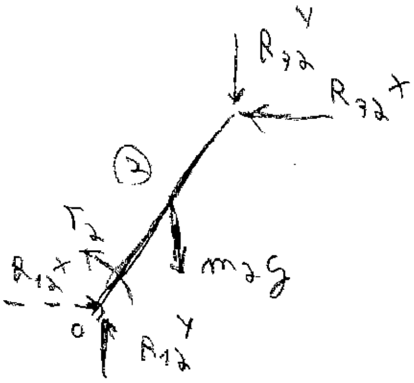


$$M_A = 0 \Rightarrow R_{43}^{\parallel CB}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{23}^{x}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{23}^{y}$$

en ④ $\Sigma F_{\parallel} = 0 \rightarrow R_{14}^{\parallel CB}$



$$M_O = 0 \rightarrow \boxed{T_2}$$

$$F_x = 0 \rightarrow R_{12}^{x}$$

$$F_y = 0 \rightarrow R_{12}^{y}$$

Principio de d'Alambert

Todo sistema dinámico en movimiento se encuentra en equilibrio sometido simultaneamente a las fuerzas exteriores y a las fuerzas de inercia

---

$$\overrightarrow{F_{ext}} = M\overrightarrow{a_b}$$

$$\overrightarrow{F_{ext}} - M\overrightarrow{a_b} = 0$$

$$\overrightarrow{N_O} = \frac{d\overrightarrow{H_O}}{dt} + \overrightarrow{v_O} \wedge \vec{p} \longrightarrow \underbrace{\left.\begin{array}{l} O = \text{Fijo} \\ O = G \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{v_O} = 0 \\ V_c \parallel \vec{p} \end{array}}_{v_O \wedge \vec{p} = 0}$$

$$N_O = \frac{d\overrightarrow{H_O}}{dt}$$

$$\overrightarrow{N_O} - \frac{d\overrightarrow{H_O}}{dt} = 0$$

Movimiento plano $H_O = I_O w \rightarrow \frac{d\overrightarrow{H_O}}{dt} = I_O \alpha$

$$\overrightarrow{N_O} - I_O \alpha = 0$$

$$N_G - I_G \alpha = 0$$

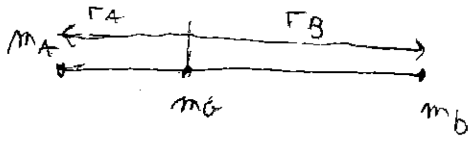
Principio Potencias virtuales

~~la potencia generada por el conjunto de acciones que actuan~~ sobre un sistema mecánico, incluidas las correspondientes a las acciones de inercia es nula para cualquier campo de velocidades virtuales.

$$Pot\ ap = \sum_{i=1}^{N} \overset{\text{virtual}}{\overrightarrow{F_{ap}}}\, \overrightarrow{v_i} + \sum_{j=1}^{M} M_{ap}'\, \tilde{\omega}_j = 0$$

Sistemas de masas equivalentes

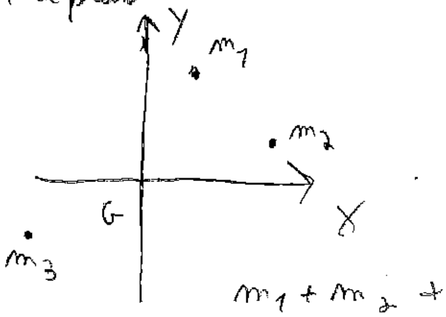
Se trata de simplificar los sistemas mecánicos mediante la sustitución de sus elementos, que son sólidos rígidos con masas distribuidas, por grupos de masas concentradas colocadas en determinados puntos y rígidamente ligados entre sí de manera que al aplicar los teoremas fundamentales a dichos sistemas se obtengan las mismas ecuaciones en ambos sistemas. Si en ambos sistemas se verifica la igualdad de masa y de la pos del centro de gravedad se dice que son estáticamente equivalentes. Si tienen los mismos valores inerciales se dice dinámicamente equivalentes. Si se dan las dos se habla de equivalencia completa.



m, l, I_G

$$\left.\begin{aligned} m_A + m_B + m_G &= \boxed{m} \\ m_A \boxed{r_A} - m_B \boxed{r_B} &= 0 \\ m_A \boxed{r_A^2} + m_B \boxed{r_B^2} &= I_G \end{aligned}\right\}$$

En el plano



$$m_1 + m_2 + m_3 + m_G = m$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

$$m_2 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0$$

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = I_G$$

En el espacio → 10 ec

$$\sum_{i=1}^{10} m_i = m$$

$$\sum_{i=1}^{10} m_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{10} m_i y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{10} m z_i = 0$$

$$I_x = \sum_{i=1}^{10} m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{10} m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{10} m_i (x_i + y_i^2)$$

$$C_z = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i$$

$$C_y = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i$$

$$C_x = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i$$

Tema 2

Problema dinámico inverso

Aplicación del principio de las potencias virtuales

hipótesis simplificativa → Potencia de las resistencias pasivas es nula o despreciable

Reacciones en los pares no intervienen

supongo problema con

g gdl

N elementos

g entradas → g $\boxed{T_e}$

↑

Fijo todas menos la que quiero sacar

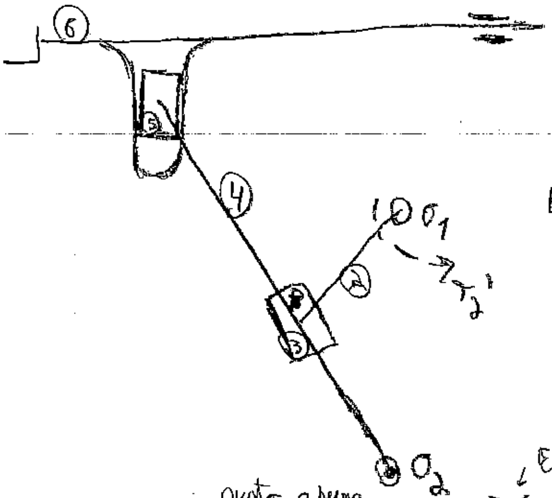
Campo 1 → $$T_{e_1}\tilde{\omega}^1_{e_1} + \sum_{K=1}^{NP} \tilde{F}_K \vec{V}_K^1 + \sum_{j=2}^{N} M_j \hat{\omega}_j^1 + \sum_{j=2}^{N} (\bar{F}_j^i \cdot \hat{V}_{G_j}^1 + M_j^i \hat{\omega}_j^1) = 0$$

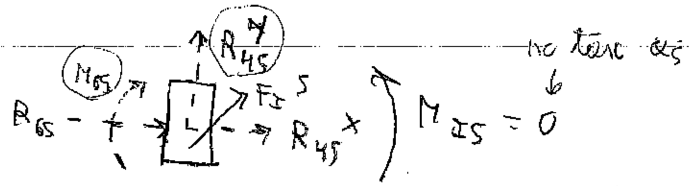
Campo δ → $$T_{e_j} \cdot \tilde{\omega}_{e_\delta}^\delta + \sum_{K=1}^{ND} F_K \cdot \bar{V}_K^\delta + \sum_{j=2}^{N} M_j \cdot \bar{\omega}_j^\delta + \sum_{j=2}^{N} (F_j^i \cdot \bar{v}_{G_j}^\delta + M_j^i \bar{\omega}_j^\delta).$$

La potencia generada por las acciones exteriores a un sistema incluido las acciones de inercia para cualquier campo de velocidades virtuales es nula.

Ejemplo aplicación

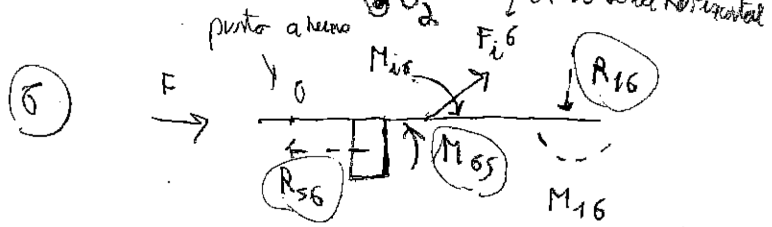
Empezar con los que sean puntos particulares (3,5)





⑤ $M_A = 0 \Rightarrow M_{65} = 0$

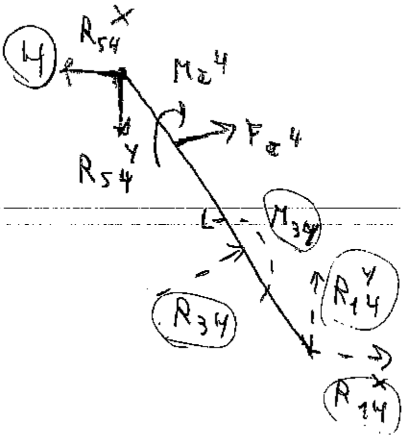
$\Sigma F_y = 0 \to R_{45}^Y$

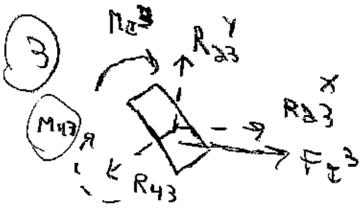


$\Sigma F_x = 0 \to R_{56}$ || $M_O = 0$ M_{16}

$\Sigma F_y = 0 \to R_{16}$

Otra vez en ⑤ $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{45}^X$





③ $M_B = 0 \to M_{43}$

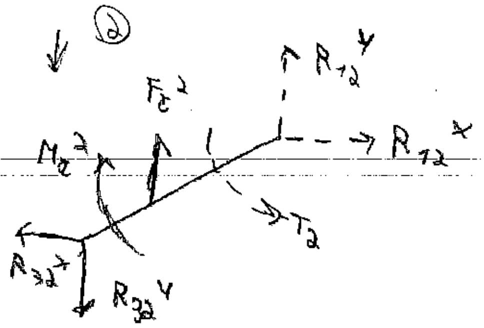
Vuelvo a ④ $M_{O_2} = 0 \to R_{34}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{14}^X$

$\Sigma F_y = 0 \to R_{14}^Y$

Vuelvo a ③ $\Sigma F_x = 0 \to R_{23}^X$

$\Sigma F_y = 0 \to R_{23}^Y$



$M_{O_1} = T_2$

$\Sigma F_x = 0 \to R_{12}^X$

$\Sigma F_y = 0 \to R_{12}^Y$

otra forma → Potencias virtuales

$$T_2 \vec{\omega_2} + F \vec{v_6} + \sum_{j=2}^{6} \left(F_{Ij} \vec{v_j} + M_{Ij} \cdot \omega_j^2 \right) = 0$$

↑ generada ↑ consumida

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial. Septiembre 2006.
Examen Final.

Peso sobre la Unidad Temática: 10 %.
Ejercicio. 2 Tiempo: 30 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

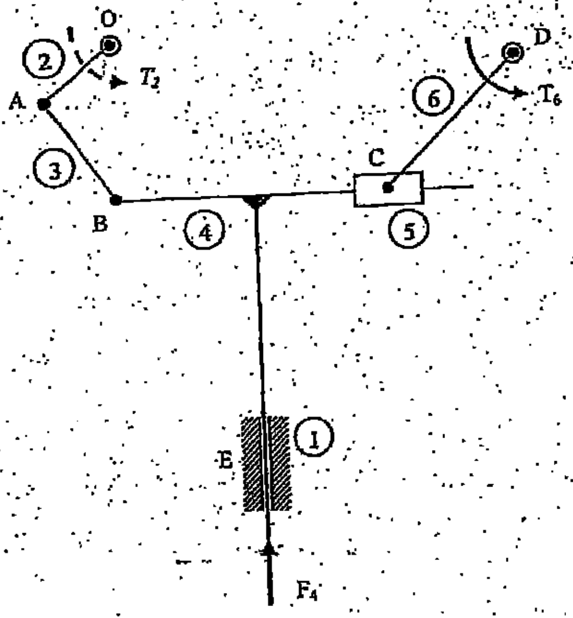
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2006.-eko Iraila.
Azterketa Finala.

Atal Tematikoaren Pisua: 10 %.
Ariketa. 2 Iraupena: 30 min.

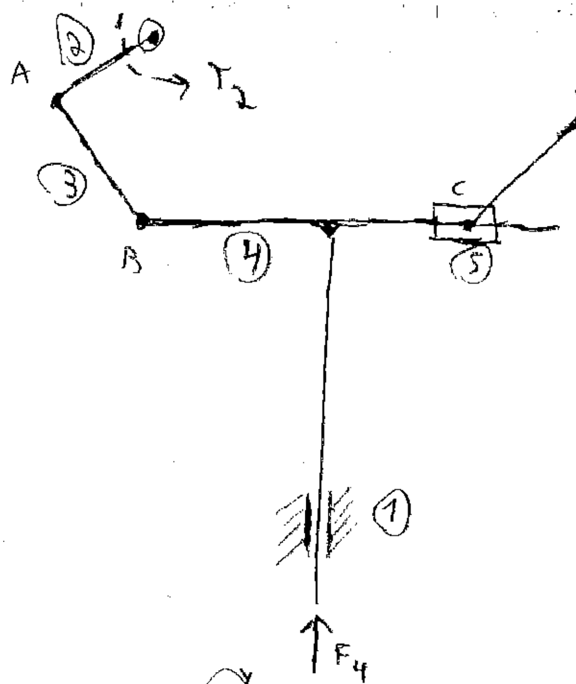
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

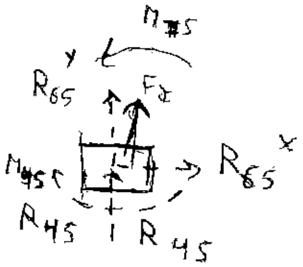
En la figura siguiente se representa un modelo simplificado de un mecanismo de yugo escocés accionado por una díada R. Suponiendo el problema cinemático resuelto, conocidas todas las propiedades másicas de los elementos del mecanismo, y aplicando el principio de d'Alembert, se pide:

1. Calcular las reacciones en todos los pares cinemáticos. (8p)
2. Calcular el par motor $\mathbf{T_2}$, necesario para accionar el mecanismo venciendo el par resistente $\mathbf{T_6}$ y la fuerza $\mathbf{F_4}$. (2p)



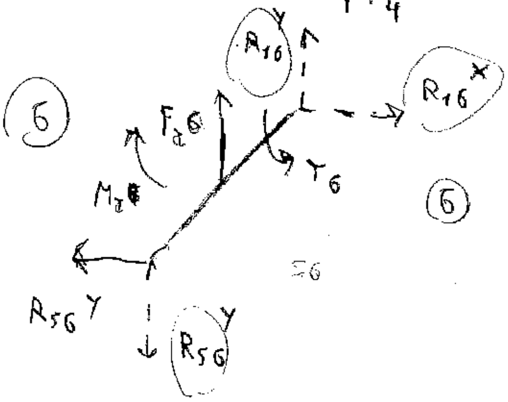
Septiembre 2006





⑤ $M_C = 0 \Rightarrow M_{45} = 0$ ①

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{65}^x$ ②



⑥ $M_D = 0 \Rightarrow R_{65}^y$ ③

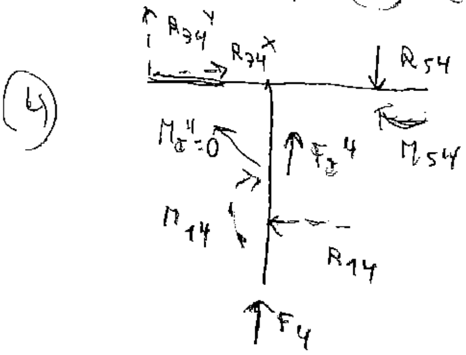
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{16}^x$ ④

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{16}^y$ ⑤

Potencias virtuales

$$T_2 \hat{w}_2 + F_4 v_4 + T_6 \hat{w}_6 + \\ + \sum_{j=2}^{6} \left(F_I \hat{v}_{Gj} + M_I^j w_j \right)$$

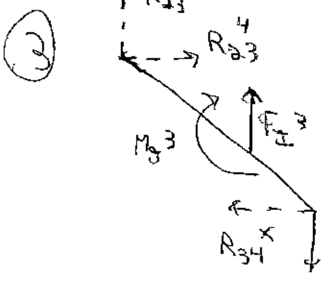
Recalculo → ⑤ $\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{45}$ ⑥



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{34}^y$ ⑦

④ $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{14}$ ⑪

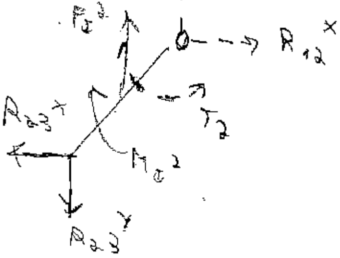
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_{14}$ ⑫



$M_A = 0 \Rightarrow R_{34}^x$ ⑧

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{23}^y$ ⑨

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R \quad ^x$ ⑩



$M_O = 0 \Rightarrow T_2$ ⑬

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{12}^x$ ⑭

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{12}^y$ ⑮ ②

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA
INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.
Ingeniería Industrial. 3er curso. Marzo 2003.
Unidad temática: B.
Teoría
Peso: 40 %. Tiempo: 60 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Martxoak 2003
Atal Tematikoa: B
Teoria
Pisua: % 40. Iraupena: 60 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

PARTE A

1. Concepto de:
   a. Sistema discreto y sistema continuo. Discretización. **(0.5p)**
   b. Sistema lineal y sistema no lineal. **(0.5p)**
2. Respuesta de un sistema de 1 grado de libertad no amortiguado cuando se le somete a una excitación tipo rampa y condiciones iniciales nulas. Representación gráfica. **(1.5p)**
3. Obtención y representación gráfica del factor de amplificación dinámica y del desfase en un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento histerético o estructural. **(1.5p)**

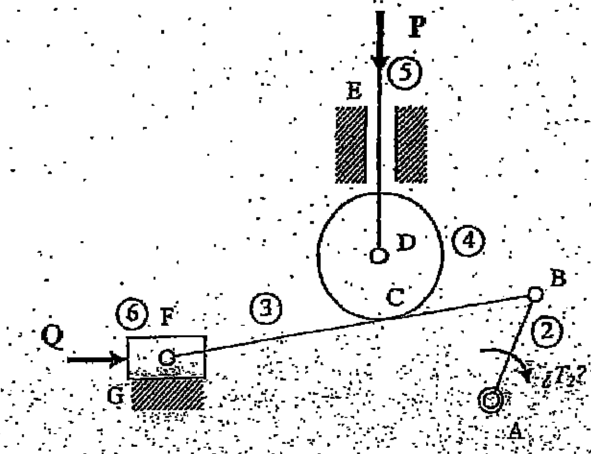
PARTE B

4. Obtener la expresión de la respuesta para las vibraciones libres no amortiguadas de un sistema de dos grados de libertad mediante la utilización de coordenadas modales. **(2p)**
5. Representar el sistema de medida experimental necesario para calcular el amortiguamiento de un sistema mediante el método de la energía perdida por ciclo. Describir brevemente el funcionamiento de cada uno de los componentes del sistema de medida. **(1p)**

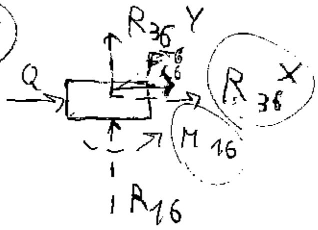
PARTE C

6. Necesidad del equilibrado de rotores: definir los dos tipos de desequilibrio, y comentar brevemente los fundamentos del método práctico de equilibrado dinámico. **(1p)**
7. El siguiente mecanismo representa un dispositivo de accionamiento de una doble bomba de agua accionado por la manivela 2. Aplicando el método de Newton o Principio de D'Alembert, calcular el par motor T_2 necesario para vencer las presiones resistentes **P** y **Q**, y las reacciones en todos los pares del mecanismo. **(2p)**

Solo tiene un gdl (T_2)
6 hace y en C tiene ke tener que ser 2
Rodadura pura



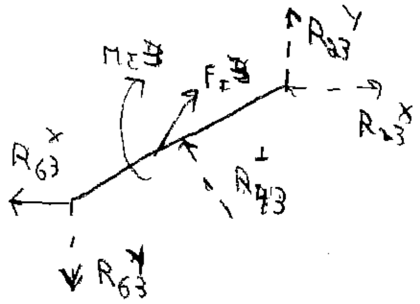
⑥



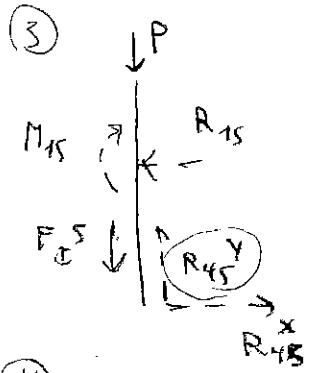
$N_6 = 0 \Rightarrow M_{16} = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{36}^x$

③

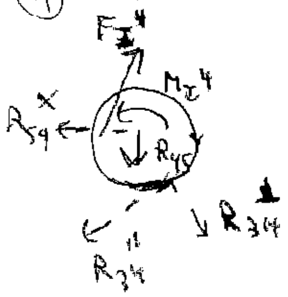


③



$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_{45}$

④



$M_D = 0 \to R_{34}^{\parallel}$

$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_Y = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}R_{34}^{\perp} \\ R_{54}^X\end{array}$

En ⑤ $\Sigma F_x = 0 \to R_{15}$

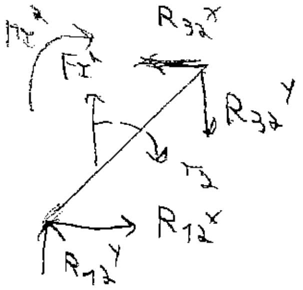
$M_D = 0 \Rightarrow M_{15}$

En ③ $M_B = 0 \Rightarrow R_{63}^Y$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{23}^X$

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_{23}^Y$

En ⑥ $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{16}$



$M_A = 0 \Rightarrow T_2$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{12}^X$

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_{12}^Y$

Potencias

$$T_2 \vec{\omega}_2 + P\vec{v}_5 + Q\vec{v}_6 + \\ + \sum_{j=2}^{6} (\vec{F}_I^j \vec{v}_{G_j} + M_I^j \vec{\omega}_j) = 0$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA
SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA
TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial. Marzo 2012.
Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 50 %.
Ejercicio 1. Tiempo: 70 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

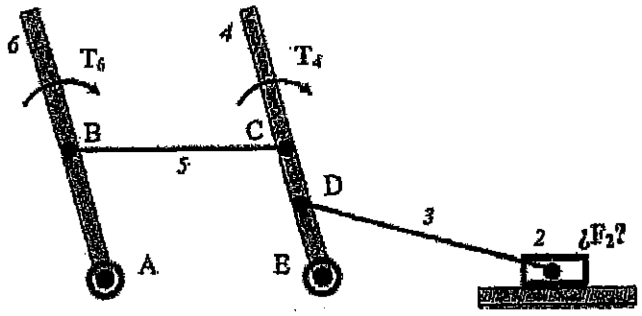
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2012.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 50 %.
Ariketa. 1 Iraupena: 70 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

PARTE A

1. Problema de dinámica inversa. (2,5p)

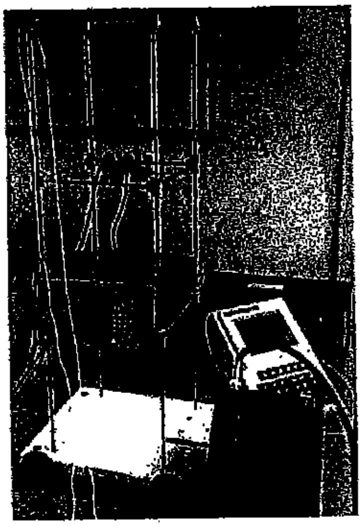
   Sea el modelo de limpiaparabrisas de la figura, accionado por un actuador lineal *2*. El rozamiento entre la luna y las escobillas se modeliza a través los pares resistentes conocidos T_4 y T_6. Dada por resuelta la cinemática del mecanismo, y conocidas todas las propiedades másicas del mismo, se pide plantear la obtención de:

   - Las reacciones en todos los pares, aplicando el principio de d'Alembert. (2p)
   - La fuerza accionadora F_2, aplicando el método de las potencias virtuales. (0,5p)



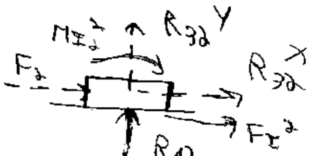
2. Modelización de sistemas mecánicos (1,5p).

   Dado el prototipo de la imagen adjunta que reproduce la estructura de un edificio, se pide plantear tres modelos discretos de parámetros concentrados para el estudio de cada uno de los tres primeros modos naturales (los dos primeros de flexión, y el tercero de torsión). Justificar los modelos generados, así como todos los parámetros de los mismos.



Marzo 2012

②

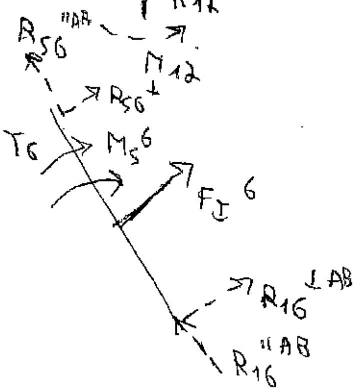


$M_F = 0 \Rightarrow M_{12} = 0$ ①

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2$ ⑭

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{12}$ ⑮

⑥

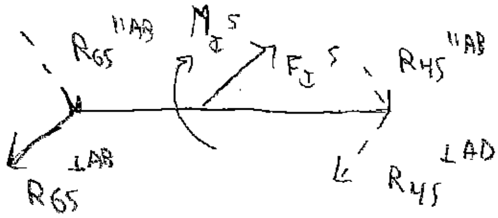


$M_A = 0 \Rightarrow R_{56}^{\perp AB}$ ②

$\Sigma F^{\perp} = 0 \Rightarrow R_{16}^{\perp AB}$ ③

$\Sigma F^{\parallel} = 0 \Rightarrow R_{16}^{\parallel AB}$ ⑬

⑤

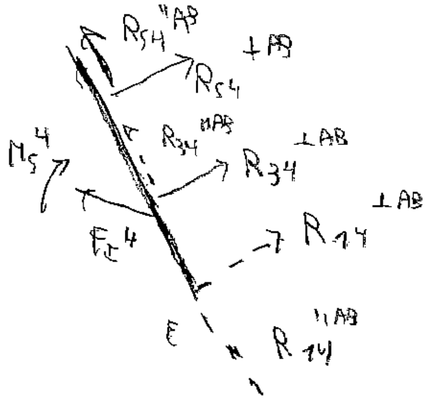


$M_i = 0 \Rightarrow R_{65}^{\parallel AB}$ ④

$\Sigma F^{\perp AB} = 0 \Rightarrow R_{45}^{\perp AB}$ ⑤

$\Sigma F^{\parallel AB} = 0 \Rightarrow R_{45}^{\parallel AB}$ ⑥

④

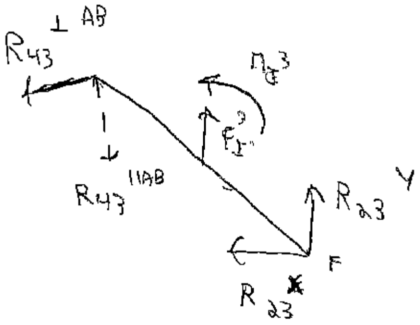


$M_E = 0 \Rightarrow R_{34}^{\perp AB}$ ⑦

$\Sigma F_j = 0 \Rightarrow R_{14}^{\perp AB}$ ⑧

$\Sigma F_{\parallel} = 0 \Rightarrow R_{14}^{\parallel AB}$ ⑫

③



$M_F = 0 \Rightarrow R_{43}^{\parallel AB}$ ⑨

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{23}^{x}$ ⑩

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{23}^{y}$ ⑪

eman ta zabal zazu

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

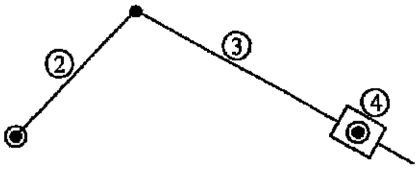
3° Ingeniería Industrial. Septiembre 2009.
Peso: 50 %.
Ejercicio.1 Tiempo: 90 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2009.-eko Iraila.
Pisua: 50 %.
Ariketa. 1 Iraupena: 90 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

PARTE A:

1. Representar la cadena cinemática de la que proviene el mecanismo de la figura. Obtener además el resto de las inversiones de dicha cadena cinemática. (2p)



2. Obtener razonadamente las ecuaciones de la circunferencia de inflexiones, circunferencia de retrocesos y circunferencia de Bresse de un plano móvil. (3p)
3. Coeficientes de influencia de velocidades y aceleraciones: concepto y expresiones para un mecanismo genérico de un grado de libertad. (2p)
4. A partir del concepto de mecanismos cognados de un cuadrilátero articulado, explicar la síntesis de un mecanismo de un grado de libertad en el cual uno de sus elementos posea movimiento de traslación. (3p)

PARTE B:

1. Análisis experimental de vibraciones. Transductores piezoeléctricos. Razonar por qué la tensión de salida de un acelerómetro piezoeléctrico es proporcional a la aceleración del punto al que se une. (2p)
2. Sea el sistema de un gdl de la figura 1, excitado mediante un desequilibrio del eje rotativo:
    a. Representar y comentar la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia de excitación. (0.5p)
    b. Calcular los parámetros del absorsor que ha de añadirse al sistema para que pueda trabajar con seguridad en las inmediaciones de su frecuencia natural. (2p)
    c. Representar y comentar la respuesta del sistema modificado con el absorsor en el dominio de la frecuencia de excitación (0.5p)
3. Problema dinámico inverso (Figura 2). Indicar el cálculo del par motor T_1 cuando se suministra como dato el par resistente T_3. Indicar también, razonadamente, cuáles de las reacciones en los pares del siguiente mecanismo pueden calcularse y cuáles no. (2p)
4. Método aproximado de cálculo del volante de inercia. Explicar:
    a. Explicar los datos del problema. (1p)
    b. Aplicación de la ecuación de la dinámica. (1p)
    c. Obtención de la inercia del volante. (1p)

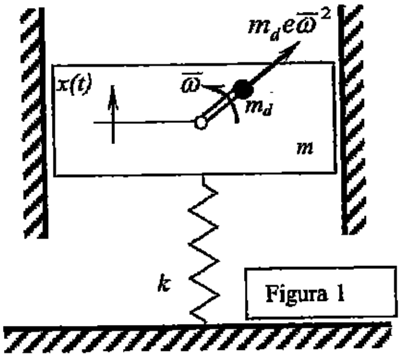


Figura 1

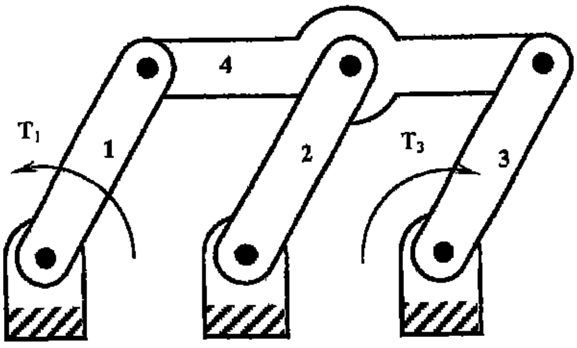
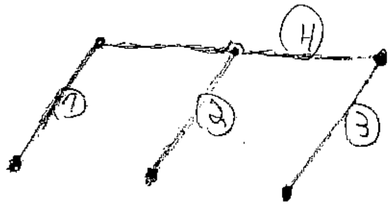
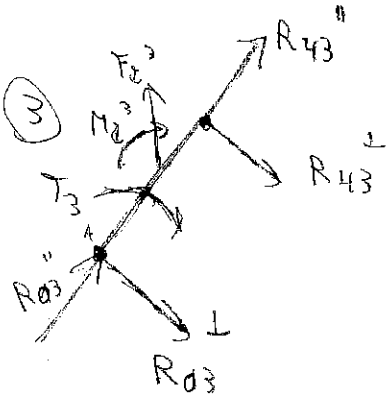


Figura 2

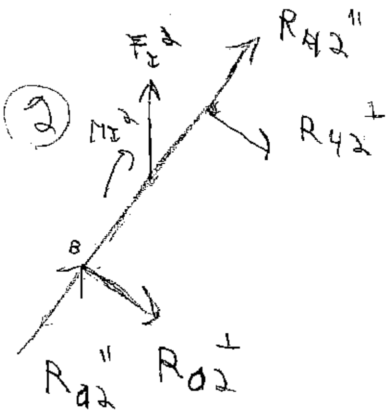
Examen Septiembre 2009





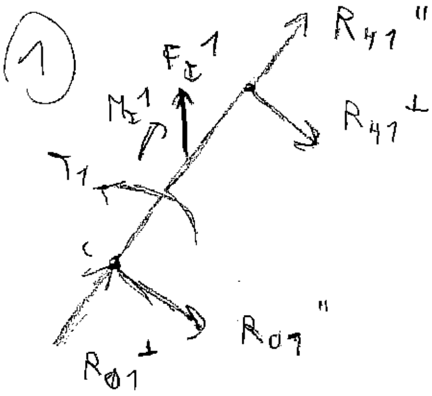
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_{43}^{\perp}$ ①

$\Sigma F^{\perp} = 0 \Rightarrow R_{03}^{\perp}$ ②



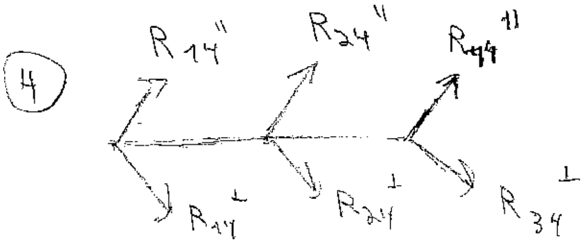
$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_{42}^{\perp}$ ③

$\Sigma F^{\perp} = 0 \Rightarrow R_{02}^{\perp}$ ④



$\Sigma F^{\perp} = 0 \Rightarrow R_{01}^{\perp}$ ⑥

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow T_1$ ⑦



$\Sigma F \perp = 0 \Rightarrow R_{14}^{\perp}$ ⑤

eman ta zabal zazu

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

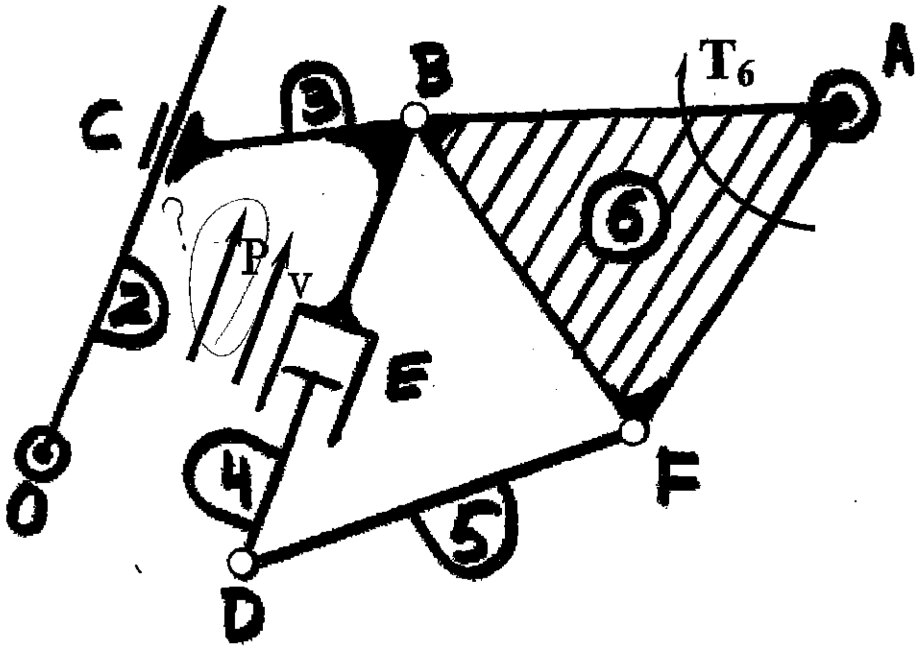
Ingeniería Industrial. 3er curso. Septiembre 2003.
Problema 2
Peso: 20 %. Tiempo: 50 min.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Iraila 2003
2^{go} ariketa
Pisua: 20%. Iraupena: 50 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

Del mecanismo de la figura,

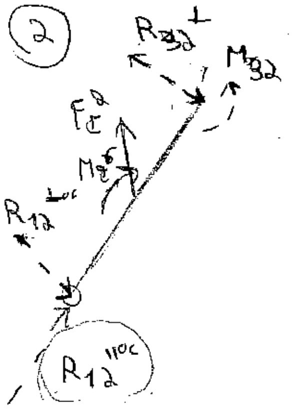


Calcular:

1. Las velocidades y aceleraciones lineales de todos los puntos y las velocidades y aceleraciones angulares de todos los elementos, si la velocidad relativa del elemento 4 con respecto del elemento 3 es **v** y su aceleración es nula. (6p)
2. Plantear el cálculo de la presión **P** necesaria en el émbolo E, para vencer el par T_6 mediante el método de Newton (aislar para ello todos los elementos y representar todas las reacciones en los pares). Comentar la dificultad de la resolución mediante este método. (3p) Calcular dicha presión P mediante el método de las potencias virtuales (1p).

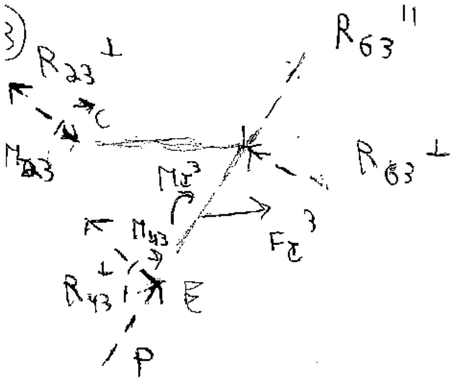
Septiembre 2003

②

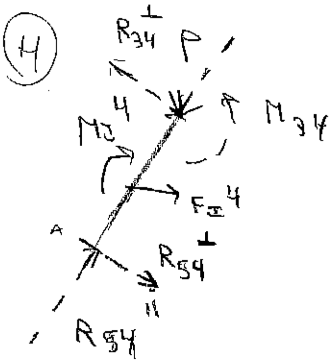


$\Sigma F^{\parallel} = 0 \rightarrow R_{12}^{\parallel oc}$ ①

3)

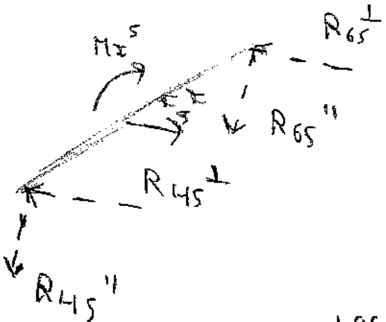


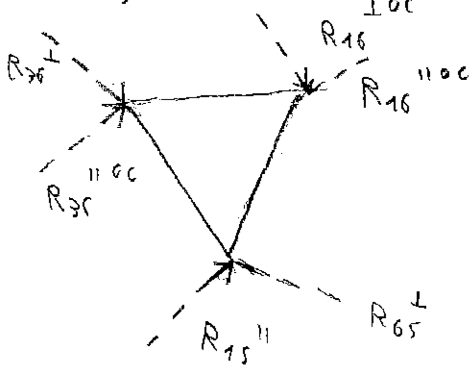
④



$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_{34}^{\perp}$ ②

$\Sigma F_{\perp} = 0 \rightarrow R_{14}^{\perp}$ ③





Es jodido porque están acoplados las ecuaciones

$$T_6 \hat{\omega}_6 + 2 P_5 v + \sum_{j=2}^{6} \vec{F}_I^j \vec{v}_j + \dot{M}_I^j \vec{\omega}_j) = 0$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

Ingeniería Industrial. 3er curso. Enero 2003.
Ejercicio 2
Peso: 20 %. Tiempo: 45 min.

MAKINEN TEORIA.

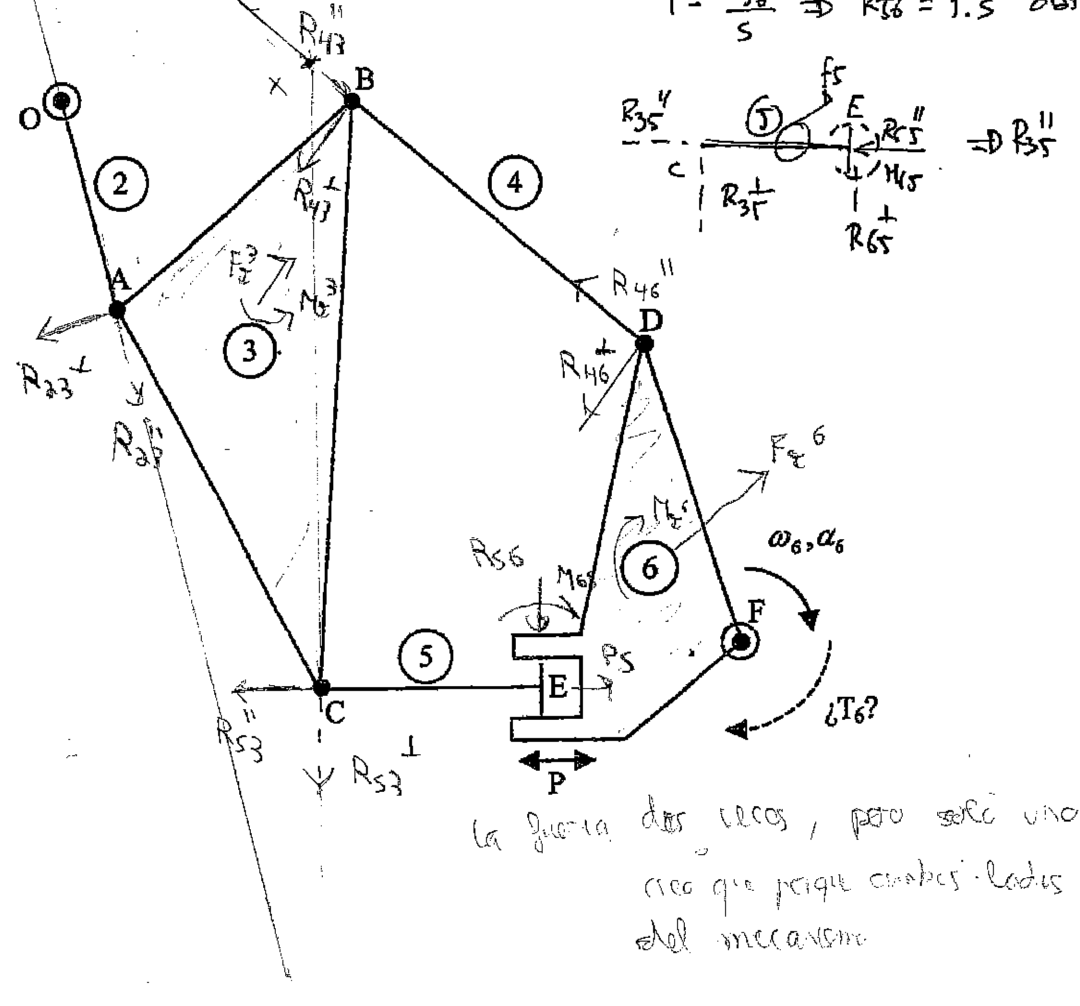
Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Urtarrila 2003
2. Ariketa
Pisua: 20%. Iraupena: 45 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

Sea el mecanismo de 1 grado de libertad de la figura. Se pide:

a) Obtener las velocidades angulares de todos los elementos del mecanismo conociendo el valor de la velocidad angular del elemento 6. (1.5 puntos)
b) Obtener asimismo las aceleraciones angulares de todos los elementos del mecanismo conociendo la aceleración angular del elemento 6. (3 puntos)
c) Dibujar una inversión del mecanismo en la que el elemento 5 pase a ser el fijo. (1.5 puntos)
d) Mediante el mecanismo de la figura, se desea producir una presión P en el aceite del émbolo (valor conocido). Se pide calcular mediante D'Alembert el valor del par T_6 que es necesario aplicar en el elemento 6. Calcular asimismo las reacciones en todos los pares. (3 puntos)
e) Utilizando el método de las potencias virtuales plantear el modo de calcular el par T_6 para obtener la misma presión P en el émbolo. (1 punto)

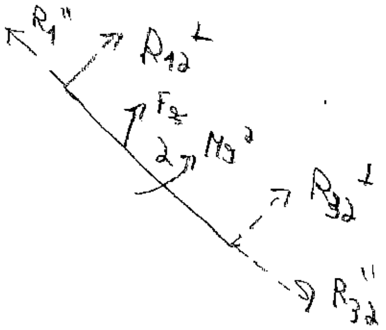
$P = \frac{R''_{56}}{S} \Rightarrow R''_{56} = P.S$ dato



la fuerza dos veces, pero sólo una potencia
creo que porque ambos lados son
del mecanismo

cuando no son barras consecutivas → perp y paral
son
→ puede ser mejor vertical y horizontal

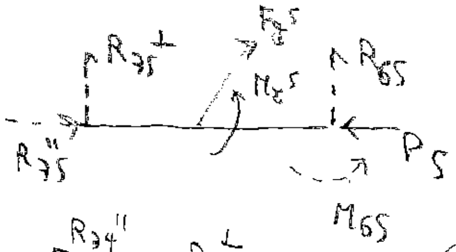
Enero 2003



(2)

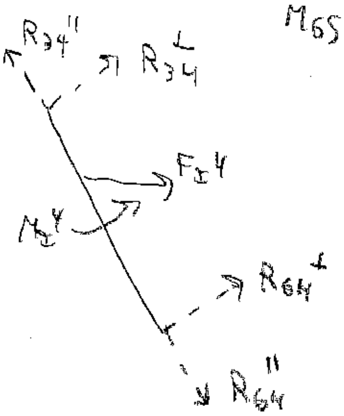
$M_A = 0 \Rightarrow R_{12}^{\perp}$ (1)

$\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{32}^{\perp}$ (2)



(5)

$\Sigma F_{\parallel} = 0 \Rightarrow R_{35}''$ (3)



(4)

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_{64}^{\perp}$ (4)

$\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{34}^{\perp}$ (5)

En el global (3) $M_x = 0 \Rightarrow R_{23}''$ (6)

$M_y = 0 \Rightarrow R_{53}^{\perp}$ (7)

$M_z = 0 \Rightarrow R_{43}''$ (8)

(2) $\Sigma F_{\parallel} = 0 \Rightarrow R_{12}''$ (9)

(5) $\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{65}$ (10)

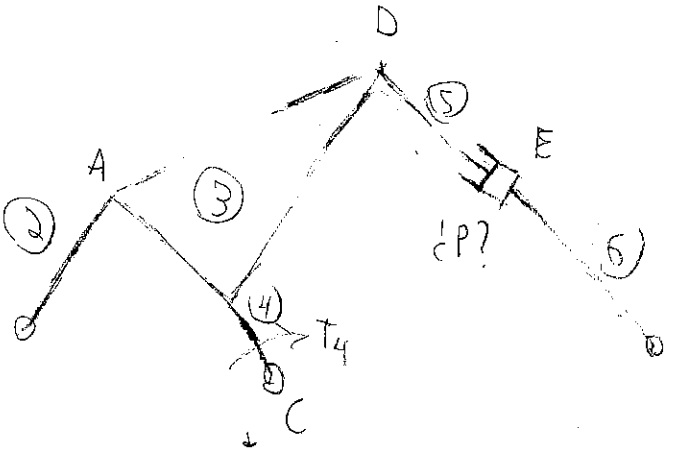
$M_C = 0 \Rightarrow M_{65}$ (11)

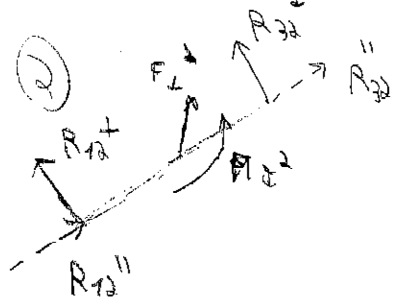
(4) $\Sigma F_{\parallel} = 0 \Rightarrow R_{64}''$ (12)

(6) $M_F = 0 \Rightarrow (T_6)$ (13)

$\Sigma F_V = 0$
$\Sigma F_H = 0$ $\Big\}$ R_{16}^{V} R_{16}'' (14) (15)

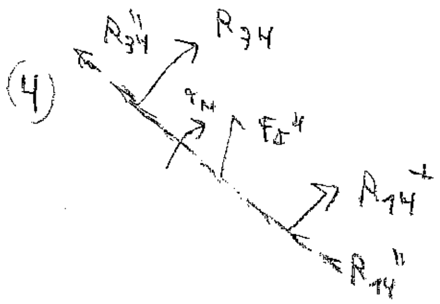
$$T_6 \bar{\omega}_6 + P_5 \cdot V_r + \sum_{j=2}^{6} \left(\overrightarrow{F_i}' V_{G5} + M_i' \widehat{\omega_j} \right) = 0$$





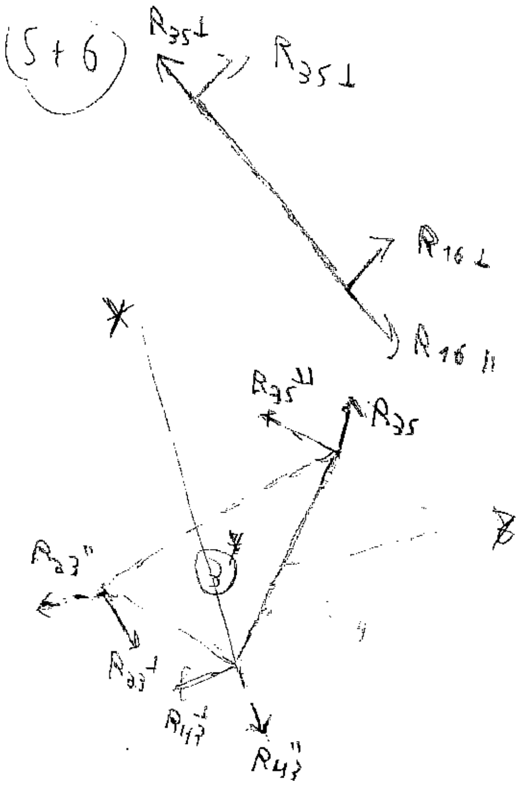
$\Sigma M = 0 \to M_0 = 0 \Rightarrow R_{32}^{\perp}$ ①

$\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{12}^{\perp}$ ②



$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow R_{34}^{\perp}$ ③

$\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{14}^{\perp}$ ④

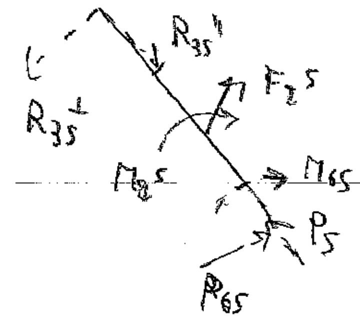


$\Sigma M_{5+6} = 0 \Rightarrow R_{35\perp}$ ⑤

$\Sigma M_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{16\perp}$ ⑥ ..

$$\begin{cases} M_x = 0 \Rightarrow R_{83}'' & ⑦ \\ M_y = 0 \Rightarrow R_{23}'' & ⑧ \\ M_z = 0 \Rightarrow R_{43}'' & ⑨ \end{cases}$$

⑤

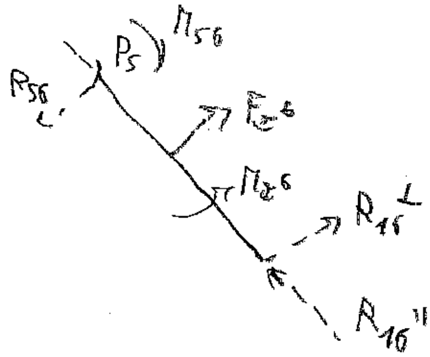


$\Sigma F_{\parallel} = 0 \Rightarrow P$ 10

$\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{65}$ 11

$M_{\varepsilon} = 0{,}7\, M_{65}$ ⑫

⑥



$\Sigma F^{\parallel} = 0 \Rightarrow R_{16}^{\parallel}$ ⑬ Faltan hasta 15

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.
Ingeniería Industrial. 3er curso. Marzo 2003.
Unidad temática: B.
Ejercicio 1
Peso: 25 %. Tiempo: 35 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Martxoa 2003
Atal Tematikoa: B
1go Ariketa.
Pisua: 25%. Iraupena: 35 min.

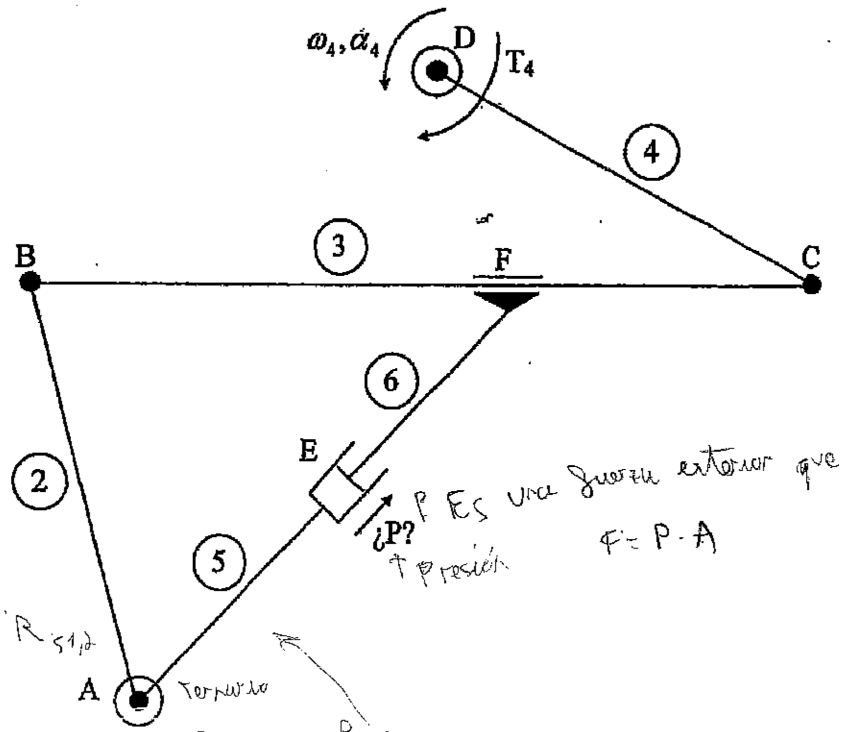
GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

Sea el mecanismo de un grado de libertad de la figura. Se pide:

a) Calcular mediante la aplicación del principio de d'Alembert la presión en el émbolo *E* necesaria para vencer el par resistente T_4 para que en esa posición el elemento 4 se mueva con ω_4 y α_4. Calcular asimismo las reacciones en todos los pares de mecanismo. (8.5 p)

b) Calcular mediante el Método de las Potencias Virtuales la presión en el émbolo necesaria para vencer el par resistente T_4 y que en esa posición el elemento 4 se mueva con ω_4 y α_4. (1.5 p)

Nota: Se suponen conocidas todas las propiedades másicas y cinemáticas de todos los elementos del mecanismo.



P Es una fuerza exterior que actua solo sobre 6

F = P · A

↑ presión

$R_{51,2}$

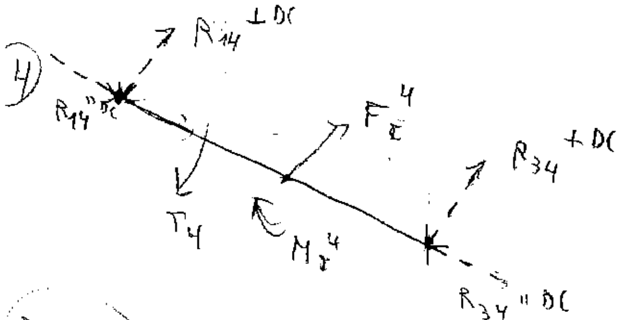
Ternario

$R_{52,1}$

$R_{21,5}$

$R_{52,1} + R_{21,5} + R_{51,2} = 0$

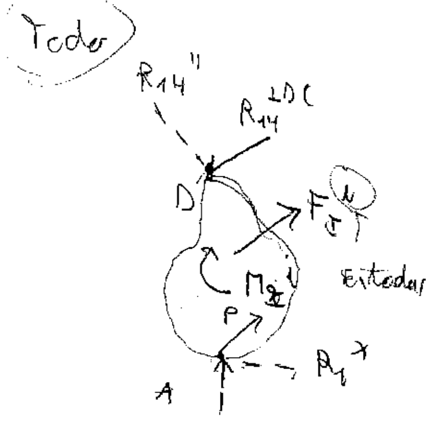
Examen Marzo 2003



$M_D = 0 \Rightarrow R_{34}^{\perp DC}$ ①

$\Sigma F^{\perp} = 0 \Rightarrow R_{14}^{\perp DC}$ ②

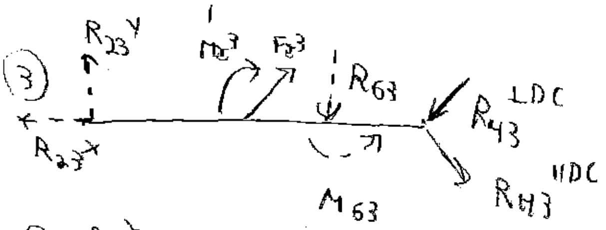
$\Sigma F^{\parallel} = 0 \Rightarrow R_{34}^{\perp DC}$ ④



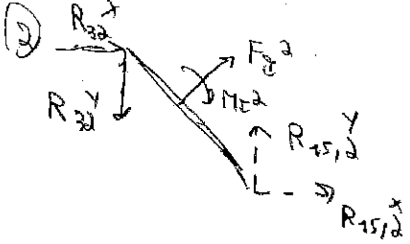
$M_A = 0 \Rightarrow R_{14}^{\parallel} DC$ ③

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{63}$ ⑨

$M_E = 0 \Rightarrow M_{63}$ ⑩



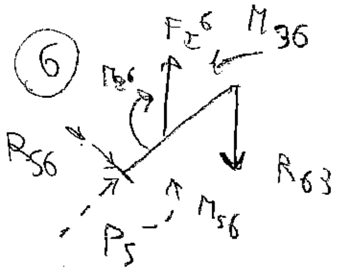
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{23}^x$ ⑤



$M_A = 0 \Rightarrow R_{32}^y$ ⑥

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{15,2}^x$ ⑦

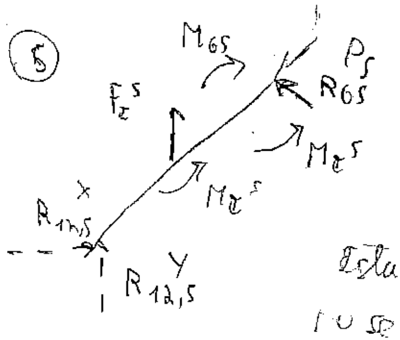
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{15,2}^y$ ⑧



$\Sigma F^{\parallel EF} = 0 \Rightarrow P$ ⑪

$M_E = 0 \Rightarrow M_{56}$ ⑫

$(\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow R_{56}$ ⑬ $)$ nueva



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{12,5}^x$ ⑬

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{12,5}^y$ ⑭

Estas no se ponen

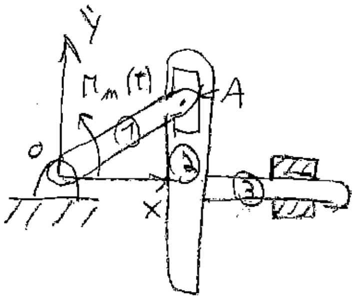
$$\begin{cases} R_{12,5}^x + R_{15,2}^x + R_{25,1}^x = 0 \rightarrow R_{25,1}^x & ⑮ \\ R_{12,5}^y + R_{15,2}^y + R_{25,1}^y = 0 \rightarrow R_{25,1}^y \end{cases}$$

$$T_4 \widetilde{\overline{w}}_4 + P_5 \widetilde{\overline{v}}_E^2 + \sum_{i=2}^{6} \left(\vec{F}_{\sigma}^{\,i} \widetilde{\vec{V}}_{\theta i} + M_{\sigma}^{j} w_j \right) = 0$$

TEMA 3

Primer procedimiento

Por teorema de energía (si tienes un gdl)



$I_0 \rightarrow ①$

$R = \overline{OA}$

$m = M_2$

$M = M_3$

$$P_{ct_e} = \frac{dT(t)}{dt}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \dot\varphi^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2} m A^2 \dot\varphi^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\varphi \rightarrow \dot x = -R\dot\varphi\,\text{sen}\,\varphi \\ y = R\,\text{sen}\,\varphi \rightarrow \dot y = R\dot\varphi\cos\varphi \end{array}\right\} \dot x^2 + \dot y^2 = R^2\dot\varphi^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} M \dot x^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot\varphi^2\,\text{sen}^2\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}\dot\varphi^2 (I_0 + mR^2 + MR^2\,\text{sen}^2\varphi)$$

$$\frac{dT}{dt} = \dot\varphi\ddot\varphi(I_0 + mR^2 + MR^2\,\text{sen}^2\varphi) + \frac{1}{2}\dot\varphi^3 \cdot 2MR^2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{dT}{dt} = \dot\varphi(I_0\ddot\varphi + mR^2\ddot\varphi + MR^2\,\text{sen}\,\varphi\,(\ddot\varphi\,\text{sen}\,\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi))$$

$$P_{ct} = M_m(t)\dot\varphi - F_r(t)\underset{\substack{\uparrow \\ (F_r(t)\hat\imath)(-R\dot\varphi\,\text{sen}\,\varphi)i \\ \vec{V_3}}}{R\dot\varphi\,\text{sen}\,\varphi} = \dot\varphi(M_m(t) - F_r(t)R\,\text{sen}\,\varphi)$$

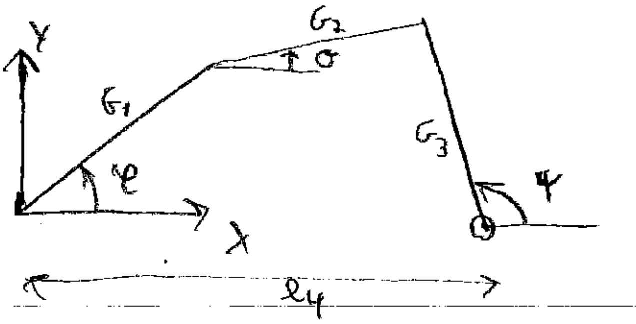
Igualando

$$M_m(t) - F_r(t)R\,\text{sen}\,\varphi = I_0\ddot\varphi + mA^2\ddot\varphi + MR^2\,\text{sen}\,\varphi\,(\ddot\varphi\,\text{sen}\,\varphi + \dot\varphi^2\cos$$

Explicación

Aplicamos teorema de la energía

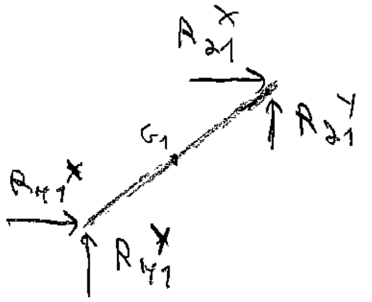
- Segundo procedimiento



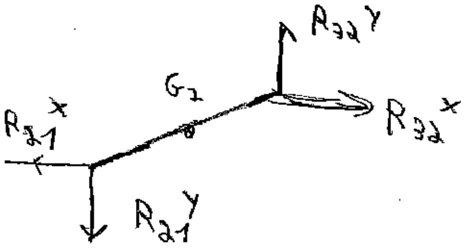
l_1, l_2, l_3

I_1, I_2, I_3

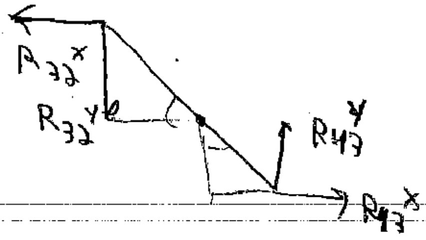
m_1, m_2, m_3



$$\boxed{R_{21}^x} + \boxed{R_{41}^x} = m\,\boxed{\ddot{x}_{G_1}}$$
$$\boxed{R_{21}^y} + \boxed{R_{41}^y} = m_1\,\boxed{\ddot{y}_{G_1}}$$
$$\frac{l_1}{2}\,R_{41}^x - R_{21}^x)\,\text{sen}\,\varphi + \frac{l_1}{2}\,(R_{21}^y - R_{41}^y)\cos\varphi = I_1\,\boxed{\ddot{\varphi}}$$



$$\boxed{R_{32}^x} - R_{21}^x = m_2\,\boxed{\ddot{x}_{G_2}}$$
$$\boxed{R_{32}^y} - R_{21}^y = m_2\,\boxed{\ddot{y}_{G_2}}$$
$$\frac{l_2}{2}\,(-R_{32}^x + R_{21}^x)\,\text{sen}\,\sigma + \frac{l_2}{2}\,(R_{32}^y + R_{21}^y)\cos\sigma = I_2\,\boxed{\ddot{\sigma}}$$



$$\boxed{R_{43}^x} - R_{32}^x = m_3\,\boxed{\ddot{x}_{G_3}}$$
$$\boxed{R_{43}^y} - R_{32}^y = m_3\,\boxed{\ddot{y}_{G_3}}$$
$$\frac{l_3}{2}\,(R_{32}^x + R_{43}^x)\,\underset{\substack{\uparrow\\ 180-\psi=\psi}}{\text{sen}\,\psi} + \frac{l_3}{2}\,(R_{32}^y + R_{43}^y)\cos\psi = I_3\,\boxed{\ddot{\psi}}$$

( ) = incógnitas

8 reacciones, $x_{G_1}, y_{G_1}, x_{G_2}, y_{G_2}, x_{G_3}, y_{G_3}, \sigma, \varphi, \psi$

De momento tienes 9 ec

Añadimos 6 cinemáticas

$$x_{G_1} = \frac{l_1}{2}\cos\varphi, \quad y_{G_1} = l_1\,\text{sen}\,\varphi$$

$$x_{G_2} = l_1\cos\varphi + \frac{l_2}{2}\cos\sigma \quad ; \quad y_{G_2} = l_1\,\text{sen}\,\varphi + \frac{l_2}{2}\,\text{sen}\,\sigma$$

$$x_{G_3} = l_1\cos\varphi + l_2\cos\sigma - \frac{l_3}{2}\cos\psi \quad ; \quad y_{G_3} = l_1\,\text{sen}\,\varphi + l_2\,\text{sen}\,\sigma - \frac{l_3}{2}\,\text{sen}\,\psi$$

Derivarlas dos veces

Y otras dos ec de cierre de lazos $l_1\cos\varphi + l_2\cos\sigma - l_3\cos\psi = l_4$

Dinámica de sistemas de 1 gdl sometidos a acciones dependientes de la posición

En la mayor parte de las máquinas las acciones aplicadas dependen exclusivamente de la posición y no son función explícita del tiempo.

Método de Quin.

Se basa en el teorema de Quin: en un mecanismo de 1 gdl la contribución que supone la energía cinética del elemento j sobre la energía cinética total no depende de la velocidad del elemento de entrada

$$T_j = \frac{1}{2} m_j v_{G_j}^2 + \frac{1}{2} I_{G_j} \omega_j^2$$

$$\varphi_j = f_j(\varphi_e)$$

$$s_{G_j} = f_{G_j}(\varphi_e)$$

$$\omega_j = g_j(\varphi_e)\,\omega_e$$

$$v_{G_j} = g_{G_j}(\varphi_e)\,\omega_e$$

$$T_j = \frac{1}{2}\omega_e^2 \left(m_j g_{G_j}^2(\varphi_e) + I_{G_j} g_j^2(\varphi_e)\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\omega_e^2 \sum_{i=1}^{N} \left(m_i g_{G_j}^2(\varphi_e) + I_{G_j} g_j^2(\varphi_e)\right)$$

$$\varepsilon_j(\varphi_e) = \frac{T_j}{T} = \frac{m_j g_{G_j}^2(\varphi_e) + I_{G_j} g_j^2(\varphi_e)}{\sum_{i=1}^{N}\left(m_i g_{G_i}^2(\varphi_1) + I_{G_2} g_2^2(\varphi_e)\right)}$$

coeficiente de contribución de energía del elemento (j)

1 Gdl ⇒ acciones solo dependen de la pos ⇒ Redefino el problema

En estas circunstancias el problema sera calcular de la velocidad y aceleración angular cuando la coordenada generalizada tome un valor determinado

$$[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} = T(\varphi_e) - T(\varphi_e^0) \Rightarrow T(\varphi_e) = [W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_0^0)$$

$$T_e(\varphi_e) = \varepsilon_e(\varphi_e)\, T(\varphi_e)$$

$$\frac{1}{2}\omega_e^2\left(m_e\, g_{G_e}^2(\varphi) + I_{Ge}\, g_e^2(\varphi_e)\right) = \varepsilon_e(\varphi_e)\left[[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0)\right]$$

$$g_e(\varphi_e) = \frac{\omega_e}{\omega_e} = 1$$

$$\frac{1}{2}\omega_e^2\left(m_e\, g_{Ge}^2(\varphi_e) + I_{Ge}\right) = \varepsilon_e(\varphi_e)\left[[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0)\right]$$

$$|\omega_e| = \sqrt{\frac{2\varepsilon_e(\varphi_e)\,[[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0)}{m_e\, g_{ge}^2(\varphi_e) + I_{Ge}}}$$

$$g_{ge}(\varphi_1) = \frac{v_{Ge}}{\omega_e} \Rightarrow g_{ge}(\varphi_e) = r_g$$

Suponemos

Elemento de entrada manivela

$$v_{Ge} = \omega_e r_G$$

$$m_e r_G^2 + I_{Ge} = I_e$$

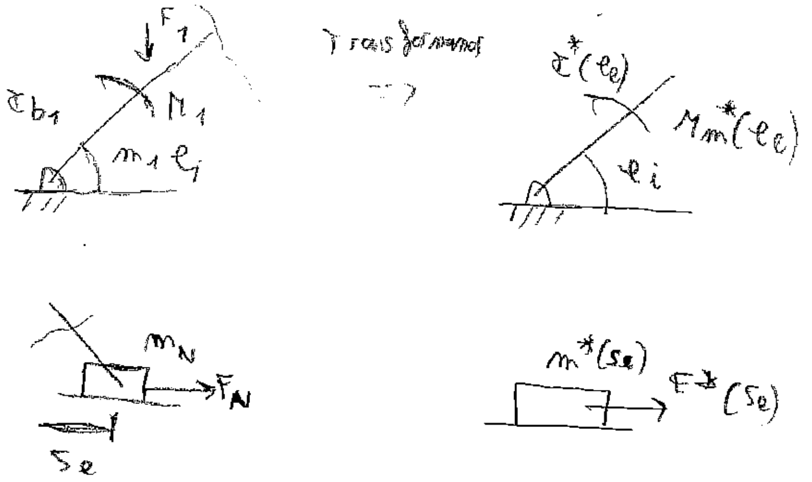
$$|\omega_e| = \sqrt{\frac{2\varepsilon_e(\varphi_e)\,[[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0)}{I_e}}$$

$$\alpha_e = \frac{1}{I_0}\left[\frac{d\varepsilon_e(\varphi_e)}{d\varphi_e}\left([W_{ext})_{\varphi_1^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_1^0)\right) + \varepsilon_e(\varphi_0)\,\frac{d[W_{ext}]_{\varphi_0^0}^{\varphi_e}}{d\varphi_e}\right]$$

Teorema de Zhukovski

Se basa en el teorema de Zhukovski sobre una palanca rígida:

Elegido un elemento cualquiera de un mecanismo de un grado de libertad que tenga CIR fijo, al que se le denomina elemento de reducción, como por ejemplo una manivela o una corredera, se puede tomar ese elemento aisladamente como representativo de ese mecanismo, dotándole de una inercia (o una masa) equivalente y aplicándole un momento (o una fuerza) equivalente, de forma que el movimiento del elemento sea el mismo tanto aisladamente como perteneciendo al mecanismo.



$I^*(\varphi_e)$ → Inercia Reducida

$M^*(\varphi_e)$ → Momento reducido o generalizado

$m^*(s_e)$ → Masa reducida

$F^*(s_e)$ → Fuerza reducida o generalizada

Criterios de equivalencia

1- El trabajo realizado por las acciones exteriores en ambos mecanismos es el mismo (En términos de potencia → saca $M^*(\varphi)$ o $F^*(s$

2- La E. cinética almacenada por ambos mecanismos es la misma (sacamos o $I^*(\varphi_e)$ o $m^*(s_e)$)

Manivela

$$M^*(\varphi_e)\,\omega_e = \sum_j \vec{F_j}\,\vec{v_{gj}} + \sum_j M_j\,\omega_j = \omega_e\left(\sum_j F_j \cos\alpha_{gj}\, g_{gj} + \sum_j M_j\, g_j\right) \Rightarrow$$

$$v_{gj} = g_{gj}\,\omega_e$$

$$\omega_j = g_j\,\omega_e$$

$$\Rightarrow \sum_j F_j \cos\alpha_{ji}\, g_{gi} + \sum_j M_j\, g_j$$

$$\frac{1}{2} I^*(\varphi_e)\,\omega_e^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{N} m_i v_{Gi}^2 + \sum_{i=2}^{N} I_{Gi}\,\omega_i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega_e^2 \sum_{i=2}^{N} \left(m_i g_{Gi}^2 + I_{Gi}\, g_i^2\right)$$

$$\boxed{I^*(\varphi_e) = \sum_{i=2}^{N} m_i g_{Gi}^2 + I_{Gi}\, g_i^2)}$$

Teorema de la energia

$$\int_{\varphi_e^0}^{\varphi} M^*(\varphi_e)\,d\varphi_e = \frac{1}{2} I^*(\varphi_e)\,\omega_e^2 - 1/2\, I^*(\varphi_e^0)(\omega_e^0)^2$$

$$|\omega_e| = \sqrt{\frac{2\int_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} M^*(\varphi_e)\,d\varphi_e + I^*(\varphi_e^0)(\omega_e^0)^2}{I^*(\varphi_e)}}$$

Potencia

$$M^*(\varphi_e)\,\cancel{\omega_e} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} I^*(\varphi_e)\,\omega_e^2\right] = \frac{1}{2}\frac{dI^*(\varphi_e)}{d\varphi_e}\,\omega_e^{\overset{2}{\cancel{3}}} + I^*(\varphi_e)\,\cancel{\omega_e}$$

$$\alpha_e = \frac{M^*(\varphi_e) - 1/2\,\frac{dI^*(\varphi_e)}{d\varphi_e}\,\omega_e^2}{I^*(\varphi_e)}$$

Determinación de las funciones cinemáticas en función del tiempo

$$v(\ell_e) = \frac{d\ell_e}{dt}$$

$$dt = \frac{d\ell_e}{v(\ell_e)}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{\ell_e^0}^{\ell_e} \frac{d\ell_e}{v(\ell_e)}$$

$$t = t_0 + \int_{\ell_e^0}^{\ell_e} \frac{d\ell_e}{v(\ell_e)}$$

TEMA 4

VOLANTES DE INERCIA

$w(\varphi) = w(\varphi + \lambda)$

λ → Periodo

w → velocidad angular en el eje de entrada

φ → posición

$\lambda = 2\pi$

$\lambda = 4\pi$

Regimen → $\int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} M^*(\varphi)\, d\varphi = 0$

ciclo ≠ uniforme

$w_a = \frac{1}{2}(w_{max} + w_{min})$
velocidad media

Grado de irregularidad $\varepsilon = \frac{w_{max} - w_{min}}{w_a}$

} datos conocidos en el diseño del volante

Efecto del volante de inercia

Elemento pasivo que tiene gran inercia → gran capacidad de almacenamiento de Energía. Objetivo disminución en las fluctuaciones de la velocidad angular de un eje de una maquina durante un ciclo de movimiento, se monta solidario al eje o a uno de los ejes de la máquina. cuando los esfuerzos motores son mayores a los resistentes, el volante acumula energía cinetica sin que se incremente de forma notable la velocidad de giro. Pero cuando las fuerzas resistentes aumentan hasta superar las motoras, el momento de inercia libera energía sin que disminuya su velocidad de forma notable.

$$\Delta \omega_1^2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$I \uparrow \quad \omega_2 - \omega_1 \to 0$

$I \downarrow \quad \omega_2 - \omega_1 \uparrow$

En las máquinas alternativas $I^*(\varphi)$ y $M^*(\varphi)$ suelen variar fuertemente con la posición => gran irregularidad (ε) =>

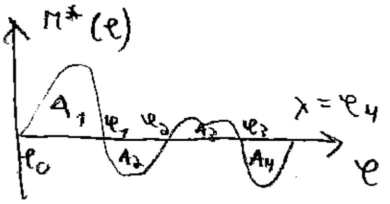
=> necesaria la utilización de volantes de inercia

Cálculo aproximado del volante

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}(I + I^*(\varphi))\,\omega^2 - \frac{1}{2}(I + I^*(\varphi_0))\,\omega_0^2$$

$I \gg I^*(\varphi)$

$$\int_{\varphi}^{\varphi} M^*(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_0^2)$$



$$\int_0^{\lambda} M^*(\varphi)\, d\varphi = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M^*(\varphi)\, d\varphi = A_1 = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2) \quad \geq 0 \quad \omega_1 = \omega(\varphi_1)$ es Max rel

$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^*(\varphi)\, d\varphi = A_2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad < 0 \quad \omega_2 = \omega(\varphi_2)$ es un Min rel

$\int_{\varphi_2}^{\varphi_3} M^*(\varphi)\, d\varphi = A_3 = \frac{1}{2} I (\omega_3^2 - \omega_2^2) \quad > 0 \quad \omega_3 = \omega(\varphi_3)$ es un Max rel

$\int_{\varphi_3}^{\lambda} M^*(\varphi)\, d\varphi = A_4 = \frac{1}{2} I (\omega_0^2 - \omega_3^2) \quad \omega_H = \omega(\varphi_1) = \omega(\varphi_0) = \omega_0$ Min re

$$S_1 = A_1 = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2)$$

$$S_2 = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} I (\omega_2 - \omega_0^2)$$

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot I (\omega_3^2 - \omega_0^2)$$

$$S_4 = 0$$

S_{max}

S_{min}

$\omega_{max} \rightarrow S_{max}$

$\omega_{min} \rightarrow S_{min}$

$$S_{max} - S_{min} = \frac{1}{2} I (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2)$$

$$S_{max} - S_{min} = \frac{1}{2} I (\omega_{max} + \omega_{min})(\omega_{max} - \omega_{min})$$

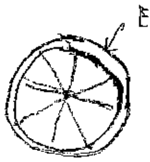
$$S_{max} - S_{min} = \cancel{\frac{1}{2}} I \cancel{2} \omega_a^2 \cdot \varepsilon \qquad S_{max} - S_{min} = I \omega_a^2 \varepsilon$$

$$I = \frac{S_{max} - S_{min}}{\varepsilon \omega_a^2}$$

Dimensionamiento del volante

PD^2 = Factor de inercia

Peso ↗ ↖ Diámetro

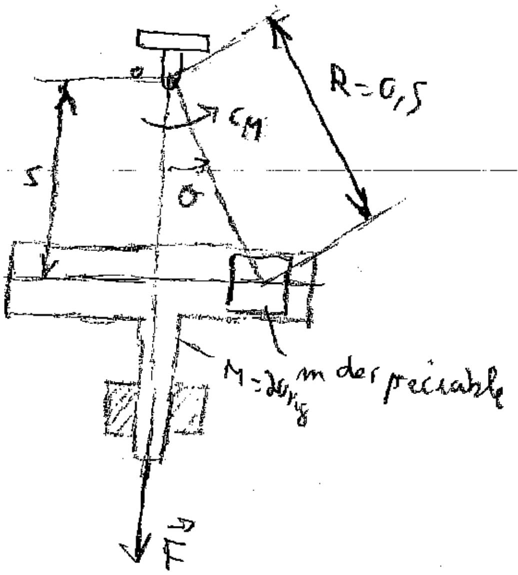


Es un aro

Aro $I = M \frac{D^2}{4} = \frac{P}{g} \frac{D^2}{4} \Rightarrow PD^2 = 4gI$

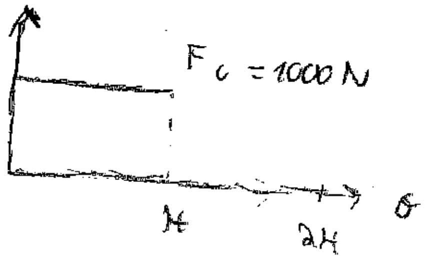
Disco $I = \frac{1}{2} M \frac{D^2}{4} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \frac{D^2}{4} \Rightarrow PD^2 = 8gI$

Problema 1



$n_a = 60$ rpm

$\omega_a = 2\pi \cdot \frac{60}{60} = 2\pi$ rad/s



1) $g_s(\theta) = \frac{ds}{d\theta}$

$s = R\cos\theta \rightarrow \frac{ds}{d\theta} = -R \operatorname{sen}\theta = -0{,}5 \operatorname{sen}\theta$

2) $I^*(\theta)$

$\cancel{\frac{1}{2}} I^*(\theta)\dot{\theta}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} M\dot{s}^2 \Rightarrow I^*(\theta) = M\left(\frac{\dot{s}}{\dot{\theta}}\right)^2 = M g_s(\theta)^2 = 20 \cdot 0{,}5^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = 5\operatorname{sen}^2\theta$

Elemento aislado

$$\boxed{I^*(\theta) = 5\operatorname{sen}^2\theta}$$

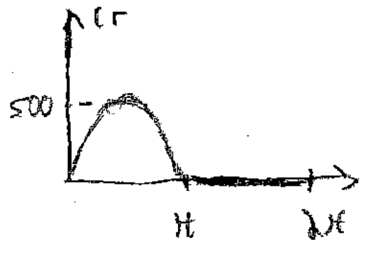
3) $C_r^*(\theta)$

El menos es porque Cr tiene el sentido contrario a $\dot{\theta}$ (Cr se opone al movimiento, esto es a θ)

$-C_r^*(\theta)\cdot\dot{\theta} = F\cdot\dot{s} \rightarrow -C_r^*(\theta)\dot{\theta} = -FR\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$

Potencia resistente

$C_r^* = FR\operatorname{sen}\theta$



$$C_r^* \underset{\uparrow}{=} \begin{cases} 1000 \cdot 0{,}5 \operatorname{sen}\theta & 0<\theta<\pi \\ 0 & \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

Debido a lo que vale F

Tema 4

4) C_m

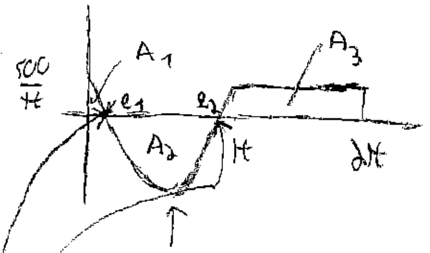
por ser cíclico (ni gana ni pierde)

$$\int_0^{2\pi} (C_m - C_r^*)\, d\theta = 0$$

$$C_m\, 2\pi - \int_0^{\pi} 500 \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0$$

$$C_m = \frac{\int_0^{\pi} 500 \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = \frac{500}{\pi} \ \text{N·m}$$

5) $M^*\theta = C_m - C_r^*(\theta)$



$$\frac{500}{\pi} - 500 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \to 500\left(\frac{1}{\pi} - 1\right)$$

$$\frac{500}{\pi} - 500 \operatorname{sen}\theta = 0 \iff \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \theta = 0{,}103\,\pi$$

$$\pi - 0{,}103\,\pi = 0{,}897\,\pi$$

$e_1 = 0{,}103\,\pi$

$e_2 = 0{,}897\,\pi$

6) $$I = \frac{S_{Max} - S_{min}}{\varepsilon\, \omega_a^2}$$

$$A_1 = \int_0^{0{,}103\pi} \left(\frac{500}{\pi} - 500 \operatorname{sen}\theta\right) d\theta = 25{,}55 \ \text{N·m}$$

$$A_2 = \int_{0{,}103\pi}^{0{,}897\pi} \left(\frac{500}{\pi} - 500 \operatorname{sen}\theta\right) d\theta = -551{,}1 \ \text{N·m}$$

$$A_3 = A_1 + \pi \cdot \frac{500}{\pi} = 525{,}55 \ \text{N·m}$$

$S_1 = A_1 = 25{,}55$ N·m

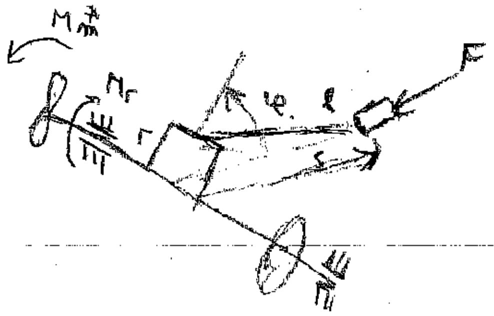
$S_2 = A_1 + A_2 = -525{,}55$ N·m

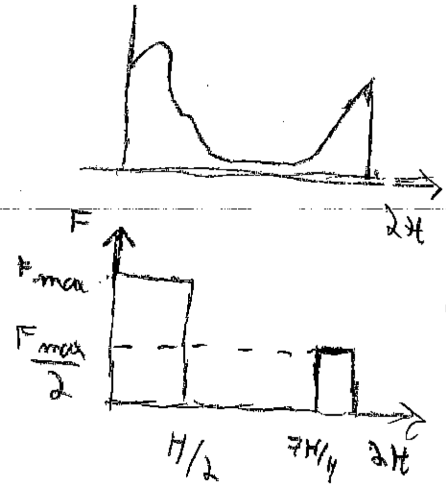
$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 0$

$$I = \frac{25{,}55 + 525{,}55}{0{,}04\,(2\pi)^2} = 348{,}99 \ \text{Kg}$$

$$\frac{\text{N·m}}{s^2} = \frac{\text{Kg m s}^{-2}\,\text{m}}{s^2}$$

Problema 2





$n_a = 200$ rpm
$\varepsilon = 0{,}04$

1) $$\frac{ds}{d\varphi} = -r \operatorname{sen}\varphi + \frac{l}{2}\frac{\left[\frac{-r^2}{l^2}\operatorname{sen}(2\varphi)\right]}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

$$\vec{r} - \vec{l} - \vec{s} = 0$$
$$r \operatorname{sen}\varphi = l \operatorname{sen}\psi \rightarrow \operatorname{sen}\psi = \frac{r}{l}\operatorname{sen}\varphi \rightarrow \cos\psi = \sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\varphi}$$
$$r\cos\varphi + l\cos\psi = s$$

$$r\cos\varphi + l\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\varphi} = s$$

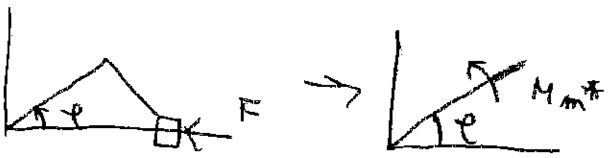
$$\frac{ds}{d\varphi} = -r\operatorname{sen}\varphi + l\,\frac{\frac{-r^2}{l^2}2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{2\sqrt{1-\frac{r^2}{d^2}\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \overset{T_1}{-r\operatorname{sen}\varphi} + \overset{T_2}{\frac{l}{2}\frac{\left[\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}2\varphi\right]}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\varphi}}}$$

2) $r = 0{,}6$ m $\quad \frac{r}{l} = 0{,}15 \cdot \varphi = \frac{\pi}{4}$
$l = 4$ m

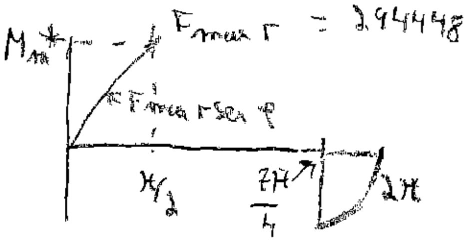
$$error = \frac{|T_2|}{|T_1|+|T_2|}\cdot 100 = 9{,}63\,\%$$
$T_2 = -0{,}04525$
$T_1 = -0{,}4243$

3) $M_m^* = f(\varphi, F_{max})$



$$Pot = -F\frac{ds}{dt} \qquad Pot = M_m^* \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$-F\frac{ds}{dt} = M_m^* \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow M_m^* = -F\frac{ds}{d\varphi} = F_r \operatorname{sen}\varphi$$

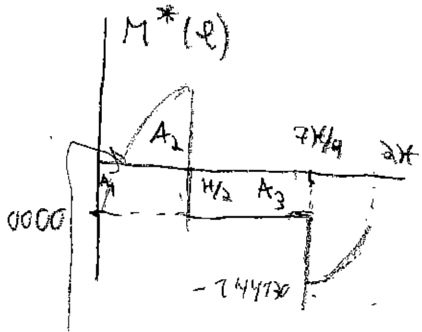


4) $M_r = 40000$ N m

$$\int_0^{2\pi} (M_m^* - M_r)\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (M_m^*)\, d\varphi - 40000 \cdot 2\pi = 0 \Rightarrow F_{max}\, r \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi + \frac{F_{max}}{2}\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 40000$$

$F_{max} = 490\,746{,}67$ N.



$$M_m^* - M_r \begin{cases} F_{max}\, r \operatorname{sen}\varphi - 40000 & 0 < \varphi < \pi/2 \\ -40000 & \pi/2 < \varphi < \frac{7\pi}{4} \\ \frac{F_{max}}{2}\, r \operatorname{sen}\varphi - 40000 & \frac{7\pi}{4} < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Para sacar este punto

$$490746{,}67 \cdot 0{,}6 \operatorname{sen}\varphi - 40000 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{40000}{490746{,}67 \cdot 0{,}6} \Rightarrow \begin{matrix}\varphi = 0{,}04337\pi \\ \varphi = 7{,}8067^\circ\end{matrix}$$

$$I = \frac{S_{max} - S_{min}}{W_a^2 \, \varepsilon}$$

$$A_1 = \int_0^{0,04337\pi} (490746,67 \cdot 0,6 \cdot \text{sen}\, \varphi - 40000) \, d\varphi = -2719,52 \text{ Nm}$$

$$A_2 = \int_{0,04337\pi}^{\pi/2} (490746,67 \cdot 0,6 \,\text{sen}\, \varphi - 40000) \, d\varphi = 234336,74 \text{ Nm}$$

$S_1 = A_1 = -2719,52$

$S_2 = 231617'22$ Nm

$S_3 = 0$

$$I = \frac{S_{max} - S_{min}}{W_a^2 \varepsilon} = \frac{231617,22 + 2719,52}{\left(200 \cdot \frac{2\pi}{60}\right)^2 0,04} = 13355,6 \text{ Kg m}^2$$

CINEMATICA Y DINÁMICA DE MAQUINAS

ESPECIALIDAD: ORGANIZACION INDUSTRIAL Y TECNICAS ENERGETICAS

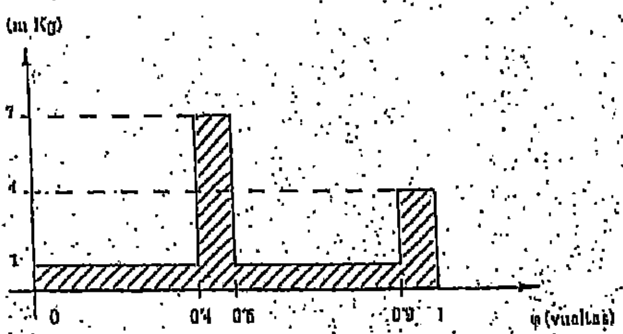
EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE 2-9-1993

PROBLEMA:

En una máquina alternativa en régimen permanente el par resistente varía como se indica en la figura, siendo el par motor constante. La máquina gira a 1200 rpm. Se pide:

1.- Valor del par motor. (2 p)
2.- Potencia del motor en CV. (2 p)
3.- Hallar el grado de irregularidad con que gira la máquina, si su factor de inercia propio es de 20 Kg m^2. (4 p)
4.- Calcular los valores máximo y mínimo de la velocidad, y señalar sobre el diagrama de momentos reducidos el instante en que se produce cada uno de ellos. (2 p)

1cv = 735 W



TIEMPO: 30 MINUTOS.
PESO SOBRE EL CONJUNTO DEL EXAMEN: 10%.

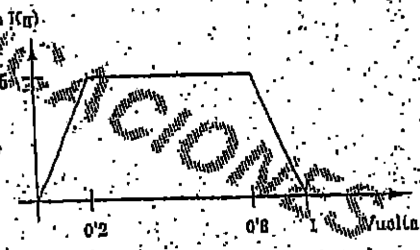
CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE MAQUINAS

ESPECIALIDAD: ELÉCTRICA
EXAMEN SEGUNDO PARCIAL 9-6-1995

PRIMER PROBLEMA:

En una máquina alternativa en régimen permanente, el par resistente varía como se indica en la figura, siendo el par motor constante. La máquina gira a una velocidad angular de 1200 rpm.

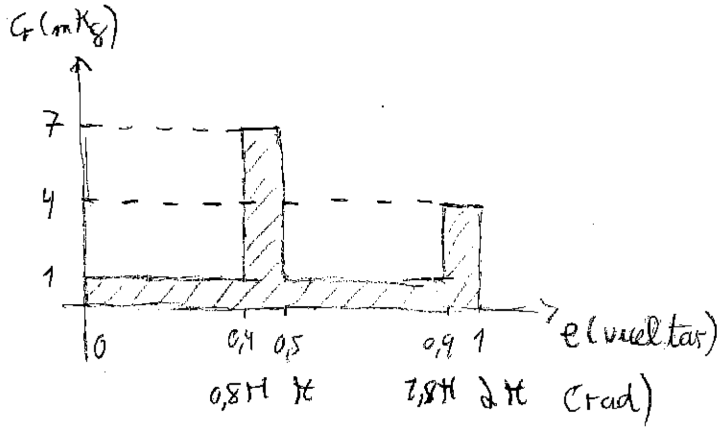
1. Hallar el valor del par motor. (2 p)
2. Hallar la potencia del motor en C.V. y en Kw (1 p)
3. Se necesita un grado de irregularidad de 1/500. Hallar el factor de inercia PD^2 del volante que es necesario añadir, si el factor de inercia propio de la máquina es de 12 Kg m^2. (4 p)
4. Calcular las velocidades máxima y mínima, y señalar su situación sobre el diagrama de momentos reducidos. (1 p)
5. Proyectar el volante en acero moldeado, capaz de proporcionar ese factor de inercia, teniendo en cuenta que por limitaciones de espacio el diámetro máximo del volante es de 0'6 m. Se sabe que la resistencia a tracción es σ_t = 1400 Kg/cm^2 y que el peso específico es γ = 7800 Kg/m^3. Tomar un coeficiente de seguridad de 2'5. (2 p)



TIEMPO: 20 MINUTOS
PESO SOBRE EL CONJUNTO DEL EXAMEN: 15%

EJEMPLAR GRATUITO PUBLICACIONES

Problema : Cinemática y dinámica de máquinas



$n_a = 1200$ rpm

C_M

1) $$\int_0^{2\pi} (C_M - C_r)\, d\varphi = 0$$

$$C_M 2\pi - \int_0^{2\pi} C_r\, d\varphi = 0 \Rightarrow C_M = \frac{\int_0^{2\pi} C_r\, d\varphi}{2\pi} = (0{,}8\pi \cdot 1 + 7 \cdot 0{,}2\pi + 0{,}8\pi \cdot 1 + 0{,}2\pi \cdot 4) / 2\pi$$

$$= 1{,}9 \text{ Kg m} \Rightarrow 1{,}9 \cdot 9{,}8 = 18{,}62 \text{ N} \cdot \text{m}$$

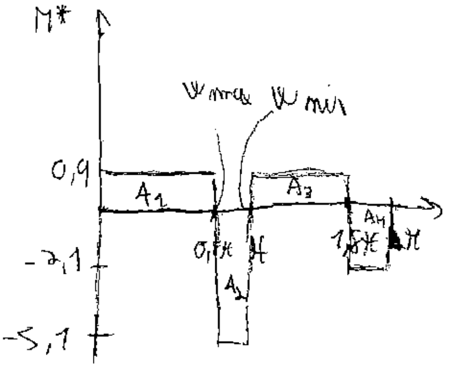
2) $$Pot = C_m \omega_a = 18{,}62 \text{ N.m} \cdot 1200 \cdot \frac{2\pi}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2340 \text{ W} \rightarrow$$

$$\rightarrow Pot(cv) = \frac{2340}{735} = 3{,}18$$

3) $$PD^2 = 20 \text{ Kg m}^2 = 196 \text{ N m}^2 = 4 g I$$

$$\frac{196}{4 \cdot 9{,}8} = I \rightarrow I = \frac{20}{4} \Rightarrow I = 5 \text{ N m}^2$$

$$I = \frac{S_{max} - S_{min}}{\omega_a^2 \cdot \varepsilon}$$



$C_M = 1{,}9$ Kg m

$A_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}8\pi = 0{,}72\pi$ Kgm

$A_2 = -5{,}1 \cdot 0{,}2\pi = -1{,}02\pi$ Kgm

$A_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot \pi = 0{,}72\pi$ Kgm

$A_4 = \ldots$

$S_1 = 0{,}72\pi$ Kgm

$S_2 = -0{,}3\pi$ Kgm

$S_3 = 0{,}42\pi$ Kgm

$S_4 = 0$

$$\varepsilon = \frac{(0{,}72\pi + 0{,}3\pi) \cdot 9{,}8}{5 \cdot (40\pi)^2} \simeq 4 \cdot 10^{-4}$$

4) $$\left.\begin{aligned} \omega_a &= \frac{\omega_M + \omega_{min}}{2} \\ \varepsilon &= \frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_a} \end{aligned}\right\}$$

$\omega_{max} = 1200{,}24$ rpm

$\omega_{min} = 1199{,}76$ rpm

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA
INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.
3° Ingeniería Industrial. Abril 2005.
Unidad Temática B.
Peso: 25 %.
Ejercicio 1. Tiempo:75min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2005.-eko Apirila.
B Atal-Tematikoa.
Pisua: 25 %.
1go Ariketa. Iraupena: 75min.

NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:
GRUPO / TALDEA:

En la figura 1 se presenta el esquema del mecanismo de una máquina de compactación. Dicha máquina es accionada por un motor eléctrico rotativo continuo de par constante acoplado en la manivela. El proceso de compactación genera una fuerza resistente sobre el pisón (F) que se puede modelizar aproximadamente tal y como se representa en la figura 2. Se necesita que el mecanismo realice, en régimen estacionario, 100 ciclos de prensado por minuto girando a velocidad constante con un grado de irregularidad máximo admitido de 0,08. Se pide:

Diseñar completamente el volante de inercia (determinar su masa y radio) que debe acoplarse a la manivela teniendo en cuenta que, debido al material utilizado, la velocidad en la periferia del disco nunca debe superar los 12m/s. Considerar que el volante tiene forma de disco macizo.

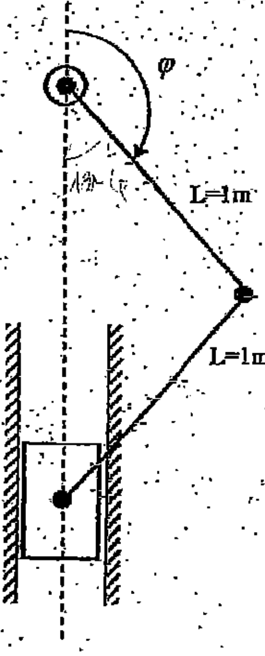


Figura 1.

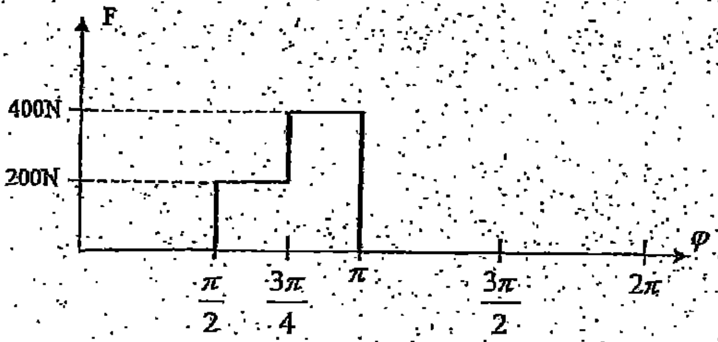
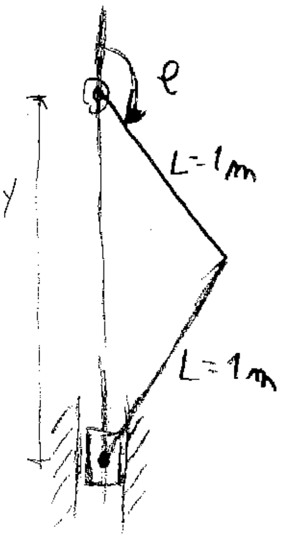
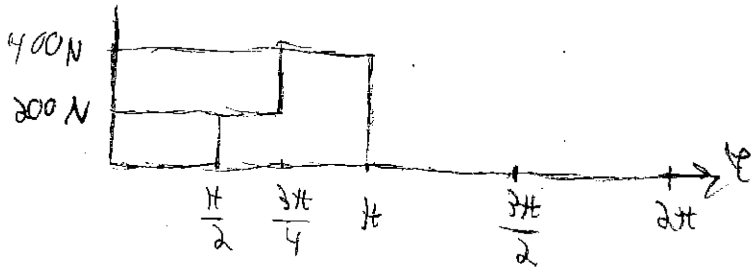


Figura 2.

Examen Abril 2005





$C_M = cte$

$n_a = 100$ rpm

$\varepsilon = 0,08$

$V_{p_{max}} = 12\ m/s$

disco macizo

$$V_{max} = w_a R_{max} \rightarrow 12 = \frac{100}{60} \cdot 2\pi \ R_{max} \rightarrow R_{max} = 1,15\, m$$

$$PD^2 = 8\cancel{g} I \Rightarrow M\cancel{g}\ R_{max}^2 4 = 8g I$$

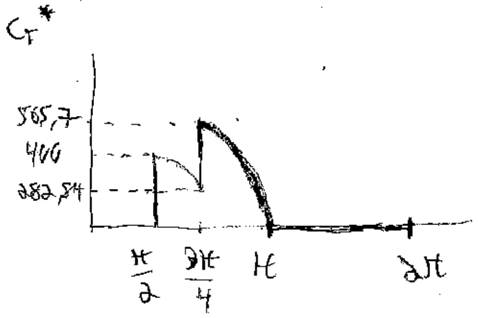
$$M = 32 \cdot I / R_{max}^2$$

$$C_r^* \dot{\varphi} = F \cdot \dot{y}$$

$$y = 2L \cos(180 - \varphi)$$

$$y = -2L\cos\varphi \rightarrow \dot{y} = 2L\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi$$

$$C_r^* \dot{\varphi} = F 2L \dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi \Rightarrow C_r^* = F 2L\,\text{sen}\,\varphi \Leftrightarrow C_r^* = 2F\,\text{sen}\,\varphi$$



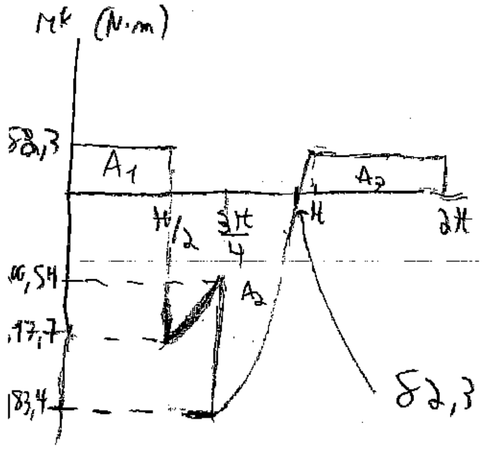
$$C_r^* \begin{cases} 0 & 0 < \varphi < \pi/2 \\ 400\,\text{sen}\,\varphi & \pi/2 < \varphi < 3\pi/4 \\ 500\,\text{sen}\,\varphi & \frac{3\pi}{4} < \varphi < \pi \\ 0 & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} (C_M - C_r^*)\, d\varphi = 0 \rightarrow C_M 2\pi - \int_0^{2\pi} C_r^* d\varphi = 0$$

$$C_M = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{4}} 400\,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} 800\,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi\right]$$

$$C_M = \frac{1}{2\pi}\left[400\left(\cos\pi/2 - \cos\frac{3\pi}{4}\right) + 800\left[\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\pi\right]\right] = 82,3\ Nm$$

$M^* = C_M - C_r^*$



Esto da la calculadora ↓

Para que de en el 2º cuadrante

$82,3 - 800 \operatorname{sen} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0,1$ rad ↳ $\pi - 0,1 = 3,04$ rad

$A_1 = \frac{\pi}{2} 82,3 = 129,28$ Nm

$A_3 = \pi \cdot 82,3 + \int_{3,04}^{\pi} 800 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = 258,63$ Nm

$A_2 = -(A_1 + A_3) = -387,83$ Nm

$S_1 = 129,28$

$S_2 = -387,83 + 129,28 = -258,63$

$S_3 = 0$

$$I = \frac{129,28 + 258,63}{0,08 \cdot \left(\frac{100}{60} 2\pi\right)^2} = 44,2 \text{ Kg m}^2$$

$$M = \frac{2 \cdot 44,2}{(1,15)^2} = 68 \text{ Kg}$$

DEPARTAMENTO DE
INGENIERIA MECANICA

MEKANIKA
INGENIARITZA SAILA

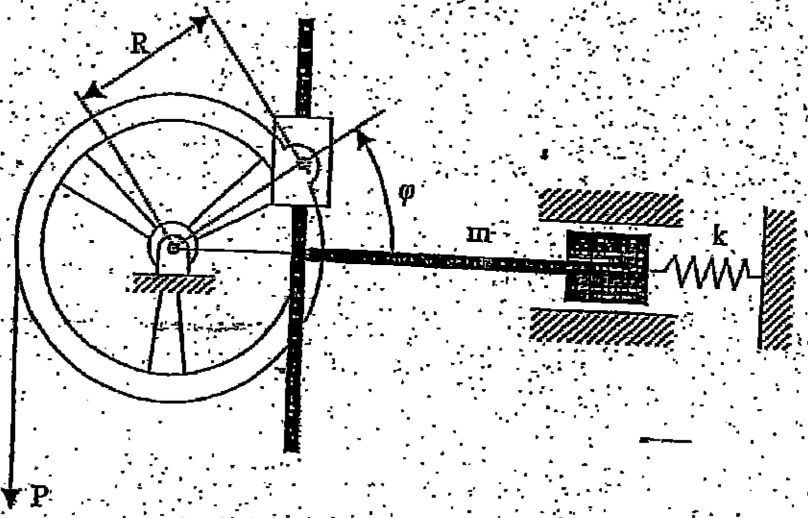
TEORÍA DE MECANISMOS Y MÁQUINAS.

3° Ingeniería Industrial. Septiembre 2000.

Ejercicio 2. Peso sobre el conjunto del examen: 30 %. Tiempo: 40min.

A) Sea el mecanismo de yugo escocés de la figura. El momento del volante de inercia es I y la masa del elemento deslizante m. Se aplica un peso P a la cuerda enrollada en el volante de manera que deforma un muelle de rigidez k que se encuentra sin tensión cuando $\varphi = 0$. Se pide:

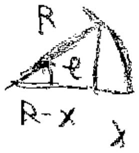
1. La inercia generalizada $I^*(\varphi)$.
2. El momento reducido $M^*(\varphi)$.
3. La ecuación generalizada del movimiento.



B) Sea una máquina rotativa con una inercia reducida I^*. Demostrar que al añadir un volante con una inercia $I >> I^*$ la fluctuación de la velocidad angular ω se reduce.

Septiembre 2000

1) $\frac{1}{2}\mathcal{I}^*(\varphi)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$



$R\cos\varphi = R - x \Rightarrow x = R(1-\cos\varphi)$

$\dot{x} = +R\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi$

$\mathcal{I}^*(\varphi) = \mathcal{I} + mR^2\,\text{sen}^2\varphi$

2) $P\dot{\varphi}R - Kx\dot{x} = M^*\dot{\varphi}$

$P\dot{\varphi}R - KR(1-\cos\varphi)R\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi = M^*\dot{\varphi}$

$M = [P - KR(1-\cos\varphi)\,\text{sen}\,\varphi]R$

$\frac{d\mathcal{I}^*}{d\varphi}$

3) $M^* = \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{I}^*}{d\varphi}\omega^2 + \alpha\mathcal{I}^*$

$(P - KR(1-\cos\varphi)\,\text{sen}\,\varphi]R' = \frac{1}{2}2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,MR^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}'(\mathcal{I} + MR^2\,\text{sen}^*\varphi)$

$[P - KR(1-\cos\varphi)\,\text{sen}\,\varphi]R = MR^2\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi + \ddot{\varphi}(\mathcal{I} + MR^2\,\text{sen}^2\varphi)]$

3. APLICACIÓN A UN MOTOR ALTERNATIVO DE COMBUSTIÓN INTERNA

La siguiente figura representa un motor de combustión interna cuyo esqueleto cinemático es un mecanismo de biela-manivela. En ella se representa el sistema de referencia, las variables angulares θ y φ y la variable lineal s con su sentido positivo. Asimismo se representan los parámetros geométricos del motor.

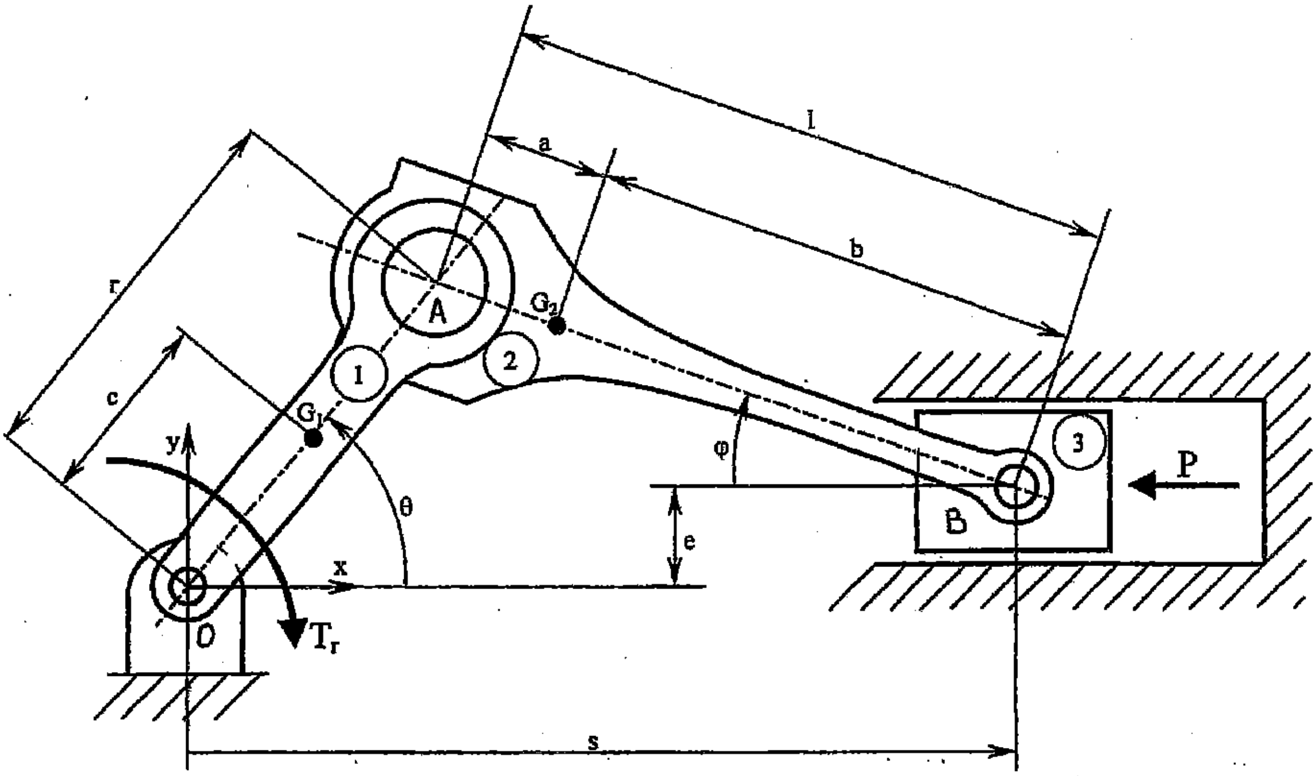


Figura 1: Mecanismo biela-manivela.

Las características másicas conocidas son:

- Manivela: m_1, I_1 (respecto de su centro de gravedad G_1)
- Biela: m_2, I_2 (respecto de su centro de gravedad G_2)
- Pistón: m_3

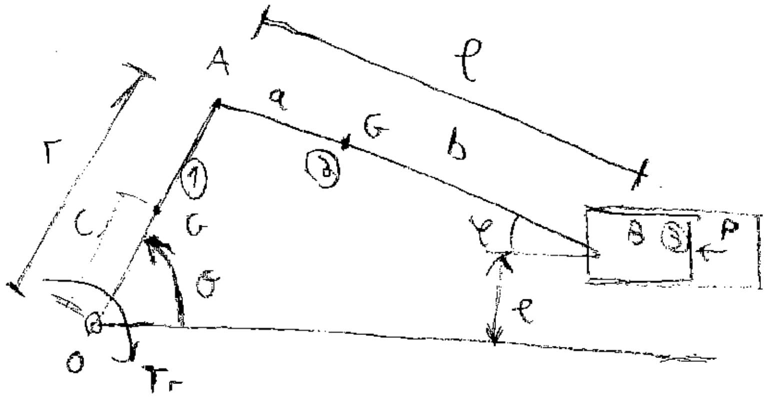
P es la fuerza del gas en el interior del pistón

T_r es el par resistente en el cigüeñal cte

El modelo de biela utilizado cumple muy aproximadamente la condición: $I_2 = m_2\, a\, b$

Se pide lo siguiente:

1) Coeficientes de influencia (suponer θ la coordenada generalizada).
2) Inercia reducida a la manivela en el punto fijo.
3) Momento de fuerzas reducido a la manivela.
4) Ecuación generalizada del movimiento.



m_1, I_1

m_2, I_2 $\quad I_2 = m_2 ab$

m_3

P

$T_r = cte$

$$g_2(\sigma) = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \rightarrow g_2(\sigma = \frac{\dot\varphi}{\dot\sigma}$$

$$h_2(\sigma) = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma^2}$$

$$\bar{g}_3(\sigma) = \frac{\partial s}{\partial \sigma} =$$

$$\bar{h}_3(\sigma) = \frac{d^2 s}{d\sigma^2}$$

$$r\,\text{sen}\,\sigma = e + \ell\,\text{sen}\,\varphi \xRightarrow{\text{derivando}} r\cos\sigma = \ell\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{d\sigma} \Rightarrow g_2(\sigma) = \frac{r\cos\sigma}{\ell\cos\varphi}$$

$$h_2(\sigma) = \frac{-r\,\text{sen}\,\sigma\;\ell\cos\varphi + r\cos\sigma\;\ell\,\text{sen}\,\varphi\,\frac{d\varphi}{d\sigma}}{\ell^2\cos^2\varphi} =$$

$$= -\frac{r}{\ell}\,\frac{\text{sen}\,\sigma}{\cos\varphi} + \frac{r}{\ell}\,\frac{\cos\sigma\;\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi\;\cos\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\sigma} = -\frac{r}{\ell}\,\frac{\text{sen}\,\sigma}{\cos\varphi} + g_2^2\,\sigma\,\text{tg}\,\varphi$$

$$s = r\cos\sigma + \ell\cos\varphi \Rightarrow \frac{ds}{d\sigma} = -r\,\text{sen}\,\sigma - \ell\,\text{sen}\,\varphi\,\frac{d\varphi}{d\sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\sigma} = \left[-r\,\text{sen}\,\sigma - \ell\,g_2(\sigma)\,\text{sen}\,\varphi = \bar{g}_3(\sigma)\right]$$

$$\frac{d^2 s}{d\sigma^2} = -r\cos\sigma - \ell\,[\cos\varphi\,g_2^2(\sigma) + \text{sen}\,\varphi\,h_2(\sigma) = \bar{h}_3(\sigma)$$

2) $\frac{1}{2} I^*(\sigma)\dot{\sigma}^2 = T_1 + T_2 + T_3$

$T_1 = \frac{1}{2} I_0^1 \dot{\sigma}^2 = \frac{1}{2}(J_1 + m_1 c^2)\dot{\sigma}^2$

$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{s}^2 \qquad \dot{s} = \bar{g}_3 \dot{\sigma}$

$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \bar{g}_3^2 \dot{\sigma}^2$

$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_G^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 =$

Reducir la barra a un sistema de tres masas (en A, B y G)

$m_A + m_B + m_G = m_2$

$-m_A a + m_B b = 0 \longrightarrow m_B = m_A \frac{a}{b}$

$m_A a^2 + m_B b^2 = m_2 ab \longrightarrow m_A a^{2} + m_A ab = m_2 ab$

$m_A = m_2 \frac{b}{l}$

$m_B = m_2 \frac{a}{l}$

$m_G = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} m_A r^2 \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{b}{l} r^2 + \frac{a}{l} \bar{g}_3^2\right)\dot{\sigma}^2$

$\frac{1}{2} I^*(\sigma)\dot{\sigma}^2 = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} I^*(\sigma)\dot{\sigma}^2 =$

$= \frac{1}{2} I_0^1 \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{l}(br^2 + a\bar{g}_3^2)\dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} m_3 \bar{g}_3^2 \dot{\sigma}^2$

3)

$\vec{P} = -P\hat{\imath} \quad | \quad \vec{T_r} = -T_r \hat{k}$

$\dot{\vec{s}} = \dot{s}\hat{\imath} \quad | \quad \vec{\omega}_e = \dot{\sigma}\hat{k}$

$M^*(\sigma)\dot{\sigma} = -P\dot{s} - T_r\dot{\sigma} = -P\bar{g}_3\dot{\sigma} - T_r\dot{\sigma}$

$$\boxed{M^*(\sigma) = -P\bar{g}_3 - T_r}$$

4) $\dot{\sigma} = \dfrac{M^*(\sigma) - \frac{1}{2}\dot{\sigma}\frac{dI^*}{d\sigma}(\sigma)}{I^*(\sigma)}$ así que hacemos $\rightarrow$

complicadísimo 0.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial. Marzo 2007.
Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio. 2 Tiempo: 75 min.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2007.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 2 Iraupena: 75 min.

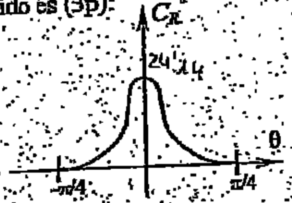
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

Sea el "mecanismo de ginebra" de la figura 1, que se utiliza para suministrar movimiento intermitente a un alimentador de piezas. Tanto el par motor (aplicado en la rueda 2) como el par resistente (soportado por la rueda 3) son constantes. El valor de dicho par resistente (que ha de vencerse para que la rueda 3 pueda moverse) vale C_R=10 Nm. Tomando como elemento de reducción la rueda 2, la variable θ como parámetro (ver figura 2), y suponiendo despreciable la inercia de los elementos 2 y 3, se pide lo siguiente:

1. Comprobar que, en ausencia de rozamiento, la expresión del par resistente reducido es (3p):

$$C_R^* = \begin{cases} 10\left(\dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{3-2\sqrt{2}\cos\theta}\right) & -\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$



2. Calcular el par motor constante que ha de suministrar un motor eléctrico acoplado a la rueda 2. (2p)
3. Calcular la inercia del volante que ha de acoplarse para que el grado de irregularidad sea menor que ε=0,05, con una velocidad de régimen para el elemento 2 de n_2=240 rpm. (5p)

Nota:

$$\int\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta-1}{3-2\sqrt{2}\cos\theta}\right)d\theta = \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3-2\sqrt{2}}\right)-\frac{\theta}{2}$$

M+K(φ) grafikoa
bete (0-2π)ca?

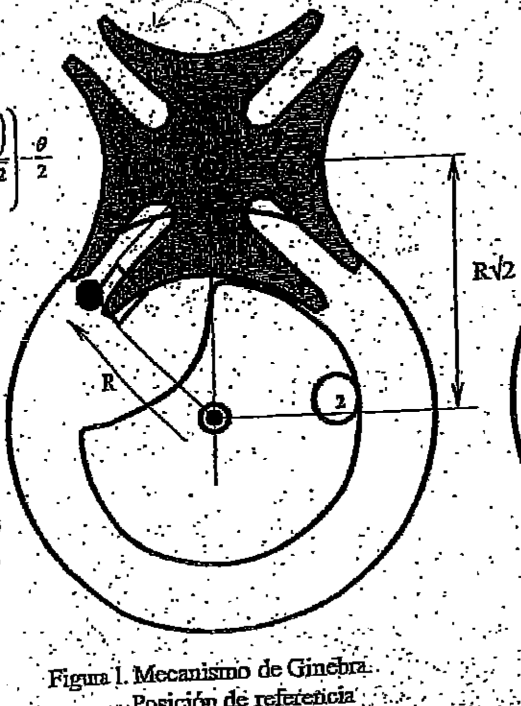


Figura 1. Mecanismo de Ginebra.
Posición de referencia

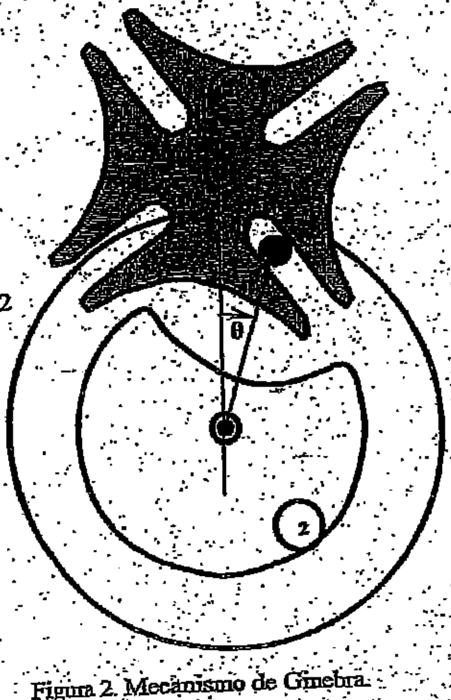
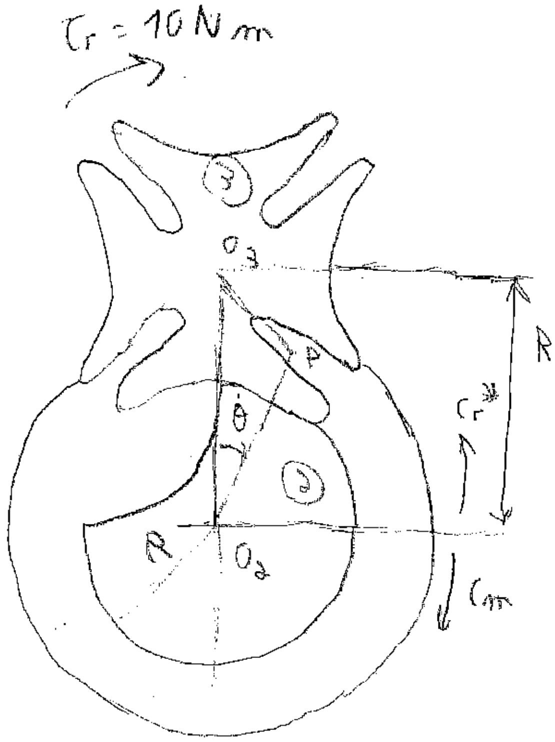
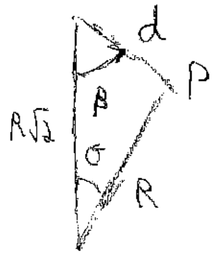


Figura 2. Mecanismo de Ginebra.
Posición genérica

Examen Marzo 2007





1- $C_r^* \dot{\sigma} = 10 \dot{\beta}$

Teorema del seno $\frac{d}{\operatorname{sen}\sigma} = \frac{R}{\operatorname{sen}\beta}$

$$d^2 = R^2 + 2R^2 - 2R^2\sqrt{2}\cos\sigma$$

Teorema del coseno

$$d = \sqrt{3R^2 - 2\sqrt{2}R^2\cos\sigma}$$

$$d = R\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma}$$

$$\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma}}{\operatorname{sen}\sigma} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}$$

dosi $\operatorname{sen}\sigma = \operatorname{sen}\beta\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma}$

$$\cos\sigma\,\dot{\sigma} = \cos\beta\,\dot{\beta}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma} + \dot{\sigma}\operatorname{sen}\beta\,\frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sigma}{2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma}}$$

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma}\,\cos\sigma\,\dot{\sigma} = cs\,\beta\,\dot{\beta}(3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma) + \dot{\sigma}\operatorname{sen}\beta\,2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sigma$$

$$\dot{\sigma}\left[\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma} - \operatorname{sen}\beta\,2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sigma\right] - \cos\beta\,\dot{\beta}(3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma)$$

$$C_r = \frac{10\left[\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma}\,\cos\sigma - \operatorname{sen}\beta\,2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sigma\right]}{\cos\beta\,(3 - 2\sqrt{2}\cos\sigma)}$$

$$C_r^* = \frac{10\left[\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\sigma}\,\cos\sigma - \frac{\operatorname{sen}^2\sigma\,\sqrt{2}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\sigma}}\right]}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{3-2\sqrt{2}\cos\sigma}(3-2\sqrt{2}\cos\sigma)}}$$

$$C_r^* = \frac{10\,[(3-2\sqrt{2}\cos\sigma)\cos\sigma - \sqrt{2}\operatorname{sen}^2\sigma]}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\sigma - \operatorname{sen}^2\sigma\cdot(3-2\sqrt{2}\cos\sigma}}$$

$$C_r^* = \frac{10\,[3\cos\sigma - 2\sqrt{2}\cos^2\sigma - \sqrt{2}\operatorname{sen}^2\sigma]}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\sigma - \operatorname{sen}^2\sigma\,(3-2\sqrt{2}\cos\sigma)}}$$

$$C_r^* = 10\,\frac{(3\cos\sigma - \sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2\sigma]}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\sigma - \operatorname{sen}^2\sigma(3-2\sqrt{2}\cos\sigma)}}$$

...... Por algun lado estara mal

2- $C_M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R^*\,d\sigma$

$$C_M = \frac{1}{2\pi}\,2\int_0^{\pi/4} 10\left[\frac{\sqrt{2}\cos\sigma - 1}{3-2\sqrt{2}\cos\sigma}\right]d\sigma$$

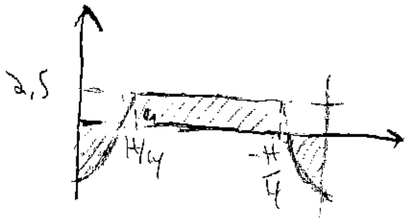
$$C_M = \frac{10}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}}{3-2\sqrt{2}}\right] - \frac{\sigma}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

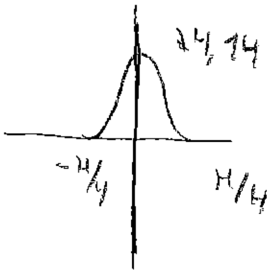
$$C_M = \frac{10}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{8}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right] = 2{,}5\ Nm$$

3) $\epsilon = 0,05$

$n = 240$ rpm

$M^* = C_M^* - C_r^*$





$$2,5 - 10\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{3 - 2\sqrt{2}\cos\theta}\right) = 0$$

$$0,25 = \frac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{3 - 2\sqrt{2}\cos\theta} = 3 \cdot 0,25 - 2\sqrt{2}\,0,25\cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta - 1$$

$$\cos\theta = \frac{1,75}{1,5\sqrt{2}} \to \theta = 0,6$$

$$A_1 = \int_0^{0,6} (2T - 10\left[\frac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{3 \cdot 2\sqrt{2}\cos\theta}\right] d\theta = -6,14 = A_3$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \Rightarrow A_2 = 2 \cdot 6'14 = 12,28$$

$S_1 = -6,14$

$S_2 = 6,14$

$S_3 = 0$

$$I = \frac{S_{max} - S_{min}}{\epsilon W a^2} = \frac{12,28}{0,05\left(\frac{240}{60}\right)^2 4\pi^2}$$

$I = 0,39$ Kg m^2

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA
SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA
TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3° Ingeniería Industrial. Marzo 2011.
Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio.2 Tiempo: 60 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

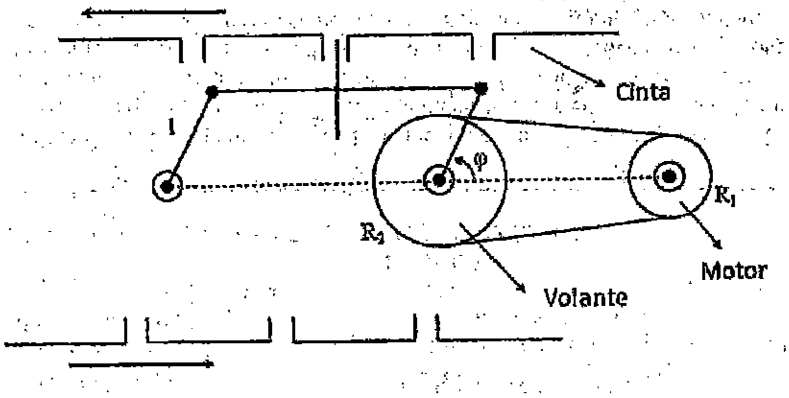
MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2011.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 2 Iraupena: 60 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

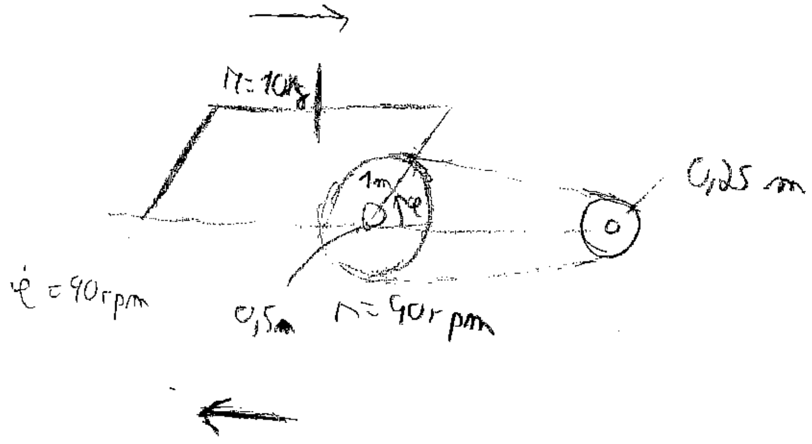
El esquema de la figura representa el mecanismo de actuación de un sistema de transporte de paquetes para su clasificación y etiquetado.

Un motor eléctrico solidario a una polea de radio R_1=0.25 m hace girar mediante una correa a una polea de radio R_2=0.5 m, que hace las veces de volante de inercia, con una velocidad n=90 rpm. A su vez, esta polea de radio R_2 está rígidamente conectada a la manivela de un paralelogramo articulado cuya longitud es l=1 m. Dicho acoplador de masa M=10 kg posee en su punto medio una pestaña que engancha a la cinta transportadora, y que es la que finalmente provoca su movimiento intermitente. Concretamente, el dispositivo está preparado para que la pestaña contacte con la cinta transportadora durante el intervalo angular de ida: $\pi/4\leq\varphi\leq3\pi/4$ y durante el intervalo angular de vuelta: $5\pi/4\leq\varphi\leq7\pi/4$. La fuerza de contacto F entre la pestaña y la cinta es de 1000 N. La masa y la inercia de las manivelas del paralelogramo pueden despreciarse. El conjunto motor y polea de radio R_1 tiene una inercia I_M= 2 kg·m^2 respecto de su eje de giro. Se pide:

1- Calcular y representar el momento resistente reducido al eje del volante.
2- Calcular la potencia del motor.
3- Calcular y representar el momento reducido al eje del volante.
4- Calcular mediante el método aproximado la inercia del volante para garantizar una grado de irregularidad ε=0.1. Téngase en cuenta la inercia reducida de todos los elementos móviles con masa no despreciable del mecanismo de actuación.
5- Supóngase que la pestaña se rompe justo al final del primer tramo (φ=3π/4); con qué velocidad acaba la polea R_2 al final del ciclo, en el supuesto de que no exista ninguna medida de seguridad.



Examen Marzo 2011

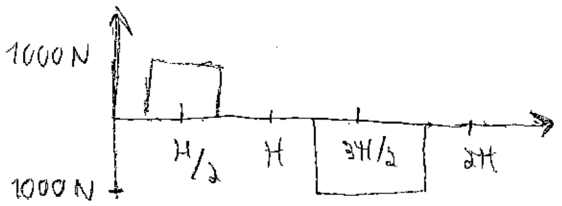


$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$

$F = 1000\ N$

$I_m = 2\ Kg\ m^2$



$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \rightarrow -M_r^* \dot{\varphi} = F\dot{x} \Rightarrow -M_r^* \dot{\varphi} = -1000\, l\, \dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow$

$M_r^* (-\hat{K}) \dot{\varphi} \hat{K} \qquad \Rightarrow M_r^* = 1000 \operatorname{sen} \varphi$

$x = l \cos\varphi$

$y = l \operatorname{sen} \varphi$

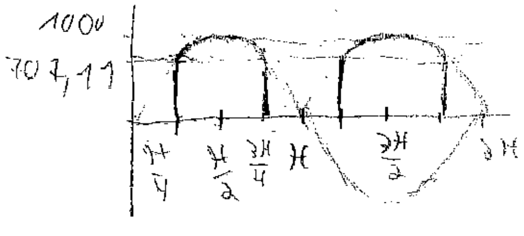
$\dot{x} = -l\, \dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi$

El otro tramo

$-M_r^* \hat{K}\, \dot{\varphi} \hat{K} = -F \hat{i}\, \dot{x}\, \hat{i}$

$-M_r^* \dot{\varphi} = -F(+l\, \dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi)$

$M_r^* = -F l \operatorname{sen} \varphi \rightarrow M_r^* = -1000 \operatorname{sen} \varphi$



$$Pot\ m = M_m \omega_m \leftrightarrow Pot\ m = \overset{cte}{M_m} \underbrace{\frac{R_2}{R_1}\dot{\varphi}}$$

$$\int_0^{2\pi} (M_m^* - M_r^*)\, d\varphi = 0$$

$$M_m^* \dot{\varphi} = M_m \omega_m \Rightarrow M_m^* = M_m \frac{\omega_m}{\dot{\varphi}}$$

$$R_2 \dot{\varphi} = \omega_m R_1 \Rightarrow \frac{\omega_m}{\dot{\varphi}} = \boxed{\frac{R_2}{R_1}} \rightarrow \omega_m = \frac{R_2}{R_1}\dot{\varphi}$$

en sí es $\frac{\omega_m}{\dot{\varphi}}$ que es igual a

$$\int_0^{2\pi} \left(M_m \frac{R_2}{R_1} - M_r^*\right) d\varphi = 0$$

$$M_m \frac{R_2}{R_1} \cdot 2\pi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 1000 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 1000 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$$

$$M_m \frac{0{,}5}{0{,}25}\, 2\pi = 2000 \cdot (-\cos\varphi)_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$M_m = 225{,}077 \ Nm$$

$$Pot\ m = 225{,}077 \quad 2 \cdot \frac{90}{60}\, 2\pi = 4242{,}607 \ W$$

$$3 - M^* = M_m^* - M_r^* \qquad M_m^* = \frac{R_2}{R_1} M_m = 2 \cdot 225{,}077 = 450{,}154 \ Nm$$

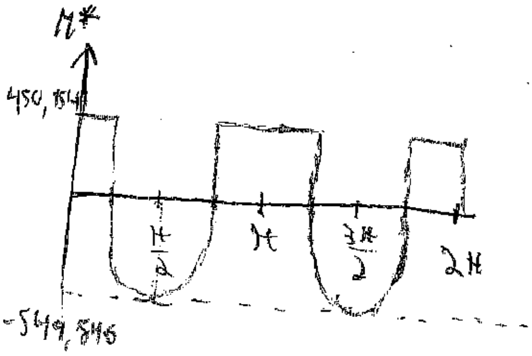
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right] = 450{,}154 \ Nm$

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] = 450{,}154 - 1000 \operatorname{sen}\varphi$

$\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] = 450{,}154 \ Nm$

$\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] = 450{,}154 + 1000 \operatorname{sen}\varphi \ Nm$

$\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] = 450{,}154 \ Nm$



4. $J + J^*(\varphi)$

$$J = \frac{S_{max} - S_{min}}{\varepsilon\, \omega_m^2}$$

$A_1 = 450,154 \frac{\pi}{4} = 353,55\ Nm$

$A_2 = -707,1\ Nm$

$A_3 = 707,1\ Nm$

$A_4 = -707,1\ Nm$

$A_5 = 353,55\ Nm$

$A_1 = A_5$

$A_3 = 2A_1$

$A_2 = A_4$

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0$

$2A_2 + 4A_1 = 0 \Rightarrow A_2 = -2A_1$

$S_1 = A_1 = 353,55\ Nm$

$S_2 = A_2 + A_1 = -353,55\ Nm$ — V_{max}

$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 353,55\ Nm$ — V_{min}

$S_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 353,55\ Nm$

$S_5 = 0$

$$J = \frac{353,55 + 353,55}{0,1\left(\frac{90}{60}2\pi\right)^2} = 79,6 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{[illegible]}}}{J} + J^*(\varphi)$$

$$\frac{1}{2} J^*(\varphi)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{1}{2} J^*(\varphi)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J_m \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

$$J^*(\varphi) = J_m\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + M\ell^2 = 18\ Kg\ m^2$$

$$J = 79,6 - 18 = 61,6\ Kg\ m^2$$

$g_m = \frac{R_2}{R_1} = 2$

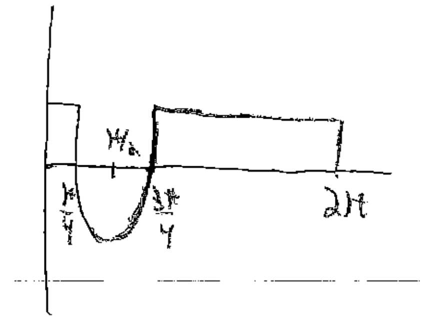
$\bar{g}_{AC} = 1\ m$

$\omega_m = \frac{R_2}{A_1}\dot{\varphi}$

$g_M = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = \frac{R_2}{R_1} = 2$

$V_{oc} = \ell\dot{\varphi} \Rightarrow g_4 = \frac{V_{ac}}{\dot{\varphi}}$

5)



$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{2\pi} M^* d\varphi = \frac{1}{2} J' \left(\omega_{2\pi}^2 - \omega_{\frac{3\pi}{4}}^2 \right)$$

$$450{,}154 \left(2\pi - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} 79{,}6 \left(\omega_{2\pi}^2 - \omega_{\frac{3\pi}{4}}^2 \right) \Rightarrow \omega_{2\pi} = 11{,}16 \frac{rad}{s}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_a &= \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{2} \\ \varepsilon &= \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_a} \end{aligned} \right\} \omega_m = 85{,}5 \, rpm = \omega_{\frac{3\pi}{4}} = 85{,}5 \cdot \frac{2\pi}{60} = 8{,}95 \, rad/s$$

eman ta zabal zazu

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIERÍA

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA
SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA
TEKNIKOA

TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

3° Grado de Ingeniería en Tecnología Industrial.
Mayo 2014. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 40 %.
Ejercicio 3. Tiempo: 90 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2014.-eko Maiatza. B. Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 40 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 90 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

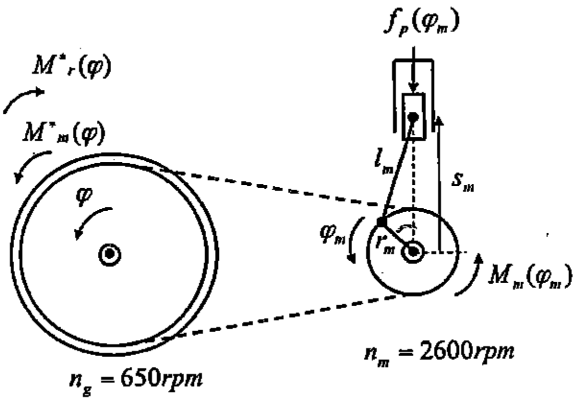
B. A continuación se va a dimensionar el volante. En la siguiente figura aparece una representación de las principales variables a considerar:

Al igual que en el apartado anterior, para resolver el problema, considérese la simplificación en el mecanismo de biela manivela:

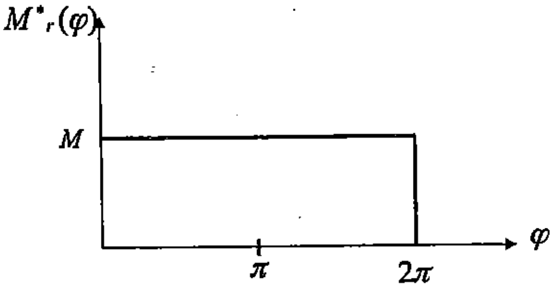
$$s_m = r_m \cos\varphi_m + l_m$$

que se asume cuando l_m es mucho mayor que r_m que tiene un valor de r_m=4cm.

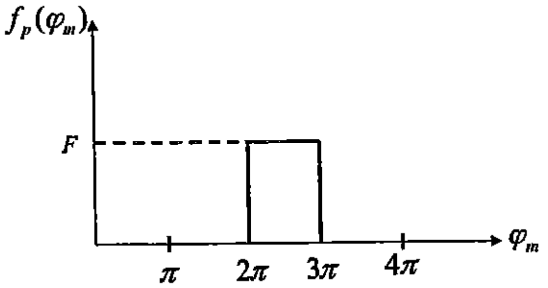
$M_m(\varphi_m)$ es la reducción de $f_p(\varphi_m)$ al eje de la manivela.



A los efectos de simplificar el cálculo, se va a considerar que el par resistente $M_r^*(\varphi)$ reducido al eje del volante tiene la siguiente forma (donde M es desconocido):



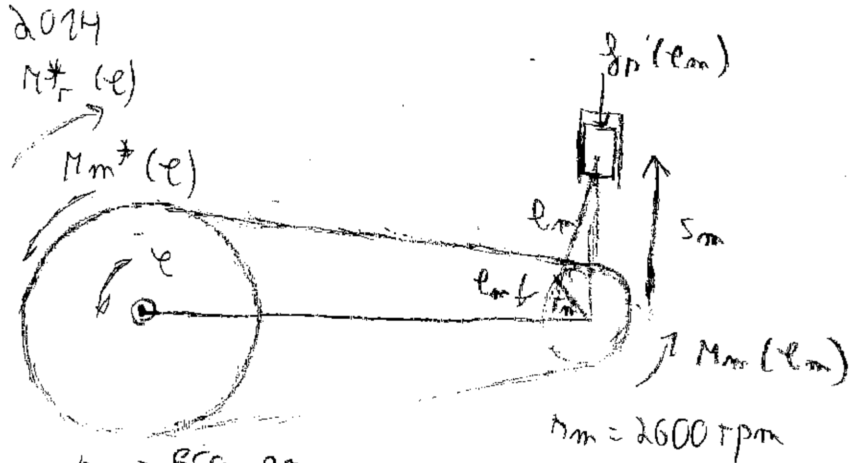
El accionamiento es un motor de gasolina de 4 tiempos que desarrolla una potencia media de 2.6 kW a 2600 rpm que es su velocidad de trabajo. A la hora de realizar el problema se modelizará la fuerza en el pistón $f_p(\varphi_m)$ con la siguiente aproximación (donde F es desconocido):



Se pide:

1. Calcular el valor de F. (2p)
2. Representar el momento reducido al eje del volante $M^*(\varphi)$. (1,5p)
3. Obtener la masa del volante macizo para un radio de 20 cm y un grado de irregularidad de 0.05. (1,5p)

Mayo 2024

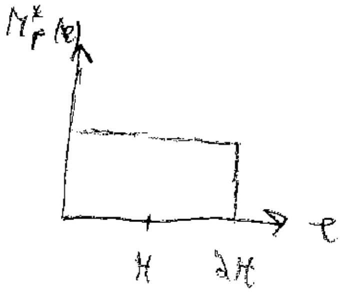


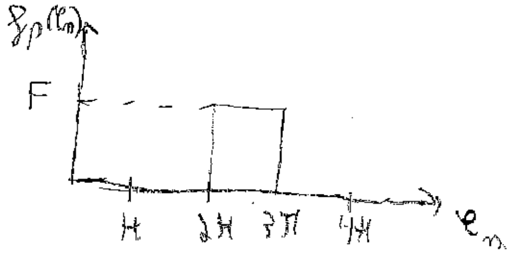
$S_m = r_m \cos \varphi_m + l_m$

$r_m = 4$ cm

$n_g = 850$ rpm

$Pot_m = 2{,}6$ kW





$$M_m \dot{\varphi}_m = - f(\varphi_M) \dot{s}_m$$

$$\dot{s} = - r_m \dot{\varphi}_m \operatorname{sen} \varphi_m$$

$$M_m \dot{\varphi}_m = f_p(\varphi_m) r_m \operatorname{sen} \varphi_m \dot{\varphi}_m$$

$$M_m = f_p(\varphi_m) r_m \operatorname{sen} \varphi_m$$

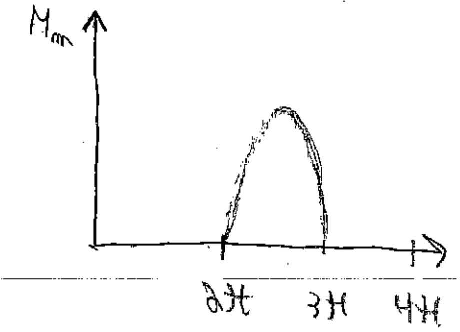
$$M_m = \begin{cases} F r_m \operatorname{sen} \varphi_m & 2\pi < \varphi_m < 3\pi \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$P_M = M_m(\varphi_m) \omega_m$$

$$M_m(\varphi_m) = \frac{P_M}{\omega_M} = \frac{2600}{\frac{2000}{60} \cdot 2\pi} = \frac{30}{\pi}$$

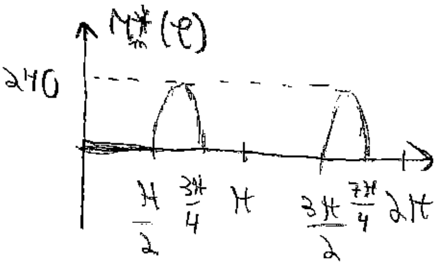
$$\int_0^{4\pi} M_m(\varphi_m) \, d\varphi = \int_{2\pi}^{3\pi} F r_m \operatorname{sen} \varphi_m \, d\varphi_m$$

$$\frac{30}{\pi} \cdot 4\pi = F \cdot 0{,}04 \int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} \varphi_m \, d\varphi_m \rightarrow \boxed{F = 1500{,}11 \text{ N}}$$



$$M_m = \begin{cases} 1500{,}11 \cdot 0{,}04 \text{ sen } \varphi_m & 2\pi < \varphi_m < 3\pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

2)



$$M^*(\varphi) = M_m^*(\varphi) - M_r^*(\varphi)$$

$$M_m \dot{\varphi}_m = M_m^*(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$M_m^*(\varphi) = M_m \frac{\dot{\varphi}_m}{\dot{\varphi}}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_m}{\dot{\varphi}} = 4 \Rightarrow \varphi_m = 4\varphi$$

$$M_m^*(\varphi) = F_{rm} \frac{\dot{\varphi}_m}{\dot{\varphi}} \text{ sen } 4\varphi$$

$$M_m^*(\varphi) = 4 F_{rm} \text{ sen } 4\varphi = 4 \cdot 0{,}04 \cdot 1500{,}11 = 240$$

$\varphi_m = 2\pi \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_m = 3\pi \rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$

$\varphi_m = 6\pi \rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$\varphi_m = 7\pi \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}$

$$M_m^*(\varphi) = \begin{cases} 4F_{rm} \text{ sen } 4\varphi & \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \\ 4F_{rm} \text{ sen } 4\varphi & \frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{7\pi}{4} \\ 0 & \end{cases}$$

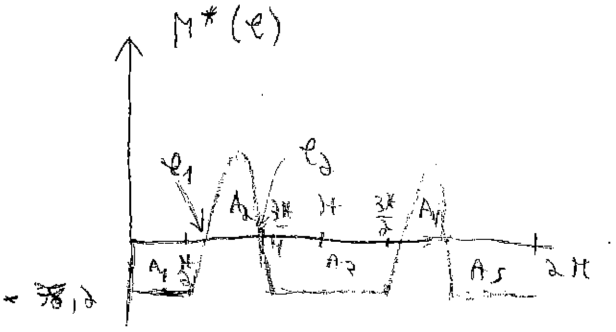
$$\int_0^{2\pi} M m^* \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \overset{\text{El resistente}}{M} \, d\varphi$$

$$M\, 2\pi = \int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{4}} 4\, F_{rm}\, \text{sen}\, 4\varphi \, d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 4F_{rm}\, \text{sen}\, 4\varphi \, d\varphi$$

$$M\, 2\pi = 2 \int_{\pi/2}^{3\pi/4} 4 \cdot 1500 \cdot 0{,}04\, \text{sen}\, 4\varphi \, d\varphi \Rightarrow M = 38{,}2 \text{ Nm}$$

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow M^* = -38{,}2$ Nm $\rightarrow \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4} < \varphi < 2\pi$

$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow M^* = 240{,}016\, \text{sen}\, 4\varphi - 38{,}2$ $\rightarrow \frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$



$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$ $\quad M^*(\varphi) = 240\, \text{sen}\, 4\varphi - 38{,}2$

$240\, \text{sen}\, 4\varphi - 38{,}2 = 0 \qquad \text{sen}\, 4\varphi = \frac{38{,}2}{240} \Rightarrow \varphi = 0{,}04$ rad

$\varphi_1 = \pi/2 + 0{,}04$ rad $= 1{,}61$
$\varphi_2 = \frac{3\pi}{4} - 0{,}04$ rad $= 2{,}32$

$$A_1 = -38{,}2\, \frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{1{,}61} (240\, \text{sen}\, 4\varphi - 38{,}2)\, d\varphi = -60{,}812 \text{ Nm}$$

$$A_2 = A_4 = \int_{1{,}61}^{2{,}32} (240\, \text{sen}\, 4\varphi - 38{,}2)\, d\varphi = 91{,}623 \text{ Nm}$$

$$A_3 = -38{,}2 \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) + 2 \int_{\pi}^{1{,}61} (240\, \text{sen}\, 4\varphi - 38{,}2)\, d\varphi = -91{,}623 \text{ Nm}$$

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0 \Rightarrow A_5 = -30{,}514\ 2$

$S_1 = A_1 = -60,812 \ Nm$

$S_2 = S_1 + A_2 = 30,81 \ Nm$

$S_3 \neq S_2 + A_3 = -60,812 \ Nm$

$S_4 = S_3 + A_4 = 30,81 \ Nm$

$S_5 = 0 \ Nm$

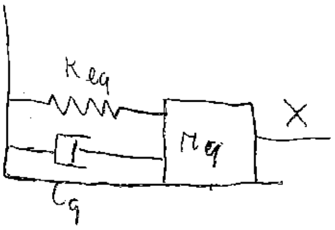
$$I = \frac{S_{MAX} - S_{MIN}}{\varepsilon \omega a^2} = \frac{30,81 + 60,812}{0,05 \left(\frac{650}{60} 2\pi\right)^2} = 0,396 \ Kg \, m^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ I \ disco}}{I} = \frac{1}{2} MR^2 \Rightarrow M = \frac{2I}{R^2} = \frac{2 \cdot 0,396}{0,2^2} = 19,77 \ Kg$$

$I_{ARO} = MR^2$

TEMA 7. MODELIZACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS

3. Modelización de los parámetros de un sistema. Reducción de muelles, amortiguadores y masas



$$M_q \ddot{x} + C_q \dot{x} + K_q x = 0$$

Muelles $M=0$ almacena E elástica

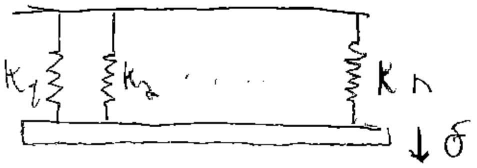
Masas T energía cinética

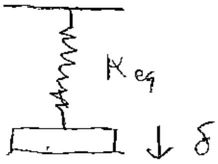
Amortiguadores → Disipan energía en la vibración

- Muelles
  - Tracción · compresión → $F = -\boxed{K}x$
    ↳ Rigidez
  - Torsión $M = -\boxed{K_T}\theta$
    ↳ Rigidez de torsión

- Sistemas de muelles

* En paralelo





$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

$$K_{eq}\delta = K_1\delta + \dots + K_n\delta \qquad K_{eq} = \sum_{i=1}^{N} K_i$$

* En serie

$$\delta = \delta_1 + \dots + \delta_N \qquad \frac{1}{K_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i}$$

$$\frac{F}{K_{eq}} = \frac{F}{K_1} + \dots + \frac{F}{K_n}$$

- Amortiguadores

El mecanismo mediante el cual la energía vibratoria se combierte progresivamente en calor y ruido se conoce con el nombre de amortiguamiento. En un sistema de parametros concentrados, el elemento que asume en exclusiva la capacidad de disipación es el amortiguador.
No tiene masa ni capacidad para almacenar energía, y la fuerza de amortiguamiento existe solo si la velocidad relativa entre sus extremos es distinta de 0

- Amortiguamiento viscoso

  Se produce cuando el elemento vibra en un fluido viscoso

  $F = -c\dot{x}$ (directamente proporcional a la velocidad y de signo contrario)

- Rozamiento seco de coulomb μN
- Amortiguamiento histerético o estructural

* Asociación de amortiguadores

$$c = \frac{F}{\dot{X}}$$

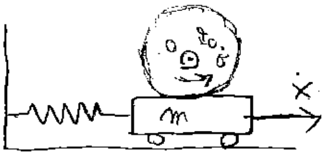
Paralelo $C_q = \sum_{i=1}^{N} c_i$

Serie $\frac{1}{C_q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{c_i}$

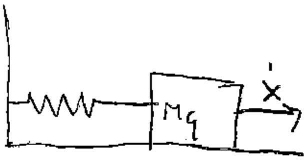
Tema 7

Masas

Ejemplo



R = Radio primitivo del piñón

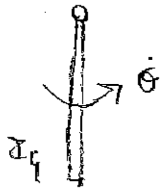


$$T = \frac{1}{2} M_q \dot{x}^2$$

$$T = 1/2\, m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 \frac{\dot{x}^2}{A^2} = \frac{1}{2} M_q \dot{x}^2$$

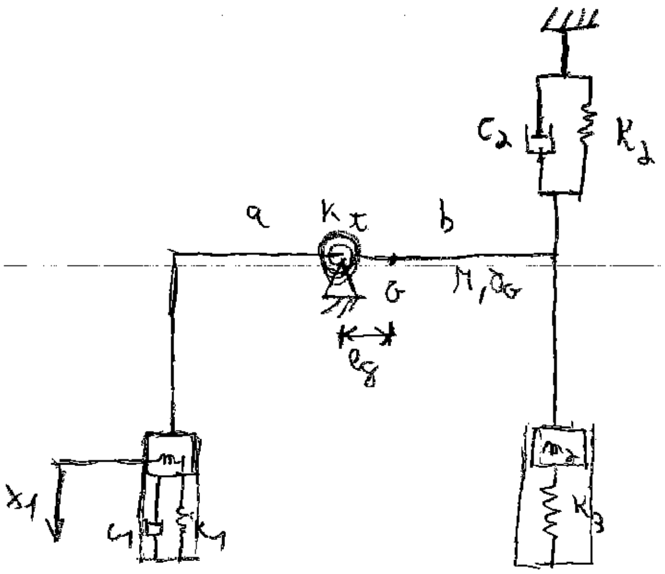
$$M_q = m + \frac{\mathcal{I}_0}{R^2}$$

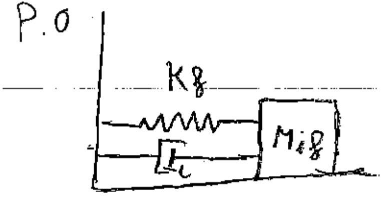


$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_q \dot{\theta}^2$$

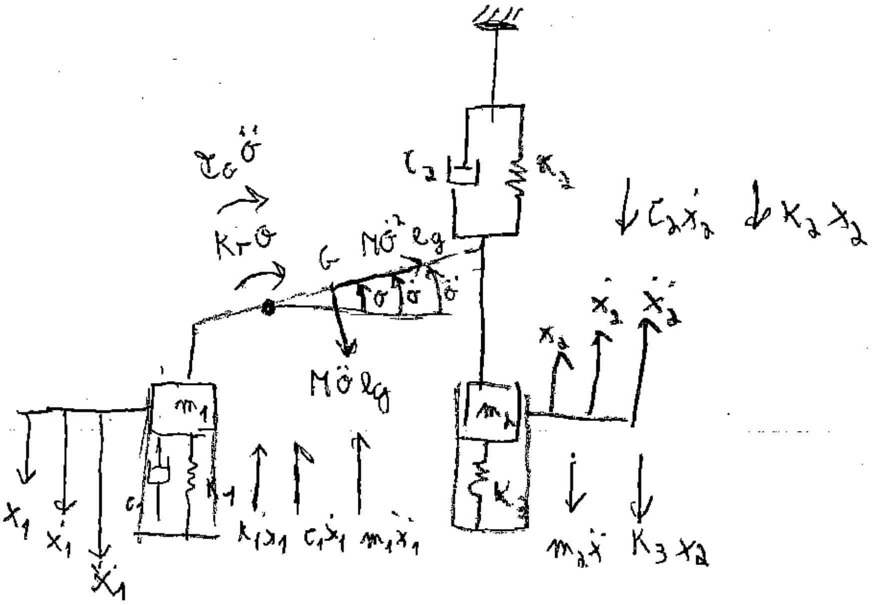
$$\frac{1}{2} m A^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_q \dot{\theta}^2$$

$$mR^2 + \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_q$$





$$M_{eq}\ddot{x}_1 + C_{eq}\dot{x}_1 + K_{eq}x_1 = 0$$



pequeñas oscilaciones

$$x_1 = a \operatorname{sen}\theta \quad \downarrow \quad x_1 = a\theta \rightarrow \theta = \frac{x_1}{a} \quad \Big| \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_1}{a} \quad \Big| \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_1}{a}$$

$$x_2 = b \operatorname{sen}\theta \quad x_2 = b\theta \rightarrow x_2 = \frac{b}{a}x_1 \quad \Big| \quad \dot{x}_2 = \frac{b}{a}\dot{x}_1 \quad \Big| \quad \ddot{x}_2 = \frac{b}{a}\ddot{x}_1$$

$$M_0 = 0$$

$$(K_1x_1 + C_1\dot{x}_1 + m_1\ddot{x}_1)\, a \overset{1}{\cancel{\cos}}\theta + K_T\theta + I_G\ddot{\theta} + M\ddot{\theta}\, l_g^2 +$$

$$+ (C_2\dot{x} + K_2x_2 + m_2\ddot{x}_2 + K_3x_2)\, b\, \overset{1}{\cancel{\cos}}\theta = 0$$

$$(K_1x_1 + C_1\dot{x}_1 + m_1\ddot{x}_1)\,a + K_T\frac{x_1}{a} + I_G\frac{\ddot{x}_1}{a} + M l_g^2\frac{\ddot{x}_1}{a} +$$

$$+ (C_2\dot{x}_1 + K_2x_1 + m_2\ddot{x}_1 + K_3x_1)\frac{b^2}{a} = 0$$

$$\underbrace{\left(m_1a + \frac{I_G}{a} + \frac{M l_g^2}{a} + m_2\frac{b^2}{a}\right)}_{M_{eq}}\ddot{x}_1 + \underbrace{\left(C_1a + C_2\frac{b^2}{a}\right)}_{C_{eq}}\dot{x}_1 + \underbrace{\left(K_1a + \frac{K_T}{a} + \frac{K_2b^2}{a} + K_3\frac{b^2}{a}\right)}_{K_{eq}}x_1 =$$

eman ta zabal zazu

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA
INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

Ingeniería Industrial. 3^er^ curso. Septiembre 2002.
Unidad temática: B.
Teoría.
Peso: 60 %. Tiempo: 50 min.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Iraila 2002.
Atal Tematikoa: B.
Teoria.
Pisua: %60. Iraupena: 50 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

1. Etapas en el análisis teórico de sistemas mecánicos sometidos a acciones dinámicas. Breve descripción de las mismas.
2. Sea el tren de engranajes ordinario simple de la Figura 1, constituido por dos piñones y una cremallera, donde:
   R_1 , R_2 : radios primitivos de los piñones
   J_1 , J_2 : momentos de inercia de los piñones respecto de O_1 y O_2 respectivamente
   m: masa de la cremallera
   Obtener la inercia equivalente reducida al punto O_1.
3. Representar aproximadamente en un gráfico x(t) las vibraciones libres de un sistema de 1 gdl para los casos de amortiguamiento subcrítico, crítico y supercrítico, así como el caso sin amortiguamiento. Realizar una representación superpuesta de los cuatro casos, señalando claramente cada uno.
4. Representar aproximadamente en un gráfico el factor de amplificación dinámica D frente a la relación β para distintos valores del amortiguamiento relativo ξ. Idem para el desfase angular φ.
5. Sea un sistema discreto de 1gdl sin amortiguamiento. Se le somete a la ley de fuerzas de la Figura 2. Partiendo del reposo, calcular la respuesta en t > a.
6. Indicar el procedimiento de medida del amortiguamiento relativo mediante el método de la anchura de banda.
7. Propiedades de los modos de vibración: enunciado y demostración.
8. Explicar los conceptos de masa, amortiguamiento y rigidez modal. Indicar como se obtienen.

1. Sistema mekanikoen analisi teorikoa, akzio dinamikoen aurrean. Etapak eta euren deskribapen laburra.
2. Izan bedi 1^go^ irudiko engranaje tren arrunt simplea, bi pinoi eta kremailera batek osatuta, non:
   R_1 , R_2 : Pinoien erradio primitiboak
   J_1 , J_2 : pinoien inertzi momentuak
   O_1 eta O_2 –rekiko hurrenez hurren
   m: Kremaileraren masa
3. Irudikatu x(t) grafiko batean, askatasun gradu bakarreko sistema baten bibrazio askeak, motelgarritasun azpikritiko, kritiko eta superkritikoarekin, hala nola motelgarritasunik gabeko kasuarekin. Laurak batera irudikatu, bakoitza argi argi bereiztuz.
4. Irudikatu gutxi gora behera D anplifikazio dinamikoaren kurba, β parametroaren arabera, ξ motelgarritasun erlatiboaren balio desberdinen arabera. Gauza berdina egin φ desfase angeluarrarentzako.
5. Izan bedi motelgarritasunik gabeko askatasun gradu bakarreko sistema diskretu bat. Kalkulatu haren erantzuna t>a tartean, 2. irudiko indarra aplikatzen zaionean.
6. Motelgarritasun erlatiboaren neurketa, banda zabaleraren metodoaren bidez. Azaldu metodoaren funtsa eta garatu.
7. Bibrazio moduen propietateak: enuntziatua eta frogapena.
8. Azaldu hurrengo kontzeptuak: masa modala, motelgarritasun modala eta zurruntasun modala. Azaldu ere nola lortzen diren.

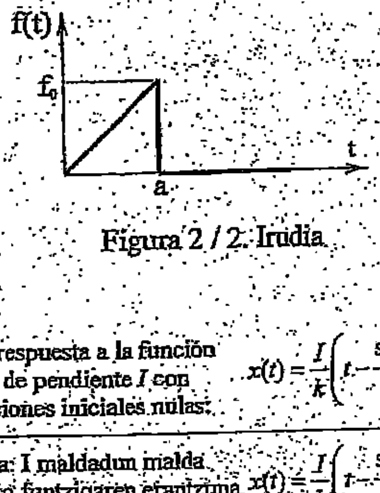


Figura 2 / 2. Irudia

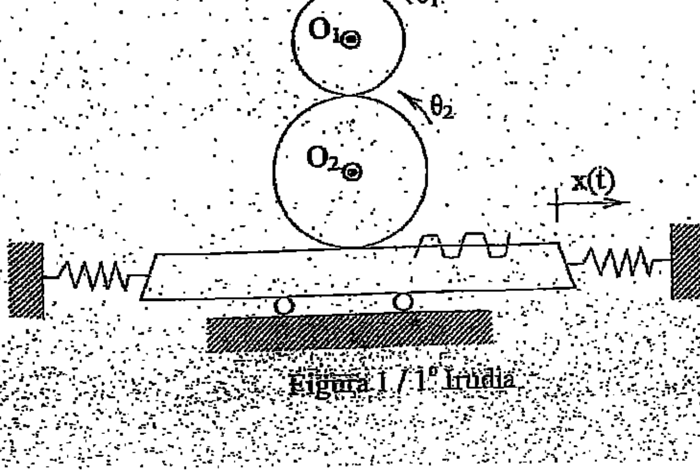


Figura 1 / 1º Irudia

Nota: respuesta a la función rampa de pendiente *I* con condiciones iniciales nulas: $x(t)=\dfrac{I}{k}\left(t-\dfrac{\operatorname{sen}\omega\, t}{\omega}\right)$

Oharra: I maldadun malda motako funtzioaren erantzuna, hasierako baldintza nuluekin: $x(t)=\dfrac{I}{k}\left(t-\dfrac{\operatorname{sen}\omega\, t}{\omega}\right)$

1, 3, 11, 16, 8, 7

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

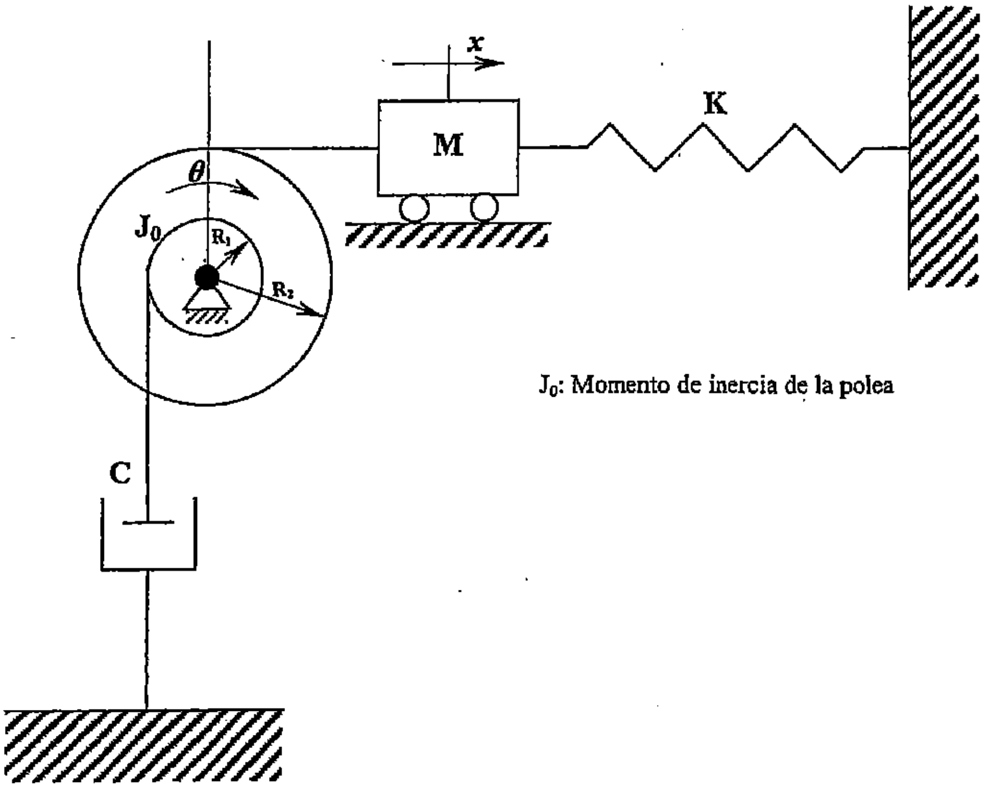
TEORÍA DE MÁQUINAS.

Ingeniería Industrial. 3^{er} curso. Junio 2002.
Unidad temática: B.
2º ejercicio.
Peso: 40 %. Tiempo: 35 min.

GRUPO:
NOMBRE:
APELLIDOS:

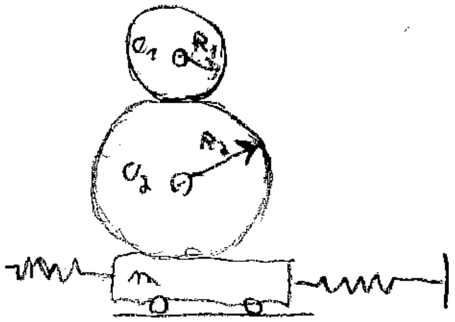
---

1. Escribir la ecuación diferencial del movimiento del sistema de la figura para la variable x. (7p)
2. Escribir la ecuación diferencial del movimiento del sistema de la figura para la variable θ. (1p)
3. Obtener la frecuencia natural del sistema. (2p)



J_0: Momento de inercia de la polea

Septiembre 2002



$$J_1^* \Rightarrow \frac{1}{2} J^* \dot\theta_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\theta_2^2 + \frac{1}{2} m \dot x^2$$

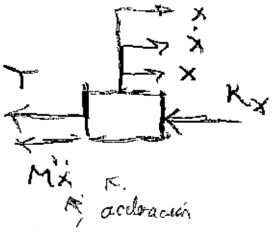
$$\dot\theta_1 R_1 = \dot\theta_2 R_2 \Rightarrow \dot\theta_2 = \frac{R_1}{R_2} \dot\theta_1$$

$$\dot x = \dot\theta_2 R_2 \Rightarrow \dot x = R_1 \dot\theta_1$$

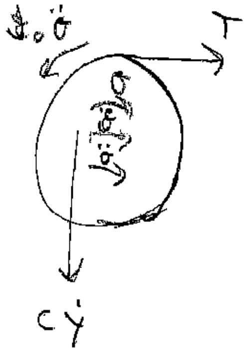
$$\frac{1}{2} J^* \theta_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m R_1^2 \dot\theta_1^2$$

$$J^* = J_1 + J_2 \left(\frac{R_1^2}{R_2}\right)^2 + m R_1^2$$

Junio 2002



$$M\ddot x + Kx + T = 0$$



$$TR_2 - J_0\ddot\theta - c\dot y R_1 = 0$$

$$\dot\theta = \frac{\dot x}{R_2}$$

$$\dot y = \dot\theta R_1 \Rightarrow \dot y = \dot x \frac{R_1}{R_2}$$

$$\hookrightarrow J_0 \frac{\ddot x}{R_2^2} + c\frac{R_1^2}{R_2} \dot x - TR_2 = 0$$

$$T = J_0 \frac{\ddot x}{R_2^2} + c\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \dot x$$

$$M\ddot x + Kx + J_0 \frac{\ddot x}{R_2^2} + c\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \dot x = 0 \Rightarrow \left(M + \frac{J_0}{R_2^2}\right)\ddot x + c\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \dot x + Kx = 0$$

De $\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R_2} \Rightarrow x = R_2\theta \;/\; \dot{x} = R_2\dot{\theta} \;/\; \ddot{x} = R_2\ddot{\theta}$

$$\left(M + \frac{J_0}{R_2^2}\right) R_2\ddot{\theta} + c\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 R_2\dot{\theta} + KR_2\theta = 0$$

$$\ddot{x} + \left[c\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \Big/ \left(M + \frac{J_0}{R_2^2}\right)\right]\dot{x} + \boxed{\frac{K}{\left(M + \frac{J_0}{R_2^2}\right)}}\, x = 0$$

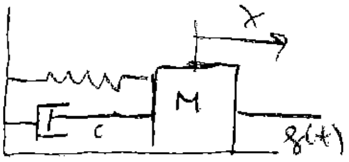
$$\ddot{x} + \frac{C_{eq}}{M_{eq}}\dot{x} + \frac{K_T}{M_{eq}} x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{K}{M + \frac{J_0}{R_2^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{MR_2^2 + J_0}}$$

TEMA 8

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD 1: VIBRACIONES LIBRES



$$M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$$

libres $\rightarrow f(t) = 0$

Nc amortiguado

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \qquad \text{M.A.S}$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{M}x = 0$$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \rightarrow$ frecuencia natural

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$x = C_1(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$x = (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$x = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t \rightarrow x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$A = \bar{X}\cos\phi$$

$$B = \bar{X}\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$x = \bar{X}\cos(\omega t - \phi) \;\|\; \dot{x} = -\bar{X}\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \phi)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow \dot{x} = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t + B\cos\omega t$$

$$x_0 = A \rightarrow A = x_0$$

$$\dot{x}_0 = B\omega \rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \bar{X}\cos\phi \\ \dot{x}_0 = \bar{X}\omega\,\mathrm{sen}\,\phi \end{array}\right\} \mathrm{tg}\,\phi = \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \Rightarrow \phi = \mathrm{arctg}\,\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}$$

$$\bar{X} = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2} \rightarrow x = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2}\,\cos(\omega t - \mathrm{arctg}(\frac{\dot{x}_0}{}))$$

- Vibraciones libres amortiguadas

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

$$Ms^2 + cs + K = 0$$

$$s = -\frac{c}{2M} + \sqrt{\left(\frac{c}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

$$\frac{c}{2M} = w \Rightarrow \bar{c} = 2Mw$$

coeficiente de amortiguamiento crítico

Si $c > \bar{c}$ → Amortiguamiento sobreamortiguado / supercrítico

$c = \bar{c}$ " crítico

$c < \bar{c}$ " subcrítico

Amortiguamiento relativo

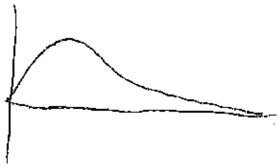
$$\xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2mw} \qquad \ddot{x} + 2\xi w\dot{x} + w^2 x = 0$$

$$s = -\xi w \pm \sqrt{\xi^2 w^2 - w^2} = -\xi w \pm w\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Amortiguamiento supercrítico $\xi > 1$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = w(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ s_2 = w(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{array}\right\}$$ Ambos negativos → el sistema decrece y no oscila.

$$x = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$



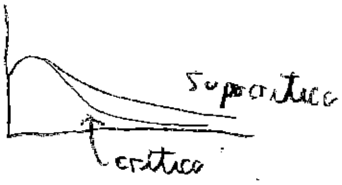
x

$\dot{x}_0$

$$c_1 = x_0\left[\frac{\xi}{2(\xi^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{2}\right] + \frac{\dot{x}_0}{2(\xi^2-1)^{1/2} w}$$

$$c_2 = -x_0\left[\frac{\xi}{2(\xi^2-1)^{1/2}} - \frac{1}{2}\right] - \frac{\dot{x}_0}{2(\xi^2-1)^{1/2} w}$$

Amortiguamiento crítico $\xi = 1$



$$s_1 = s_2 = -\frac{\bar{c}}{2m} = -\frac{2m\omega}{2m} = -\omega$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\omega t}$$

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega x_0)t]\, e^{-\omega t}$$

Amortiguamiento subcrítico $\xi < 1$

$$s_1 = \omega\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \rightarrow s_1 = \omega\left(-\xi + \sqrt{(1-\xi^2)}\, i\right)$$

$$s_2 = \omega\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \rightarrow s_2 = \omega\left(-\xi - \sqrt{(1-\xi^2)}\, i\right)$$

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ frecuencia de vibración amortiguada

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t + B \operatorname{sen}\omega_D t\right)$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\,\bar{X}\cos(\omega_D t - \theta)$$

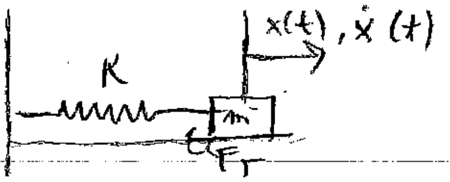
$A = x_0$

$$B = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}$$

$$\bar{X} = \left[x_0^2 + \left[\frac{(\dot{x}_0 + \xi\omega x_0)}{\omega_D}\right]^2\right]^{1/2}$$

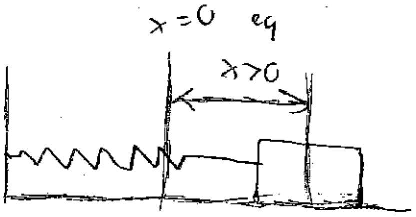
$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{x_0\omega_D}\right)$$

Amortiguamiento de Coulomb

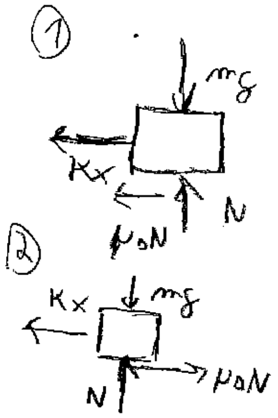


$F_r = -\text{sig}(\dot x)\,\underset{\uparrow}{\mu_d} N$

coef rozamiento dinámico



① $\dot x > 0$



$-Kx - \mu_D N = m\ddot x$

② $\dot x < 0$

$-Kx + \mu_D N = m\ddot x$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow m\ddot x + \text{sig}(\dot x)\mu_D N + Kx = 0$

① $m\ddot x + \mu_D N + Kx = 0$

② $m\ddot x - \mu_D N + Kx = 0$

condiciones finales de uno iniciales del otro

$x_0 > 0$, $Kx_0 > \overset{\text{estático}}{\mu_e} N$

$\dot x_0 = 0$

Primer intervalo $\dot x < 0 \to m\ddot x - \mu_D N + Kx = 0 \to m\ddot x + Kx = \mu_D N$

$x(t) = A\cos wt + B\,\text{sen}\,wt + \frac{\mu_D N}{K} \to x_0 = A + \frac{\mu_D N}{K} \Rightarrow A = x_0 - \frac{\mu_D N}{K}$

$\dot x(t) = -Aw\,\text{sen}\,wt + Bw\cos wt \to B = 0$

$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu_D N}{K}\right)\cos wt + \frac{\mu_d N}{K}$

$\dot x(t) = -w\left(x_0 - \frac{\mu_D N}{K}\right)\text{sen}\,wt$

$0 = -w\left(x_0 - \frac{\mu_D N}{K}\right)\text{sen}\,wt \qquad t_1 = \frac{\pi}{w} \qquad x_1 = x(t_1) = -x_0 + \frac{2\mu_D N}{K}$

Segundo intervalo

Si $Kx_1 > \mu_e N$ $\dot{x} > 0$

$$x(t_1) = x_1$$
$$\dot{x}(t_1) = 0$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t - \frac{\mu_d N}{K}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t \Rightarrow B = 0$$

$$-x_0 + 2\frac{\mu_d N}{K} = -A - \frac{\mu_d N}{K} \Rightarrow A = x_0 - 3\frac{\mu_d N}{K}$$

$$x(t) = \left(x_0 - 3\frac{\mu_d N}{K}\right)\cos\omega t - \frac{\mu_d N}{K}$$

$$\dot{x}(t_2) = -\omega\left(x_0 - \frac{3\mu_d N}{K}\right)\text{sen}\,\omega t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$x(t_2) = x_0 - \frac{4\mu_d N}{K}$$

$$x_1(t) = \left(x_0 - \frac{\mu_d N}{K}\right)\cdot\cos\omega t + \frac{\mu_d N}{K}$$

$$x_i(t) = \left[x_0 - (2i-1)\frac{\mu_d N}{K}\right]\cos\omega t - (-1)^i\frac{\mu_d N}{K}$$

$$x_i = (-1)^i\left(x_0 - 2i\frac{\mu_d N}{K}\right)$$

El movimiento se acaba cuando $|Kx_i| \leq \mu_i N$

$K\left(x_0 - 2j\frac{\mu_d N}{K}\right) \leq \mu_e N$ $j \geq \dfrac{x_0 - \frac{\mu_e N}{K}}{\frac{2\mu_d N}{K}}$

Tema 8

afectado por una serie de impulsos de magnitud I que, evidentemente, poseen una frecuencia igual a la del anterior desplazamiento, tal y como aparece en la figura 3.

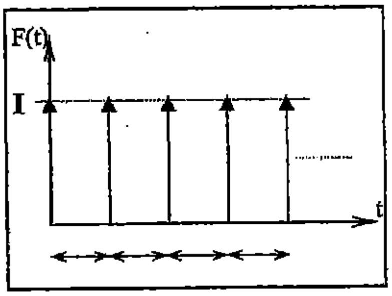


Figura 3. Forma de la fuerza ejercida por el suelo.

Se pide:

1) Aislando la masa del martillo, obtener la expresión en función del tiempo, de la reacción ejercida por el accionamiento en dicha masa.

2) Aislando la masa de la grúa reducida al punto A, obtener la ecuación del movimiento de dicha masa.

3) Calcular el desplazamiento en función del tiempo del punto A de la grúa, en régimen estacionario.

4) A la luz de la modelización adoptada, se pide proponer una vía para calcular los siguientes parámetros, a partir del sistema real de la figura 1:

a) $\mathbf{K_g}$ (de forma experimental).

b) ξ_g (de forma experimental).

c) $\mathbf{M_g}$ (plantearlo de forma teórica, suponiendo que el brazo de la grúa está compuesto por vigas unidas en serie. Ver figura 4).

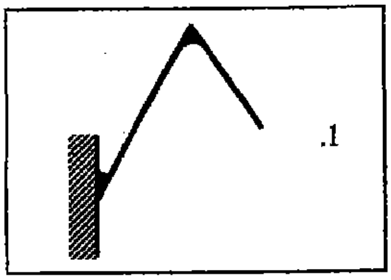


Figura 4. Modelo de vigas en serie

12. Sistemas de un grado de libertad. Cálculo de la respuesta.

Un alumno está jugando una partida en una *máquina de petacos*. Lo cierto es que si en el próximo lanzamiento consigue impulsar la bola a una velocidad comprendida entre 3,5 y 4 m/s, conseguirá una *bola extra*.

Se sabe que la masa del vástago impulsor es $\mathbf{m_1=0,06kg}$ y que la masa de la bola es $\mathbf{m_2=0,04kg}$. En el sistema hay dos muelles idénticos, de masa despreciable y tienen una rigidez **K=500N/m.** Se supone despreciable la inclinación del plano de la *máquina*. Asimismo se puede considerar infinita la rigidez del resto de la *máquina*.

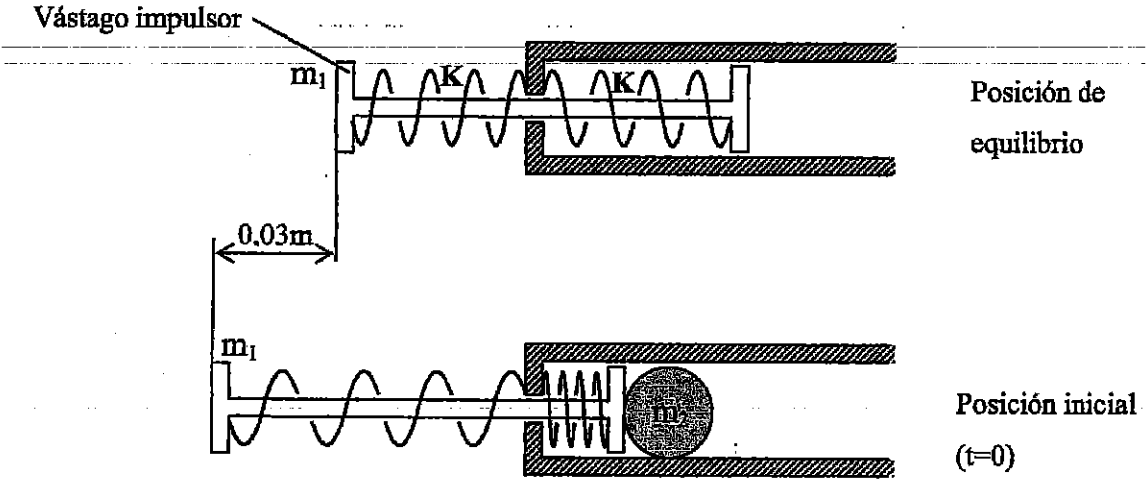
Cuando el alumno tira del vástago impulsor, lo desplaza **3 cm** hacia la izquierda, lo detiene y espera a que la bola se encuentre en reposo en contacto con el otro extremo del mismo. Entonces lo suelta, en el instante **t=0** s.

Despreciando todo tipo de amortiguamiento, calcular para el lanzamiento:

1. Ecuación del movimiento del vástago impulsor, antes de que la bola se separe de él.
2. Instante t_1 en que la bola se separa del vástago impulsor.
3. Velocidad con que sale despedida la bola (averiguar si el lanzamiento consigue *bola extra*).
4. Ecuación del movimiento del vástago impulsor, después de que la bola se haya separado de él.
5. Dibujar detalladamente la ley del movimiento del tirador $\forall t > 0$, señalando las correspondientes amplitudes y períodos.

Suponiendo un amortiguamiento de tipo viscoso lineal subcrítico (tanto antes como después de separarse la bola):

6. Dibujar cualitativamente la ley de movimiento del tirador, resaltando las diferencias con el caso no amortiguado. (1p)



Problema de libres

Ejer pg 209 (En el libro 352 Problema 72)

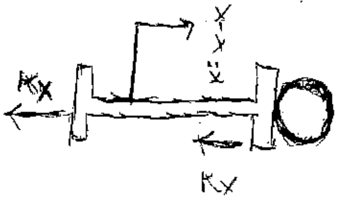
3,5 - 4 m/s

$m_1 = 0,06$ Kg

$m_2 = 0,04$ Kg

$K = 500$ N/m

$t = 0$



$$-2Kx = (0,04 + 0,06)\ddot{x}$$

$$\boxed{0,1}\ddot{x} + \boxed{1000}x = 0 \qquad t \leq t_1$$

$$x = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$$

$$\dot{x} = -A\omega\operatorname{sen}\omega t + B\omega\cos\omega t$$

En $t = 0$

$x_0 = -0,03$

$\dot{x}_0 = 0 \rightarrow B = 0$

$$-0,03 = A \qquad x = -0,03\cos\omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \omega^2 = \frac{1000}{0,1} \Rightarrow \omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$x_1(t) = -0,03\cos 100t$$

2) $-2Kx = 0,06\ddot{x}$

$0,06\ddot{x} + 1000x = 0$ despues

$0,1\ddot{x} + 1000\cdot x = 0$. antes

$\ddot{x}(t_1) = 0$

$x(t_1) = 0$

$x_1(t) = -0,03\cos 100t$

Cuando se separan

$$0 = -0,03\cos 100\,t_1 \qquad 100\,t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{200}\text{ s}$$

3) $\dot{x}_1(t) = 0,03\ 100\operatorname{sen}100t$

$\dot{x}_1(t_1) = 3$ m/s

4) $x_2(t) = A'\cos 129,1\,t + B'\operatorname{sen}129,1\,t$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1000}{0,06}} = 129,1$$

$\dot{x}_2(t) = -A' 129'1 \text{ sen}(129,1t) + B' 129,1 \cos(129,1t)$

$x_2\left(\frac{\pi}{200}\right) = 0$

$\dot{x}_2\left(\frac{\pi}{200}\right) = 3$

resuelvo el sistema

$0 = A' \cos 129,1 \frac{\pi}{200} + B' \text{sen } 129,1 \frac{\pi}{200}$

$3 = -A' 129,1 \text{ sen } 129,1 \frac{\pi}{200} + B' 129,1 \cos\left(129,1 \frac{\pi}{200}\right)$

otra opción → supongo $t' = t - t_1$

$x_2(t') = A' \cos 129,1 t' + B' \text{sen } 129,1 t'$

$\dot{x}_2(t') = -A' 129,1 \text{ sen } 129,1 t' + B' \cdot 129'1 \cos 129,1 t'$

$t' = 0$ $\quad 0 = A'$

$3 = B' 129,1$

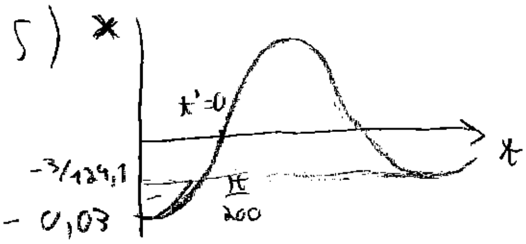
$B' = \frac{3}{129,1}$

$x_2(t') = \frac{3}{129,1} \text{ sen }(129,1 t')$

~~$x_2\left(t - \frac{\pi}{200}\right) = \frac{3}{129,1} \text{ sen }\left[129,1\left(t - \frac{\pi}{200}\right)\right]$~~

$x_2(t) = \frac{3}{129,1} \text{ sen }\left[129,1(t - \pi/200)\right]$

5)



TEMA 9

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD II
VIBRACIONES ARMÓNICAS

Caracterización de sistemas

Excitaciones tipo

La introducción de energía en los sistemas se puede hacer po fuerzas aplicadas o matemáticamente mediante la imposición de una ley de desplazamiento.

Las excitaciones tipo tienen que ser de fácil resolución experimental y sencillas matemáticamente.

1- Excitaciones armónicas

2- Función impulso.
Modelización matemática → delta de dirac

3- Excitaciones aleatorias

Respuesta ante una fuerza armónica

Ec diferencial $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = f_0 \cos \bar{\omega} t \\ f(t) = f_0 \operatorname{sen} \bar{\omega} t \end{array}\right\} \quad f(t) = f_0 e^{i\bar{\omega}t} = f_0(\cos \bar{\omega}t + i \operatorname{sen} \bar{\omega} t)$$

$$x(t) = x(t)_h + x(t)_f$$

$$x_p(t) = Ae^{i\bar{\omega}t}$$

$$x_h(t) = X e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_d t - \theta)$$

$$A = \frac{f_0}{-m\bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega} + K} \quad \Bigg\} \quad A = \frac{f_0}{K} \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2 + i 2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega}}$$

$$\beta = \frac{\tilde{w}}{w}$$

$$x(t) = X e^{-\xi w t} \cos(w_D t - \theta) + \frac{f_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2+2\xi p} e^{i w^2 t}$$

$$x(t) = X e^{-\xi w t} \cos(w_D t - \theta) + \frac{f_0}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-p^2)^2+(2\xi B)^2}} e^{i(w^2 t - \varphi)}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\xi P}{1-\beta^2}$$

x_{est} = desplazamiento relativo = $\frac{f_0}{K}$

D = factor de desplazamiento = $\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$

$$\cancel{X}(t) = \bar{X} e^{-\xi w t} \cos(w_D t - \theta) + x_{est} D \left[\cos(w^2 t - \varphi) + i \operatorname{sen}(\tilde{w} t - \varphi)\right)$$

$$f(t) = f_0 \cos \tilde{w} t \rightarrow x(t) = \bar{X} e^{-\xi w t} \cos(w_D t - \theta) + x_{est} D \cos(\tilde{w} t - \varphi)$$

$$f(t) = f_0 \operatorname{sen} \hat{w} t \rightarrow x(t) = \bar{X} e^{-\xi w t} \cos(w_D t - \theta) + x_{est} D \operatorname{sen}(\tilde{w} t - \varphi)$$

$$x(t) = A e^{-\xi w t} \cos w_D t + B e^{-\xi w t} \operatorname{sen} w_D t + x_{est} D \cos(w^2 t - \varphi)$$

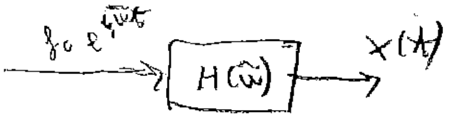
$$\boxed{\begin{aligned} A &= x_0 - x_{est} D \cos\varphi \\ B &= \frac{x_0 + \xi w x_0}{w_D} - x_{est} \cdot D \left(\frac{\xi w \cos\varphi + \tilde{w} \operatorname{sen}\varphi}{w_D}\right) \end{aligned}}$$

Función de transferencia, Factor de amplificación dinámica, Resonancia y Desfase.

Solo componente estacionaria

$$x(t) = \underbrace{\frac{f_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2+i2\xi\beta}}_{\to H(\bar{\omega}) \text{ función de transferencia}} e^{i\bar{\omega}t}$$

$$x(t) = H(\bar{\omega}) f_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

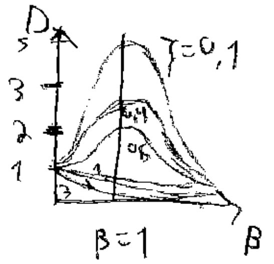


Desplazamiento estático → Desplazamiento que tendría el sistema cuando se le aplica la carga estáticamente ($\bar{\omega}=0$)

$$x(t) = \underbrace{x_{est}\, D}_{X_{din}} e^{i(\bar{\omega} t-\theta)}$$

$X_{din} \equiv$ Amplitud dinámica

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



$$\left.\begin{matrix}\xi = 0{,}1\\ \beta = 1\end{matrix}\right\} D = \frac{1}{\sqrt{(0{,}2)^2}} = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

Cuando ω coincide con $\bar{\omega}$ el sistema se encuentra en resonancia, pero la inercia de los sistemas hace que la amplificación no sea instantánea

$f(t) = f_0 \cos \tilde{\omega} t$

$x(t) - \bar{X} e^{-\zeta \omega t} \cos(\omega_0 t - \theta) + x_{est} D \cos(\tilde{\omega} t - \varphi)$

Para $\theta = 0$ $\varphi = 0$ $\zeta = 0$ $\omega_0 = \omega$ $x_0 = 0$ $\dot{x}_0 = 0$

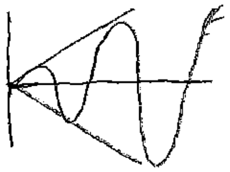
$0 = \bar{X} + x_{est} D \rightarrow \bar{X} = -x_{est} D$

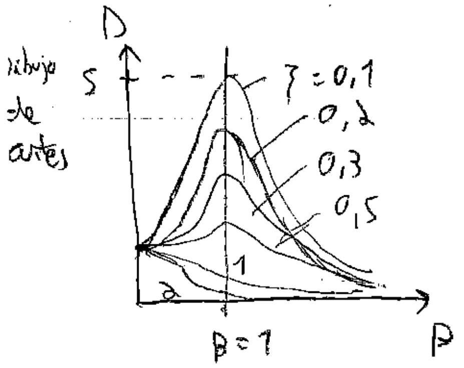
$\dot{x}(t) = -\bar{X} \omega \operatorname{sen}(\omega t) - x_{est} D \tilde{\omega} \operatorname{sen}(\tilde{\omega} t) \Rightarrow 0 = 0$

$x(t) = -x_{est} D \cos \omega t + x_{est} D \cos \tilde{\omega} t$

$x(t) = \frac{x_{est}}{1-\beta^2} \left[\cos \tilde{\omega} t - \cos \omega t \right]$ indeterminado

$\tilde{\omega} \rightarrow \omega$ (cuando $\tilde{\omega}$ tiende a ω) $\xrightarrow{}$ L'hôpital $x(t) = \frac{x_{est} \omega}{2} t \operatorname{sen} \omega t$





$D = D(\zeta, \beta)$

$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$

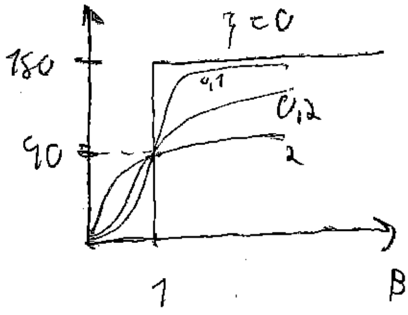
$\beta > 0,707$

$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$

$D_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\beta \simeq 1 \rightarrow D_{max} = \frac{1}{2\zeta}$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$



$\beta = 1$ es resonancia $\rightarrow \varphi = \pi/2$

Diagrama de Argand

$$f(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - Kx = 0$$

$$\boxed{f(t) = f_0\, e^{i\omega^2 t}}$$

$$x(t) = X_{din}\, e^{i(\omega' t - \varphi)}$$

$$\dot{x}(t) = i\bar{\omega} X_{din}\, e^{i(\bar{\omega} t - \varphi)}$$

$$\ddot{x}(t) = -i\bar{\omega}^2 X_{din}\, e^{i(\bar{\omega} t - \varphi)}$$

$$\boxed{-m\ddot{x} = M\bar{\omega}^2 X_{din}\, e^{i(\bar{\omega} t - \varphi)}}$$

$$-c\dot{x} = -ic\hat{\omega} X_{din}\, e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$\boxed{-c\dot{x} = c\omega^2 X_{din}\, e^{i(\omega t - \varphi - \pi/2)}}$$

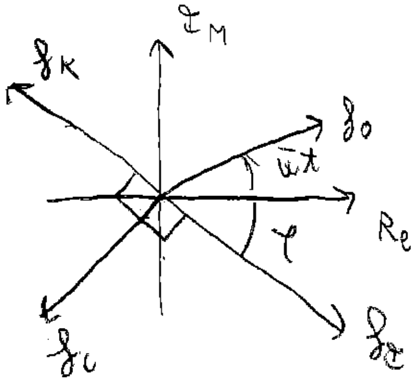
$$-Kx = -K X_{din}\, e^{i(\bar{\omega} t - \varphi)}$$

$$\boxed{-Kx = K X_{din}\, e^{i(\bar{\omega} t - \varphi - \pi)}}$$

$$-m\ddot{x} = f_I\, e^{i(\bar{\omega} t - \varphi)}$$

$$-c\dot{x} = f_c\, e^{i(\omega t - \varphi - \pi/2)}$$

$$-Kx = f_K\, e^{i(\omega t - \varphi - \pi)}$$



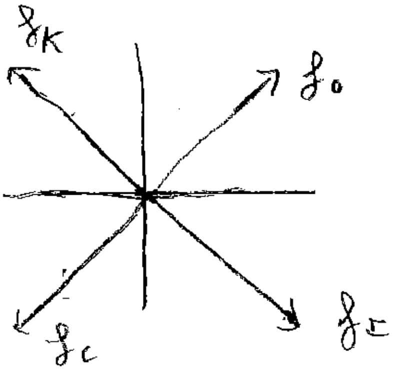
---

con $\quad f_0 \cos \hat{\omega} t$

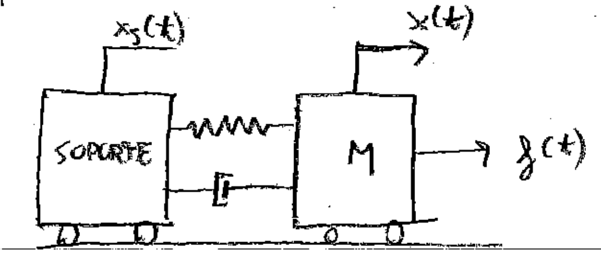
$f_0 \operatorname{sen} \bar{\omega} t$

en resonancia $\beta = 1$

$\varphi = \pi/2$



Respuesta al movimiento armónico del soporte



$$x_r(t)$$

$$x(t) = x_s(t) + x_r(t)$$

$$x_r(t) = x(t) - x_s(t)$$

$$f(t) - c\dot{x}_r(t) - Kx_r(t) = M\ddot{x}(t)$$

$$f(t) - c(\dot{x}(t) - \dot{x}_s(t)) - K(x(t) - x_s(t)) = M\ddot{x}(t)$$

Ecuación del movimiento absoluto

$$M\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) + c\dot{x}_s(t) + Kx(t)$$

$$\boxed{M\ddot{x}_r(t) + c\dot{x}_r(t) + K x_r(t) = f(t) - M\ddot{x}_s(t)}$$

$$f(t) = 0$$

$$M\ddot{x}_r(t) + c\dot{x}_r(t) + Kx_r(t) = -M\ddot{x}_s(t)$$

$$x_s(t) = \bar{X}_s \operatorname{sen} \tilde{\omega} t \quad // \quad \dot{x}_s(t) = \bar{X}_s \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t \quad // \quad \ddot{x}_s(t) = -\bar{X}_s \tilde{\omega}^2 \operatorname{sen} \tilde{\omega} t$$

$$M\ddot{x}_r(t) + c\dot{x}_r(t) + Kx_r(t) = M\bar{X}_s\tilde{\omega}^2 \operatorname{sen} \tilde{\omega} t$$

$$x_r(t) = \frac{M\bar{X}_s\tilde{\omega}^2}{K} D \operatorname{sen}(\tilde{\omega} t - \varphi_r) = \beta^2 \bar{X}_s D \operatorname{sen}(\tilde{\omega} t - \varphi_r)$$

$$x(t) = \bar{X}_s \operatorname{sen} \tilde{\omega} t + \beta^2 \bar{X}_s D \operatorname{sen}(\tilde{\omega} t - \varphi_r)$$

$$\varphi_r = \operatorname{arctg} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$x(t) = \bar{X}_s \operatorname{sen} \tilde{\omega} t + \beta^2 \bar{X}_s D [\operatorname{sen} \tilde{\omega} t \cos \varphi_r - \cos \tilde{\omega} t \operatorname{sen} \varphi_r]$$

$$x(t) = \bar{X}_s \operatorname{sen} \tilde{\omega} t + \beta^2 \bar{X}_s D \operatorname{sen} \tilde{\omega} t \cos \varphi_r - \beta^2 X_s D \cos \tilde{\omega} t + \operatorname{sen} \varphi_r$$

$$x(t) = \underbrace{\bar{X}_s (1 + \beta^2 D \cos \varphi_r) \operatorname{sen} \tilde{\omega} t}_{\bar{X} \cos \varphi} - \underbrace{\bar{X}_s \quad \beta^2 D \operatorname{sen} \varphi_r \cos \tilde{\omega} t}_{x \operatorname{sen} \varphi}$$

$$x(t) = \underline{\bar{X}} \operatorname{sen}(\hat{\omega} t - \varphi)$$

$$\underline{\bar{X}} \cos\varphi = \underline{\bar{X}}_s (1 + \beta^2 D \cos\varphi_r)$$

$$\underline{\bar{X}} \operatorname{sen}\varphi = \underline{\bar{X}}_s \beta^2 D \operatorname{sen}\varphi_r$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\bar{X}} = \underline{\bar{X}}_s \sqrt{(1 + \beta^2 D \cos\varphi_r)^2 + (\beta^2 D \cdot \operatorname{sen}\varphi_r)^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\beta^2 D \operatorname{sen}\varphi_r}{(1 + \beta^2 D \cos\varphi_r)} \end{array}}$$

$$\varphi_r = \operatorname{arctg} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} < \begin{array}{l} \cos\varphi_r = (1-\beta^2) D \\ \operatorname{sen}\varphi_r = 2\xi\beta D \end{array}$$

$$\underline{\bar{X}} = \underline{\bar{X}}_s D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\xi\beta^3}{1 - \beta^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$\boxed{x(t) = \underline{\bar{X}}_s D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \operatorname{sen}\left(\bar{\omega} t - \operatorname{arctg} \frac{2\xi\beta^3}{1 - \beta^2 + (2\xi\beta)^2}\right.}$$

Tema 9

Problema resuelto pg 212

$M = 1500$ Kg

$K = 600$ KN/m

$\xi = 0,6$

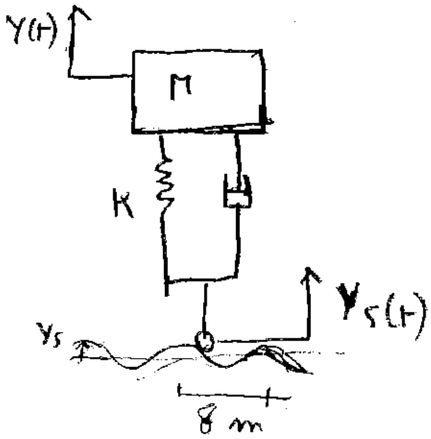
$\underline{\bar{X}}_s = 0,04$ m

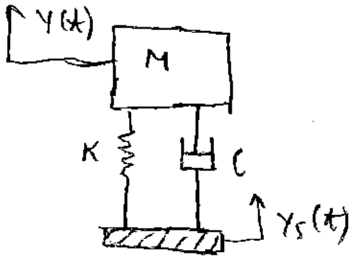
$\lambda = 8$ m

$V = 120$ Km/h

$\bar{X}$? $\underline{\bar{X}_r}$?

F ?



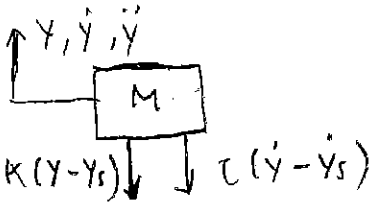


$$Y_s(r) = Y_s \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)$$

$$Y_s(r) = \bar{Y}_s \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} v t\right)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

$$Y_s(t) = \bar{Y} \operatorname{sen}(\omega t)$$



$$-C(\dot{Y} - \dot{Y}_s) - K(Y - Y_s) = M\ddot{Y}$$

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = C\dot{Y}_s + KY_s$$

$$\dot{Y}_s(t) = \bar{Y}_s\, \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t$$

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = \underbrace{C\,\bar{Y}_s\,\bar{\omega}}_{A \operatorname{sen} \alpha} \cos \bar{\omega} t + \underbrace{K\bar{Y}_s}_{A \cos \alpha} \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = A \operatorname{sen}(\bar{\omega} t + \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} A \operatorname{sen} \alpha &= C\bar{Y}_s\,\bar{\omega} \\ A \cos \alpha &= K\bar{Y}_s \end{aligned}\right\} \qquad A = \bar{Y}_s \sqrt{K^2 + (C\bar{\omega})^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{C\bar{\omega}}{K}$$

$$Y(t) = \frac{\bar{Y}_s \sqrt{K^2 + (C\bar{\omega})^2}}{K} \; D \operatorname{sen}(\bar{\omega} t + \alpha - \varphi)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\bar{Y} = \bar{Y}_s \frac{\sqrt{K^2 + (C\bar{\omega})^2}}{K} \; \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\underset{\frac{\omega}{\bar{\omega}}}{\beta})^2}} = 0,043 \text{ m}$$

$Y_s = 0,04$

$K = 600000 \frac{N}{m}$

$$\xi = \frac{C}{\bar{C}} = \frac{C}{2M\omega} \Rightarrow C = 2\xi M\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 20 \text{ rad/s} \qquad \bar{\omega} = \frac{2\pi}{\ } \cdot \overset{\overset{v}{\downarrow}}{\frac{120}{\ }}$$

⑤

$$Y_r(t) = Y(t) - Y_s(t)$$

$$Y_r(t) = \bar{Y}\,\text{sen}(\bar{\omega}t + \alpha - \varepsilon) + \bar{Y}_s\,\text{sen}(\bar{\omega}t)$$

Así no lo hacemos

$$M\ddot{x}_r(t) + C\dot{x}_r(t) + Kx_r(t) = -M\ddot{y}_s(t)$$

$$Y_s(t) = \bar{Y}_s\,\text{sen}(\bar{\omega}t) \;||\; \dot{y}_s(t) = Y_s\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t) \;||\; \ddot{y}_s(t) = -\bar{Y}_s\bar{\omega}^2\,\text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$M\ddot{x}_r + C\dot{x}_r + Kx_r = M\bar{Y}_s\bar{\omega}^2\,\text{sen}\,\omega t$$

$$Y_r = \frac{M\bar{Y}_s\bar{\omega}^2}{K}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$Y_r = \beta^2\,Y_s\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = 0{,}04\,m$$

Fuerza trasmitida

$$-KY_r - C\dot{Y}_r = M\ddot{y}$$

$$y = \bar{Y}\,\text{sen}(\bar{\omega}t + \alpha - \varepsilon)$$

$$\dot{y} = \bar{Y}\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t + \alpha - \varepsilon)$$

$$\ddot{y} = -\bar{Y}\bar{\omega}^2\,\text{sen}(\bar{\omega}t + \alpha - \varepsilon)$$

$$F = M\bar{Y}\bar{\omega}^2 = 1500\cdot 0{,}043\left(\frac{2\pi}{8}\,\frac{120}{3{,}6}\right)^2 = 44200\,N$$

T

TEMA 10

Respuesta ante las funciones impulso, escalón, rampa

Impulso: Se produce cuando tienes una fuerza muy intensa durante un periodo muy corto de tiempo

$$\left.\begin{array}{l} F \to \infty \\ \Delta t \to 0 \end{array}\right\} \qquad F\Delta t = I$$

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}\, dt \qquad\qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

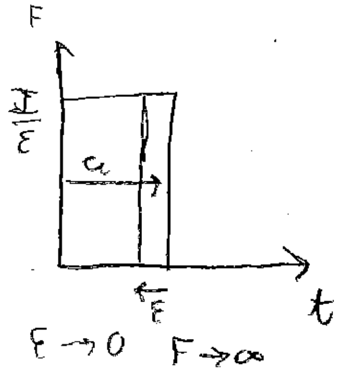
$\Delta t \to 0$

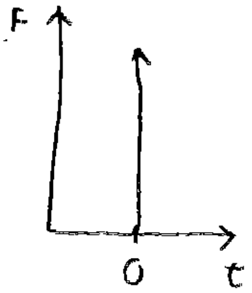
$F \to \infty$

$$\int_t^{t+\Delta t} \vec{F}\, dt = m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = I$$

$\Delta t \to 0$

$F \to \infty$





δ de Dirac

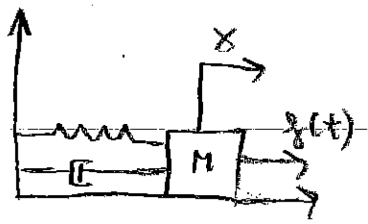
$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(t)\, dt = f(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1$$

$$F(t-a) = I\,\delta(t-a)$$

Respuesta ante la función impulso



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = I\delta(t)$$

$t = 0^-$ $\quad x_0 = 0$

$\dot{x}_1 = 0$

en $t=0$ aplico el impulso

$t > 0$ $\quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$

$$x(0^+) = 0$$

$$I = m(\dot{x}(0^+) + \overset{0}{\cancel{\dot{x}(0^-)}})$$

$$\dot{x}(0^+) = \frac{I}{m}$$

El resultado será para condiciones iniciales nulas

Para el caso de subamortiguado

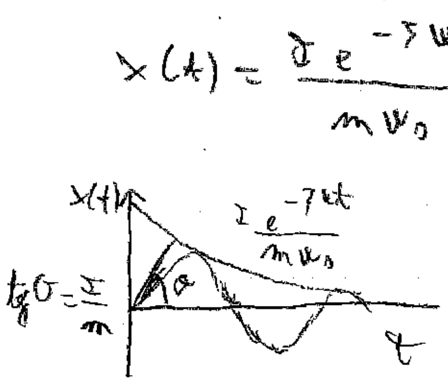
$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(x_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t\right)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t}$$ con C.C. iniciales nulas

Para un impulso unitario $\boxed{h(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t}$

$$x(t) = I\,h(t)$$

$$x(t) = \frac{I e^{-\xi\omega(t-a)}}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D (t-a)$$ Para $t = a$



Relación entre las funciones impulso, escalón y rampa

Si derivo una rampa de pendiente m → escalón valor cte m

Derivo escalón m → impulso m

Si integro la respuesta a un impulso de amplitud i → respuesta escalón de valor i

Si integro escalón i → rampa i

Respuesta a un escalón (con condiciones iniciales nulas

$$x(t) = \int_0^t \frac{\mathcal{I} e^{-\xi \omega t}}{m \omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t \, dt$$

$$x(t) = \frac{\mathcal{I}}{K} \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_D t - \theta) \right]$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = \mathcal{I}$$

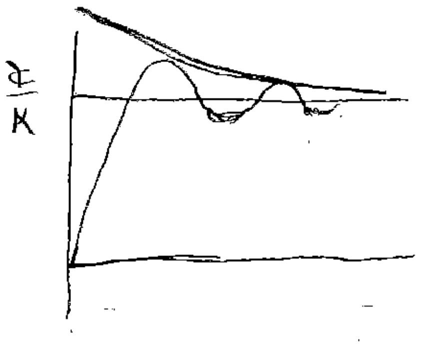
$$x(t) = x_h + x_p$$

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \operatorname{sen} \omega_D t) + \frac{\mathcal{I}}{K}$$

$$x_0 = 0 \qquad A = -\frac{\mathcal{I}}{K}$$

$$\dot{x}_0 = 0 \qquad B = -\frac{\xi \omega \mathcal{I}}{K \omega_D}$$

$$x(t) = \frac{\mathcal{I}}{K} \left[1 - e^{-\xi \omega t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi \omega}{\omega_D} \operatorname{sen} \omega t \right) \right.$$



$$x(t) = \frac{\mathcal{I}}{K} t - \frac{1}{K \omega_D} \left[e^{-\xi \omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \operatorname{sen} 2\theta \right.$$

Solución con condiciones iniciales no nulas

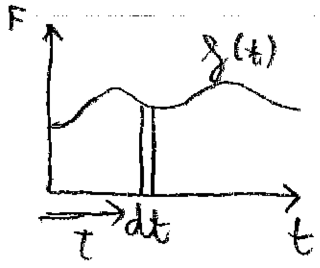
$$X(t) = X_i(t)\Big|_{\substack{x_0\\ \dot{x}_0}} = \big[X_h(t) + x_p(t)\big]_{\substack{x_0\\ \dot{x}_0}}$$

$$X(t) = [x_T]_{\substack{x_0\\ \dot{x}_0}} + [x_0]_{\substack{x_0=0\\ \dot{x}_0=0}}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t}\left[x_0 \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\operatorname{sen}\omega_D t\right]}_{} +$$

$$\underbrace{+\frac{I}{k}\cancel{t}\cdot\frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}\overset{x_T|_{\dot{x}_0}^{x_0}}{\operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta)} + \operatorname{sen}2\theta\right]}_{x_i\big|_{\substack{x_0=0\\ \dot{x}_0=0}}}$$

Respuesta a una excitación de tipo general: metodo de la integral de convolución



Esta constituida por la suma de infinitos impulsos infinitesimales de altura f(t), y luego aplicar el principio de superposición para obtener la respuesta mediante la suma de respuestas del sistema ante los infinitos impulsos diferenciales aplicados en instantes anteriores.

$h(t-\tau)$

$dI = f(\tau)\,d\tau$

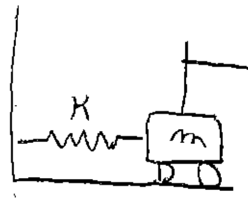
$dx(t) = dI\,h(t-\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$ Duhamel

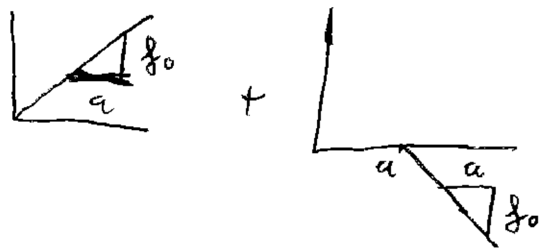
$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\frac{e^{-\xi\omega(t-\tau)}}{m\omega_D}\operatorname{sen}\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

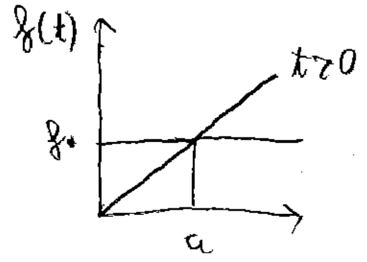
Tema 10

Problema resuelto pg 231



reposo
$\dot{x}_0 = 0$
$x_0 = 0$





$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = \frac{\mathcal{I}}{K}t - \frac{\mathcal{I}}{K\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}\,\text{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \text{sen}\,2\theta\right]$$

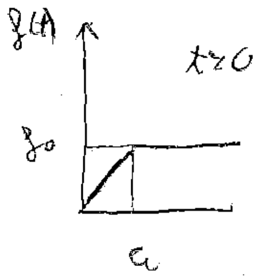
$$\mathcal{I} = \frac{f_0}{a} \; ; \; \xi = 0 \, , \; \omega_D = \omega \quad \theta = 0$$

$$x_1(t) = \frac{f_0}{Ka}t - \frac{f_0}{Ka\omega}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$x_2(t) = -\frac{f_0}{Ka}(t-a) + \frac{f_0}{Ka\omega}\,\text{sen}\,\omega(t-a)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{K} + \frac{f_0}{Ka\omega}\left[\text{sen}\,\omega(t-a) - \text{sen}\,\omega t\right]$$

otra opción



$$x_1 = \frac{f_0}{Ka}t - \frac{f_0}{Ka\omega}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\dot{x}_1 = \frac{f_0}{Ka} - \frac{f_0}{Ka}\cos\omega t$$

$$x_1(a) = \frac{f_0}{K} - \frac{f_0}{Ka\omega}\,\text{sen}\,\omega a$$

$$\dot{x}_1(a) = \frac{f_0}{Ka} - \frac{f_0}{Ka}\cos\omega a$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f_0$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t + \frac{f_0}{K}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega$$

$$\frac{f_0}{K} - \frac{f_0}{Ka\omega}\,\text{sen}\,\omega a = A\cos\omega a + B\,\text{sen}\,\omega a + \frac{f_0}{K}$$

$$\frac{f_0}{Ka} - \frac{f_0}{Ka}\cos\omega a = -A\omega\,\text{sen}\,\omega a + B\omega\cos\omega a$$

$$A = -\frac{f_0}{Ka\omega}\,\text{sen}\,\omega a$$

$$B = \frac{f_0}{Ka\omega}(\cos\omega a -$$

$$x(t) = \frac{-f_0}{K a w} \operatorname{sen} w a \cos w t + \frac{f_0}{K a w} (\cos w a - 1) \operatorname{sen} w t + \frac{f_0}{K}$$

Podría mover t a a → de manera que desde tenga $t=a \rightarrow t'=0$

$t'=0 \cdot \quad t=0 \rightarrow t'=t-a$

$$x(t') = A \cos wt' + B \operatorname{sen} wt' + \frac{f_0}{K}$$

$$\dot{x}(t') = -Aw \operatorname{sen} wt' + Bw \cos wt'$$

$$\frac{f_0}{K} - \frac{f_0}{Kaw} \operatorname{sen} wa = A + \frac{f_0}{K}$$

$$\frac{f_0}{Ka} - \frac{f_0}{Ka} \cos wa = Bw$$

$$A = -\frac{f_0}{Kaw} \operatorname{sen} wa$$

$$B = \frac{f_0}{Kaw} - \frac{f_0}{Kaw} \cos wa$$

$$x(t') = -\frac{f_0}{Kaw} \operatorname{sen} wa \cos wt' + \left(\frac{f_0}{Kaw} - \frac{f_0}{Kaw} \cos wa\right) \operatorname{sen} wt' + \frac{f_0}{K}$$

$$x(t') = \frac{f_0}{K} + \frac{f_0}{Kaw}\left[\operatorname{sen} wt' - \operatorname{sen} w(t'+a)\right]$$

$$x(t) = \frac{f_0}{K} + \frac{f_0}{Kaw}\left[\operatorname{sen}(t-a) - \operatorname{sen} wt\right]$$

La mejor

3ª forma $x(t) = x_r + x_{ocir}$ condiciones iniciales nulas

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$x_r = x_0 \cos wt + \frac{\dot{x}_0}{W} \operatorname{sen} wt$$

$$x(t) = \frac{F}{K}\left[1 - \frac{e^{-\zeta wt}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(w_0 t - \sigma)\right]$$

$$x_{ocon} = \frac{f_0}{Ka}\left[1 - \cos wt\right]$$

$$x(0) = \frac{f_0}{K} - \frac{f_0}{Kaw} \operatorname{sen} wa$$

$$\dot{x}(0) = \frac{f_0}{Ka} - \frac{f_0}{Ka} \cos wa$$

$$x_r = \left(\frac{f_0}{K} - \frac{f_0}{Kaw} \operatorname{sen} wa\right) \cos wt + \left(\frac{f_0}{Kaw} - \frac{f_0}{Kaw} \cos wa\right) \operatorname{sen} wt$$

$$x(t) = \frac{f_0}{Ka} + \cos wt - \frac{f_0}{Kaw} \cos wt \operatorname{sen} wa +$$

$$+ \frac{f_0}{Kaw} \operatorname{sen} wt - \frac{f_0}{Kaw} \cos wa \operatorname{sen} wt + \frac{f_0}{Ka} - \frac{f_0}{Ka} \cos wt$$

$$x(t) = \frac{f}{Ka} + \frac{f_0}{Kaw} \left[\operatorname{sen} w(t-a) - \operatorname{sen} wt \right]$$

Continuación del problema resuelto

1) Por integral de convolución

$$x(t) = \int_0^{t} f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \int_0^{a} \frac{f_0}{a}\tau\, h(t-\tau)\,d\tau + \int_a^{t} f_0\, h(t-\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \frac{e^{-\xi w t}}{m w_0}\operatorname{sen} w_0 t \quad || \quad h(t) = \frac{\operatorname{sen} wt}{mw}$$

$$\xi = 0$$

$$w_0 = w$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{f_0}{a}\int_0^{a} \frac{\tau \operatorname{sen} w(t-\tau)}{mw}\,d\tau}_{\alpha} + \underbrace{f_0 \int_a^{t} \frac{\operatorname{sen} w(t-\tau)}{mw}\,d\tau}_{\beta}$$

$$\alpha = \frac{f_0}{mwa}\int_0^{a} \tau \operatorname{sen} w(t-\tau)\,d\tau = \frac{f_0}{mwa}\left[\frac{a}{w}\cos w(t-a) + \frac{1}{w^2}\operatorname{sen} w(t-a - \frac{1}{w^2}\operatorname{sen} wt\right]$$

$$\beta = \frac{f_0}{mw}\int_a^{t} \operatorname{sen} w(t-\tau)\,d\tau = \frac{f_0}{K}\left(1-\cos w(t-a)\right]$$

$$x(t) = \frac{f_0}{K} + \frac{f_0}{Kaw}\left(\operatorname{sen} w(t-a) - \operatorname{sen} wt\right]$$

$$x(t) = \cancel{\frac{f_0}{K}\cos w(t-a)} + \frac{f_0}{Kwa}\operatorname{sen} w(t-a) - \frac{f_0}{Kwa}\operatorname{sen} wt + \frac{f_0}{K} - \cancel{\frac{f_0}{K}\cos(t}$$

5. Sistemas de un grado de libertad. Cálculo de la respuesta. Amort de Coulomb.

Descripción del fenómeno y ecuación del movimiento para un sistema de 1 gdl sin amortiguamiento viscoso. ¿Por qué se trata de un problema no lineal?

Resolución completa del problema, teniendo en cuenta los siguientes datos:

Condiciones iniciales: x (t=0) = $\mathbf{x_0 = 6{,}5}$ **cm.**

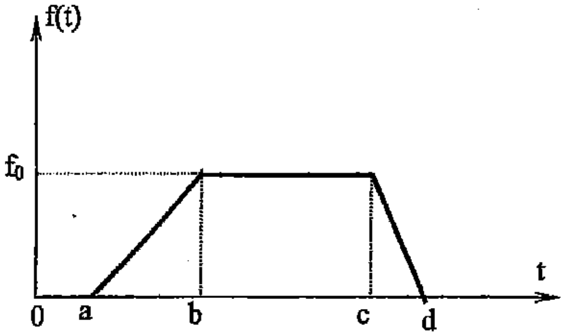
$\mathbf{x'}$ (t=0) = $\mathbf{x_0' = 0}$ **cm/s.**

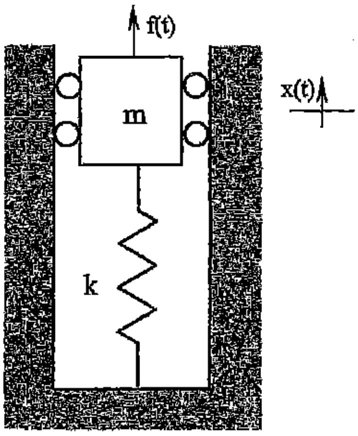
Relaciones: $\boldsymbol{\mu_d N/k = \mu_e N/k = 1}$ **cm.**

Frecuencia natural $\boldsymbol{\omega = \pi}$ **rad/s.**

6. Sistemas de un grado de libertad. Cálculo de la respuesta. Superposición.

Sea el sistema discreto de 1 gdl representado en la figura. Dicho sistema está sometido a la siguiente excitación:





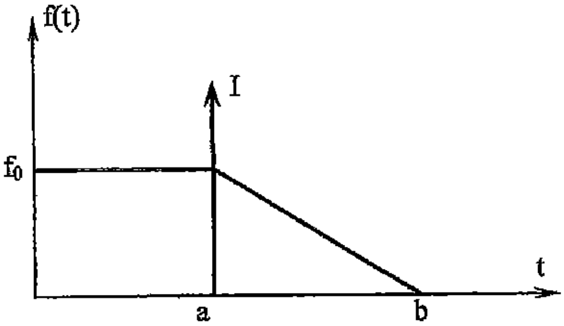
En **t=0** el sistema tiene una velocidad v y se encuentra en su posición de equilibrio. Se pide calcular la respuesta en **t=d**.

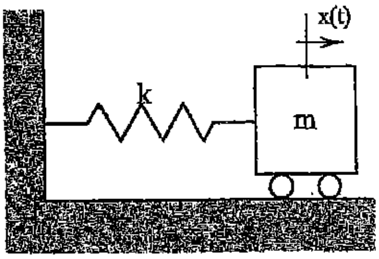
Datos: Respuesta general a la función tipo rampa de pendiente ***p*** con condiciones iniciales nulas:

$$x(t) = \frac{p}{k}t - \frac{p}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}\,\mathrm{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \mathrm{sen}\,2\theta\right] \text{ donde } \theta = \mathrm{arctg}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

7. Sistemas de un grado de libertad. Cálculo de la respuesta. Superposición.

Sea un sistema discreto de 1 gdl sin amortiguamiento. Se le somete a un sistema de fuerzas constituido por un escalón, un impulso de magnitud **I** y una rampa según la siguiente figura:





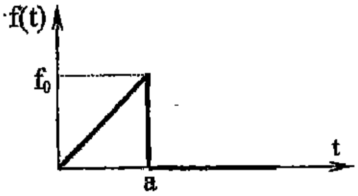
Partiendo del reposo, calcular la respuesta en t=b.

Datos: Respuesta general a la función tipo rampa de pendiente ***p*** con condiciones iniciales nulas:

$$x(t) = \frac{p}{k}t - \frac{p}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}\operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \operatorname{sen}2\theta\right]$$

8. Respuesta de sistemas de 1 gdl. Superposición

Sea un sistema discreto de 1gdl sin amortiguamiento. Se le somete a la siguiente ley de fuerzas:

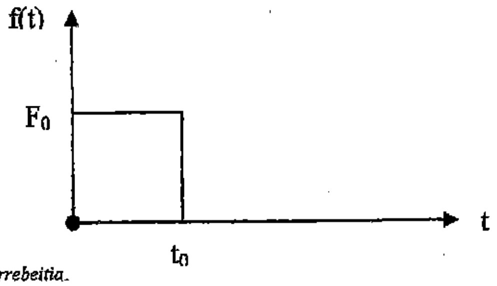


Nota: respuesta a la función rampa de pendiente *I* con condiciones iniciales nulas: $x(t) = \frac{I}{k}\left(t - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\right)$

Partiendo del reposo, calcular la respuesta en **t > a**.

9. Sistemas de un grado de libertad. Cálculo de la respuesta. Integral de Duhamel.

Sea un sistema lineal no amortiguado de 1 gdl, de coeficientes ***m*** y ***k***. Partiendo del reposo, dicho sistema experimenta una fuerza ***f(t)*** como la representada en la figura:



⑤

$m\ddot{x} + (\text{sig}\,\dot{x})\,\mu_d N + Kx = 0$

↑ no lineal por esto

② $\dot{x} > 0 \quad m\ddot{x} + Kx = -\mu_d N$

① $\dot{x} < 0 \quad m\ddot{x} + Kx = \mu_d N$

$x_0 = 6{,}5$ cm

$\dot{x}_0 = 0$ cm/s

$\frac{\mu_d N}{K} = \frac{\mu_e N}{K} = 1$cm

$w = \pi$ rad/s

① $Kx_0 > \mu_e N \rightarrow x_0 > \frac{\mu_e N}{K}$ $\quad 6{,}5$ cm > 1cm $\Rightarrow$ arranca

$x_1(t) = A\cos wt + B\,\text{sen}\,wt + \frac{\mu_d N}{K}$

$\dot{x}_1(t) = -Aw\,\text{sen}\,wt + Bw\cos wt$

$\dot{x}_0 = 0 \rightarrow 0 = B$

$6{,}5 = A + 1 \Rightarrow A = 5{,}5$ cm

$\boxed{x_1(t) = 5{,}5\cos \pi t + 1}$

$\dot{x}_1(t) = -5{,}5\pi\,\text{sen}\,\pi t = 0$

$\Downarrow$

$\pi t = \pi$

$t_1 = 1$ seg $\quad$ (t_1 momento en el que se para)

$x_1 = -4{,}5$ cm

② $|Kx_1| > |\mu_e N| \Rightarrow x_1 > \frac{\mu_e N}{K}$ $\quad$ Arranca

$x_2(t) = A\cos\pi t + B\,\text{sen}\,\pi t - 1$

$\dot{x}_2(t) = -A\pi\,\text{sen}\,\pi t + B\pi\cos\pi t$

$B = 0$

$-4{,}5 = -A - 1 \Rightarrow A = 3{,}5$

$x_2(t) = 3{,}5\cos\pi t - 1$

$\dot{x}_2(t) = -3{,}5\pi\,\text{sen}\,\pi t$

$t_2 = 2$ seg

$x_2 = 2{,}5$ cm

③ $2,5 > 1$ Usando ①

$x_3(t) = A\cos\pi t + B\operatorname{sen}\pi t + 1$

$\dot{x}_3(t) = -A\pi\operatorname{sen}\pi t + B\pi\cos\pi t$

$B = 0$

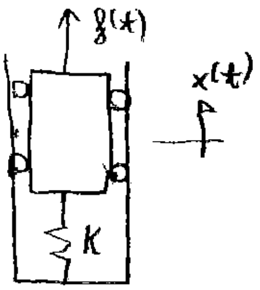
$2,5 = A + 1 \Rightarrow A = 1,5$

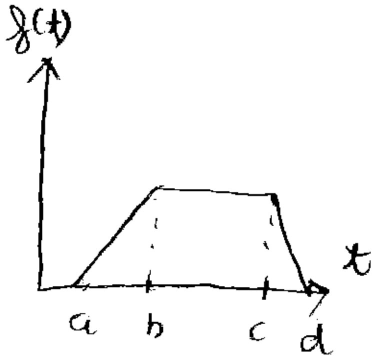
$x_3(t) = 1,5\cos\pi t + 1$

$\dot{x}(t) = -1,5\pi\operatorname{sen}\pi t \qquad t = 3\,sg$

$x_3 = -1,5 + 1 = 0,5 \rightarrow$ No se mueve, se para y se acabó

Problema 6





$\dot{x}_0 = V$

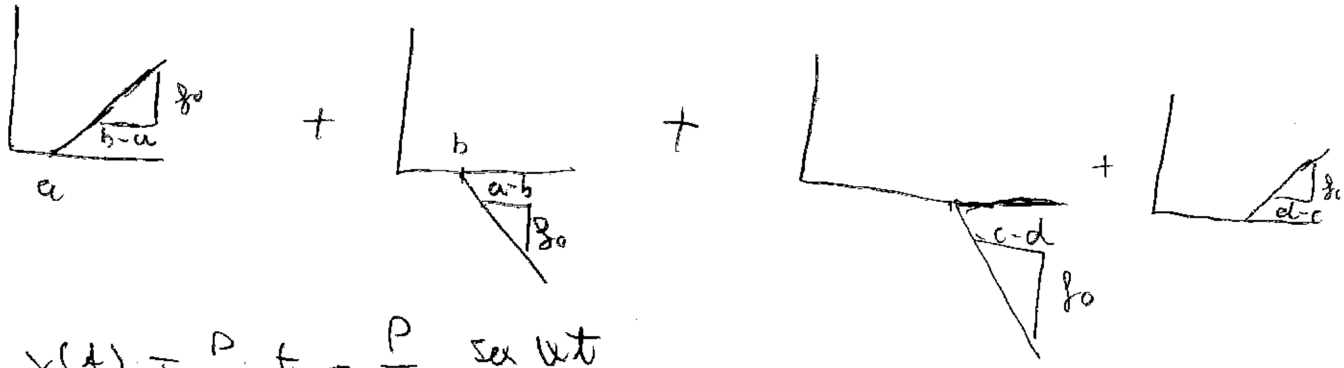
$x_0 = 0$

$x(d)$

Superposición

$x(t) = x_r(t) + x_\sigma(t)$

$$x(t) = \frac{P}{K} t - \frac{P}{K\omega_n} \left[e^{-\xi \omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \operatorname{sen} 2\theta \right]$$



$$x(t) = \frac{P}{K} t - \frac{P}{K\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

$$x_\sigma(t) = \frac{f_0}{(b-a)K}(t-a) - \frac{f_0}{(b-a)K\omega} \operatorname{sen} \omega(t-a) + \frac{f_0}{(a-b)K}(t-b) - \frac{f_0}{(a-b)K\omega} \operatorname{sen} \omega(t$$

$$+ \frac{f_0}{(c-d)K}(t-c) - \frac{f_0}{(c-d)K\omega} \operatorname{sen} \omega(t-c) + \frac{f_0}{(d-c)K}(t-d) - \frac{f_0}{(d-c)K\omega} \operatorname{sen} \omega(t-d))$$

Respuesta al transitorio)

$m\ddot{x} + Kx = 0$

$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$

$0 = A \Rightarrow x = B \operatorname{sen} \omega t$

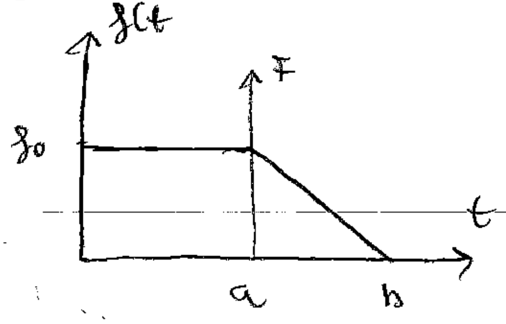
$\dot{x} = B \omega \cos \omega t$

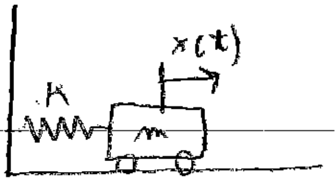
$V = B \omega \Rightarrow B = \frac{V}{\omega}$

$$x(t=d) = \frac{f_0}{(b-a)K}(d-a) - \frac{f_0}{(b-a)K\omega} \operatorname{sen} \omega(d-a) + \frac{f_0}{(a-b)K}(d-b) -$$

$$- \frac{f_0}{(a-b)K\omega} \operatorname{sen} \omega(d-b) + \frac{f_0}{(c-d)K}(d-c) - \frac{f_0}{(c-d)K\omega} \operatorname{sen} \omega(d-c) + \frac{V}{\omega} \operatorname{sen} \omega d$$

⑦



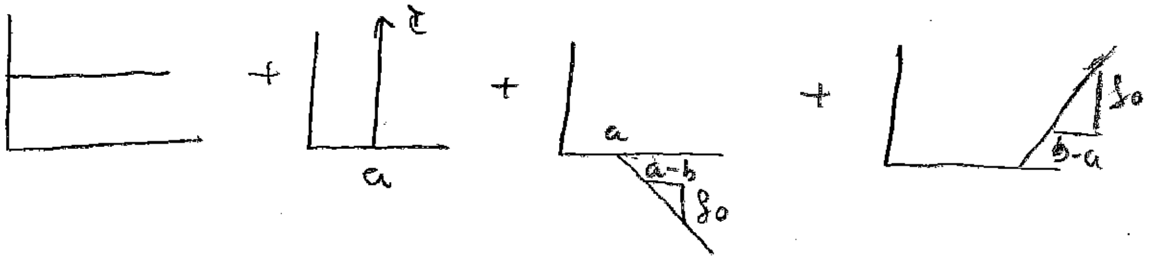


$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{array}\right\} \text{CI nulos}$$

↓
no se hace superposición

$$x(t) = \frac{P}{K} t - \frac{P}{K\omega_D} \left[e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t - 2\sigma) + \operatorname{sen} 2\sigma \right]$$

$$\sigma = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \text{como } \xi = 0 \Rightarrow \overset{\text{rampa}}{x^r}(t) = \frac{P}{K} t - \frac{P}{K\omega} \operatorname{sen} \omega t$$



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

escalon (derivando la de rampa)

$$x^e = \frac{P}{K} - \frac{P}{K} \cos \omega t \Rightarrow x^e = \frac{P}{K}(1 - \cos \omega t)$$

$\xi = 0 \Rightarrow \omega = \omega_D$

impulso (derivando escalon)

$$x^I = \frac{P}{K} \omega \operatorname{sen} \omega t \qquad x^I = \frac{P}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{K}{\omega^2} \qquad \frac{1}{\frac{K}{\omega^2}\omega} = \frac{\omega}{K}$$

$$x_1(t) = \frac{f_0}{K}(1 - \cos \omega t)$$

$$x_2(t) = \frac{I\omega}{K} \operatorname{sen} \omega (t-a)$$

$$x_3(t) = \frac{f_0}{(a-b)K}(t-a) - \frac{f_0}{(a-b)K\omega} \operatorname{sen} \omega (t-a)$$

$$x_4(t) = \frac{f_0}{(b-a)K}(t-b) - \frac{f_0}{(b-a)K\omega} \operatorname{sen} \omega (t-b)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{K}(1 - \cos \omega b) + \frac{I\omega}{K} \operatorname{sen}(b-a) + \frac{f_0}{(a-b)K}(b-a) - \frac{f_0}{(a-b)K\omega} \operatorname{sen} \omega(b-a)$$

emen ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA
INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3° Ingenieria Industrial. Marzo 2002.
Unidad tematica B. Examen Parcial
Peso: 50 %.
Teoria. Tiempo: 45 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2002.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa. Azterketa Partziala
Pisua: 50%.
Teoria. Iraupena: 45 min.

TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

---

a) Fuentes de no linealidad en sistemas mecánicos. Enumeración y breve explicación.

b) Dado el sistema ciclomotor-conductor de la figura 1, establecer las sucesivas modelizaciones que pueden plantearse desde el modelo más básico al más refinado. Indicar asimismo para cada modelo, qué se añade con respecto al anterior y con qué finalidad.

c) Dado el sistema de la figura 2, calcular la respuesta si se deja caer sobre el mismo un cuerpo de masa *m* desde una altura *h*. Suponer un choque plástico (los cuerpos quedan perfectamente solidarios después del choque). Suponer amortiguamiento subcrítico.

d) Se tiene el sistema mecánico de la figura 3, junto con la siguiente instrumentación de medida: dos acelerómetros piezoeléctricos, un martillo excitador dotado de célula de carga y un analizador FFT con 3 canales de entrada. Con el motor parado,

1) Representar el montaje de la cadena básica de medida con todas sus conexiones e indicando brevemente la función de cada uno de sus elementos.
2) Dibujar esquemáticamente la posición y orientación de los acelerómetros en el sistema para poder detectar los siguientes modos de vibración:
   - Los modos de flexión en el plano vertical.
   - Los modos de flexión en el plano horizontal.
   - Los modos de torsión.

Una vez detectadas las tres primeras frecuencias naturales del sistema, proponer una vía para visualizar los modos correspondientes a las mismas, pudiendo utilizar un estroboscopio.

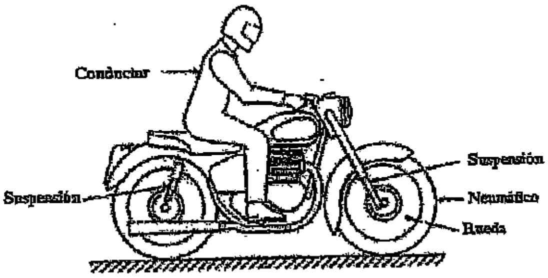


Figura 1. Sistema ciclomotor-conductor.

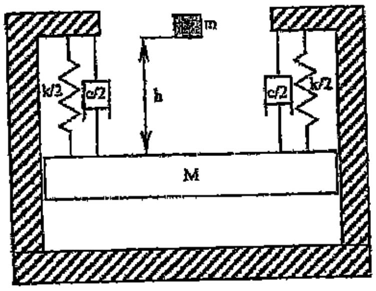


Figura 2.

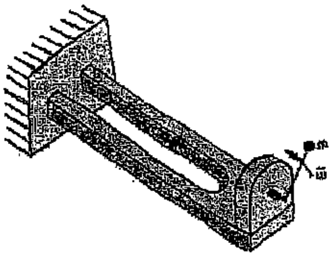


Figura 3. Sistema viga-motor.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

Ingeniería Industrial. 3er curso. Junio 2002.
Unidad temática: B.
1er ejercicio.
Peso: 60 %. Tiempo: 60 min.

GRUPO:
NOMBRE:
APELLIDOS:

---

1. Representar en el diagrama de Argand (diagrama de vectores giratorios) las diferentes fuerzas que intervienen en el sistema discreto básico de la Figura 1, justificándolo con las correspondientes ecuaciones. Indicar cómo quedaría el diagrama en la condición de resonancia. (3p)

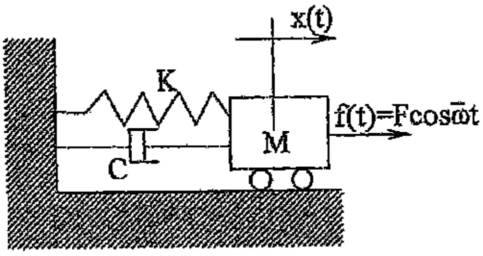


Figura 1.

2. En el sistema de la Figura 2, se da al soporte un desplazamiento a lo largo del tiempo $x_0(t)$, de la forma indicada en la Figura 3. Obtener el desplazamiento absoluto x(t) de la masa M en función del tiempo (ver nota). (3p)

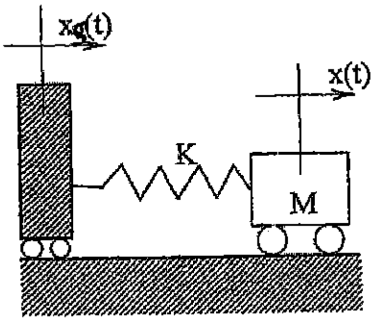


Figura 2.

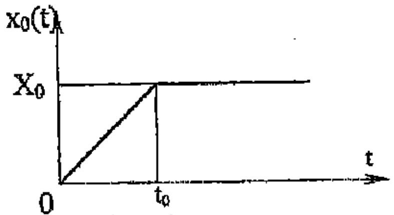


Figura 3.

Nota: respuesta a la función rampa:

$$x(t)=\frac{I}{k}\left(t-\frac{\operatorname{sen}\omega\, t}{\omega}\right)$$

3. Para el sistema de la Figura 4, obtener: (4p)
   a) Ecuaciones del movimiento en forma matricial
   b) Calcular y representar los modos naturales de vibración.

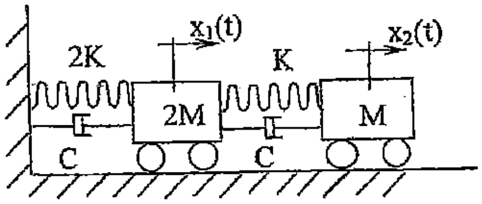
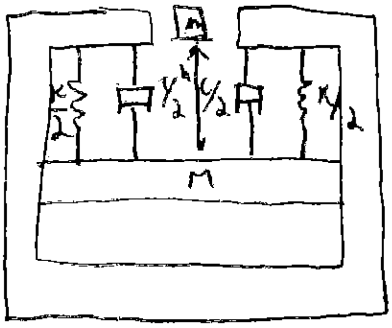


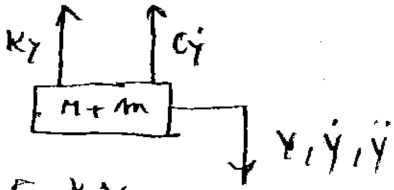
Figura 4.

Examen Marzo 2002

c)



Subcrítica



$F = ky$

$F = c\dot{y}$

$y_0 = 0$
$\dot{y}_0 = v$]

$$(M+m)\dot{y} + c\dot{y} + Ky = 0$$

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\left[A\cos\omega_D t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_D t\right]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

$$\xi = \frac{c}{C} = \frac{c}{2(M+m)\sqrt{\frac{K}{M+m}}} \Rightarrow \frac{c}{2\sqrt{(M+m)K}}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_D = \sqrt{\frac{K}{M+m}}\sqrt{1-\frac{c^2}{4(M+m)K}}$$

$y_0 = 0 \rightarrow 0 = A \;||\; y = e^{-\xi\omega t} B\,\mathrm{sen}\,\omega_D t$

$$\dot{y} = -\xi\omega e^{-\xi\omega t} B\,\mathrm{sen}\,\omega_D t + B\omega_D e^{-\xi\omega t}\cos\omega_D$$

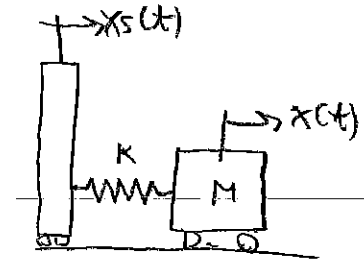
$\dot{y}_0 = v \rightarrow v = B\omega_D \Rightarrow B = \frac{v}{\omega_D}$

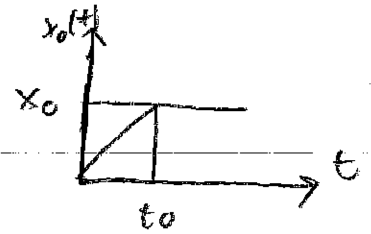
$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\frac{v}{\omega_D}\,\mathrm{sen}\,\omega_D t$$

Para sacar la v → momento lineal (conservación)

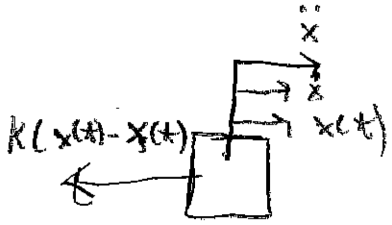
$$m\sqrt{2gh} = (M+m)V \rightarrow V = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

Examen Junio 2002





$$x(t) = \frac{I}{K}\left(t - \frac{\text{sen}\, wt}{w}\right)$$

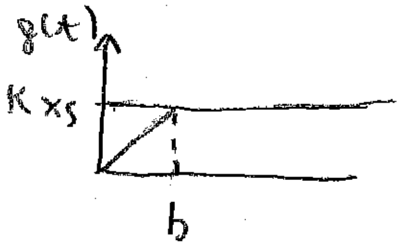


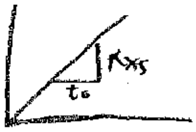
$$-K\left(x(t) - x_s(t)\right) = M\ddot{x}(t)$$

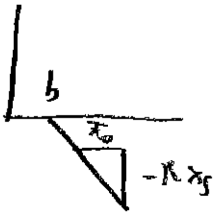
$$M\dot{x}(t) + K\,x(t) = K\,x_s(t)$$

Lo ajustamos a $\rightarrow M\dot{x}(t) + K\,x(t) = g(t)$

$$w = \sqrt{\frac{K}{M}}$$







$$x = \frac{K x_s}{K\,t_0}\left(t - \frac{\text{sen}\, wt}{w}\right) - \frac{K x_s}{K\,t_0}\left[(t - t_0) - \frac{\text{sen}\, w(t - t_0)}{w}\right]$$

$$x = x_s + \frac{x_s}{t_0\,w}\left[(\text{sen}(w(t - t_0)) - \text{sen}\, wt\right]$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

Ingeniería Industrial. 3^er^ curso. Marzo 2003.
Unidad temática: B.
Ejercicio 2
Peso: 30 %. Tiempo: 50 min.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Martxoak 2003
Atal Tematikoa: B
2. ariketa
Pisua: % 30. Iraupena: 50 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

Un buque es empujado por dos hélices movidas por sendos ejes huecos. Para estudiar la deformación axial (tracción-compresión) del **sistema eje-hélice**, éste se modeliza como un sistema de 1 gdl cuyos parámetros se dan en la figura 1.

A velocidad de crucero ($\Omega = 238{,}73$rpm) por efecto del giro de la hélice en el agua, el sistema eje-hélice experimenta una fuerza de empuje hacia adelante, modelizada como suma de una componente estática $\mathbf{F_E}$ y de una sinusoide de amplitud $\mathbf{F_D}$ cuya frecuencia es producto del número de álabes **n** por la velocidad de rotación del eje Ω (figura 3). Se pide lo siguiente:

1) Frecuencia natural ω del sistema eje-hélice. Frecuencia de la excitación para hélice de **n** álabes. **(1p)**
2) Expresión detallada de la respuesta estacionaria **x(t)** de dicho sistema, en función del número de álabes **n**, a velocidad de crucero. (Ω=238,73 rpm = 25rad/s). **(3 p)**
3) Respuesta estacionaria si la hélice tiene **n**=4 álabes. ¿Qué sucede considerando las restricciones de espacio de la figura 2? (Se puede observar que si el desplazamiento de los álabes es superior a 0,3m, entonces éstos chocan con el casco). **(3p)**
4) Calcular un número **n** de álabes para la hélice tal que no se produzcan choques entre hélice y casco. Obtener la amplitud de la vibración para ese número de álabes. **(3p)**

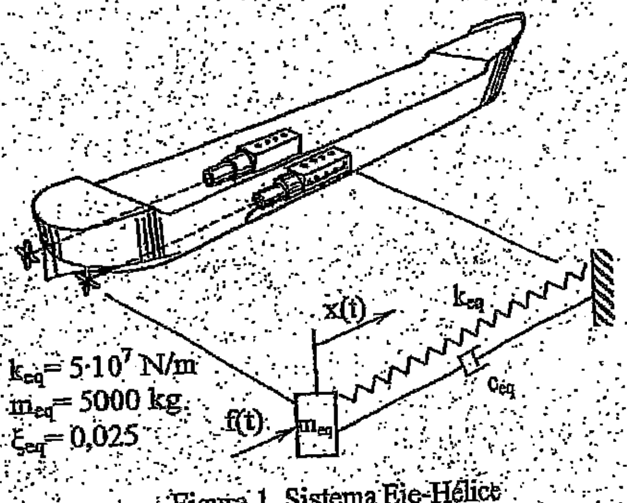


Figura 1. Sistema Eje-Hélice

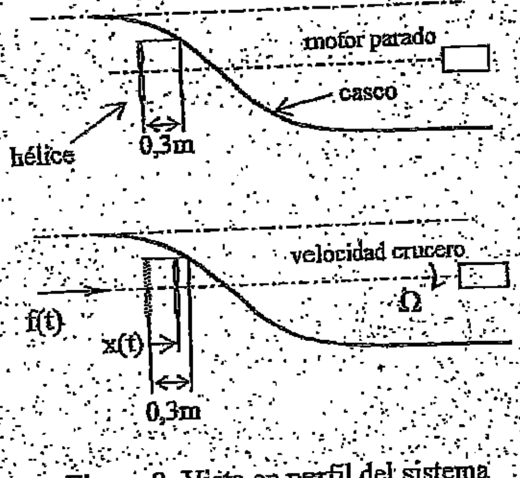


Figura 2. Vista en perfil del sistema

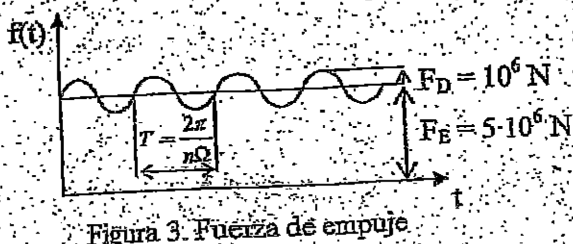
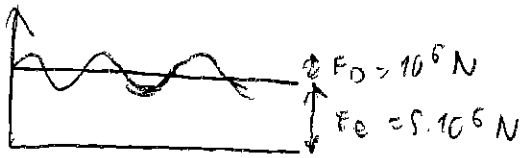
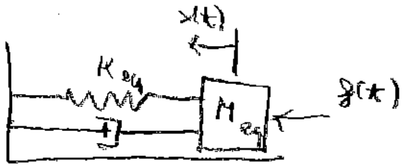


Figura 3. Fuerza de empuje

Examen Marzo 2003





$K_{eq} = 5 \cdot 10^7$

$m_{eq} = 5000$ Kg

$\xi_a = 0,025$

1) $\Omega = 238,73$ rpm

$f = n\Omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^3}} = 100 \text{ rad/s}$$

$$\bar{\omega} = n\, 2\pi \, \frac{238,73}{60} = 20\, n \text{ rad/s}$$

2) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x_1(t) = \frac{f_0}{K} D \operatorname{sen}(\omega t - \sigma)$$

$$\operatorname{arc\,tg} \sigma = \frac{2\xi B}{1 - B^2}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-B^2)^2 + (2\xi B)^2}}$$

Respuesta senusoida

$$x_{est} = \frac{f_0}{K} = \frac{10^6}{5 \cdot 10^7} = 0,02 \text{ m} \qquad B = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{n}{4}$$

$$x_1(t) = \frac{0,02}{\sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{16}\right)^2 + \left(2 \cdot 0,025 \frac{n}{4}\right)^2}} \operatorname{sen}(20 n t - \sigma)$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 0,025 \cdot n}{4\left(1 - \frac{n^2}{16}\right)} \Rightarrow \sigma = \operatorname{arct}\left(\frac{0,2\, n}{16 - n^2}\right)$$

Respuesta componente estatica

$$x_2(t) = \frac{f_E}{K} = \frac{5 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^7} = 0,1 \text{ m}$$

Respuesta Total

$$x(t) = 0,1 + \frac{0,02}{\sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{16}\right)^2 + (0,0125\, n)^2}}$$

3) $$x = 0{,}1 + \frac{0{,}02}{4\,(0{,}0125)} = 0{,}5 \text{ m}$$

4) $$0{,}1 + \frac{0{,}02}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{16}\right) + (0{,}0125n)^2}} = 0{,}3 \begin{matrix} \nearrow n_1 = 4{,}12 \\ \searrow n_2 = 3{,}82 \end{matrix}$$

$$x(n=3) = 0{,}1 + \frac{0{,}02}{\sqrt{\left(1-\frac{9}{16}\right)^2 + (0{,}0125 \cdot 3)^2}} = 0{,}15$$

TEMA 11

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD IV : Transformada de Fourier

Excitaciones periodicas

$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) \ldots$ donde el periodo T

Excitaciones periodicas : aplicación de las series de Fourier en Forma compleja.

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j w_0 t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} j w_0 t$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos (j w_0 t) dt \quad j = 0 \ldots$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \operatorname{sen} (j w_0 t) dt \quad j = 1 \ldots$$

$$\cos j w_0 t = \frac{e^{ijw_0t} + e^{-ijw_0t}}{2}$$

$$\operatorname{sen} j w_0 t = \frac{e^{ijw_0t} - e^{-ijw_0t}}{2i}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left[\frac{e^{ijw_0t} + e^{-ijw_0t}}{2} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left[\frac{e^{ijw_0t} - e^{-ijw_0t}}{2i} \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_j + \frac{b_j}{i}\right) e^{ijw_0t} + \frac{1}{2}\left(a_j - \frac{b_j}{i}\right) e^{-ijw_0t}$$

$$F_j = \frac{1}{2}\left(a_j + \frac{b_j}{i}\right) \qquad \overline{F_j} = \frac{1}{2}\left(a_j - \frac{b_j}{i}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} a + \sum_{j=1}^{\infty} F_j e^{ijw_0t} + \overline{F_j} e^{-ijw_0t}$$

$F_j = \frac{1}{2}(a_j - i b_j)$ | $a_{-j} = a_j$

$\overline{F_j} = \frac{1}{2}(a_j + i b_j)$ | $b_{-j} = -b_j$

$F_{-j} = \overline{F_j}$

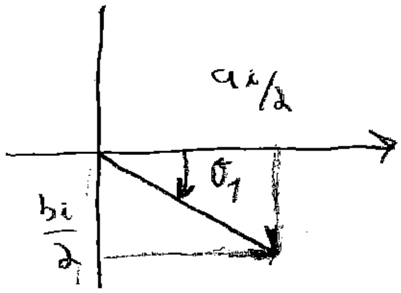
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(F_j e^{ij\omega_0 t} + E_j\, e^{-ij\omega_0 t}\right)$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{\infty} F_j e^{ij\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j e^{ij\omega_0 t}$$

Expresión compleja de la serie de Fourie

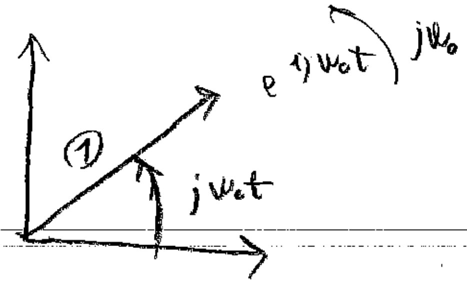
$$F_j = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ij\omega_0 t}\, dt$$

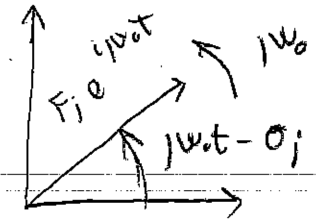


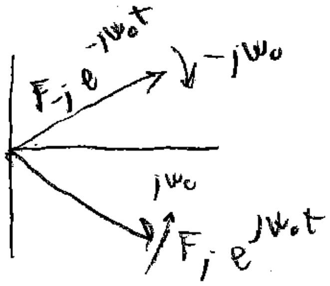
$$F_j = |F_j| e^{-i\theta_j}$$

$$|F_j| = \frac{1}{2}\sqrt{a_j^2 + b_j^2}$$

$$\theta_j = \text{arct}\ \frac{b_j}{a_j}$$

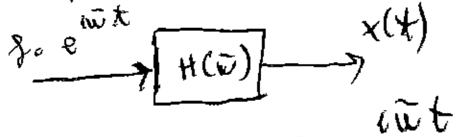






$$f(t) = F_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2|F_j| \cos(j\omega_0 t - \theta_j)$$

Respuesta



$$x(t) = H(\bar{\omega}) f_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j H(j\omega_0) e^{ij\omega_0 t}$$

Excitaciones no periodicas. Aplicación de la Transformada de fourier

Transformaciones

$$\omega_0 \to d\omega$$

$$j\omega_0 \to \omega$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$F_j = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ij\omega_0 t} dt$$

$$F_j = \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j e^{ij\omega_0 t}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt\right] d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\omega) H(\omega)}_{X(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Aplicación practica. Calculo de la respuesta de la función impulso

$f(t) = \delta(t)$

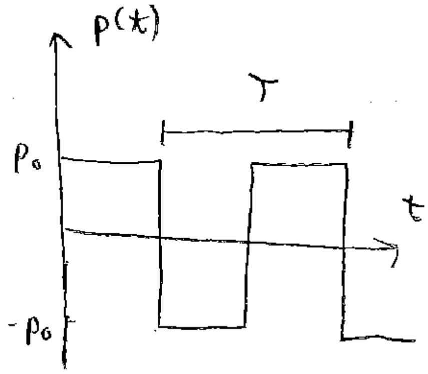
$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-iwt} dt = 1$

$X(w) = 1 \cdot H(w)$

$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(w) e^{iwt} dw$

Tema 11

4. Problema resuelto pg 246



K, m $\quad w_o = \frac{2\pi}{T}$

$\xi = 0$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j w_o t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} j w_o t$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos j w_o t \, dt \quad j = 0$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} j w_o t \, dt \quad j = 1$$

$$a_o = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} P_o \, dt - \int_{T/2}^T P_o \, dt \right]$$

$$a_o = \frac{2}{T} P_o \left[T/2 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

$$a_j = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} P_o \cos j w_o t \, dt - \int_{T/2}^T P_o \cos j w_o t \, dt \right]$$

$$a_j = \frac{2 P_o}{T} \left[\frac{1}{j w_o} \left[\cancelto{0}{\operatorname{sen} j w_o t} \right]_0^{T/2} - \frac{1}{j w} \left[\cancelto{0}{\operatorname{sen} j w_o t} \right]_{T/2}^T \right] = 0$$

$$\operatorname{sen} j w_o \frac{T}{2} = \operatorname{sen} j \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} = 0$$ y el de 0 tambien

$$\operatorname{sen} j \frac{2\pi}{T} T$$

$$b_j = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} P_o \operatorname{sen} j w_o t \, dt - \int_{T/2}^T P_o \operatorname{sen} j w_o t \, dt \right.$$

$$b_j = \frac{2 P_o}{T j w_o} \left[\left[-\cos j w_o t \right]_0^{T/2} - \left[-\cos j w_o t \right]_{T/2}^T \right]$$

$$\cos j \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} = \cos j \pi$$

$$\cos j \frac{2\pi}{T} T = 1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$b_j = \frac{2P_0}{T j w_0}\left[-\cos j\pi + 1 - \left[-1 + \cos j\pi\right]\right]$$

$$b_j = \frac{4P_0}{T j w_0}\left[1 - \cos j\pi\right]$$

$$b_j = \frac{4P_0}{T j \frac{2\pi}{T}}\left[1 - \cos j\pi\right] = \frac{2P_0}{j\pi}\left[1 - \cos j\pi\right]$$

$$p(t) = \frac{2P_0}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left[1 - \cos j\pi\right] \operatorname{sen} j w_0 t$$

$$p(t) = \frac{4P_0}{\pi}\sum_{j=1,3,5,7}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} j w_c t}{j}$$

los pares no porque dan 0

$$p_j(t) = \frac{4P_0}{\pi j}\operatorname{sen} j w_c t$$

o estandar era

$f(t) = f_0 \operatorname{sen} \bar{w} t$ cuya respuesta $x(t) = \frac{f_0}{K}\frac{1}{\sqrt{(1-B^2) + (2\underset{0}{\cancel{\xi}}B)^2}} \operatorname{sen}(wt - \overset{0}{e})$

$$x(t) = \frac{f_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\operatorname{sen}(w t)$$

$$e = \mathrm{artg}\,\frac{2\xi B}{1-\beta^2}$$

$$x_i = \frac{4P_0}{\pi K_j}\frac{1}{1 - B_0^2}\operatorname{sen} j w_0 t$$

$$\beta_j = \frac{j w_0}{w} = \frac{j\,2\pi}{T\sqrt{\frac{K}{m}}} = j\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$x(t) = \frac{4P_0}{\pi K}\sum_{i=1,3,5,7}\frac{1}{j}\frac{1}{1-\beta_j^2}\operatorname{sen} j\frac{2\pi}{T}t$$

TEMA 12

SISTEMAS DE 1 GDL Y AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

Metodos experimentales para la medida del amortiguamiento

1) Metodo del decremento logaritmico

x_i t_i

x_{i+n} t_{i+n}

$t_{i+n} = t_i + nT_D$ $T_D = \frac{2\pi}{w_D}$

$$x_i = e^{-\xi w t_i} \underline{X} \cos(w_D t_i - \theta)$$

$$x_{i+n} = e^{-\xi w (t_i + nT_D)} \underline{X} \cos(w_D (t_i + nT_D) - \theta)$$

$$\frac{x_i}{x_{i+n}} = \frac{\cos(w_D \cancel{t_i} - \theta)}{e^{-\xi w_n T_D} \cos(w_D t_i - \cancel{\theta} + n2\pi)} \rightarrow \frac{x_i}{x_{i+n}} = e^{\xi w_n T_D}$$

$\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+n}}$ decremento logaritmico

$$\delta = \xi w_n T_D$$

$$\delta = \xi w_n \frac{2\pi}{w_D}$$

$$\delta = \xi w_n \frac{2\pi}{w\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \delta = \frac{\xi n 2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$ → esto practicamente 0

$$\boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}}}$$

Si $\xi < 0,1 \rightarrow \xi = \frac{\delta}{2n\pi}$

2) Método de la amplificación a la frecuencia de resonancia

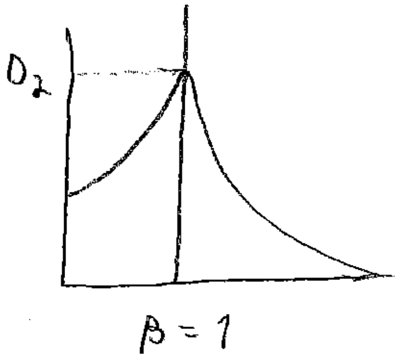
$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$\beta = 1$

$$D_R = \frac{1}{2\xi}$$

$$x_{DIN} = x_{est} D$$

$$D_R = \frac{x_R}{x_{est}}$$

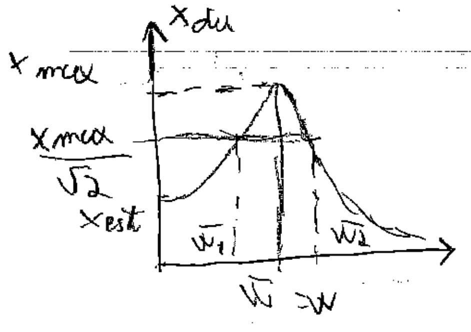


$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$D_{max} = \frac{x_{max}}{x_{est}}$$ Amplitud a frecuencia 0

Como la mayoría tienen $\xi < 0{,}1 \rightarrow \xi \simeq \frac{1}{2 D_{max}}$

3) Método de la anchura de banda



$$x_{max} = x_{est} D_R$$

$$\frac{x_{max}}{\sqrt{2}} = x_{est} \frac{D_R}{\sqrt{2}} = \frac{x_{est}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\xi}$$

$$\frac{x_{est}}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\xi} = \frac{x_{est}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta^4 + 2(2\xi^2 - 1)\beta^2 + (1 - 8\xi^2) = 0$$

$$\beta_1^2 = 1 - 2\xi^2 - 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

$$\beta_2^2 = 1 - 2\xi^2 + 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

$$\beta_2^2 - \beta_1^2 = 4\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

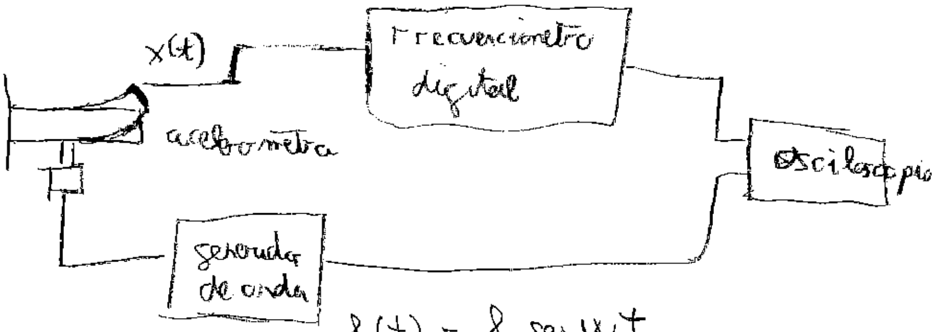
$\xi < 0{,}1$ $\quad \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{4} \simeq \xi$

$$\frac{B_1+B_2}{2} = 1$$ equidistancia de B_1 y B_2 respecto $\beta = 1$

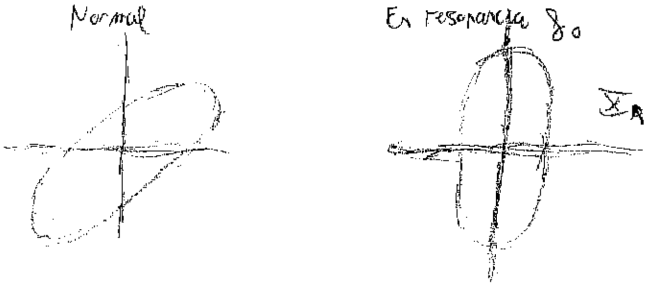
$$\frac{(B_2-B_1)}{2} \left(\cancel{\frac{B_1+B_2}{2}}^{\approx 1}\right) = \xi$$

$$\frac{B_2-B_1}{2} = \xi \qquad \boxed{\frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{2\omega} = \xi}$$

d) Método de la medida en resonancia



$$f(t) = f_0 \operatorname{sen} \omega t$$



$$\left.\begin{aligned} f(t) &= f_0 \operatorname{sen} \bar{\omega} t \\ x(t) &= \bar{X}_R \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \pi/2) \end{aligned}\right\} \rightarrow x(t) = -\bar{X}_R \cos \omega t \Big\} \; \frac{f(t)^2}{f_0^2} + \frac{x(t)^2}{x_R^2} = 1$$

$$f_0 = f_c = \omega c X_R \qquad c = \frac{f_0}{\omega X_R}$$

e) Metodo de la energía perdida por ciclo

W_D = area de la elipse

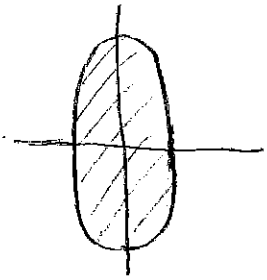
$$W_D = \pi f_c x_R$$

$$f_0 = f_C$$

$$W_D = \pi \omega C x_R^2$$

$$C = \frac{W_D}{\pi \omega X_R^2}$$

f) Metodo del amortiguamiento equivalente



W_D

$$W_D = \pi f_0 X_R^{eq}$$

$$X_R^{eq} = \frac{W_D}{\pi f_0}$$

$$W_D = \pi \omega C_{eq} \left(X_R^{eq} \right)^2$$

$$W_D = \pi \omega C_{eq} \left(\frac{W_D}{\pi f_0} \right)^2$$

$$C_{eq} = \frac{\pi f_0^2}{\omega W_D}$$

$$m\ddot{x} + C_{eq}\dot{x} + K_x = f(t)$$

2 - Amortiguamiento histeretico o estructural

la energía perdida por ciclo es el area del ciclo de histeresis.

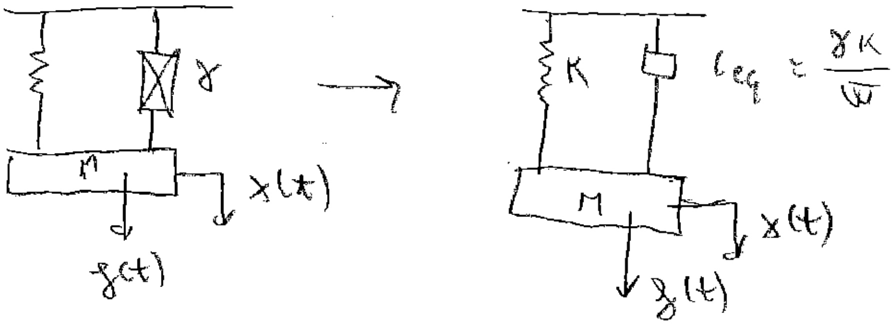
va a ser independiente de w,

$$W_D = \pi \gamma K x^2$$

↳ γ : factor de amortiguamiento estructural

$$\cancel{\pi} \gamma K \cancel{X}^2 = \cancel{\pi} \bar{w} c_{eq} \cancel{X}^2$$

$$c_{eq} = \frac{\gamma K}{\bar{w}}$$



$$M\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + Kx = f(t)$$

$$f(t) = f_0 e^{i\bar{w}t}$$

$$M\ddot{x} + \frac{\gamma K}{\bar{w}}\dot{x} + Kx = f(t)$$

$$x(t) = A e^{iwt}$$

$$\dot{x} = iA\bar{w} e^{i\bar{w}t} = i\bar{w}X$$

$$M\ddot{x} + \frac{\gamma K}{\cancel{\bar{w}}} i\cancel{\bar{w}} x + Kx = f(t)$$

$$M\ddot{x} + K(1+\gamma i)x = f(t)$$

$$M\ddot{x} + \underbrace{K(1+\gamma i)}_{\text{Rigidez compleja}} x = f_0 e^{i\bar{w}t}$$

$$A = \frac{f_0}{-m\omega^2 + K(1+\gamma i)}$$

$$x_E(t) = \frac{f_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2+\gamma i} e^{i\bar{\omega} t}$$

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{K\left[(1-\beta^2)+\gamma i\right]}$$

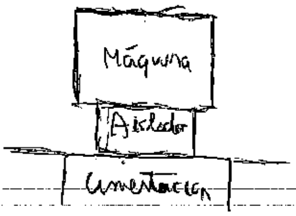
$$x_E(t) = \frac{f_0}{K} D e^{i(\bar{\omega} t - \varphi)}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+\gamma^2}} \quad ; \quad \underset{\beta=1}{D_{max}} = D_R = \frac{1}{\gamma}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{1-\beta^2}$$

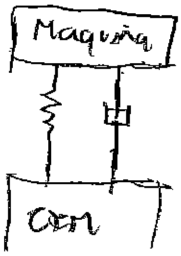
3 - Control y aislamiento de vibraciones

Aislamientos pasivos a través del concepto de Transmisibilidad



Transmisibilidad: coeficiente que mide la eficacia o calidad del aislador

---



$$T_r = \frac{f_r}{f_0}$$

Afectan a la cimentación

$$Kx = f_0 D \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi)$$

$$C\dot{x} = c \frac{f_0}{K} D \bar{\omega} \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi + \pi/2)$$

$$x = \frac{f_0}{K} D \operatorname{sen}(\omega^2 t - \varphi)$$

$$\dot{x} = \frac{f_0}{K} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{f_0}{K} D \bar{\omega} \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi + \pi/2)$$

$$f_r = f_0 D \sqrt{1 + \left(c\frac{\bar{\omega}}{K}\right)^2} = f_0 D \sqrt{\quad}$$

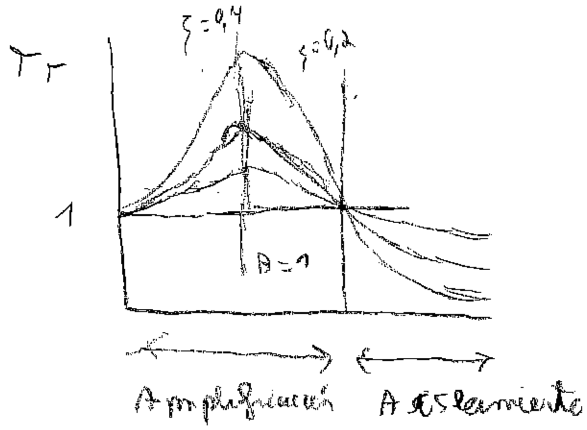
$$f_r = f_0 D \sqrt{1+\left(\frac{c\bar{w}}{K}\right)^2} = f_0 D \sqrt{1+\left(\frac{c\bar{w}}{m w^2}\right)^2} =$$

$$= f_0 D \sqrt{1+\left(\frac{2c\bar{w}}{\boxed{2mw}w}\right)^2} = f_r = \beta D \sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

Al reves, lo que se mueve es la cimentación

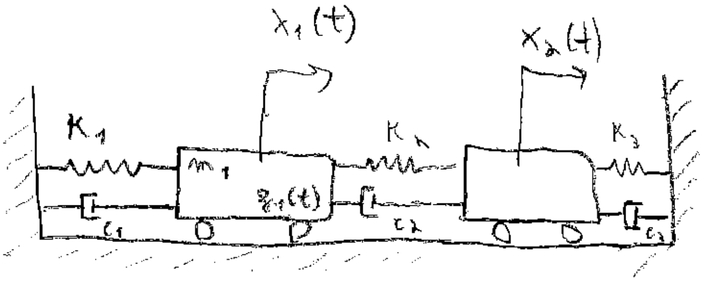
$$T_r = \frac{X}{X_S} = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

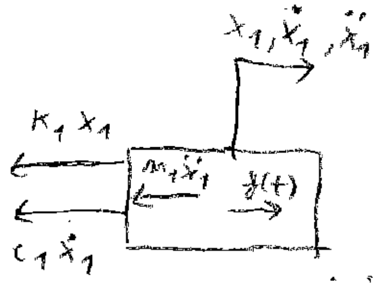
$$X = X_S D \sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$



TEMA 13
SISTEMAS CON VARIOS GDL. VIBRACIONES LIBRES

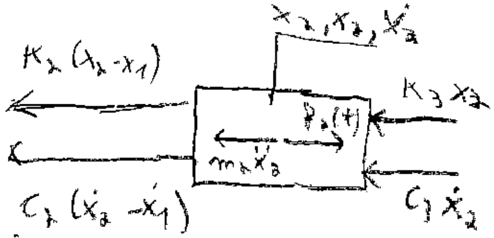
2. Ecuaciones del movimiento para un sistema de dos grados de libertad





$x_2 > x_1$

$\dot{x}_2 > \dot{x}_1$



$$\begin{cases} f_1(t) - K_1 x_1 - C_1 \dot{x}_1 + K_2(x_2-x_1) + C_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - m_1\ddot{x}_1 = 0 \\ f_2(t) - K_2(x_2-x_1) - C_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - K_3 x_2 - C_3\dot{x}_2 - m_2\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Otra forma (la de mikel) pone todo negativo y hace protagonista (1 o 2) - (pared (0) o (1 o 2))

$$-K_1(x_1-0) - C_1(\dot{x}_1-0) - K_2(x_1-x_2) - C_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + f_1(t) = m_1\ddot{x}_1$$

$$-K_1 x_1 - C_1\dot{x}_1 - K_2(x_1-x_2) - C_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + f_1(t) = m_1\ddot{x}_1$$

$$-K_2(x_2-x_1) - C_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - K_3(x_2-0) - C_3(\dot{x}_2-0) + f_2(t) = m_2\ddot{x}_2$$

$$-K_2(x_2-x_1) - C_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - K_3 x_2 - C_3\dot{x}_2 + f_2(t) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1+C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2+C_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[M]}_{\text{Matriz de masas}}\{\ddot{x}\} + \underbrace{[C]}_{\text{Matriz de amortiguamiento}}\{\dot{x}\} + \overset{\text{matriz de rigidez}}{[K]}\underbrace{\{x\}}_{\text{vector respuesta}} = \{f\} \leftarrow \text{vector fuerza}$$

piedades matrices

Simetricas

$$[K] \begin{cases} \text{Definida Positiva} \\ \text{Semidefinida positiva} \end{cases}$$

$[M] \rightarrow$ Definida positiva

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \text{matriz de masas concentradas} \\ \text{si } K \text{ diagonal} \rightarrow \text{estaticamente desacoplado} \end{array} \right] \text{dinamicamente desacoplado}$$

3 - Vibraciones libres no amortiguadas. Frecuencias naturales y modos de vibración

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oscilaciones armonicas sincronas

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = X_1 \cos Wt \\ x_2(t) = x_2 \cos Wt \end{array} \right\} \text{ sustituyendo esto arriba}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} - W^2 m_{11} & K_{12} - W^2 m_{12} \\ K_{12} - W^2 m_{12} & K_{22} - W^2 m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| [K] - \hat{W} [M] \right| = 0 \xrightarrow{\text{dos soluciones (no es que sea una de 1 y la otra de 2)}} W_1, W_2$$

$$(K_{11} - W^2 m_{11}) x_1 + (K_{12} - W^2 m_{12}) x_2 = 0$$

modo 1 (con w_1)

$$\frac{x_1^1}{x_2^1} = - \frac{(K_{12} - W_1^2 m_{12})}{K_{11} - W_1^2 m_{11}} \rightarrow (x_1^1, x_2^1)$$

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} = - \frac{(K_{12} - W_2^2 m_{12})}{K_{11} - W_2^2 m_{11}} \rightarrow (x_1^2, x_2^2)$$

Propiedades de los modos de vibración.

- Son ortogonales entre sí respecto a las matrices de masa y rigidez

$$\{x^i\}^T [M] \{x^j\} = 0$$

$$\{x^i\}^T [K] \{x^j\} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x^i\}^T [M] \{x^i\} = 1 \\ \{x^i\}^T [K] \{x^i\} = \omega_i^2 \end{array} \right.$$

Porque $\{K\}\{x\} = \omega^2 [M]\{x^i\}$

$$\{x^i\}^T [K]\{x^i\} = \omega_i^2 \underbrace{\{x^i\}^T [M] \{x^i\}}_{1}$$

Solución general para las vibraciones libres no amortiguadas

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} e^{st}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} + s^2 m_{11} & K_{12} + s^2 m_{12} \\ K_{22} + s^2 m_{12} & K_{22} + s^2 m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s^2 = -\omega^2 \quad \left| \begin{array}{l} s_1 = i\omega_1 \\ s_2 = -i\omega_1 \\ s_3 = i\omega_2 \\ s_4 = -i\omega_2 \end{array} \right.$$

$$\{x(t)\} = C_1 \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} e^{-i\omega_1 t} + C_3 \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} + C_4 \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} e^{-i\omega_2}$$

$$\{x(t)\} = C_1 \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} (\cos \omega_1 t + i \operatorname{sen} \omega_1 t) + C_2 \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} (\cos \omega_1 t - i \operatorname{sen} \omega_1 t) +$$

$$+ C_3 \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} (\cos \omega_2 t + i \operatorname{sen} \omega_2 t) + C_4 \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} (\cos \omega_2 t - i \operatorname{sen} \omega_2 t)$$

$$\{x(t)\} = A \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + B \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \operatorname{sen} \omega_1 t + C \begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t +$$

$$+ D \begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \operatorname{sen} \omega_2 t$$

$$\{x(t) = F_1 \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \sigma_1) + F_2 \begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \sigma_2)$$

$$F_1 = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \operatorname{tg} \sigma_1 = \frac{B}{A}$$

$$F_2 = \sqrt{C^2 + D^2} \qquad \operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{D}{C}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. Coordenadas modales o naturales

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} \ddot{x}_1 + K_{11} x_1 = 0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K_{11}}{m_{11}}} \rightarrow x_1 = A \cos \omega_1 t + B \operatorname{sen} \omega_1 t$$

$$m_{22} \ddot{x}_2 + K_{22} x_2 = 0 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{K_{22}}{m_{22}}} \rightarrow x_2 = A \cos \omega_2 t + B \operatorname{sen} \omega_2 t$$

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ matriz de modos

$$[X]^T [M] [X] = [m^M]$$

diagonal

matriz de masa modal

$$[X]^T [K] [X] = [K_j^M]$$

diagonal

matriz de rigidez modal

Si modos normalizados

$$[X]^T [M] [X] = [I]$$

$$[X]^T [K] [X] = [\omega_i^2]$$

Cambio variable $\{x\} = [X]\{y\} \rightarrow \{\ddot{x}\} = [X]\{\ddot{y}\}$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$$[X]^T [M]\{\ddot{x}\} + [X]^T [K]\{x\} = \{0\}$$

$$[X]^T [M][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T [K][X]\{y\} = \{0\}$$

$$[m_j^M]\{\ddot{y}\} + [K_j^M]\{y\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} m_1^M & 0 \\ 0 & m_2^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1^M & 0 \\ 0 & K_2^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1^M \ddot{y}_1 + K_1^M y_1 = 0 \\ m_2^M \ddot{y}_2 + K_2^M y_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{K_1^M}{m_1^M}} \rightarrow y_1 = A \cos \omega_1 t + B \operatorname{sen} \omega_1 t \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{K_2^M}{m_2^M}} \rightarrow y_2 = A' \cos \omega_2 t + B' \operatorname{sen} \omega_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} \{y\} = [x]^{-1}\{x\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{Bmatrix} = [x]^{-1} \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} \\ \{\dot{y}\} = [x]^{-1}\{\dot{x}\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{y}_{10} \\ \dot{y}_{20} \end{Bmatrix} = [x]^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$[x]^{-1} = [x]^T[M]$ si modo normalizado

$$[x]^{-1} = \frac{1}{m_j^M}[x]^T[M]$$

5. Vibraciones libres amortiguadas también entraría

b) Amortiguamiento proporcional

$$[x]^T[M][x]\{\ddot{y}\} + [x]^T[C][x]\{\dot{y}\} + [x]^T[K][x]\{y\} = \{0\}$$

$$[m_j^M]\ddot{y} + [x]^T[C][x]\{\dot{y}\} + [K_j^M]\{y\} = \{0\}$$

amortiguamiento es no proporcional

$[C] = \alpha[K] + \beta[M] \leftarrow$ amortiguamiento proporcional

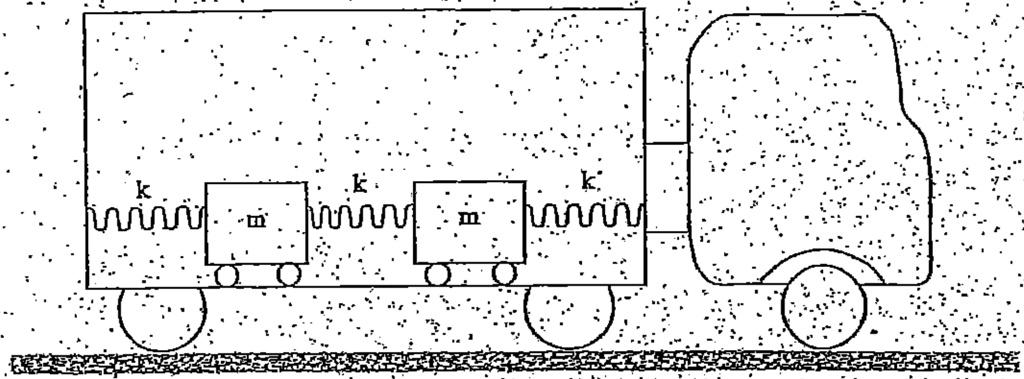
$$[x]^T[C][x] = \alpha[x]^T[K][x] + \beta[x_j]^T[M][x]$$

Tema 13

TEORÍA DE VIBRACIONES.
3º Ingeniería Industrial. Examen Final, Junio 1999.
Ejercicio 3. Peso sobre el conj. del examen: 35%.
Tiempo: 40 min.

NOMBRE y APELLIDOS:
GRUPO:

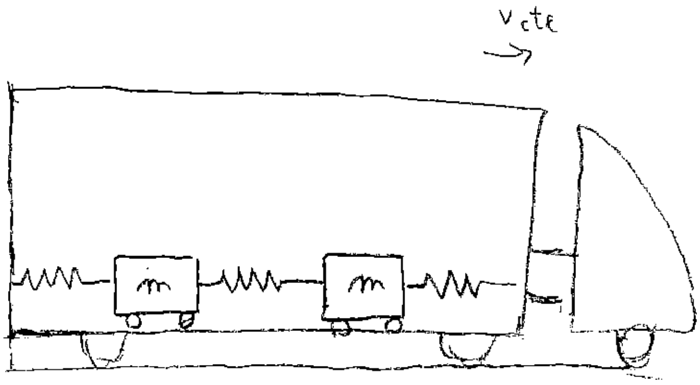
Un camión transporta material electrónico delicado que va dispuesto en el interior de la cabina de carga de acuerdo con la modelización de la siguiente figura:



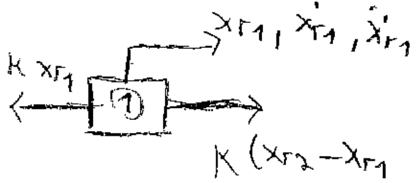
Transitando el camión en régimen de velocidad constante, el conductor, cansado del largo viaje, sufre un microsueño de manera que al despertar reacciona con un frenazo. Considérese que el proceso de frenado se produce durante un tiempo τ con una deceleración constante a hasta parar el vehículo. Se pide:

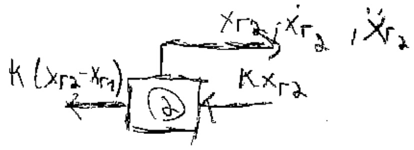
1. ¿A qué fuerzas están sometidas las masas durante el proceso de frenado? (1 punto)
2. Calcular la respuesta durante la frenada. (7 puntos)
3. Calcular la respuesta después de la frenada. (2 puntos)

Examen Final Julio 1999



Supones $x_{r2} \geq x_{r1}$





①

$$K(x_{r2} - x_{r1}) - K x_{r1} = m(\dot{x}_{r1} - a)$$

②

$$-K(x_{r2} - x_{r1}) - K x_{r2} = m(\dot{x}_{r2} - a)$$

$$m\ddot{x}_{r1} + 2K x_{r1} - K x_{r2} = ma$$

$$m\ddot{x}_{r2} - K x_{r1} + 2K x_{r2} = ma$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{r1} \\ x_{r2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma \\ ma \end{bmatrix}$$

cojo una cualquiera

$$\begin{vmatrix} 2K - w^2 m & -K \\ -K & 2K - w^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2K - w^2 m)^2 - K^2 = 0$$

$$(2K - w^2 m)^2 = K^2$$

$$2K - w^2 m = \begin{cases} K \\ -K \end{cases}$$

$$2K - w^2 m = K \Rightarrow w_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$2K - w^2 m = -K \Rightarrow w_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

$$(2K - w^2 m)\, x_1 - K x_2 = 0$$

$$(2K - w_1^2 m)\, x_1^1 - K x_2^1 = 0 \qquad x_1^1 = x_2^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2K - \omega_2^2 m)\, x_1^2 - K x_2^2 = 0$$

$$x_2^2 = -x_1^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[X]^T [M] [X] \{\ddot{y}\} + [X]^T [K] [X] \{y\} = [X]^T \{f\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ma \\ ma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & m \\ m & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 3K \\ K & -3K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ma \\ 0 \end{bmatrix}$$

no pueden dar valores negativos

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & 6K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2m\ddot{y}_1 + 2Ky_1 = 2ma$$

$$2m\ddot{y}_2 + 6Ky_2 = 0 \rightarrow y_2(t) = 0$$

$x_{r10} = 0$

$x_{r20} = 0$

$\dot{x}_{r10} = 0$

$\dot{x}_{r20} = 0$

$\{x\} = [X]\{y\}$

$\{\dot{x}\} = [X]\{\dot{y}\}$

$y_{10} = 0$

$y_{20} = 0$

$\dot{y}_{10} = 0$

$\dot{y}_{20} = 0$

$$0 = y_2 = A\cos \omega_2 t + B \operatorname{sen} \omega_2 t \rightarrow A = 0$$

$$0 = \dot{y}_2 = -A\omega_2 \operatorname{sen} \omega_2 t + B\omega_2 \cos \omega_2 t \rightarrow B = 0$$

$0 \leftarrow$ fuerza cte

$E \leftarrow$ Escalon

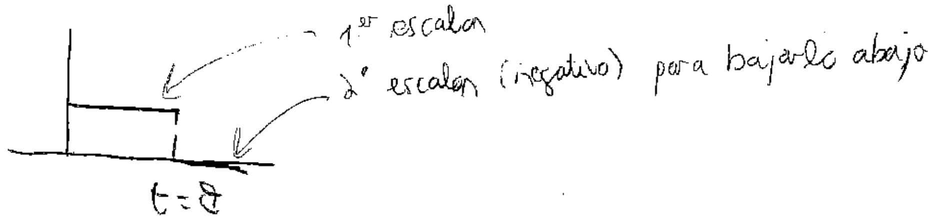
$$\rightarrow y_1 = \cancel{y_1^T} + y_1^E \qquad y_1 = \frac{2ma}{2K}(1 - \cos \omega_1 t) \Rightarrow y_1 = \frac{ma}{K}(1 - \cos \omega_1 t)$$

$$t < T$$

$$\{x\} = [X]\{y\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \cancel{y_2}\, 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{r1} = x_{r2} = y_1 = \frac{ma}{K}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right) \qquad 0 < t < \tau$$

3) $x_{r1} = x_{r2} = y_1'$



$$x_{r1} = x_{r2} = \underbrace{\frac{ma}{K}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right)}_{\text{primer escalon}} - \underbrace{\frac{ma}{K}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{K}{m}}\,(t-\tau)\right)}_{\text{segundo escalón}} =$$

$$= \frac{ma}{K}\left[\cos\sqrt{\frac{K}{m}}\,(t-\tau) - \cos\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right]$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

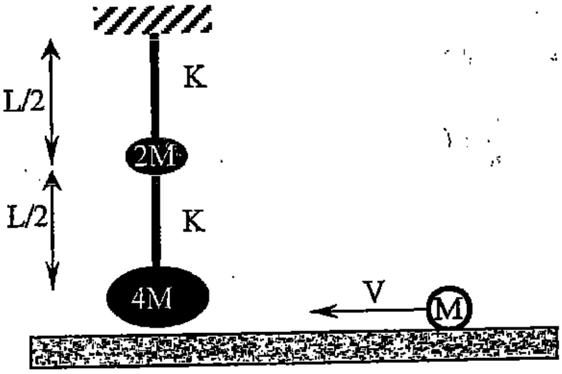
TEORÍA DE MÁQUINAS.
Ingeniería Industrial. 3er curso. Septiembre 2003.
Problema 2
Peso: 20 %. Tiempo: 50 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Iraila 2003
2^{go} ariketa
Pisua: 20%. Iraupena: 50 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

En el departamento de diseño de una fábrica de palos de golf se pretenden estudiar las vibraciones que se producen en el palo tras el impacto con la bola. Para ello, se supone un modelo en el que la bola tiene una masa M, mientras que el palo tiene una masa 6M, de la que dos tercios se concentran en la cabeza del mismo, y el tercio restante corresponde a la varilla que se representa en el modelo como una masa equidistante del puño y la cabeza del palo.

Para estudiar mejor las deformaciones del palo, se hace impactar a la bola contra el palo a una velocidad V, tras lo cual sale rebotada en dirección contraria, tal y como se muestra en la figura adjunta.



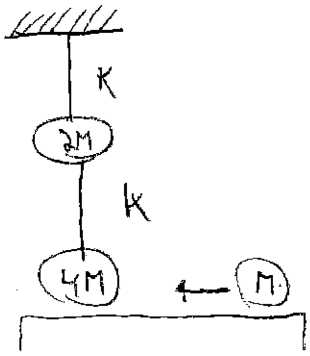
Consideraciones del ensayo:

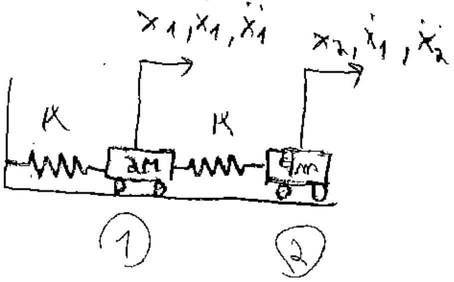
Se supondrá que el impacto es un choque perfectamente elástico **entre la cabeza del palo y la bola,** luego entre ambas se conserva la energía cinética y la cantidad de movimiento.
Se supondrá empotramiento en el puño del palo y se despreciará el amortiguamiento del palo. Dicho palo tiene una distribución de masa uniforme y las dos partes en que se ha discretizado tienen una rigidez a flexión igual a K.

Se pide lo siguiente:

1. Modelo matemático de 2 gdl. para el ensayo con condiciones iniciales del palo tras el impacto. (2p)
2. Ecuaciones de equilibrio. Matriz de masas y rigidez. (2 p)
3. Modos y frecuencias naturales de vibración. (2 p)
4. Respuesta en coordenadas modales (2 p)
5. Respuesta en coordenadas reales (2 p)

Examen Septembre 2007





1) $-Kx_1 + K(-x_1+x_2) = 2m\dot{x}_1$
$-K(x_2-x_1) = 4m\dot{x}_2$

$2m\dot{x}_1 + 2K\cancel{x_1} - Kx_2 = 0$
$4m\dot{x}_2 - Kx_1 + Kx_2 = 0$

Esto tambien soria el 2

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 4m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$
$\dot{x}_1(0) = 0$ $\dot{x}_2(0) = ?$

(Ec inicial (bola) = Ec final (el palo) + Ec la bola

$$\begin{cases} \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}4M\,[\dot{x}_2(0)]^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_b^2 \\ MV = 4M\,[x^2(0)] + M\dot{x}_b \end{cases}$$

Conservación momento lineal P

$\dot{x}_b = V - 4\dot{x}_2(0)$

$V^2 = 4[\dot{x}_2(0)]^2 + V^2 + 16[\dot{x}_2(0)]^2 - 8V\dot{x}_2(0)$

$0 = 20[\dot{x}_2(0)]^2 - 8V\dot{x}_2(0)$

$0 = \dot{x}_2(0)[20\dot{x}_2(0) - 8V)$ $\dot{x}_2(0) = \frac{2}{5}V$

3) $\begin{vmatrix} 2K - 2M\omega^2 & -K \\ -K & K - 4M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$ $(2K - 2M\omega^2)(K - 4M\omega^2) - K^2 = 0$

$2K^2 + 8M^2\omega^4 - 8MK\omega^2 - 2MK\omega^2 - K^2 = 0$

$8M^2\omega^4 - 10MK\omega^2 + K^2 = 0$

$$\omega^2 = \frac{10MK \pm \sqrt{100M^2K^2 - 32M^2K^2}}{16M^2}$$

$$\omega^2 = \frac{5K \pm K\sqrt{17}}{8M}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{M}\left(\frac{5 \pm \sqrt{17}}{8}\right) \begin{cases} \omega_2 = 0{,}37\sqrt{\frac{K}{m}} \\ \omega_1 = 1{,}06\sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$$

$$(2K - 2M\omega^2)x_1 - Kx_2 = 0$$

(De la matriz $\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ una fila

$$\begin{bmatrix} (2K - 2M\omega^2) & -K \\ -K & K-4M\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}78 \end{bmatrix} \qquad x^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}28 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ metiendo ω_2 $\qquad$ $\uparrow$ metiendo ω_1

4) $$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}78 & -0{,}28 \end{bmatrix}$$

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{Y}\} + [X]^T[K][X]\{Y\} = \{0\}$$

$$[X]^T[M][X] = \begin{bmatrix} 2{,}31M & 0 \\ 0 & 14{,}67M \end{bmatrix}$$

$$[X]^T[K][X] = \begin{bmatrix} 2{,}64K & 0 \\ 0 & 1{,}61K \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2{,}31M\ddot{y} + 2{,}64Ky &= 0 \\ 14{,}67M\ddot{y} + 1{,}61Ky &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{2{,}64}{2{,}31}}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1{,}61}{14{,}67}}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$Y_1 = A\cos\omega_1 t + B\,\text{sen}\,\omega_1 t$$

$$Y_2 = C\cos\omega_2 t + D\,\text{sen}\,\omega_2 t$$

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = [X]\begin{Bmatrix} Y_{10} \\ Y_{20} \end{Bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} Y_{10} &= 0 \\ Y_{20} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = C = 0$$

$$Y_1 = B \operatorname{sen} \omega_1 t \quad \Big\| \quad \dot{Y}_1 = B\,\omega_1 \cos \omega_1 t$$

$$Y_2 = B \operatorname{sen} \omega_2 t \quad \Big\| \quad \dot{Y}_2 = D\,\omega_2 \cos \omega_2 t$$

Derivando

$$\begin{matrix} \dot{x}_1(0) \rightarrow \\ x_2'(0) \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}78 & -0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Y}_{10} \\ \dot{Y}_{20} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \dot{Y}_{10} + \dot{Y}_{20} \\ \frac{2}{5} V &= 1{,}78\, \dot{Y}_{10} - 0{,}25\, \dot{Y}_{20} \end{aligned}\right\} \quad \dot{Y}_{20} = -\dot{Y}_{10}$$

$$\frac{2}{5} V = 1{,}78\, \dot{Y}_{10} + 0{,}25\, \dot{Y}_{10} \Rightarrow \dot{Y}_{10} = \frac{2V}{5 \cdot 2{,}06}$$

$$\dot{Y}_{10} = 0{,}19\, V$$

$$\dot{Y}_{20} = -0{,}19\, V$$

$$0{,}19\, V = B\,\omega_1 \Rightarrow B = \frac{0{,}19\, V}{\omega_1}$$

$$-0{,}19\, V = D\,\omega_2 \qquad D = \frac{0{,}19\, V}{\omega_2}$$

$$Y_1 = \frac{0{,}19 V}{1{,}06} \sqrt{\frac{M}{K}} \operatorname{sen} 1{,}06 \sqrt{\frac{K}{m}}\, t$$

$$Y_2 = \frac{-0{,}19 V}{0{,}33} \sqrt{\frac{M}{K}} \cdot \operatorname{sen} 0{,}33 \sqrt{\frac{K}{M}}\, t$$

5)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}78 & -0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{0{,}19 V}{1{,}06} \sqrt{\frac{M}{K}} \operatorname{sen} 1{,}06 \sqrt{\frac{K}{M}}\, t - \frac{0{,}19 V}{0{,}33} \sqrt{\frac{M}{K}} \operatorname{sen} 0{,}33 \sqrt{\frac{K}{M}}\, t$$

$$x_2 = \frac{1'78 \cdot 0{,}19 V}{1{,}06} \sqrt{\frac{M}{K}} \operatorname{sen} 1{,}06 \sqrt{\frac{K}{M}}\, t + \frac{0{,}25 \cdot 0{,}19 V}{0{,}33} \sqrt{\frac{M}{K}} \operatorname{sen} 0{,}33 \sqrt{\frac{K}{M}}\, t$$

ARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS

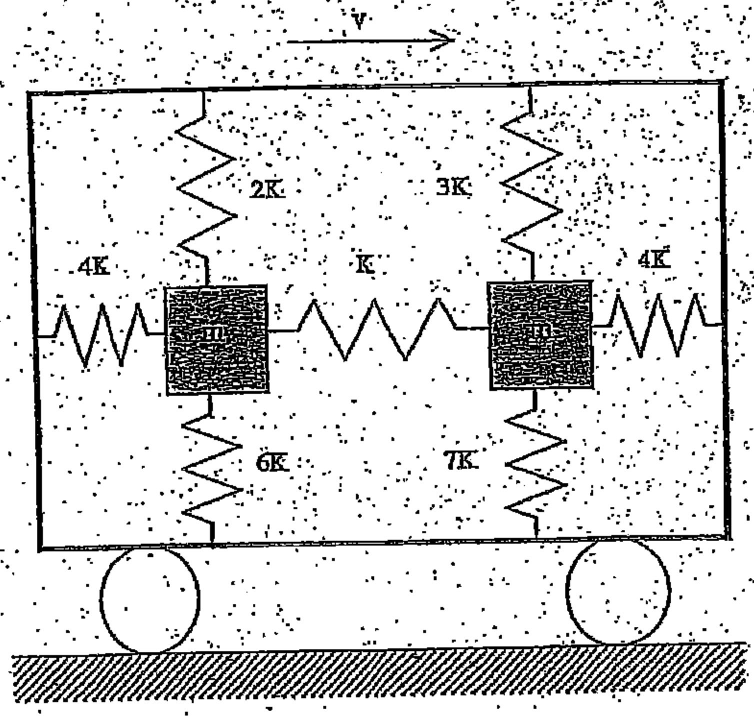
eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA
INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

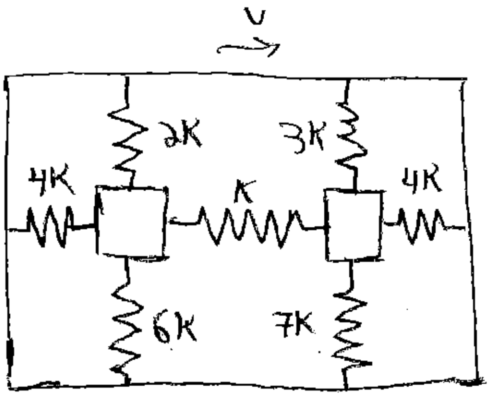
TEORÍA DE VIBRACIONES.
3º Ingeniería Industrial. Examen - Septiembre 1998.
Problema. Peso sobre el conjunto del examen: 40%
Tiempo: 1h15min.

El sistema de la figura representa un modelo que permite estudiar el comportamiento dinámico de una mercancía situada en un container que se desplaza con velocidad constante v. La mercancía viene representada mediante dos masas concentradas de valor m y cuyos apoyos se modelizan a través de los muelles como lo indica la figura. Se suponen pequeñas deformaciones y se desprecia el efecto del peso propio. Se piden:

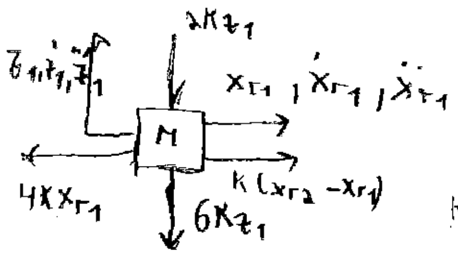
1.- Las ecuaciones que definen el movimiento de las masas. (3p)
2.- Las frecuencias naturales del sistema. (2p)
3.- Los modos naturales del sistema. (2p)
4.- Las ecuaciones del movimiento en coordenadas modales. (1,5p)
5.- La respuesta del sistema si el container choca contra un muro y pasa instantáneamente a tener velocidad nula. (1,5p)

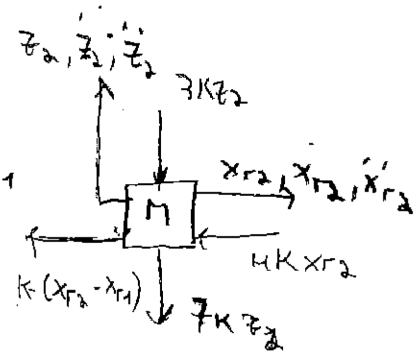


Examen - Septiembre 1998



4 Gdl





$x_{r2} > x_{r1}$

el cajo no tiene

$$K(x_{r2}-x_{r1}) - 4Kx_{r1} = M(\dot{x}_{r2} + \overset{0}{a_c})$$

$$-8Kz_1 = M\ddot{z}_1$$

$$-K(x_{r2}-x_{r1}) - 4Kx_{r2} = M\ddot{x}_{r2}$$

$$-10Kz_2 = M\ddot{z}_2$$

$$M\ddot{x}_{r1} + 5Kx_{r1} - Kx_{r2} = 0 \qquad (3)$$

$$M\ddot{z}_1 + 8Kz_1 = 0 \qquad (1)$$

$$M\ddot{x}_{r2} - Kx_{r1} + 5Kx_{r2} = 0 \qquad (4)$$

$$M\ddot{z}_2 + 10Kz_2 = 0 \qquad (2)$$

Con 1, 2

$$\left.\begin{matrix} M\ddot{z}_1 + 8Kz_1 = 0 \\ M\ddot{z}_2 + 10Kz_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} w_1 = \sqrt{\frac{8K}{M}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ w_2 = \sqrt{\frac{10K}{M}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

con 3, 4

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5K & -K \\ -K & 5K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5K - w^2M & -K \\ -K & 5K - w^2M \end{vmatrix} = 0 \qquad (5K - w^2M)^2 - K^2 = 0$$

$$5K - w^2M = \pm K$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{4K}{M}} \qquad w_4 = \sqrt{\frac{6K}{M}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} (5K - 4K)x_1 = Kx_2 \\ Kx_1 = Kx_2 \\ x_1 = x_2 \end{matrix}}$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad X^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de $\lambda^3 = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad x^4 = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$[x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[x]^T[M][x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 2M \end{pmatrix}$$

$$[x]^T[K][x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5K & -K \\ -K & 5K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8K & 0 \\ 0 & 12K \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 2M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 8K & 0 \\ 0 & 12K \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$x_{r10} = 0 \qquad \dot{x}_{r10} = v$

$x_{r20} = 0 \qquad \dot{x}_{r20} = v$

$z_{10} = 0 \qquad \dot{z}_{10} = 0$

$z_{20} = 0 \qquad \dot{z}_{20} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = A\cos\omega_1 t + B\,\text{sen}\,\omega_1 t \\ z_2 = C\cos\omega_2 t + D\,\text{sen}\,\omega_2 t \end{array}\right\} \xrightarrow{t=0} A = C = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{z}_1 = B\omega_1 \cos\omega_1 t \\ \dot{z}_2 = B\omega_2 \cos\omega_2 t \end{array}\right\} B = D = 0$$

$z_1(t) = 0$

$z_2(t) = 0$

$Y_1(t) = E\cos\omega_3 t + F\,\text{sen}\,\omega_3 t$

$Y_2(t) = G\cos\omega_4 t + H\,\text{sen}\,\omega_4 t$

$$\text{Como} \left.\begin{array}{l} x_{r10} = 0 \\ x_{r20} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} Y_{10} = 0 \\ Y_{20} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E = G = 0$$

$Y_1(t) = F\,\text{sen}\,\omega_3 t$

$Y_2(t) = H\,\text{sen}\,\omega_4 t$

$\dot{Y}_1 = F\omega_3 \cos\omega_3 t$

$\dot{Y}_2 = H\omega_4 \cos\omega_4 t$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{r10} \\ \dot{x}_{r20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Y}_{10} \\ \dot{Y}_{20} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \dot{Y}_{10} + \dot{Y}_{20} \\ v = \dot{Y}_{10} - \dot{Y}_{20} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dot{Y}_{10} = v \\ \dot{Y}_{20} = 0 \end{array}$$

$v = F\omega_3$

$0 = H\omega_4 \Rightarrow H = 0$

$F_1 = \dfrac{v}{\omega_3}$

$$Y_1(t) = \frac{V}{\omega_3} \operatorname{sen} \omega_3 t$$

$$Y_2(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_{r1}(t) \\ x_{r2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \underset{0}{\cancel{Y_2(t)}} \end{bmatrix}$$

$$x_{r1}(t) = x_{r2}(t) = \frac{V}{2}\sqrt{\frac{M}{K}} \operatorname{sen} 2\sqrt{\frac{K}{M}}\, t$$

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA
INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial. Marzo 2006.
Unidad Temática B.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2006.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa.

Peso sobre la Unidad Temática: 20%.
Ejercicio. 2   Tiempo: 45 min.

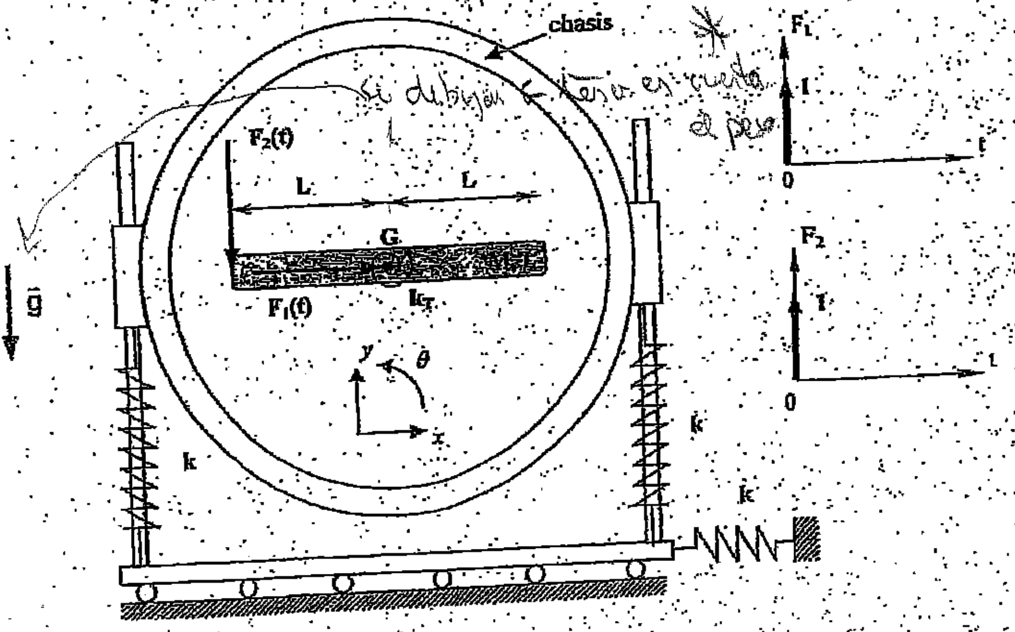
Atal Tematikoaren Pisua: 20%.
Ariketa: 2   Iraupena: 45 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

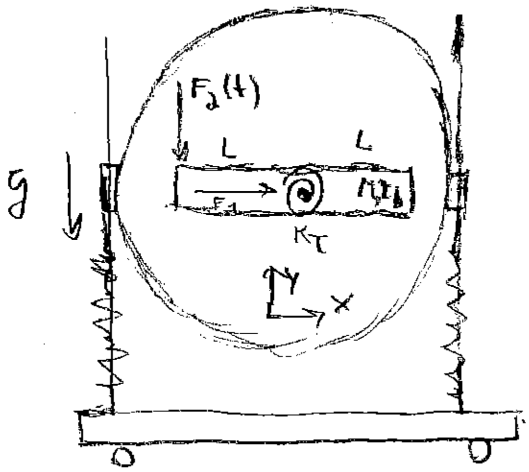
En la figura siguiente se representa un modelo simplificado de un dispositivo de análisis experimental de vibraciones. Dicho dispositivo está formado por un chasis de masa despreciable con dos grados de libertad (x,y) unido al suelo mediante resortes de constante k tal como aparece en la figura. Sobre el chasis, y articulada alrededor de G se monta una viga indeformable de masa M e inercia I_G. Dicha viga, cuya orientación viene determinada por su ángulo θ está articulada en G, y montada al chasis a través de un resorte a torsión de constante k_T. Utilizando como grados de libertad (x,y,θ), se pide:

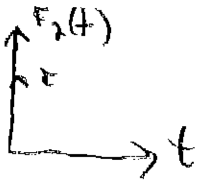
1. La ecuación del movimiento en notación matricial. (3p)
2. Las frecuencias naturales del sistema. (2p)
3. Partiendo del reposo en su posición de equilibrio estático, obtener la respuesta del sistema frente a las cargas $F_1(t)$ y $F_2(t)$, que representan unos impulsos unitarios. El primero se aplica en G en dirección horizontal y el segundo en un extremo de la viga en dirección vertical. (5p)



Cuando tengas M solo pones $\frac{Mg}{K_T}$ no es un impulso

Marzo 2006

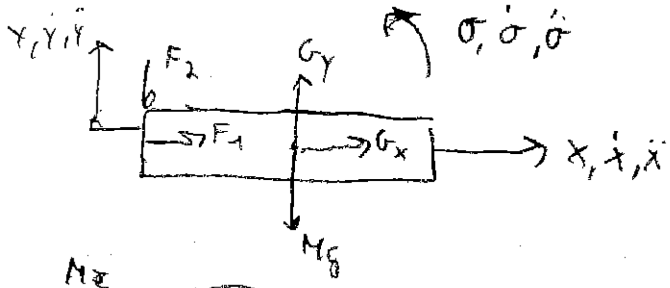




$$\boxed{F_2 L - K_t \sigma = I_G \ddot{\sigma}}$$

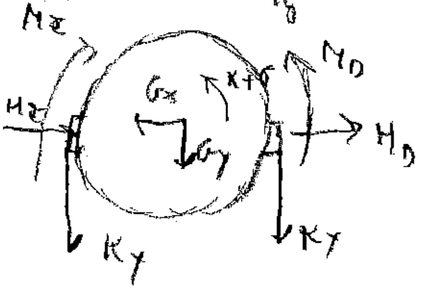
$$F_1 + G_x = M\ddot{x}$$

$$G_y - F_2 - Mg = M\ddot{y}$$



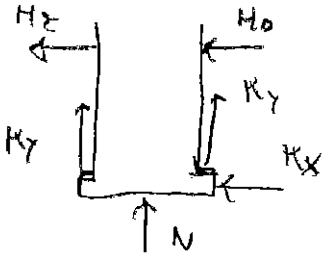
$$H_I + H_D = G_x$$

$$2Ky + G_y = 0 \rightarrow \boxed{G_y = -2Ky}$$



$$H_I + H_D + Kx = 0$$

$$H_I + H_D = \boxed{-Kx = G_x}$$



$$\boxed{F_1 - Kx = M\ddot{x}}$$

$$\boxed{-F_2 - Mg - 2Ky = M\ddot{y}}$$

Resumiendo las recuadradas

x) $M\ddot{x} + Kx = F_1$

y) $M\ddot{y} + 2Ky = -F_2 - Mg$

σ) $I_D\ddot{\sigma} + K_t \sigma = F_2 L$

Modes

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 2K & 0 \\ 0 & 0 & K_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ -F_2 - Mg \\ F_2 L \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2K}{M}} \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{K_t}{I}} \end{array}$$

3 - $x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 0$

$y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 0$

$\theta_0 = 0 \quad \dot{\theta}_0 = 0$

C. iniciales nulas

$$x(t) = \frac{I}{M\omega_D} e^{-\xi \omega_d t} \operatorname{sen} \omega_d t \qquad \omega_D = \omega \sqrt{1-\xi^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{M\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t$$ F_1 (Un impulso)

el menos porque en la ec Y esta restando

$$Y_i(t) = (-) \frac{I}{M\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t$$ ~~la~~ La respuesta a F_2 (Un impulso)

yo creo que esto sobra

$$Y_E(t) = (-) \frac{Mg}{2K} [1 - \cos at]$$ la debida a Mg (Un escalon)

$$Y_{total} = -\frac{1}{M\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t - \frac{Mg}{2K} [1 - \cos \omega_2 t]$$

$$\theta(t) = \frac{1}{I_b \omega_3} \operatorname{sen} \omega_3 t$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3° Ingeniería Industrial. Marzo 2007.
Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio. 3 Tiempo: 60 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2007.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 60 min.

TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

Para realizar el estudio dinámico de un perfil aeronáutico, éste se ha modelizado a partir del sistema de dos grados de libertad *(y,θ)* de la Figura 1 sobre el que se aplican las dos fuerzas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ mostradas en la Figura 2. La barra tiene una masa *m* y una inercia respecto de su centro de gravedad I_G. Se pide:

1. Ecuación matricial del movimiento. (3 p)
2. Frecuencias naturales y modos de vibración. (2 p)
3. Respuesta del sistema para (5 p):
   a. $t<a$
   b. $a<t<2a$
   c. $t>2a$

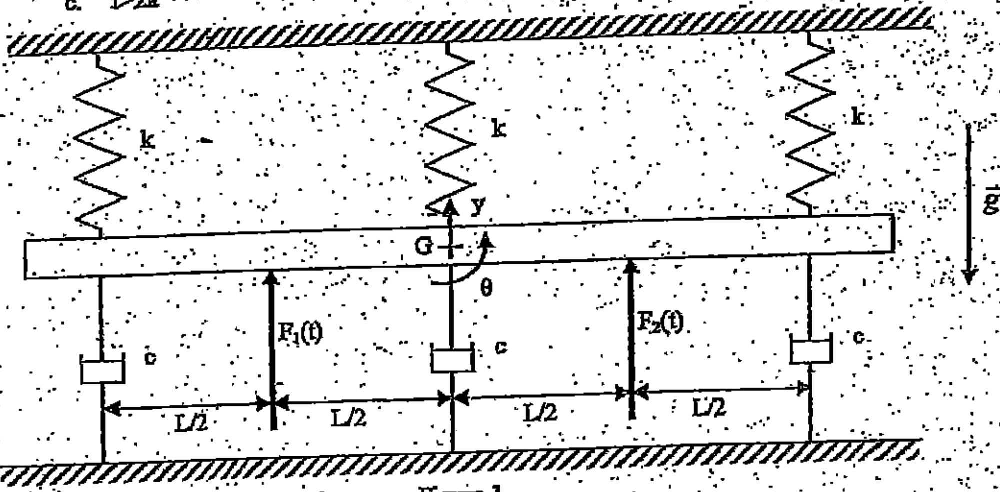


Figura 1.

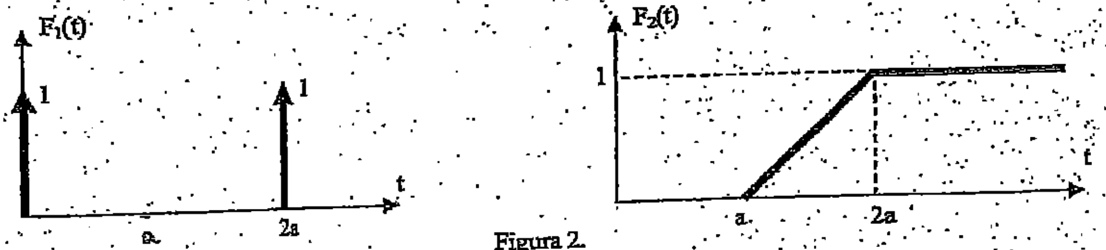


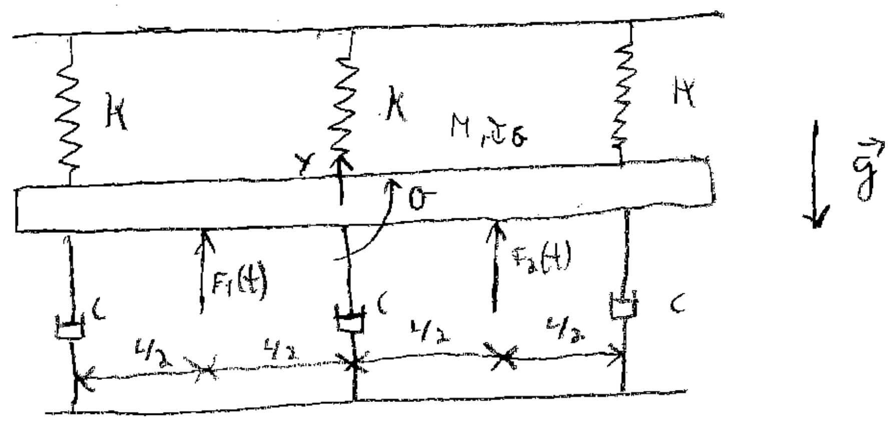
Figura 2.

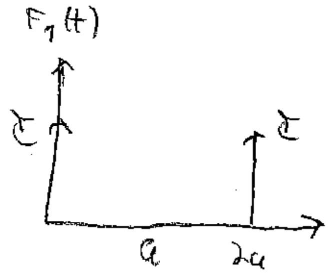
Nota: respuesta de un sistema de 1gdl a una función rampa aplicada en t=0 con condiciones iniciales nulas:

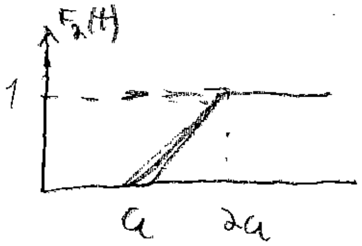
$$x(t)=\frac{I}{k}t-\frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}\,\text{sen}(\omega_D t-2\theta)+\text{sen}\,2\theta\right]$$

$\dot{x}(t)=\frac{I}{k}-\frac{I}{k\omega_D}\left[-\xi\omega\, e^{-\xi\omega t}\,\text{sen}(\omega_D t-2\theta)+e^{-\xi\omega t}\omega_D\cos(\omega_D t-2\theta)\right]$

Examen Marzo 2007

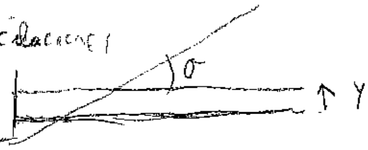






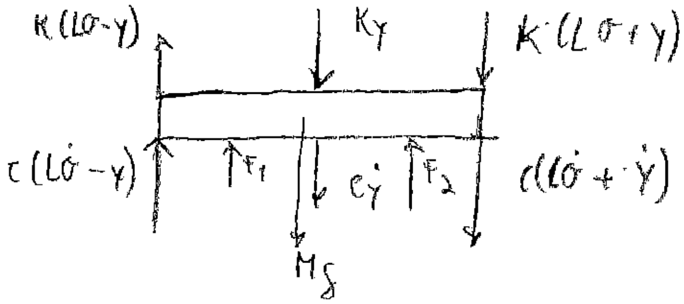
pequeñas oscilaciones

$L\theta \simeq L \operatorname{sen}\theta$



Supones que baja mas por el giro ($L\theta$) que lo que sube por y

La Fuerza hacia arriba $K(L\theta - y)$



$$\Sigma F_y = M\ddot{y} \Rightarrow -Mg + K(L\theta - y) + c(L\dot{\theta} + \dot{y}) + F_1 - Ky - c\dot{y} + F_2 - K(L\theta + y) -$$

$$- c(L\dot{\theta} + \dot{y}) = M\ddot{y}$$

$$\overrightarrow{M_g} = I_G\ddot{\theta} \Rightarrow F_2\frac{L}{2} - K(L\theta - y)L - c(L\dot{\theta} - \dot{y})L - F_1\frac{L}{2} - K(L\theta + y)L -$$

$$- c(L\dot{\theta} + \dot{y})L = I_G\ddot{\theta}$$

$$M\ddot{y} + 3c\dot{y} + 3Ky = F_1 + F_2 - Mg$$

$$I_G\ddot{\theta} + 2cL^2\dot{\theta} + 2KL^2\theta = F_2 L/2 - F_1\frac{L}{2}$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Amortiguamiento} \\ \text{proporcional}}}{\begin{bmatrix} 3c & 0 \\ 0 & 2cL^2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & 0 \\ 0 & 2KL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 + F_2 - Mg \\ F_2 L/2 - F_1 L/2 \end{bmatrix}$$

2) $w_1 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$ $\qquad$ $w_2 = \sqrt{\frac{2KL^2}{I_G}}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) • $t < a$

$$\overset{①}{y}(t) = \frac{1}{M\,w_{D1}} e^{-\xi_1 w_1 t} \,\text{sen}\, w_{D1} t - \frac{Mg}{3K}\left[1 - e^{-\xi_1 w_1 t}\left(\cos w_{D1} t + \xi_1 \frac{w_1}{w_{D1}} \text{sen}\, w_{D1} t\right)\right.$$

$$\overset{①}{\sigma}(t) = \frac{-L}{2 I_G\, w_{D2}} e^{-\xi_2 w_2 t} \,\text{sen}\, w_{D2}\, t$$

$$\xi_1 = \frac{3c}{2M\,w_1^2} \qquad \Bigg| \qquad \xi_2 = \frac{2cL^2}{2I_G\, w_2^2}$$

$$w_{D1} = w_1 \sqrt{1-\xi_1^2} \qquad \Bigg| \qquad w_{D2} = w^2 \sqrt{1-\xi_2^2}$$

• $a < t < 2a$

$$\overset{②}{y}(t) = \overset{①}{y}(t) + \frac{1}{a3K}(t-a) - \frac{1}{a\,3K\,a\,w_{D1}}\left[e^{-\xi_1 w_1 (t-a)} \,\text{sen}(w_{D1}(t-a) - 2\sigma_1) + \text{sen}\, 2\sigma_1\right]$$

↑ yo diría que sobra

$$\sigma_1 = \text{arctg} \frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}$$

yo diría $\frac{L}{2}$ y que aquí también falta

$$\overset{②}{\sigma}(t) = \overset{①}{\sigma}(t) + \frac{1}{2}\frac{1}{a2KL^2}(t-a) - \frac{1}{a2KL^2 w_{D2}}\left[e^{-\xi w_2 (t-a)} \,\text{sen}(w_{D2}(t-a) - 2\sigma_2) + \text{sen}\, 2\sigma_2\right]$$

$$\sigma_2 = \text{arctg} \frac{\xi_2}{\sqrt{1-\xi_2}}$$

• $t > 2a$

$$y(t) = \overset{②}{y}(t) + \overbrace{\frac{1}{M w_{D1}} e^{-\xi_1 w_1 (t-2a)}}^{\text{impulso}} \,\text{sen}\, w_{D1}(t-2a)$$

rampa para abajo F_2

$$- \frac{1}{a3K}(t-2a) + \frac{1}{a3Kw_{D1}}\left[e^{-\xi_1 w_1 (t-2a)} \,\text{sen}(w_{D1}(t-2a) - 2\sigma_1) + \text{sen}\, 2\sigma_1\right]$$

$$\sigma(t) = \sigma^2(t) - \frac{L}{2I_G w_{D2}} e^{-\xi_2 w_2 (t-2a)} \,\text{sen}(w_{D2}(t-2a)) - \frac{L}{2}\frac{1}{a2KL^2}(t-2a) +$$

$$+ \frac{1}{a2KL^2 w_{D2}}\left[e^{-\xi w_2 (t-2a)} \,\text{sen}(w_{D2}(t-2a) - 2\sigma_2) + \text{sen}\, 2\sigma_2\right]$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
MECANICA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eusko ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA
INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.
Ingeniería Industrial. 3er curso. Septiembre 2005.
Examen Final
Ejercicio 2
Peso: 15 %. Tiempo: 35 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Iraila 2005
Azterketa Finala
2. ariketa
Pisua: 15 %. Iraupena: 35 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

En la siguiente figura se representa un esquema de dispositivo de ensayos experimentales. En este caso, se pretende estudiar la respuesta de un sistema de dos grados de libertad, de masa puntual m, aislado del suelo mediante resortes de rigidez constante k y amortiguadores subcríticos de constante de proporcionalidad c. Dicho sistema, desequilibrado, se ve sometido a una fuerza giratoria de magnitud F_0, que gira alrededor de G a una velocidad angular constante ϖ. Se pide:

1.- Las ecuaciones del movimiento en notación matricial. (3p)
2.- Las frecuencias naturales del sistema. (1p)
3.- La respuesta estacionaria del sistema frente al peso propio y a la carga dinámica F_0. (6p)

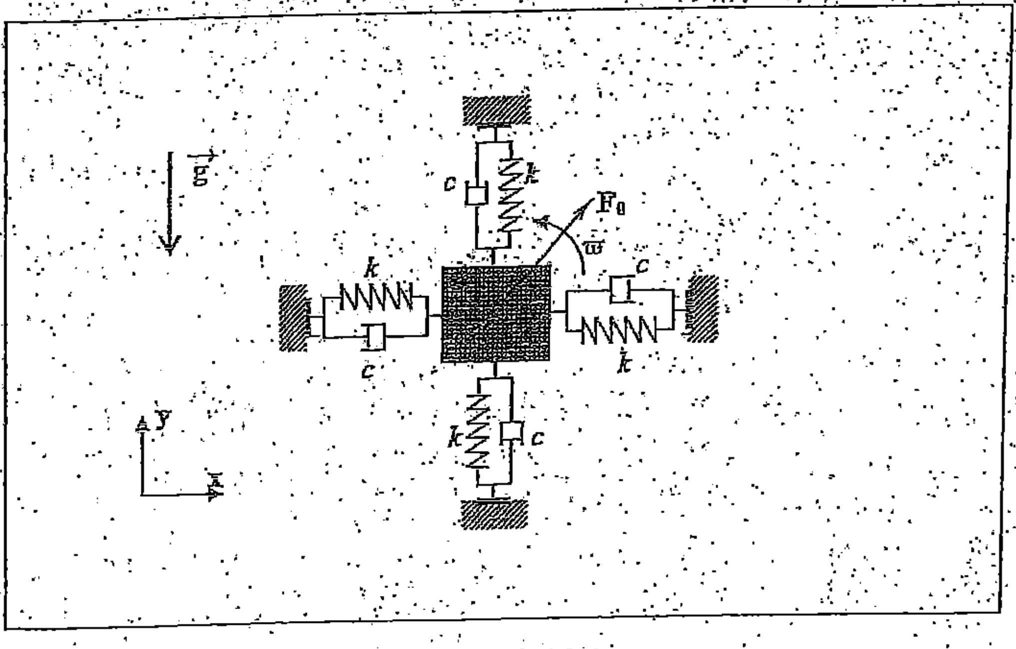
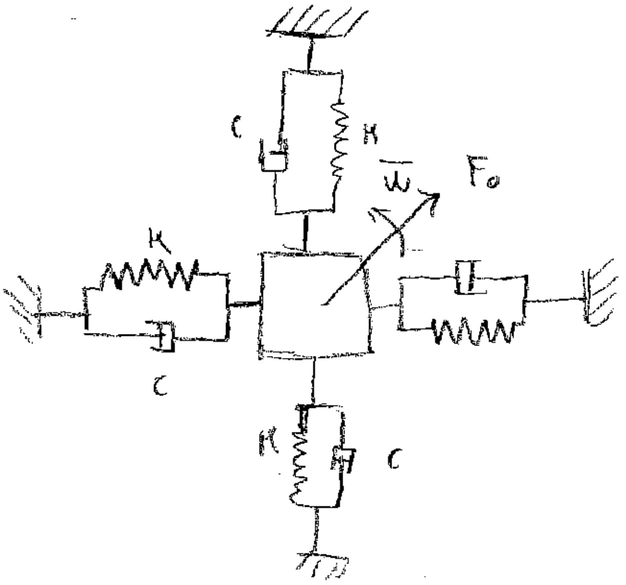
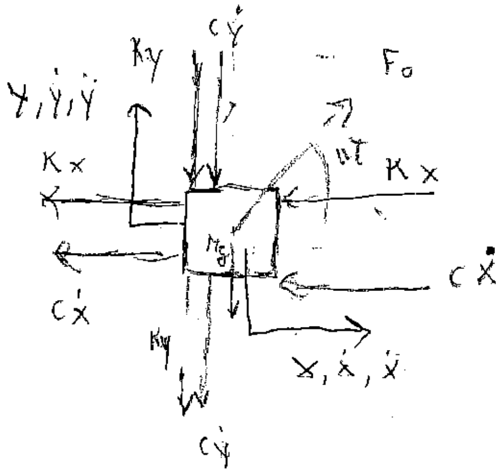


Figura 1: Esquema del sistema.

Examen Septiembre 2005





1) x) $-2Kx - 2c\dot{x} + F_0 \cos \bar{w} t = M\ddot{x}$

y) $-2Ky - 2c\dot{y} + F_0 \,\text{sen}\, \bar{w} t - Mg = M\ddot{y}$

2) $M\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2Kx = F_0 \cos \bar{w} t$

$M\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2Ky = F_0 \,\text{sen}\, \bar{w} t - Mg$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & 2K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos \bar{w} t \\ F_0 \,\text{sen}\, \bar{w} t - Mg \end{bmatrix}$$

3) Al peso

$x(t) = 0$

$y(t) = -\frac{Mg}{2K}$ $\qquad y = e^{-\xi w t}(A \cos w_D t + B \,\text{sen}\, w_D t) - \frac{Mg}{2K}$

R estacionaria $\rightarrow t \rightarrow \infty \rightarrow$ $y = -\frac{Mg}{2K}$

Carga dinámica $\qquad$ como están desacoplados se coje la formula de 1 solo grado de libertad

$$x(t) = \frac{F_0}{2K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_1^2)^2 + (2\xi_1 \beta_1)^2}} \cos(\bar{w} t - \varphi_1)$$

$$y(t) = \frac{F_0}{2K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_2^2) + (2\xi_2 \beta_2)^2}} \,\text{sen}(\bar{w} t - \varphi_2)$$

$$\beta_1 = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \beta_2$$

$$\zeta_1 = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{2c}{2m\omega} = \frac{c}{m\sqrt{\frac{2K}{m}}} = \frac{c}{\sqrt{2mK}} = \zeta_2$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\ \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} = \varphi_2$$

TEMA 14

SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD III. VIBRACIONES FORZADAS

1. Vibraciones no amortiguadas. Excitaciones armónica.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} e^{iwt}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} e^{iwt}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} - m_{11}\bar{w}^2 & K_{12} - m_{12}\bar{w}^2 \\ K_{12} - m_{12}w^2 & K_{22} - m_{22}w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{x}_1} \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

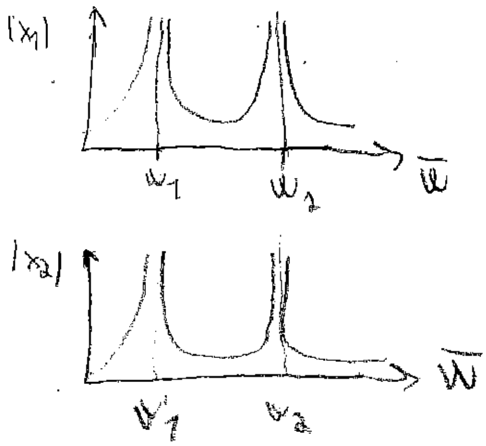
$$\underline{\bar{x}_1} = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & K_{12} - m_{12}\bar{w}^2 \\ f_2 & K_{22} - m_{22}\bar{w}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{11} - m_{11}\bar{w}^2 & K_{12} - m_{12}\bar{w}^2 \\ K_{12} - m_{12}\bar{w}^2 & K_{22} - m_{22}\bar{w}^2 \end{vmatrix}}$$

$\underline{\bar{X}_2} = \ldots$

Resonancia

esto sería 0

$$\left.\begin{array}{l} \bar{w} = w_1 \\ \bar{w} = w_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \underline{\bar{x}_1} \to \infty \\ \underline{\bar{x}_2} \to \infty \end{array}$$



2. Vibraciones amortiguadas. Excitación armónica

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} e^{i\bar{\omega} t}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} + i c_{11}\bar{\omega} - m_{11}\bar{\omega}^2 & K_{12} + i c_{12}\bar{\omega} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ K_{12} + i c_{12}\bar{\omega} - m_{12}\bar{\omega}^2 & K_{22} + i c_{22}\bar{\omega} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

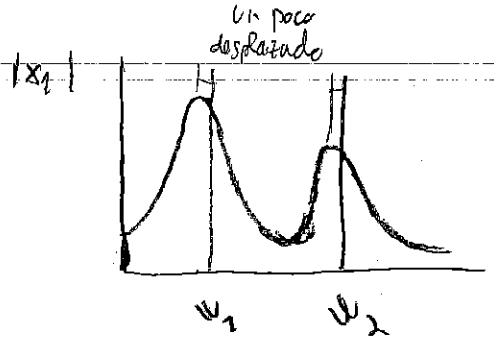
$$x_1(\bar{\omega}) = A(\bar{\omega}) + i B(\bar{\omega}) = \sqrt{A(\bar{\omega})^2 + B(\bar{\omega})^2}\, e^{i\varphi_1(\bar{\omega})}$$

$$\underline{X}_2(\bar{\omega}) = C(\bar{\omega}) + i D(\bar{\omega}) = \sqrt{C(\bar{\omega})^2 + B(\bar{\omega})^2}\, e^{i\varphi_2(\bar{\omega})}$$

$$\varphi_1(\bar{\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{B(\bar{\omega})}{A(\bar{\omega})}$$

$$\varphi_2(\bar{\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{D(\bar{\omega})}{C(\bar{\omega})}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |x_1| e^{i\varphi_1} \\ |x_2| e^{i\varphi_2} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} |\bar{X}_1| e^{i(\omega t + \varphi_1)} \\ |\bar{X}_2| e^{i(\bar{\omega} t + \varphi_2)} \end{Bmatrix}$$



$$\left[K_{ij} + i c_{ij}\bar{\omega} - m_{ij}\bar{\omega}^2\right]\{x_j\} = \{f_j\}$$

$$\{x_j\} = \left[K_{ij} + i c_{ij}\bar{\omega} - m_{ij}\bar{\omega}^2\right]^{-1}\{f_j\}$$

$$\begin{tikzcd} \{f_j\} \arrow[r] & \boxed{h_{ij}(\bar{\omega})} \arrow[r] & \{x_j\} \end{tikzcd}$$

$$h_{ij}(\bar{\omega}) = \left[K_{ij} + i c_{ij}\bar{\omega} - m_{ij}\bar{\omega}^2\right]^{-1}$$

$$[m_j^M][\ddot{Y}_j]+[C_j^M][\dot{Y}_j]+[K_j^M]\{Y_j\}=\{f_j^M\}e^{i\bar{\omega}t}$$

↓ Matriz de amortiguamientos modales

vector de fuerzas modales

$$[C_j^M]=\{X^j\}^T[C]\{X^j\}$$

$$\{f_j^M\}=\{X^j\}^T\{f\}$$

$$m_j^M\ddot{Y}_j+C_j^M\dot{Y}_j+K_j^M Y_j=f_0^M e^{i\bar{\omega}t}$$

$$Y_j(t)=h_j^M(\bar{\omega})f_0^M e^{i\omega t}$$

$$H_j^M(\bar{\omega})=\frac{1}{K_j^M}\,\frac{1}{1-B_j^2+2i\xi_j^M B_j}$$

$$\{Y_j(t)\}=[H_j^M(\bar{\omega})]\{f_0^M\}e^{i\omega t}$$

$$\{x_i(t)\}=[X]\{Y_i(t)\}=\underbrace{[X][H_j^M(\bar{\omega})][X]^T}_{h_{ij}(\bar{\omega})}\{f_i\}e^{i\bar{\omega}t}$$

3-Respuesta a una excitación de tipo general

amortiguamiento proporcional

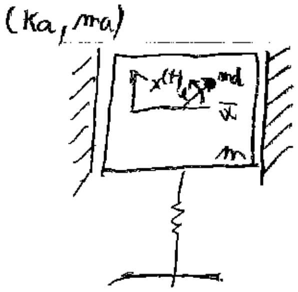
$$\begin{bmatrix} m_1^M & 0 \\ 0 & m_2^M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{Y}_1\\ \ddot{Y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C_1^M & 0 \\ 0 & C_2^M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{Y}_1\\ \dot{Y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_1^M & 0 \\ 0 & K_2^M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1^M(t)\\ f_2^M(t)\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{Y}_1\\ \ddot{Y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2\xi_1 w_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2 w_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{Y}_1\\ \dot{Y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1^M(t)\\ f_2^M(t)\end{Bmatrix}$$

4. Aplicación practica. absorsores.

Absorsor : masa unida a una rigidez. (. . . . .

- Desequilibrio en máquinas. Factor de amplificación por desequilibrio



e = excentricidad

$f_0 = m_d \bar{w}^2 e$

$f_v = m_d \bar{w}^2 e \operatorname{sen} wt$

$$x(t) = \frac{m_d e \bar{w}^2}{K} D \operatorname{sen}(\bar{w}t - \varphi)$$

$$x(t) = e \frac{m_d}{m} \boxed{\frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}} \operatorname{sen}\left(\bar{w}t - \operatorname{arctg} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

D_d = Factor de amplificación por desequilibrio

$$D_d \max = \frac{1}{2} \frac{1}{\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \| \quad \beta_{max} = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

$\xi \leq 0{,}1$

$$D_d \max \simeq \frac{1}{2\xi}$$

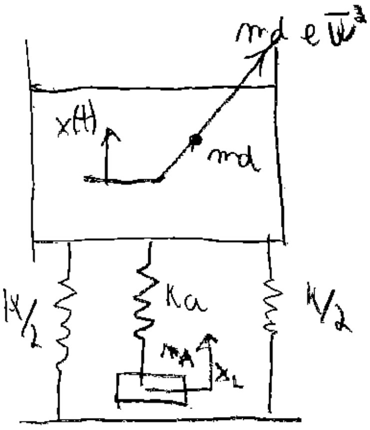
$\beta_d \max \simeq 1$

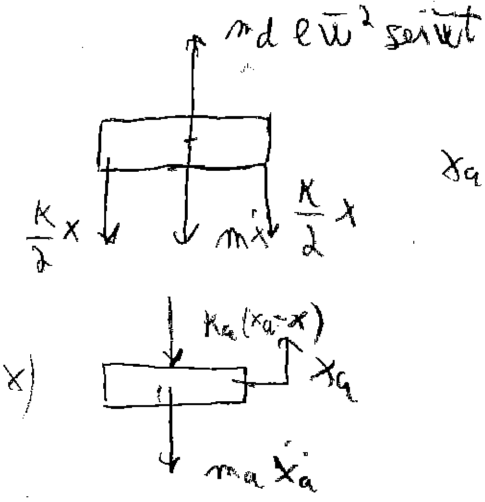
$$X_d = e \frac{m_d}{m} D_d = e \frac{m_d}{m} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}$$

$$D_d = \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}$$

$\xi = 0$

- Adición de un absorsor





$x_a > x$

$(x_a > x)$

$$m\ddot{x} + Kx + K_a x - K_a x_a - m_d e \bar{w}^2 \text{sen} \bar{w} t$$

$$m_a \ddot{x}_a + K_a x_a - K_a x = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K+K_a) & -K_a \\ K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_d e \bar{w}^2 \text{sen}(wt) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{X} = \frac{m_d e \bar{w}^2 (K_a - m_a \bar{w}^2)}{\begin{vmatrix} (K+K_a) - m\bar{w}^2 & -K_a \\ -K_a & K_a - m_a \bar{w}^2 \end{vmatrix}} \qquad X_a = \frac{m_d e \bar{w}^2 K_a}{\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}}$$

Te interesa que $x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \bar{w}^2 = \frac{K_a}{m_a} = w_1^2 = w_a^2$$

sintonizar el absorsor

$$|X_a| = \left| \frac{m_d e \bar{w}^2}{-K_a} \right| = \frac{m_d e}{m_a}$$

$$-K_a X_a = F_0$$

Problemas Resueltos

Problema 1

lavadora industrial 1gdl

DATOS

$n = [200, 400]$ rpm

$n_r = 300$ rpm

$m_a^P = 2Kg$

$$\frac{K_a^P}{m_a^P} = \left(300 \frac{2\pi}{60}\right)^2$$

$n_{1r} = 250$ rpm ← El libro pone 270 o asi pero Mikel lo tiene hecho con 250

$$\frac{K_a}{m_a} = \left(300 \frac{2\pi}{60}\right)^2 = 986,9651 \ s^{-2}$$

---

absorsor →

$$\frac{K_a}{m_a} = 986,9651$$

$$(K + K_a - m w^2)(K_a - m_a w^2) - K_a^2 = 0$$

No tener ni K, m, K_a, m_a, w → despejas de aqui K_a

maquina →

$$\frac{K}{m} = 986,9631$$

$$(K + K_a^P - m w^2)(K_a - m_a^P \bar{w}^2) - K_a^{P2} = 0$$

$$w^2 = 250 \frac{2\pi}{60}$$

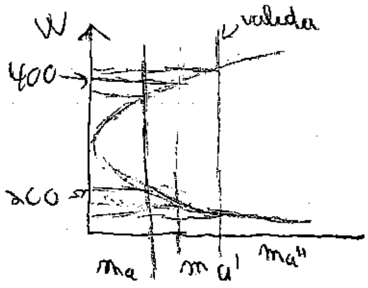
⇒ $K = 14685,9719$ N/m

$m = 14,85$ Kg

$$(94685,9714 + 986,9651\, m_a - 14,88\, w^2) \cdot (986,9651\, m_a - m_a w^2) -$$

$$- (986,9651)^2 m_a^2 = 0$$

Esto depende de w y ma



Sin la grafica metes w 200 y w 400 y te quedas con la mas grande

Tema 14

Problema 2

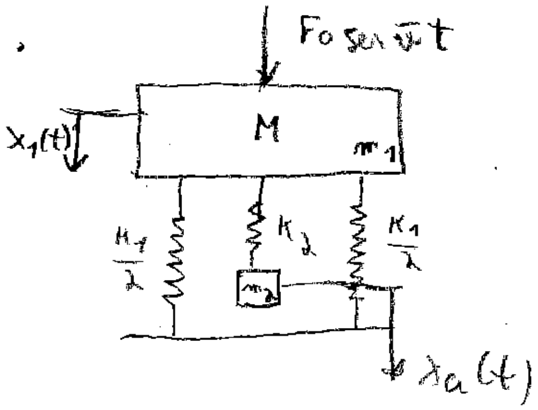
m_1, K_1, ω_1 Ⓜ

m_2, K_2, ω_2 Ⓐ

$\left.\begin{matrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{matrix}\right\}$ (M+A)

$\bar{\omega}$

F_0



X_1	amplitud	M	M+A
X_2	"	A	M+A

B) $$X_1 = \frac{F_0 (K_2 - m_2 \bar{\omega}^2)}{(K_1 + K_2 - m_1 \bar{\omega}^2)(K_2 - m_2 \bar{\omega}^2) - K_2^2}$$

$$X_2 = \frac{K_2 \cdot F_0}{(K_1 + K_2 - m_1 \bar{\omega}^2)(K_2 - m_2 \bar{\omega}^2 - K_2^2)}$$

) $X_1 = 0$ si $\bar{\omega}^2 = \frac{K_2}{m_2} = \omega_1^2 = \omega_2^2$

$$X_2 = \frac{K_2 F_0}{\left(K_1 + K_2 - m_1 \frac{K_2}{m_2}\right)\left(\underbrace{K_2 - \cancel{m_2}\frac{K_2}{\cancel{m_2}}}_{0}\right) - K_2^2}$$

$$X_2 = \frac{K_2 F_0}{-K_2^2} \Rightarrow F_0 = -K_2 X_2$$

D) $X_1 = \frac{1}{4} X_2 \Rightarrow F_0 (K_2 - m_2 \bar{\omega}^2) = \frac{1}{4} K_2 F_0$

$$3K_2 = 4 m_2 \bar{\omega}^2$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{3K_2}{4 m_2}}$$

e) $w_2' - w_1 = w_1 - w_1'$

$$\boxed{2w_1 = w_1' + w_2'}$$

$$(K_1 + K_2 - m_1 w^2)(K_2 - m_2 \bar{w}^2) - K_2^2 = 0$$

$$(K_1 + K_2) K_2 - (K_1 + K_2) m_2 w^2 - m_1 K_2 w^2 + m_1 m_2 w^4 - K_2 = 0$$

$$m_1 m_2 w^4 - (K_1 m_2 + K_2 m_2 + m_1 K_2) w^2 + K_1 K_2 = 0$$

$$(w_{1,2}') = \underbrace{\frac{(K_1 m_2 + K_2 m_2 + m_1 K_2)}{2 m_1 m_2}}_{A} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{(K_1 m_2 + K_2 m_2 + m_1 K_2) - 4 m_1 m_2 K_1}}{2 m_1 m_2}}_{B}$$

Elevo al cuadrado

$$4 w_1^2 = w_1'^2 + w_2'^2 + 2 w_1' w_2'$$

$$4 w_1^2 = \frac{K_1 m_2 + K_2 m_2 + m_1 K_2}{m_1 m_2} + 2\sqrt{A+B}\,\sqrt{A-B}$$

$$4 w_1^2 = \frac{K_1 m_2 + K_2 m_2 + K_2 m_1}{m_1 m_2} +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{(K_1 m_2 + K_2 m_2 + m_1 K_2)^2}{(2 m_1 m_2)^2} - \frac{(K_1 m_2 + K_2 m_2 + K_2 m_1)^2 - 4 m_1 m_2 K_1 K_2}{(2 m_1 m_2)^2}}$$

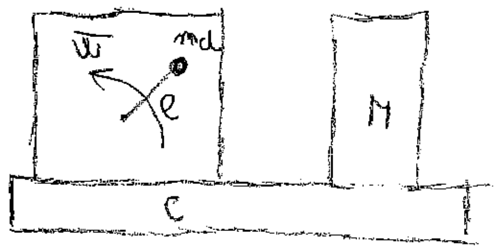
$$4 w_1^2 = \frac{K_1 m_2 + K_2 m_2 + K_2 m_1}{m_1 m_2} + 2\sqrt{\frac{K_1 K_2}{m_1 m_2}}$$

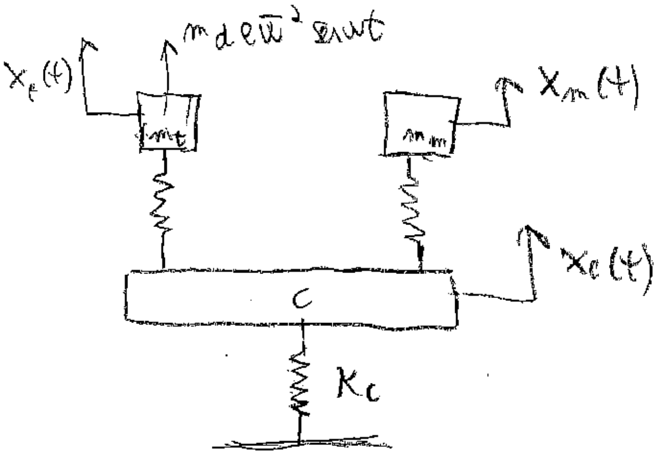
$$w_1^2 = \frac{K_1}{m_1} = w_2' = \frac{K_2}{m_2}$$

Solo puede ser

$$\cancel{4 w_1^2} = \cancel{w_1^2} + \frac{K_2}{m_1} + \cancel{w_1^2} + \cancel{2 w_1^2} \Rightarrow$$ si $K_2 = 0$ o $m \to \infty$ } Es imposible que sea equidistante

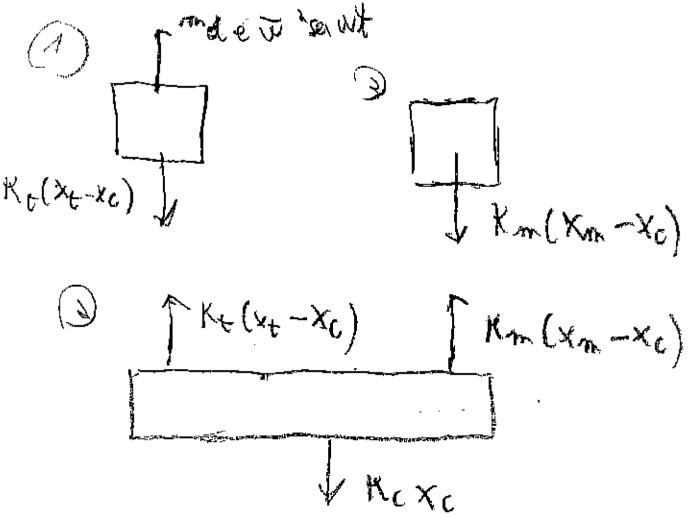
Problema 3





$x_t > x_c$

$x_m > x_c$



①

$$m_d e \overline{w}^2 \operatorname{sen} wt - K_t(x_t-x_c) = m_t \ddot{x}_t$$

②

$$K_t(x_t-x_c) + K_m(x_m-x_c) - K_c x_c = m_c \ddot{x}_c$$

$$-K_m(X_m-X_c) = m_m \ddot{x}_m$$

$$\left.\begin{aligned} m_t \ddot{x}_t - K_t x_t - K_t x_c &= m_d e \overline{w}^2 \operatorname{sen} \overline{w}t \\ m_c \ddot{x}_c - K_t x_t + (K_t + K_m + K_c) x_c - K_m x_m &= 0 \\ m_m \ddot{x}_m - K_m x_c + K_m x_m &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_t \\ \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t & -K_t & 0 \\ -K_t & K+K_m+K_c & -K_m \\ 0 & -K_m & K_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ x_c \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d e \overline{w}^2 \operatorname{sen} w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_t(t) \\ x_c(t) \\ x_m(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{X}_t \\ \overline{X}_c \\ \overline{X}_m \end{bmatrix} \operatorname{sen} \overline{w}t$$

$$\overline{X_t} = \frac{\left| \begin{matrix} m_d e\bar{\omega}^2 & -K_t & 0 \\ 0 & K_t+K_m+K_c-m_c\bar{\omega}^2 & -K_m \\ 0 & -K_m & K_m - m_m\bar{\omega}^2 \end{matrix} \right)}{\left| \begin{matrix} K_t - m_t\bar{\omega}^2 & -K_t & 0 \\ -K_t & K+K_m+K_c+m_c\omega^2 & -K_m \\ 0 & -K_m & K_m - m_m\bar{\omega}^2 \end{matrix} \right|}$$

$\underline{\overline{X_c}}$, $\underline{\overline{X_m}}$

$$\underline{\overline{X_m}} = \frac{K_t K_m m_d e\bar{\omega}^2}{\Delta}$$

$K_t, K_m \downarrow \quad \Delta \uparrow$

$\sqrt{\dfrac{K_m}{m_m}} \qquad \dfrac{X_m}{x_t}$

$$x_c = \frac{d_t m_d e\bar{\omega}^2 (K_m - m_m\bar{\omega}^2)}{\Delta}$$

$Y_c = 0$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
MECÁNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA
SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial, Junio 2007.
Peso sobre la Unidad Temática: 10 %.
Ejercicio. 2 Tiempo: 45 min.

MAKINEN TEORIA.

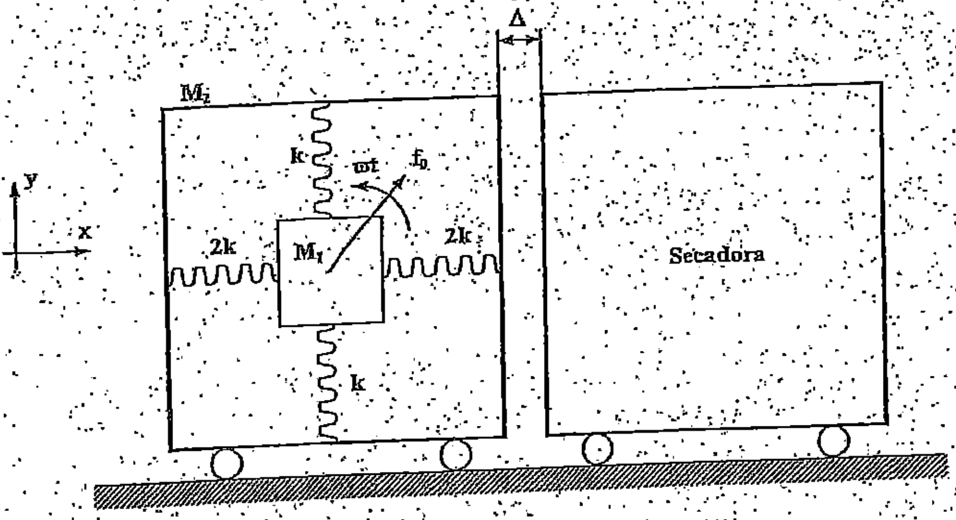
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2007.-eko Ekaina.
Atal Tematikoaren Pisua: 10 %.
Ariketa. 2 Iraupena: 45 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

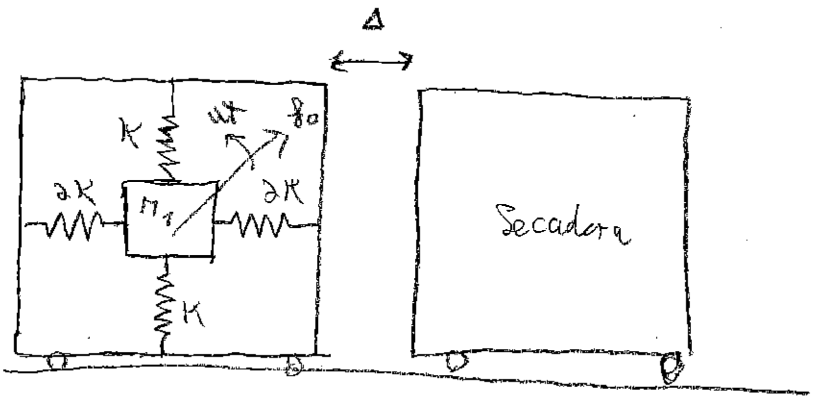
Con el fin de estudiar la posible colisión entre dos electrodomésticos, una lavadora y una secadora, se define el modelo de la figura. La lavadora, de masa total M_2, está apoyada en el suelo y tiene capacidad de movimiento horizontal. Debido a un desequilibrio, aparece una fuerza f_0 de magnitud $m\varpi^2 e$, que gira a velocidad constante ϖ aplicada al tambor de masa M_1, montado sobre el chasis mediante los resortes de rigidez k y 2k, tal como se muestra en la figura. Se pide:

1. El desplazamiento absoluto del tambor y de la lavadora a lo largo del tiempo. (6 p)
2. La fuerza transmitida al suelo. (2 p)
3. La condición para que la lavadora no choque con la secadora, es decir el mínimo espacio Δ entre ellas, si la frecuencia de excitación ϖ vale $\sqrt{4k/M_1}$. (2 p)

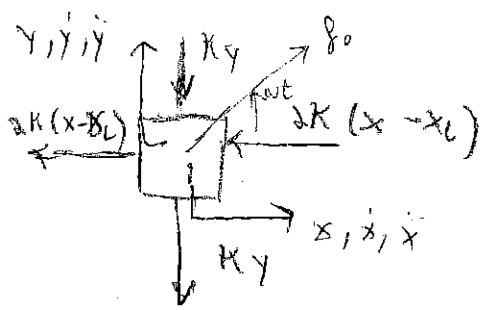


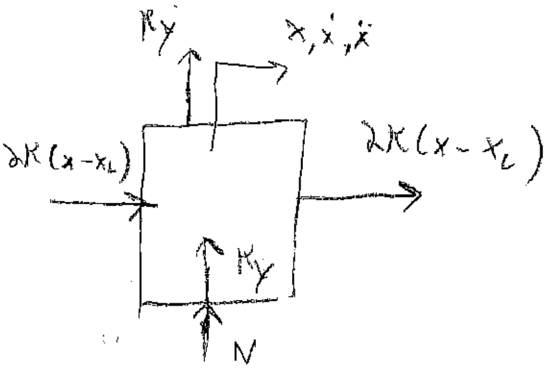
k

Examen 2007



Supones $x > x_L$





$$1 \begin{cases} -4K(x-x_L) + F_0 \cos \bar{\omega} t = M_1 \ddot{x} \\ -2Ky + F_0 \operatorname{sen} \bar{\omega} t = M_1 \ddot{y} \end{cases}$$

$$L \Rightarrow 4K(x-x_L) = M_2 \ddot{x}_L$$

$$\boxed{\begin{array}{l} M_1 \ddot{x} + 4Kx - 4Kx_L = F_0 \cos \bar{\omega} t \\ M_2 \ddot{x} + 4Kx_L - 4Kx = 0 \end{array}}$$

$$M_1 \ddot{y} + 2Ky = F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

→ Esta desacoplada

$$F_0 = m\bar{\omega}^2 e$$

$$y(t) = \frac{F_0}{2K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_3}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2K}{M_1}}, \quad \xi_2 = 0, \quad y(t) = \frac{m e \bar{\omega}^2}{2K} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{(1-\beta^2)}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4K & -4K \\ -4K & 4K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos \bar{\omega} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4K - \omega^2 M_1 & -4K \\ -4K & 4K - \omega^2 M_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4K - \omega^2 M_1)(4K - \omega^2 M_2) - 16K = 0 \nearrow \omega_1 = 0$$

$$\cancel{16K^2} - 4K\omega^2 M_2 - 4K\omega^2 M_1 + \omega^4 M_1 M_2 - 16K = 0 \searrow \omega_2 = \sqrt{\frac{4K(M_1+M_2)}{M_1 M_2}}$$

$$\omega^2(-4KM_2 - 4KM_1 + \omega^2(M_1 M_2) \longrightarrow 0$$

$$(4K - \omega_1^2 M_1)x_1^1 - 4K x_2^1 = 0$$

$$\text{con } \omega_1 = 0 \longrightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \omega_2 \longrightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4K & -4K \\ -4K & 4K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 + M_2 & 0 \\ 0 & M_1 + \frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4K(M_1+M_2)^2}{M_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \cos \bar{\omega} t \\ F_0 \cos \omega t \end{Bmatrix}$$

$$(M_1 + M_2)\ddot{Y}_1 = me\bar{\omega}^2 \cos \omega t$$

$$\frac{M_1}{M_2}(M_1 + M_2)\ddot{Y}_2 + \frac{4K(M_1+M_2)^2}{M_2^2} Y_2 = me\bar{\omega}^2 \cos \omega t$$

$$\begin{bmatrix} X \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

falta D o este no hay K ?

$$\ddot{Y}_1 = \frac{m e \bar{w}^2}{M_1 + M_2} \cos \bar{w} t \rightarrow \dot{Y}_1 = \frac{m e \bar{w}}{M_1 + M_2} \operatorname{sen} \bar{w} t + \cancel{C_1} = 0$$

$t = 0 \cdot \quad x_0 = 0 \quad x_{L0} = 0 \quad \Big| \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \dot{x}_{L0} = 0$

como x son $0 \Rightarrow \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0$

$\dot{x}$ es $0 \rightarrow \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = 0$

$$Y_1 = -\frac{m e}{M_1 + M_2} \cos \bar{w} t + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{m e}{M_1 + M_2}$$

$$Y_1 = \frac{m e}{M_1 + M_2} \left(1 - \cos \bar{w} t\right)$$

$$Y_2 = \frac{m e \bar{w}^2}{\frac{4K (M_1 + M_2)^2}{M_2^2}} D_2 \cos \bar{w} t$$

$$Y_2 = \frac{m e \bar{w}^2 M_2^2}{4K (M_1 + M_2)^2} D_2 \cos \bar{w} t$$

$$D_2 = \frac{1}{(1 - B_2^2)}$$

$$B = \frac{\bar{w}}{w_2}$$

como comprobación w_2 (ya estaba sacada)

$$w_2^2 = \frac{4K (M_1 + M_2)^2}{M_2^2 \frac{M_1}{M_2} (M_1 + M_2)} = \frac{4K (M_1 + M_2)}{M_1 M_2}$$

$$Y = \frac{m e \bar{w}^2}{2K} \frac{1}{1 - B_2^2} \operatorname{sen} \bar{w} t$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ x_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$

$$x = Y_1 + Y_2$$

$$x_L = Y_1 - \frac{M_1}{M_2} Y_2 = \frac{m e}{M_1 + M_2} (1 - \cos \bar{w} t) - \frac{m e \bar{w}^2 M_1 M_2}{4K (M_1 + M_2)^2} D_2 \cos \bar{w} t$$

$$x_L = \frac{me}{M_1+M_2}\left[1 - \cos\bar{\omega}t\left(1+\frac{\bar{\omega}^2 M_1 M_2}{4K(M_1+M_2)} D_2\right)\right]$$

2)

$$2Ky + N = 0 \Rightarrow N = -2Ky \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = -me\bar{\omega}^2 \frac{1}{1-\beta_3^2} \operatorname{sen}\bar{\omega}t$$

3) $x_L \max \leq \Delta$

$$x_L = \frac{me}{M_1+M_2}\left[1 - \overset{\cos\omega t}{(-1)}\left(1+\frac{\bar{\omega}^2 M_1 M_2}{4K(M_1+M_2)} D_2\right)\right]$$

TEORÍA DE MÁQUINAS.
3º Ingeniería Industrial. Abril 2005.
Unidad Temática B.
Peso: 25 %.
Ejercicio 2. Tiempo: 60 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2005.-eko Apirila.
B Atal Tematikoa.
Pisua: 25 %.
2. Ariketa Iraupena: 60 min.

NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:
GRUPO / TALDEA:

El la figura 1 se representa un esquema de un prototipo de carreras montado sobre unas mesas excitadores para una serie de ensayos experimentales en laboratorio. Como primer paso, y para tener un orden de magnitud de los resultados, se define el modelo discreto de dos grados de libertad (y(t) y θ(t)) de la figura 2. El cuerpo del vehículo se modeliza mediante una viga de longitud 2L, de centro de gravedad G, masa M e inercia I_G. Para el sistema de suspensión se utiliza un muelle a compresión de constante **k** y un amortiguador de constante de proporcionalidad **c**. Se piden:

1.- El sistema de ecuaciones del movimiento en notación matricial (suponiendo pequeñas deformaciones). (3p)
2.- Las frecuencias naturales del sistema. (2p)
Suponiendo que las mesas excitadoras poseen unas leyes de desplazamiento vertical tal que $z_1(t)=Z_0\cos\varpi t$ y $z_2(t)=Z_0\cos\varpi(t-t_0)$, siendo t_0 el desfase entre ambas mesas, determinar la respuesta estacionaria del sistema para los siguientes casos:
3.- $t_0 = 0$ (2p) .
4.- $t_0 = \pi/\varpi$ (2p)
5.- $t_0 = \pi/2\varpi$ (1p)

$Y > \theta \cdot L$
$Y \geq \theta \cdot L$
$Y > \theta \cdot L$

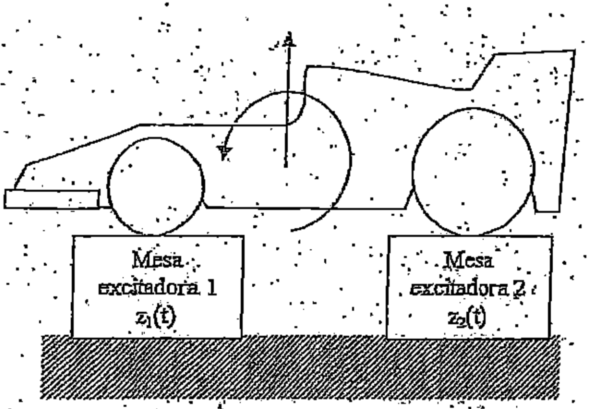


Figura 1. Esquema del sistema.

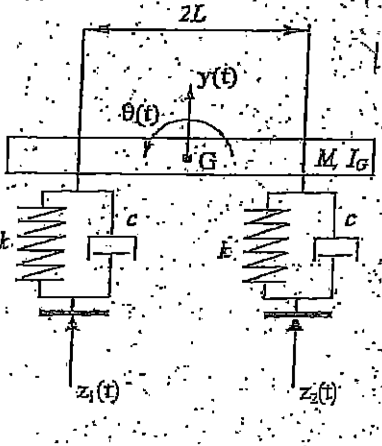
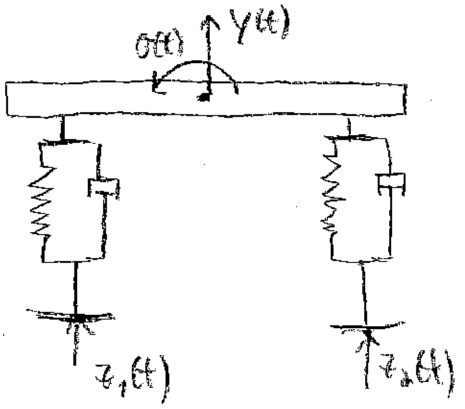
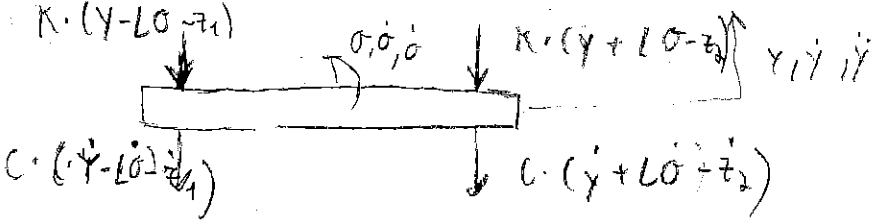


Figura 2. Modelo de 2gdL.

Examen Abril 2005



$y \geq \sigma \cdot L$



$$\Sigma F_y = M\ddot y \Rightarrow -K(y-L\sigma-z_1)-C(\dot y-L\dot\sigma-\dot z_1)-K(\dot y+L\sigma-z_2)-C(\dot y+L\dot\sigma-\dot z_2)=M\ddot y$$

$$\overrightarrow{M_8} = \mathcal{I}_0\dot\sigma \Rightarrow K(y-L\sigma-\dot z_1)L + C(\dot y-L\dot\sigma-\dot z_1)L - K(y+L\sigma-z_2)L - C(\dot y+L\sigma-\dot z_2)L = \mathcal{I}_0\ddot\sigma$$

$$M\ddot y + 2C\dot y + 2Ky = Kz_1 + Kz_2 + C\dot z_1 + C\dot z_2$$

$$\mathcal{I}\ddot\sigma + 2CL^2\dot\sigma + 2KL^2\sigma = -KL z_1 + KL z_2 - CL\dot z_1 + CL\dot z_2$$ pa abreviar $\downarrow$ F_1

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot y \\ \ddot\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2C & 0 \\ 0 & 2CL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot y \\ \dot\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & 2KL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} Kz_1+Kz_2+C\dot z_1+C\dot z_2 \\ -KLz_1+KLz_2-CL\dot z_1+CL\dot z_2 \end{Bmatrix}$$

F_2

$$w_1 = \sqrt{\frac{2K}{M}} \qquad w_2 = \sqrt{\frac{2KL^2}{\mathcal{I}_0}}$$

3- $z_1(t) = z_0 \cos \bar w t$ $\qquad z_1 = z_0 \cos \bar w t \rightarrow \dot z_1 = -z_0 \bar w \operatorname{sen} \bar w t \rightarrow$

$z_2(t) = z_0 \cos \bar w (t-t_0)$ $\qquad z_2 = z_0 \cos \bar w t \rightarrow \dot z_2 = -z_0 \bar w \operatorname{sen} \bar w t \rightarrow$

$t_0 = 0$

Sustituyendo $z, \dot z$ en F_1 y F_2

$F_1 = 2K z_0 \cos \bar w t - 2C z_0 \bar w \operatorname{sen} \bar w t$

$F_2 = 0 \longrightarrow \sigma(t) = 0$

resolviendo $\mathcal{I}_0\ddot\sigma + 2CL^2\dot\sigma + 2KL^2\sigma = 0 \rightarrow \sigma = e^{-\xi w_2 t}\left[A\cos w_d t + B \operatorname{sen} w_d t\right]$

también ...

①

estacionaria armónica no faltarían los 2 → no porque es entre 2K

$$Y = z_0 D_1 \cos(\bar{\omega} t - e_1) - \frac{C z_0}{K} \bar{\omega} D_1 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - e_1)$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-B_1^2)^2 + (2\xi B_1)^2}} \quad \Bigg| \quad \xi_1 = \frac{2c}{2m\omega_1} \qquad B_1 = \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}$$

$$e_1 = \operatorname{arct} \frac{2\xi_1 B_1}{1 - B_1^2}$$

4) cuando $t = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$

$$z_1 = z_0 \cos \bar{\omega} t \rightarrow \dot{z}_1 = -z_0 \bar{\omega} \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

$$z_2 = z_0 \cos(\bar{\omega} t - \pi)$$

$$\hookrightarrow z_2 = -z_0 \cos \bar{\omega} t \quad \Big\} \rightarrow \dot{z}_2 = z_0 \bar{\omega} \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

$$\rightarrow F_1 = 0 \qquad \rightarrow Y = 0$$

$$F_2 = -2KL z_0 \cos \bar{\omega} t + 2CL z_0 \bar{\omega} \operatorname{sen} \bar{\omega} t \rightarrow \quad z_0$$

$$\rightarrow \sigma = -\frac{z_0}{L} D_2 \cos(\bar{\omega} t - e_2) + \frac{C z_0}{KL} \bar{\omega} D_2 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - e_2)$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-B_2^2)^2 + (2\xi_2 B_2)^2}} \quad \Bigg| \quad \xi_2 = \frac{2cL^2}{2I_0 \omega_2} \qquad B_2 = \frac{\bar{\omega}}{\omega_2}$$

$$e_2 = \operatorname{arct} \frac{2\xi_2 B_2}{1 - B_2^2}$$

5) $t_0 = \frac{\pi}{2\bar{w}}$

$z_1 = z_0 \cos \bar{w}t \rightarrow \dot{z}_1 = -z_0 \bar{w} \operatorname{sen} \bar{w}t$ $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} z_2 = z_0 \cos(\bar{w}t - \frac{\pi}{2}) \\ z_2 = z_0 \operatorname{sen} \bar{w}t \end{array}\right\} = \dot{z}_2 = z_0 \bar{w} \cos \bar{w}t$$

$F_1 = K z_0 (\operatorname{sen} \bar{w}t + \cos \bar{w}t) + c z_0 \bar{w} (\cos \bar{w}t - \operatorname{sen} \bar{w}t)$

$F_1 = z_0 (K + c\bar{w}) \cos \bar{w}t + z_0 (K - c\bar{w}) \operatorname{sen} \bar{w}t$

$F_2 = K l z_0 (\operatorname{sen} \bar{w}t - \cos \bar{w}t) + c l z_0 \bar{w} (\cos \bar{w}t + \operatorname{sen} \bar{w}t)$

$F_2 = z_0 l\, c\bar{w} - K) \cos \bar{w}t + z_0 l (c\bar{w} + K) \cos \bar{w}t$

$$Y = \frac{z_0 (K + c\bar{w})}{2K} D_1 \cos(\bar{w}t - \varphi_1) + \frac{z_0 (K - c\bar{w})}{2K} D_1 \operatorname{sen} \bar{w}t\, t - \varphi_1)$$

$$\sigma = \frac{z_0 l (c\bar{w} - K)}{2K l^2} D_2 \cos(\bar{w}t - \varphi_2) + \frac{z_0 l (c\bar{w} + K)}{2K l^2} D_2 \operatorname{sen}(\bar{w}t - \varphi_2)$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial. Julio 2012.
Peso sobre la Unidad Temática: 15 %.
Ejercicio. 3 Tiempo:40 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2012.-eko Uztaila.
Atal Tematikoaren Pisua: 15 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 40 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

Un tren de mercancías compuesto por una maquina tractora y dos vagones se ha modelizado como un sistema de tres grados de libertad tal y como se muestra en la figura 1. La maquina tractora tiene masa M y cada uno de los vagones una masa m. La unión entre cada uno de los componentes puede modelizarse como un resorte de rigidez K, tal como se representa en dicha figura.

Se pide determinar:

1. Ecuaciones del movimiento de las masas (2p)
2. Frecuencias naturales del sistema. (3p)
3. Modos de vibración del sistema (2p)
4. Considérese la situación de la Figura 2 en la que la máquina tractora se ha desenganchado de los vagones. Dicha máquina, queda enganchada a un tope fijado al andén tras impactar con el mismo. Obtener el valor del amortiguamiento relativo del sistema y dibujar de forma aproximada/representativa, para ese tipo de amortiguamiento, la respuesta a lo largo del tiempo. (3p)

Datos:
M=2.000 kg
m=1.000 kg
K=1.000 N/m
c=40.000 N·s/m

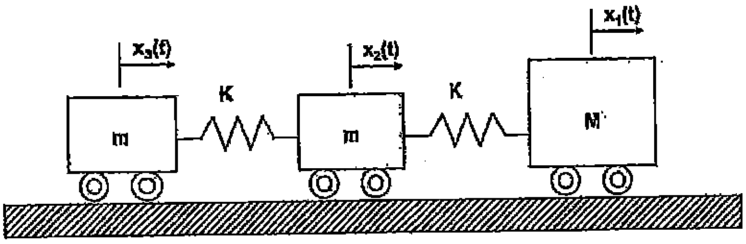


FIGURA 1

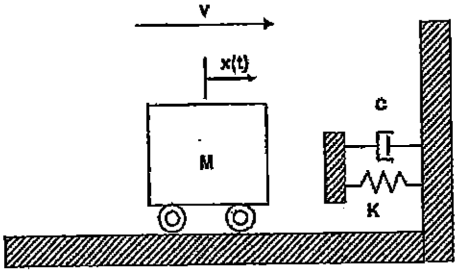
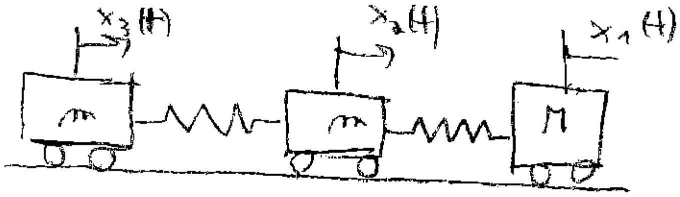
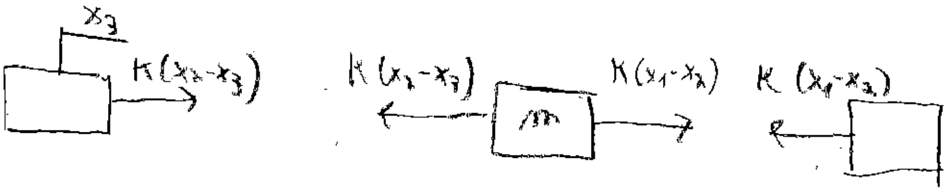


FIGURA 2

Examen Julio 2012



$x_1 > x_2 > x_3$



$$-K(x_1-x_2) = M\ddot{x}_1$$

$$K(x_1-x_2) - K(x_1-x_3) = m\ddot{x}_2$$

$$K(x_2-x_3) = m\ddot{x}_3$$

$$M\ddot{x}_1 + Kx_1 - Kx_2 = 0$$

$$m x_2 - Kx_1 + 2Kx_2 - Kx_3 = 0$$

$$m\ddot{x}_3 - Kx_2 + Kx_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

metiendo los valores

$$\begin{vmatrix} K - w^2 M & -K & 0 \\ -K & 2K w^2 m & -K \\ 0 & -K & K - w^2 M \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-2w^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-w^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-w^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(K - w^2 m)(2K - w^2 m)(K - w^2 M) - K^2(K - w^2 M) - K^2(K - w^2 m) = 0$$

$$(K - w^2 m)(2K^2 + w^4 mM - w^2(2KM + Km)) - 2K^3 + K^2 w^2 (m+M)$$

$$2K^3 + KmMw^4 - w^2K^2(2M+m) - 2K^2 w^2 m - w^6 mM + w^4 K(2M+m)$$

$$-2K^3 + K^2 w^2 (m+M) = 0$$

$w_1 = 0$

$w_2 = 1,67 \text{ rad/s}$

$w_3 = 0,85 \text{ rad/s}$

$$\left.\begin{array}{l}(1-2w^2)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + (1-w^2)x_3 = 0\end{array}\right\}$$

$x_1)$ $\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{array}$ $\Big\|$ $x^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$x_2)$

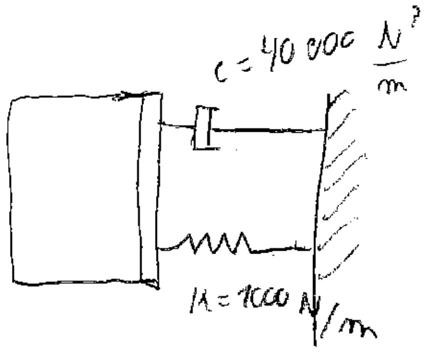
$$\left.\begin{array}{l}(1-2 \cdot 1,67^2)x_1 - x_2 \\ -x_2 + (1-1,67^2)x_3\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}-4,5778\,x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + 1,7889\,x_3 = 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}x_2 = -4,5778\,x_1 \\ x_3 = \dfrac{1}{1,7889}x_2\end{array}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix}1\\-4,5778\\-2,559\end{pmatrix}$$

$x_3)$

$$\begin{array}{l}(1-2,085^2)\,x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + (1-0,85^2)\,x_3 = 0\end{array} \quad \left|\begin{array}{l}-0,445\,x_1 = x_2 \\ -x_2 + 0,2775\,x_3 = 0\end{array}\right)$$

$$x^3 = \begin{pmatrix}1\\-0,445\\-1,604\end{pmatrix}$$



$$\zeta = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{40000}{2 \cdot 2000\, \omega} = \frac{40000}{4000 \cdot 0{,}7} = 14{,}14$$

sobreamortiguado

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{1000}{2000}} = 0{,}7071$$

respuesta sobreamortiguada (no está en el formulario)

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = \omega(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ s_2 = \omega(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \end{array}\right\|$$

$$s_1 = 0{,}7071(-14{,}14 + 14{,}14) = 0$$

$$s_2 = 0{,}7071(-14{,}14 - 14{,}14) \Rightarrow s_2 = -19{,}99$$

$$\rightarrow x(t) = C_1 + C_2 e^{-19{,}99\, t} \rightarrow \dot{x}(t) = -19{,}99\, C_2\, e^{-19{,}99\, t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = v \end{array}\right\| \quad \begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2 \\ v = -19{,}99\, C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{-v}{19{,}99} \end{array}$$

$$x(t) = \frac{v}{19{,}99} - \frac{v}{19{,}99} e^{-19{,}99\, t} \simeq \frac{v}{20}\left(1 - e^{-20t}\right)$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS

3º Ingeniería Industrial. Septiembre 2006.
Examen Final.

Peso sobre la Unidad Temática: 10 %.
Ejercicio. 3 Tiempo: 30 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA

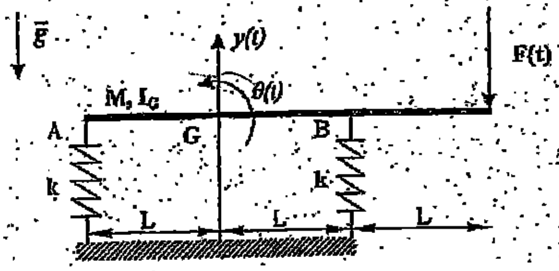
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2006.-eko Iraila.
Azterketa Finala.

Atal Tematikoaren Pisua: 10 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 30 min.

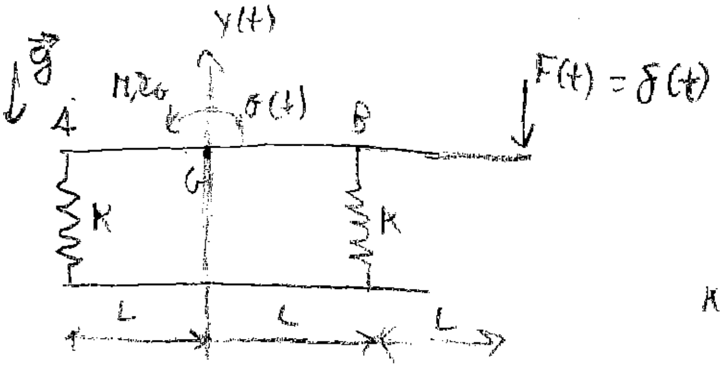
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

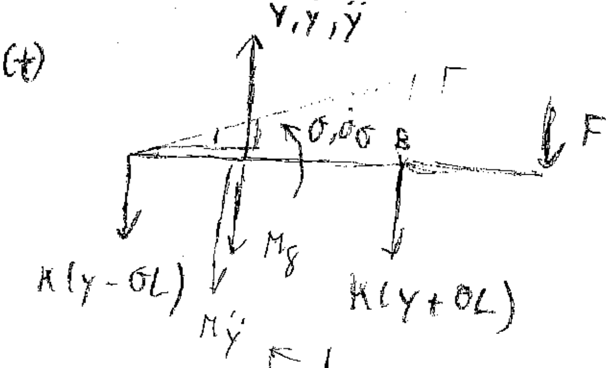
En la figura siguiente se representa una viga indeformable montada sobre un dispositivo de análisis experimental de vibraciones. Este sistema viene formado por una viga indeformable de masa M, longitud 3L y de momento de inercia respecto de su centro de gravedad G, I_G. Dicha viga viene unida al suelo en A y B mediante dos resortes de constante k. El sistema posee dos grados de libertad ($y(t)$, $\theta(t)$) correspondientes a la traslación vertical del centro de gravedad G de la viga y a su giro alrededor de G. Se pide, cuando el sistema se ve sometido a la aceleración de la gravedad $\vec{g}$, y a la carga impulso unitario F(t) (aplicada en t=0), tal como aparece en la figura:

1. Las ecuaciones de gobierno del sistema. (3p)
2. Las frecuencias naturales del sistema. (1p)
3. La respuesta del sistema frente a todas las cargas. (6p)



Examen Septiembre 2006





← le pues se hacer D'alembert

$$-F-K(y-\theta L)-Mg-K(y+\theta L)-M\ddot{y}=0$$

$$K(y-\theta L)L-K(y+\theta L)L-F2L-I_G\ddot{\theta}=0$$

$$M\ddot{y}+2Ky=-Mg-F$$

$$I_G\ddot{\theta}+2KL^2\theta=-F2L$$

$$w_1=\sqrt{\frac{2K}{M}}\quad ; \quad w_2=\sqrt{\frac{2KL^2}{I_G}}$$

$$\theta(t)=\frac{-2L}{I_G\, w_2}\,\text{sen}\, w_2 t$$

$$y=-\frac{Mg}{2K}-\frac{\text{sen}\, w_1 t}{M\cdot w_1}$$

1. ¿A qué fuerzas están sometidas las masas durante el proceso de frenado?

2. Calcular la respuesta durante la frenada.

3. Calcular la respuesta después de la frenada.

16. Sistemas de varios grados de libertad. Cálculo de modos, frecuencias y respuesta.

Se pretende analizar el comportamiento vibratorio de un avión durante el proceso de aterrizaje. La pista posee un perfil irregular que para el estudio puede considerarse sinusoidal con una amplitud máxima Y_0 y una longitud de onda λ (Ver figura 1). Supóngase que la velocidad media durante el aterrizaje es v y que el tren de aterrizaje no se despega de la pista después de contactar.

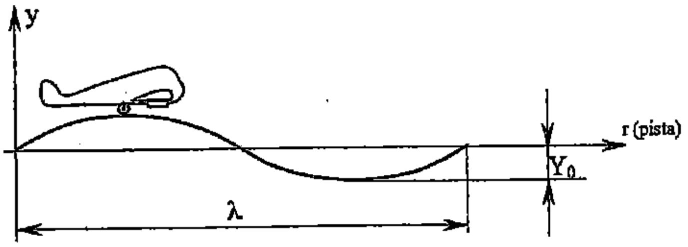


Figura 1.

En una primera aproximación se va a utilizar un modelo plano de acuerdo con la figura 2. Dicho modelo se concreta discretizando la masa del vehículo con tres masas concentradas; una masa m_1 correspondiente al cuerpo del avión y dos masas iguales m correspondientes a las turbinas y a la proporción de las alas. En definitiva, resulta el modelo de 3 gdl. de la figura 3, en el cual, k_1 es la rigidez del tren de aterrizaje y k la rigidez a flexión de cada ala del avión.

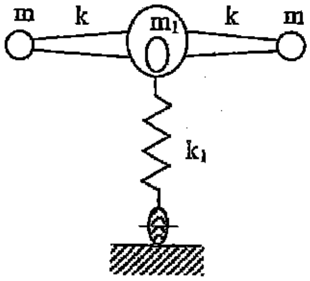


Figura 2.

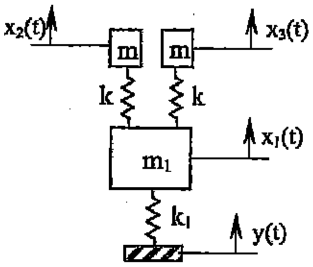


Figura 3.

Si el tiempo de duración del aterrizaje es suficiente para alcanzar un régimen permanente, calcular la respuesta estacionaria (correspondiente únicamente a la solución particular). Dicha respuesta será igualmente válida, tanto si se da en coordenadas absolutas $x_i(t)$, como si se da en coordenadas relativas: $z_i(t)=x_i(t)-y(t)$.

No se considerará el efecto de la gravedad. Para la resolución del problema tómense los siguientes valores (no realistas):

k_1=1 N/m; k=1/8 N/m; m_1=6 kg; m=1 kg;

se tomará además:

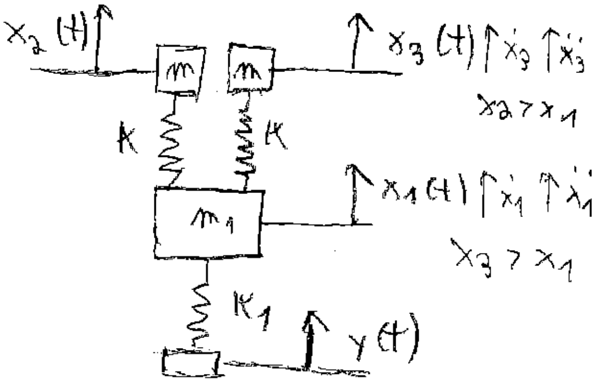
v=180 km/h; $\lambda=100\pi$ m; Y_0=10 cm.

¿Qué ocurre si $\lambda=200\pi$ m?

17. Sistemas de varios grados de libertad. Cálculo de modos, frecuencias y respuesta.

Sea el sistema mecánico de dos grados de libertad de la figura, accionado por un mecanismo de "yugo escocés", cuya manivela de longitud X_S gira a una velocidad angular constante ϖ:

Prob 16 pg 358



$K_1 = 1$

$K = 1/8$

$m_1 = 6\ Kg$

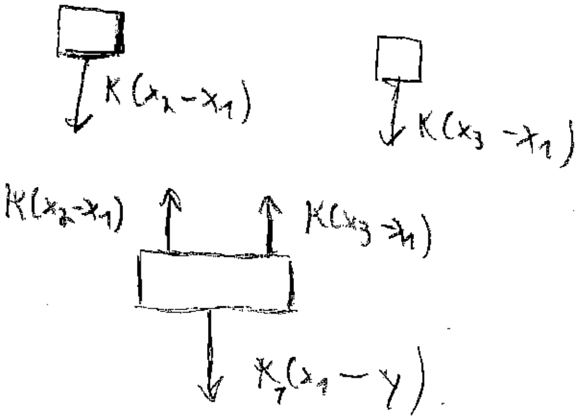
$m = 1\ Kg$

$V = 180\ Km/h$ $\quad Y_0 = 0{,}1\ m$

$\lambda = 100\ H\ m$ $\quad \lambda = 200\ H\ m$

$x_2 > x_1$

$x_3 > x_1$



$$-K(x_2 - x_1) - m\dot{x}_2 = 0$$

$$-K(x_3 - x_1) - m\dot{x}_3 = 0$$

$$K(x_2 - x_1) + K(x_3 - x_1) - K_1(x_1 - Y) - M_1\ddot{x}_1 = 0$$

$$m\dot{x}_2 - Kx_1 + Kx_2 = 0$$

$$m\dot{x}_3 - Kx_1 + Kx_3 = 0$$

$$M_1\dot{x}_1 + (2K + K_1)x_1 + Kx_2 + Kx_3 = K_1 Y$$

$$6\dot{x}_1 + \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3 = Y$$

$$\dot{x}_2 - \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 = 0$$

$$\dot{x}_3 - \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = 0,1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} r$$

$$Y = A \operatorname{sen} \omega t$$

$$Y = A \operatorname{sen} Kr = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} r$$

$$r = vt$$

$$Y = 0,1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{100\pi} \overset{\frac{150}{3,6}}{50} t$$

$$Y = 0,1 \operatorname{sen} t$$

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{4} - 6\omega^2 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} - \omega^2 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{8}} \\ \omega_2 = \frac{1}{2} \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{1}{12}} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} -\frac{1}{8} x_1 + \left(\frac{1}{8} - \omega^2\right) x_2 = 0 \\ -\frac{1}{8} x_1 + \left(\frac{1}{8} - \omega^2\right) x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \operatorname{sen} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \operatorname{sen} t \\ 0{,}1 \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\ddot{y}_1 + \frac{1}{4} y_1 = 0 \\ 8\ddot{y}_2 + 2y_2 = 0{,}1 \operatorname{sen} t \\ 24\ddot{y}_3 + 2y_3 = 0{,}1 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$y_1(t) = 0 \rightarrow y_1(t) = A \cos w_1 t + B \operatorname{sen} w_1 t \rightarrow y_1(t) = 0$$

$$y_2(t) = \frac{0{,}1}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1/2}\right)^2} \operatorname{sen} t$$

$$y_3(t) = \frac{0{,}1}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1/12}\right)} \operatorname{sen} t = -\frac{0{,}1}{22} \operatorname{sen} t$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{0{,}1}{6} \operatorname{sen} t \\ -\frac{0{,}1}{22} \operatorname{sen} t \end{Bmatrix}$$

$$x_1 = -0{,}1 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{22} \right) \operatorname{sen} t$$

$$x_2 = 0{,}1 \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{22} \right) \operatorname{sen} t = x_3$$

Si $\lambda = 200 \, N \, m$

$\tilde{w} = \frac{1}{2}$ coincide en resonancia

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

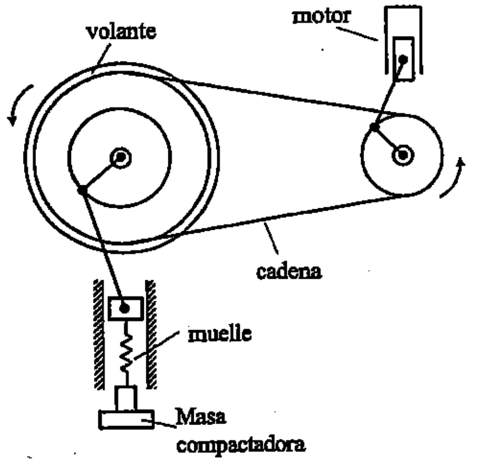
TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

3° Grado de Ingeniería en Tecnología Industrial.
Mayo 2014. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 40 %.
Ejercicio 3. Tiempo: 90 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2014.-eko Maiatza. B. Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 40 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 90 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

En la siguiente figura se representa una compactadora manual y su esquema de funcionamiento.



A. En primer lugar se va a estudiar el problema de la compactación del terreno mediante el modelo vibratorio representado en la siguiente figura:

Para resolver el problema, considérese la simplificación:

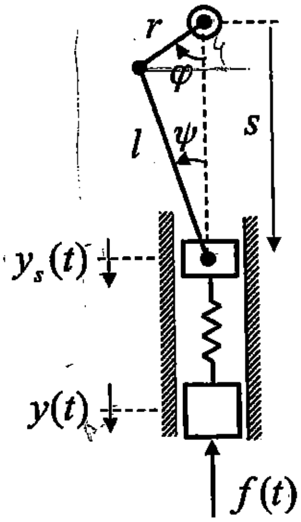
$$s = r\cos\varphi + L$$ — y(s) = r(φ [illegible].

que se asume cuando l ~~es mucho mayor~~ que r.

Los datos del problema son:

r = 8 cm
Rigidez del muelle: k = 100 000 N/m
Masa compactadora: M = 15 kg
Golpes por minuto de la masa compactadora: n_g= 650

Considérese a la fuerza de compactación f(t) como la suma de una fuerza estática de 5 kN más una fuerza armónica coseno de amplitud 5 kN y de la misma frecuencia giratoria que la manivela r.

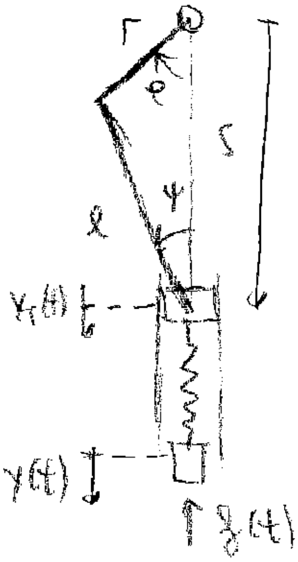


y(t - ys)

Se pide:

1. Obtener la respuesta y(t). (5p)

Examen Mayo 2014



$S = r\cos\varphi + \ell$

$r = 8\,cm$

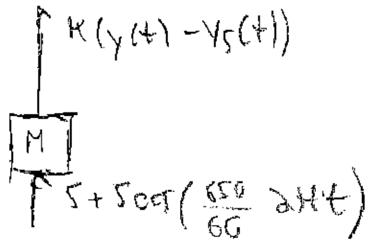
$K = 10^5\,N/m$

$n_g = 650\,rpm$

$f(t) = 5\,KN + 5\cos\omega t$

$Y_s(t) = r\cos\frac{650}{60}2\pi t$

Ys es la proyección en la vertical de r



$$-K(y(t) - 8\cos 68t) - 5 - 5\cos 68t = 15\ddot{y}$$

$$-10^5(y(t) - 8\cdot10^{-2}\cos 68t) - 5\cdot10^3 - 5\cdot10^3\cos 68t = 15\ddot{y}$$

$$15\ddot{y} + 10^5 y(t) = -5\cdot10^3 + 3\cdot10^3\cos 68t$$

$$y(t) = \frac{-5\cdot10^3}{10^5} + \frac{3\cdot10^3}{10^5}\frac{1}{1 - 0{,}69}\cos 68t$$

$$\beta = \frac{68}{\sqrt{\frac{10^5}{15}}} = \frac{68\sqrt{15}}{\sqrt{10^5}}$$

$$y(t) = -5\cdot10^{-2} + 9{,}7\cdot10^{-2}\cos 68t$$

Formulas

$$w = \sqrt{K/m}$$

$$w_D = w\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\bar{c} = 2mw \qquad \zeta = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2mw}$$

Amortiguamiento subcritico

$$x = e^{-\zeta w t}\left(A\cos w_D t + B \operatorname{sen} w_D t\right) \qquad A = x_0 \qquad B = \frac{\dot{x}_0 + \zeta w x_0}{w_D}$$

Amortiguamiento supercritico $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

$$s_1 = w\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$s_2 = w\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

Amortiguamiento critico $x(t) = \left[x_0 + (\dot{x}_0 + w x_0)t\right]e^{-wt}$

Amortiguamiento de coulomb $m\ddot{x} + (\text{sig } \dot{x})\mu_d N + Kx = 0$

↳ Para que se mueva $x_0 > \frac{\mu_e N}{K}$

$$x_i(t) = \left[x_0 - (2i-1)\frac{\mu_d N}{K}\right]\cos wt - (-1)^i \frac{\mu_d N}{K}$$

amplitud

$$x_i^{+} = (-1)^i\left(x_0 - 2i\frac{\mu_d N}{K}\right)$$

Vibración armonica

$$x = e^{-\zeta w t}\left(A\cos w_D t + B\operatorname{sen} w_D t\right) + \frac{f_0/K}{\underbrace{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}_{D \text{ (Amplificación dinamica)}}}\cos(\overset{\text{frecuencia de excitación}}{\bar{w}}t - \varphi)$$

$$\beta = \frac{\bar{w}}{w} = \frac{\text{frecuencia de excitación}}{\text{frecuencia del sistema}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}\right) \qquad D_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Respuesta ante un movimiento armonico del soporte

$$x(t) = X \operatorname{sen}(\bar{w}t - \varepsilon) \qquad w = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$X = X_S D \sqrt{1 + (2\zeta B)^2}$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta B^3}{1 - B^2 + (2\zeta B)^2}$$

Respuesta a impulso

$$x = \frac{I e^{-\zeta w t}}{m w_D} \operatorname{sen} w_D t$$

Respuesta a escalon

$$x(t) = \frac{I}{K}\left[1 - \frac{e^{-\zeta w t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(w_D t - \sigma)\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{I}{K}\left[1 - e^{-\zeta w t}\left(\cos w_D t + \frac{\zeta w}{w_D} \operatorname{sen} w_D t\right)\right]$$

Respuesta rampa

$$x(t) = \frac{I}{K} t - \frac{I}{K w_D}\left[e^{-\zeta w t} \operatorname{sen}(w_D t - 2\sigma) + \operatorname{sen} 2\sigma\right]$$

TEORIA VIBRACIONES.

RESOLUCION DE PROBLEMAS.
(TODOS LOS CASOS)

1GDL

Tema 8

1) MOVIMIENTO DE VIBRACIONES LIBRE

- Ec. del movimiento: $\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=0}$

  $m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=f(t)$ = provoca la vib.

- Si no tenemos amortiguación el término $c\dot{x}$ desaparece.
- Pasos → Aislamos el sistema. Ecuación Diferencial del movimiento. Estudio dinámico.

2) VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS (caso esp. de vib. lib. amort)

- Ecuación → $\boxed{m\ddot{x}+Kx=0}$
- Solución → $\left.\begin{array}{l} x = A\cos wt + B\operatorname{sen} wt \\ x = X\cos(wt-\theta) \end{array}\right\}$ expresiones equivalentes.
- Las constantes las obtengo a la hora de aplicar las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$
- w = frecuencia natural = $\sqrt{K/m}$.

$w_D = w\sqrt{1-\xi 2}$.

3) VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

- Ecuación → $\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=0}$. de la ec. dif.
- Amortiguamiento crítico = $\bar{c} = 2mw$
- Amortiguamiento relativo = $\xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2mw}$ no es del amort es de la ec diferencial.
- Si $\xi=0$ → tenemos vib. libre no amortiguada.
- Amortiguamiento subcrítico ($c<\bar{c}$ → $\xi<1$) $w_D = w\sqrt{1-\xi^2}$

  Frec. de vibración amortiguada = $w_D = w\sqrt{1-\xi 2}$

Solución → $\left\{\begin{array}{l} x = e^{-\xi wt}(A\cos w_D t + B\operatorname{sen} w_D t) \quad (*) \\ x = e^{-\xi wt} X\cos(w_D t-\theta) \end{array}\right.$

$A = x_0$

$B = \frac{\dot{x}_0 + \xi w x_0}{w_D}$

Las constantes las obtengo sust. las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$ en la solución x y en su derivada.
→ Proviene de integrar 2 veces la ec. diferencial

Amortiguamento de coulomb $m\ddot{x} + (\underset{\text{no lineal}}{\text{sig}}\ \dot{x})\mu_d N + Kx = 0$

Para que se mueva $x_0 > \frac{\mu_e N}{K}$

$x_i(t) = [x_0 - (2i-1)\frac{\mu_d N}{K}]\cos wt$

amplitud $(-1)^i\frac{\mu_d N}{K}$

$x_i = (-1)^i\left(x_0 - 2i\frac{\mu_d N}{K}\right)$

Amor supercrítico $\xi>1$ $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

$s_1 = w(-\xi + \sqrt{\xi^2-1})$
$s_2 = w(-\xi - \sqrt{\xi^2-1})$

Amor crítico $\xi = 1$

$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + w x_0)t]e^{-wt}$

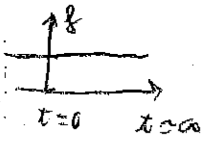
Tema 9

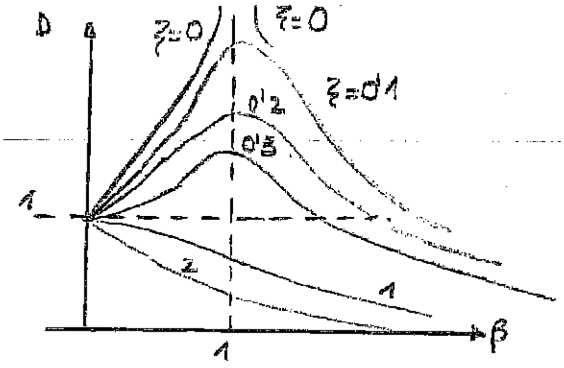
4j VIBRACIÓN FORZADA ARMÓNICA.

- Ecuación: $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f_0 \cos \bar{\omega} t$
- Solución: armónica → existen otros casos, escalón...)

$$x = \underbrace{e^{-\xi \omega t}\left(A \cos \omega_D t + D \operatorname{sen} \omega_D t\right)}_{\text{soluc. de la ec. homogénea. componente transitoria de la respuesta } (x_h)} + \underbrace{\frac{f_0/K}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \cos(\bar{\omega} t - \varphi)}_{\text{solución particular parte estacionaria de la respuesta } x_p}$$

- $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{\text{frecuencia de la excitación}}{\text{frecuencia natural del sistema}}$.
- $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ = desfase entre la solución particular y la excitación
- $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
- Desplazamiento estático = $X_{est} = f_0/K$ ← Si es una fuerza const solo sería esto. si es un escalón
- Factor de amplificación dinámica = $D = 1/\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$





Para obtener el máximo la curva de amplificación dinámica hacemos $\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0$

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Respuesta ante un movimiento armónico del soporte

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$x(t) = X \operatorname{sen}(\omega t - e)$$

$$X = X_{s_{soporte}} D \sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

$$e = \operatorname{arctg} \frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2}$$

Si se mueve el soporte haces $\Sigma F = m \cdot a$ e igualas a $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0$ y ya tienes f_0

Se mete el desp del soporte en $K(x - x_g)$

Tema 10

Función impulso.

$I = F\Delta t$ = fuerza de gran magnitud que actúa durante un tiempo Δt muy corto $(I = \int F dt)$

$I = m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ $(\dot{x}_1, \dot{x}_2$ = vel antes y desp. de aplicar $I)$

→ 5) VIBRACIÓN FORZADA, BAJO APLICACIÓN FUERZA IMPULSO $F = I\delta$

- Ecuación $\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = I\delta}$
- δ = función delta de dirac = impulso unitario (fuerza cuyo impulso vale la unidad).
- $\int_{0^-}^{0^+} F(t)dt = I = m\left[(\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)\right] \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0^+) = I/m \\ x(0^+) = 0 \end{cases}$
- $x(t)$ se obtiene aplicando a la solución de vibraciones libres, las condiciones iniciales después de aplicar I

a) **Respuesta a la función impulso.**

aplicando en $t=0$
para otro caso $t-a$.
m = es la que acompaña en la formula no la masa.

(*) $\boxed{x = \dfrac{I e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t}$

I_G si es un momento

- Si la fuerza aplicada es el impulso unitario, la respuesta es $h(t) \rightarrow x = I h(t)$.
- Si la función impulso se aplica en $t=a \rightarrow x(t) = I h(t-a)$
- La f. escalón es la derivada respecto del tiempo de la f. rampa y la integral de la f. impulso

b) **Respuesta a la función escalón**

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$

$x(t) = \int_0^t \dfrac{I e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t \rightarrow x(t) = \dfrac{I}{K}\left[1 - \dfrac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_D t - \theta)\right]$

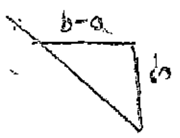
(*) $\boxed{x(t) = \dfrac{I}{K}\left[1 - e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t + \dfrac{\xi\omega}{\omega_D} \operatorname{sen}\omega_D t\right)\right.}$

K lo que sea, si tienes 3 muelles → 3K

c) **Respuesta a la función rampa:**

(*) $\boxed{x(t) = \dfrac{I}{K}t - \dfrac{I}{K\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \operatorname{sen} 2\theta\right]}$

ojo

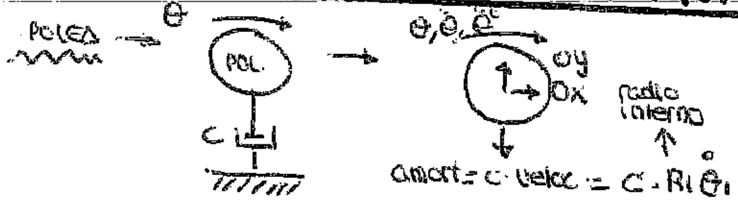


$x_3 = \dfrac{I}{K}t - \dfrac{I}{K\omega_D} \dots \boxed{\pm \dfrac{-b_0/(b-a)}{K}}(t-a) - \dots\dots$

C.I. nulas

Estas son con condiciones iniciales nulas
Si sí que tiene condiciones tienes que añadir el término del transitorio, que es hacer te olvidas de impulso, rampa escalón ...
y resolver el armónico que te quede
tipo $m\ddot{x} + Kx = 0 \rightarrow x = A\cos\omega t + B \operatorname{sen}\omega t$ con la CI para sacar A y B

CASOS PROBLEMAS INTERESANTES



$\text{amort} = c \cdot \text{veloc} = c \cdot R_1 \dot{\theta}_1$

Derivadas :

$$X(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\ddot{X}(t) = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t$$

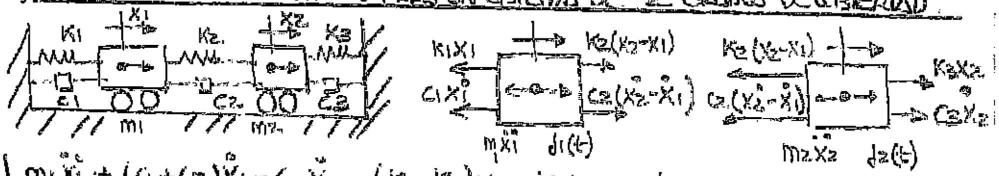
sen → cos
cos → − sen

Tema 13

SISTEMAS CON N GRADOS DE LIBERTAD.

- VIBRACIONES LIBRES. -

1) ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PARA UN SISTEMA DE 2 GRADOS DE LIBERTAD.



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2+c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = f_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_2+c_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[m]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = f(t)}$$

$\{x\}$ = resp. del sistema.

$\{f(t)\}$ = vector de fuerzas.

$[m]$ = mat. masa o de inercia.

$[C]$ = mat amortiguamiento.

$[K]$ = mat. rigidez.

2) VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS.

mov. armónico síncrono
↓
2 masas vibran en fase con la misma frecuencia.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a) Frecuencias naturales y modos de vibración

Solución: $x_1(t) = X_1\cos\omega t \wedge x_2(t) = X_2\cos\omega t$. ($X_1$ y X_2 amplit).

$$\begin{bmatrix} K_{11}-m_{11}\omega^2 & K_{12}-m_{12}\omega^2 \\ K_{12}-m_{12}\omega^2 & K_{22}-m_{22}\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Ecuación: } A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0.$$

Saco ω_1^2 y ω_2^2

ω_1 y ω_2 → frec. naturales del sistema.

modos de vibración

$$\omega_1 \rightarrow \frac{X_1^1}{X_2^1} = -\frac{K_{12}-\omega_1^2 m_{12}}{K_{11}-\omega_1^2 m_{11}} = -\frac{K_{22}-\omega_1^2 m_{22}}{K_{12}-\omega_1^2 m_{12}} \rightarrow (X_1^1, X_2^1)$$

$$\omega_2 \rightarrow \frac{X_1^2}{X_2^2} = -\frac{K_{12}-\omega_2^2 m_{12}}{K_{11}-\omega_2^2 m_{11}} = -\frac{K_{22}-\omega_2^2 m_{22}}{K_{12}-\omega_2^2 m_{12}} \rightarrow (X_1^2, X_2^2)$$

b) Solución general para las vib. libres no amortiguadas

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{st} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{11}+m_{11}s^2 & K_{12}+m_{12}s^2 \\ K_{12}+m_{12}s^2 & K_{22}+m_{22}s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ecuac. bicuadrada $|\det| \rightarrow as^4 + bs^2 + c = 0$

$$\boxed{s^2 = -\omega^2} \rightarrow \begin{cases} s_1 = i\omega_1 \\ s_2 = -i\omega_1 \\ s_3 = i\omega_2 \\ s_4 = -i\omega_2 \end{cases}$$

- Solución general

$$\{x(t)\} = C_1 \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_1 t} + C_3 \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t} + C_4 \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_2 t}$$

si utilizo las fórmulas de Euler $\Rightarrow$ $e^{i\omega_1 t} = \cos\omega_1 t + i\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t$

$e^{-i\omega_1 t} = \cos\omega_1 t - i\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t$.

$$\{x(t)\} = (C_1+C_2) \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} \cos\omega_1 t + i(C_1-C_2) \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} \mathrm{sen}\,\omega_1 t +$$

$$+ (C_3+C_4) \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \cos\omega_2 t + i(C_3-C_4) \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \mathrm{sen}\,\omega_2 t .$$

siendo $A = C_1+C_2$; $B = C_1-C_2$; $C = C_3+C_4$, $D = C_3-C_4$.

que det. las constantes mediante las condiciones iniciales

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix}$$

c) Coordenadas modales o naturales. Modos vibración $\rightarrow$ $[X] = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_1^2 \\ X_2^1 & X_2^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} [X]^T[m][X] = [m_j^m] = \text{matriz de masa modal} \\ [X]^T[K][X] = [K_j^m] = \text{matriz de rigidez modal}. \end{cases}$$

$[X]^T[m][X] = [I] \wedge [X]^T[K][X] = [\omega_j^2]$ $\rightarrow$ modos normalizados.

Cambio de coordenadas: $\{x\} = [X]\{y\}$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial: $[m][X]\{\ddot{y}\} + [K][X]\{y\} = \{0\}$.

- $[X]^T[m][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T[K][X]\{y\} = \{0\}$.
- $[m_j^m]\{\ddot{y}\} + [K_j^m]\{y\} = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} m_1^m & 0 \\ 0 & m_2^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1^m & 0 \\ 0 & K_2^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} m_1^m \ddot{y}_1 + K_1^m y_1 = 0 \\ m_2^m \ddot{y}_2 + K_2^m y_2 = 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{normalizada}]{\text{si mat. de modos está}} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = 0 \end{Bmatrix} \text{ ecuac. desacop.}$$

- $\omega_j = \sqrt{K_j^m / m_j^m}$ $\{y(t)\} \rightarrow$ coordenadas modales.
- Tengo q transformar las cond. iniciales a coordenadas naturales

$$\left.\begin{matrix} \{x_0\} = [X]\{y_0\} \\ \{\dot{x}_0\} = [X]\{\dot{y}_0\} \end{matrix}\right] \Rightarrow [X]^T[m] = [X]^T[m][X][y_0]$$

Para pasar de modal a la normal $(\{x\} = [X]\{y\})$

3) VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11}s^2 + C_{11}s + K_{11} & \cdots \\ m_{12}s^2 + C_{12}s + K_{12} & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

resultado ecuación polinómica $As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$

- Amortiguamiento proporcional:

$$[X]^T[m][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T[C][X]\{\dot{y}\} + [X]^T[K][X]\{y\} = \{0\}.$$

$$[I]\{\ddot{y}\} + [X]^T[C][X]\{\dot{y}\} + [\omega_j^2]\{y\} = 0 .$$

$$[C] = \alpha[K] + \beta[m] \rightarrow [X]^T[C][X] = \beta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \alpha\omega_i^2 + \beta$$

Tema 14

- VIBRACIONES FORZADAS -

1) VIBRACIONES NO AMORTIGUADAS. EXCITACION ARMONICA.

Prescindo del efecto de las condiciones iniciales. Si ∄ amort → No hay transitorio.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right\} e^{i\bar{\omega} t} \rightarrow \text{sol. part.} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\} e^{i\bar{\omega} t}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}-m_{11}\bar{\omega}^2 & k_{12}-m_{12}\bar{\omega}^2 \\ k_{12}-m_{12}\bar{\omega}^2 & k_{22}-m_{22}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$ Por Cramer obtengo → X_1 y X_2 que son las amplitudes.

Det denominador → coincide con el det del q resultan las frec. naturales. que se anula en el caso de que $\bar{\omega}$ coincida con alg. de las frec. nat. ω_1 y ω_2.

2) VIBRACIONES AMORTIGUADAS. EXCITACION ARMONICA

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right\} e^{i\bar{\omega} t} \qquad X_1(\bar{\omega}); X_2(\bar{\omega})$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}+ic_{11}\bar{\omega}-m_{11}\bar{\omega}^2 & \cdots \\ k_{12}+ic_{12}\bar{\omega}-m_{12}\bar{\omega}^2 & \cdots \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right\} \rightarrow$$ CRAMER → componentes del vect. de amplitudes.

$$X_1(\bar{\omega}) = A(\bar{\omega}) + iB(\bar{\omega}) = \sqrt{A(\bar{\omega})^2 + B(\bar{\omega})^2}\, e^{i\varphi_1(\bar{\omega})} \quad \varphi_1(\bar{\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{B(\bar{\omega})}{A(\bar{\omega})}$$

$$X_2(\bar{\omega}) = C(\bar{\omega}) + iD(\bar{\omega}) = \text{-------} \quad \varphi_2(\bar{\omega}).$$

solución → $$\left\{ \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} |X_1| e^{i\varphi_1} \\ |X_2| e^{i\varphi_2} \end{matrix} \right\} e^{i\bar{\omega} t} = \left\{ \begin{matrix} |X_1| e^{i(\bar{\omega} t+\varphi_1)} \\ |X_2| e^{i(\bar{\omega} t+\varphi_2)} \end{matrix} \right\}$$

- Modos de calcular las amplitudes X_j

$$\{X_j\} = [k_{ij} + ic_{ij}\bar{\omega} - m_{ij}\bar{\omega}^2]^{-1}\{f_j\}$$

$$[h_{ij}(\bar{\omega})] = [k_{ij} + ic_{ij}\bar{\omega} - m_{ij}\bar{\omega}^2]^{-1}$$

a) En el caso de amort. proporcional →

- $[m_j^m]\{\ddot{y}_j\} + [c_j^m]\{\dot{y}_j\} + [k_j^m]\{y_j\} = \{f_j^m\} e^{i\bar{\omega} t}$
- $c_j^m = \{X_j\}^T [C] \{X_j\}$
- $f_j^m = \{X_j\}^T \{f\} = X_1^j f_1 + X_2^j f_2$
- $m_j^m \ddot{y}_j + c_j^m \dot{y}_j + k_j^m y_j = f_j^m e^{i\bar{\omega} t}$

respuesta → $y_j(t) = H_j^m(\bar{\omega}) f_j^m e^{i\bar{\omega} t}$

$$H_j^m(\bar{\omega}) = \frac{1}{k_j^m} \cdot \frac{1}{1-\beta_j^2 + i2\xi_j^m \beta_j} \longrightarrow \beta_j = \frac{\bar{\omega}}{\omega_j}; \ \xi_j^m = \frac{c_j^m}{C_j^m} = \frac{c_j^m}{2m_j^m \omega_j}$$

- respuesta en coord. modales: $\{y_j(t)\} = [H_j^m(\bar{\omega})]\{f_j^m\} e^{i\bar{\omega} t} = [H_j^m(\bar{\omega})]\{f_j^m\} e^{i\bar{\omega} t}$
- resp. en coord. reales:

$$\{x_j\}^T = [X]\{y_j(t)\} = [X][H_j^m(\bar{\omega})]\{f_j^m\} e^{i\bar{\omega} t} = \underbrace{[X][H_j^m(\bar{\omega})][X]^T}_{h_{ij}(\bar{\omega})}\{f_j\} e^{i\bar{\omega} t}$$

3) RESP. ANTE UNA EXCITACION DE TIPO GENERAL

$$[X]^T[m][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T[C][X]\{\dot{y}\} + [X]^T[K][X]\{y\} = [X]^T\{f(t)\}.$$

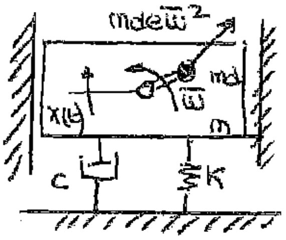
$$\begin{bmatrix} m_1^m & 0 \\ 0 & m_2^m \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} c_1^m & 0 \\ 0 & c_2^m \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} k_1^m & 0 \\ 0 & k_2^m \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f_1^m(t) \\ f_2^m(t) \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{y}\} + \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 \end{bmatrix} \{\dot{y}\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \{y\} = \left\{ \begin{matrix} f_1^m(t) \\ f_2^m(t) \end{matrix} \right\}$$ Modos normaliz. resp. de la matriz de masa.

ABSORSORES: aplicación práctica

a) DESEQUILIBRIO EN MAQUINAS. FACTOR DE AMPLIFICACION POR DESEQUILIBRIO

Maquina rotativa con desequilibrio: e = excent. (radio) md = masa desequil.



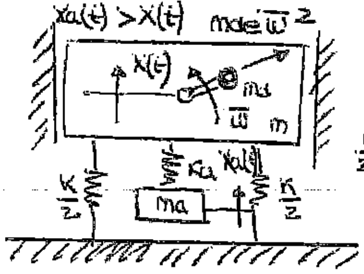
- Fuerza desequilibradora → modulo → $f_0 = m_d e \bar{\omega}^2$
- Comp. vertical : $f_V(t) = m_d e \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$
- Resp. estacionaria : $X(t) = \dfrac{m_d e \bar{\omega}^2}{\underset{\to\, \omega^2 m}{K}} D \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi)$

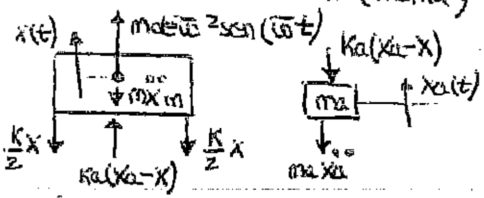
$$X_i(t) = e\frac{m_d}{m} \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta)^2+(2\xi\beta)^2}} \operatorname{sen}\left(\bar{\omega} t - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)\right)$$

- factor de amplif. por desequilibrio ↙ : Dd.
- $D_{d,\text{maximo}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\xi\sqrt{1-\xi^2}} \longrightarrow \beta_{d,\max} = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$
- Para $\xi < 0'1$ (amort peq) $\to D_{d,\max} = \frac{1}{2\xi} \longrightarrow \beta_{d,\max} \simeq 1$
- Amplitud movimiento : $X_d = e\frac{m_d}{m} D_e = e\frac{m_d}{m} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}$

b) ADICIÓN DE UN ABSORSOR.

sistema masa muelle (m_a, K_a)





$$\begin{cases} m\ddot{x} + Kx + K_a x - K_a x_a = m_d e \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t) \\ m_a \ddot{x}_a + K_a x_a - K_a x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K+K_a) & -K_a \\ -K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_d e \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t \\ 0 \end{Bmatrix} \to \text{amplitudes del movimiento.}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m_d e \bar{\omega}^2 & -K_a \\ 0 & K_a - m_a \bar{\omega}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (K+K_a) - m\bar{\omega}^2 & -K_a \\ -K_a & K_a - m_a \bar{\omega}^2 \end{vmatrix}} = \frac{m_d e \bar{\omega}^2 (K_a - m_a \bar{\omega}^2)}{|\;|}$$

$$X_a = \frac{\begin{vmatrix} (K+K_a) - m\bar{\omega}^2 & m_d e \bar{\omega}^2 \\ -K_a & 0 \end{vmatrix}}{|\;|} = \frac{m_d e \bar{\omega}^2 K_a}{|\;|}.$$

X se anula para : $m_d e \bar{\omega}^2 (K_a - m_a \bar{\omega}^2) = 0$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\bar{\omega} = \sqrt{K_a/m_a}}$$

- Absorsor sintonizado → $\omega_a = \sqrt{K_a/m_a}$
- Amplitud del movimiento del absorsor → $|X_a| = \left|\dfrac{m_d e \bar{\omega}^2}{-K_a}\right| = \dfrac{m_d e}{m_a}$.
- $X_a = \dfrac{f_0}{-K_a} \to f_0 = m_d e \bar{\omega}^2 \to f_0 = -K_a X_a$. ↓ del denom de X, Xa.
  - $(K + K_a - m\bar{\omega}^2)(K_a - m_a \bar{\omega}^2) - K_a^2 = 0 \longrightarrow$ obtengo las frecuencias ω_1, ω_2

MECANISMOS

Tema 1

$F = m \cdot a$

$N_G = I_G \, \alpha$

$$Pot_{ap} = \sum_{i=1}^{N} F_{ap}^{i} \cdot \tilde{v}_i + \sum_{j=1}^{N} M_{ap}^{j} \tilde{\omega}_j = 0$$

Momento lineal $P = mv$
(se conserva en un choque elástico)

$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

$a_t = \alpha \cdot R$

Tema 2

$$T_e \cdot \tilde{\omega}_e + \sum_{K=1}^{NP} \underset{\uparrow}{F_K \cdot \tilde{v}_K} + \sum_{j=2}^{N} \underset{\uparrow}{M_j \cdot \tilde{\omega}_j} + \sum_{j=2}^{N} \left(F_I^{j} \cdot \tilde{v}_G + M_I^{j} \tilde{\omega}_j \right) = 0$$

Si se aplica una fuerza

Si se le aplica un momento

Tema 3

$$Pot_e = \frac{dT(t)}{dt} \qquad T = \frac{1}{2} m_j v_{G_j}^2 + \frac{1}{2} I_{G_j} \omega_j^2$$

Zhukovski → Ec generalizada del movimiento → $M^*(\varphi_e) = \frac{1}{2} \frac{dI^*(\varphi_e)}{d\varphi_e} \omega_e^2 + I^*(\varphi_e) \alpha_e$

Tema 4

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} \underset{\overset{\uparrow}{C_M^* - C_F^*}}{M^*}(\varphi) \, d\varphi = 0$$

Por ej $\int_0^{2\pi} (C_M^* - C_F^*) d\varphi = 0 \Rightarrow C_M 2\pi - \int_0^{2\pi} G \, d\varphi = 0$

$C_M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G \, d\varphi$

Para calcular pares motor/resistivos reducidos, igualar potencias Ej: $\pm G \dot{\varphi} = \pm F$

Pot reducida = Pot sistema original

Pot motor N_m

Para inercias → igualar energías cinéticas

Potencia motora = $M_m^* \omega_m$

$$\omega_a = \frac{1}{2} (\omega_{max} + \omega_{min})$$

$$\varepsilon = \text{grado de irregularidad} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_a}$$

$$\Delta W^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_0^2) = \sum A_i$$

↖ si no es permanente (si es = 0)

$$S = \sum A_i$$

$$I = \frac{S_{max} - S_{min}}{\varepsilon \, \omega_a^2}$$

PD^2 = Factor de inercia

↑ Peso ↑ Diámetro

Aro $I = MR^2 = \frac{P}{g} \frac{D^2}{4} \Rightarrow PD^2 = 4gI$

Disco $I = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \frac{D^2}{4} \Rightarrow PD^2 = 8g$

Tema 13

1- $\Sigma F = m \cdot a$

2- $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{x}\} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

3- $\begin{vmatrix} K_{11} - w^2 m_{11} & K_{12} - w^2 m_{12} \\ K_{12} - w^2 m_{12} & K_{22} - w^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0$

cualquiera de las dos ecuaciones

Resuelvo $|\,| = 0$ $\longrightarrow$ y saco los valores de w_1 y w_2

meto w_1 en la ec y saco $[X_1]$

" w_2 " " " " " $[X_2]$

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\nearrow w = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ec Desacopladas en cada línea solo están $\ddot{x}_j, \dot{x}_j, x_j$ f j = nº línea → $[M]\,[C]\,[K]$ son diagonales

Si no estaban desacopladas

↳ Coordenadas modales → $[X] = \left[\begin{array}{cc} [X_1] & [X_2] \\ \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} \end{array} \right]$

$[X]^T [M] [X] \{\ddot{y}\} + [X]^T [C] [X] \{\dot{y}\} + [X]^T [K][X]\{y\} = [X]^T \{8\}$

↳ Para diagonalizar $\rightarrow$ queda $[\text{diag}_1][\ddot{y}] + [\text{diag}_2][\dot{y}] + [\text{diag}_3][y] = [\;]$

↑ Tiene que dar valores positivos

Sacas de aquí las ecuaciones $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = dma$

↳ sacas las y respuesta ~~($y = A\cos wt + B\,\text{sen}\,wt$)~~

** y $\dot{x}$ por separado pasar las c.i a y → $\underset{\text{sabes}}{\{x\}^{ci}} = [X]\underset{\text{sacas}}{\{y\}^{ci}}$ para sacar las constantes A y B

sacar la respuesta en x → $\underset{\text{sacas}}{\{x\}^{resp}} = [X]\underset{\text{sabes}}{\{y\}^{resp}}$

si usas $\dot{x}_r$ (velocidades relativas) tienes que igualar a aceleraciones relativas $(\ddot{x}_r - a)$

↑ lo que lleve el contenedor

Si tienes varias ec Ej: 4 y alguna esta desacoplada

Ej 1, 2 → $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ directamente

con las otras haces coor. modales y trabajas con esas dos normal

sacas w_3 y w_4 → Ej: $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

tener en cuenta añadir esos 0

Respuestas

si queda solo en la matriz de fuerzas

- Fuerza cte : $x(t) = \frac{F}{K}$
- Fuerza impulso, rampa... → respuestas de impulso, rampa lo que sea
- Fuerza armonica ($F_0 \cos wt$, $F_0 \operatorname{sen} wt$) → respuesta armonica $X = X_{est} D \cos wt$
- Condiciones iniciales (sin fuerza) → $A \cos wt + B \operatorname{sen} wt$

  si hay amortiguamiento → $e^{-\zeta w t}(A \cos w_0 t + B \operatorname{sen} w_0 t)$

→ si no tienes fuerzas y las condiciones iniciales son nulas

$x(t) = 0$, porque te salen A y B = 0

→ Si ademas tienes fuerzas → sacas lo que genera la fuerza con c.i nulas

\+

la que generan las c.i sin fuerzas

Problemas

- Prob dinamico inverso → { Pot virtuales
  1 gdl en general

  ↳ Hacer d'Alembert → Poner las inercias como fuerzas

  Pistones → Acción y reacción (poner en ambas)

  ↳ en potencias poner una sola vez ($F \cdot v_{rel}$)

  ↳ Se esta limpio ↳ Por deslizaderas
  ↳ Por entrada
  ↳ Por barras

  ↳ Se no → por ternario → trabajar con un bloque

  ↳ un elemento ternario → lo de los cortes de las incognitas

- Prob dinamico directo → obtener momento reducido a traves de Energia

  ↳ calculo de momento reducido

  ↳ Sabuse ultima ecuación : $\alpha = \ldots$

- Volanter → Puede ser que pidas coef de influencia

  ↳ Si no so lo ocurre nada hacer lazos

  - Reducción par/fuerza a un par motor (M_m)

  M_m $\dot{\varphi}$ tienen en mismo sentido

  el de este se supone que sale al sacarla

$$M_m \dot{\varphi} = \underset{\uparrow}{\pm} F_p \cdot v^{t}$$

este signo hay que ponerlo

- Par resistente → $M_r \dot{\varphi} = \pm f v$

$$M^{*} = M^{*}_{m} - M_r^{*}$$

Potencia motora $= M_m^{*} W_m$

Si el sol tiene una inercia → A.E. a c. le salga habria que sumarle esa

- Vibración → 1 gdl
  ↳ varios gdl

1gdl → si tiene c.i → sacas la que es con c.i nulas → transitorio
y la añades luego con eso forzando la c.i

Pocas posibilidades Transformada de fourier (en la práctica)

Varios gdl → lo normal ↪ libre

si están acoplados → sacar w
↳ coordenadas modales para desacoplar

oscilaciones armónicas → piden las amplitudes

Absorsor

Método de Quin

Teorema de Quin: En un mecanismo de 1 gdl, la contribución que supone la energía cinética del elemento j sobre la energía cinética total, no depende de la velocidad del elemento de entrada

$$T_j = \frac{1}{2} m_j v_{Gj}^2 + \frac{1}{2} I_{Gj} \omega_j^2 \qquad \begin{array}{l} \omega_j = g_j(\varphi_e)\,\omega_e \\ v_{Gj} = g_{Gj}(\varphi_e)\,\omega_e \end{array}$$

coeficiente de contribución de energía del elemento j: $\varepsilon_j = \frac{T_j}{T}$

El problema dinámico directo se redefine como el cálculo de la velocidad y la aceleración angular del elemento de entrada cuando la coordenada generalizada toma un valor determinado.

$$[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} = T(\varphi_e) - T(\varphi_e^0)$$

$$T_e(\varphi_e) = \varepsilon_e(\varphi_e)\, T(\varphi_e)$$

$$\frac{1}{2}\omega_e^2 \left(m_e g_{Ge}^2(\varphi_e) + I_{Ge}\right) = \varepsilon_e(\varphi_e)\left(\left([W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0)\right)\right)$$

$$|\omega_e| = \sqrt{\frac{2\varepsilon_e(\varphi_e)\left([W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0)\right]}{I_e}}$$

Derivando

$$\alpha_e = \frac{1}{I_e}\left[\frac{d\varepsilon_e(\varphi_e)}{d\varphi_e}\left(\left([W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0)\right)\right) + \varepsilon_e(\varphi_e)\frac{d[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e}}{d\varphi_e}\right]$$

Zhukovski

Se puede tomar un elemento con CIR fijo de un mec de un solo GDL como representativo, dandole una inercia (o una masa) equivalente y aplicandole un momento (o una fuerza) equivalente, de forma que el movimiento sea el mismo

Criterios equivalencia

- Mismo trabajo → plantearlo términos de potencia → M^* o F^*
- Misma E. cinetica almacenada → $\mathcal{I}^*$ y m^*

Manivela

Sacar M^* y $\mathcal{I}^*$

Deslizadera

Sacar F^* y m^*

- Teorema de la energía $\int_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} M^*(\varphi_e)\,d\varphi_e = \frac{1}{2}\mathcal{I}^*(\varphi_e)\omega_e^2 - \frac{1}{2}\mathcal{I}^*(\varphi_e^0)[\omega_e^0]^2$
  - ↳ sacas $|\omega_e|$
- Potencia $M^*(\varphi_e)\,\omega_e = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mathcal{I}^*(\varphi_e)\omega_e^2\right] = \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{I}^*(\varphi_e)}{d\varphi_e}\omega_e^3 + \mathcal{I}^*(\varphi_e)\,\omega_e\,\alpha_e$
  - ↳ simplificando → ec. generalizada del movimiento
  - ↳ despejas α_e

Método de Quinn

Se basa en el Teorema de Quinn: En un mecanismo de un grado de libertad, la contribución que supone la energía cinética del elemento j sobre la energía cinética total, no depende de la velocidad del elemento de entrada.

$$T_j = \frac{1}{2} m_j v_{Gj}^2 + \frac{1}{2} I_{Gj} \omega_j^2$$

Por tratarse de un sistema de un grado de libertad, puede expresarse la orientación de cualquier elemento y la posición de su centro de gravedad en función de la coordenada generalizada

$$\varphi_j = f_j(\varphi_e)$$

$$s_{Gj} = f_{Gj}(\varphi_e)$$

Derivando

$$\omega_j = \frac{d f_j(\varphi_e)}{d \varphi_e} \omega_e \rightarrow \omega_j = g_j(\varphi_e)\, \omega_e$$

$$v_{Gj} = \frac{d f_{Gj}(\varphi_e)}{d \varphi_e} \omega_e \rightarrow v_{Gj} = g_{Gj}(\varphi_e)\, \omega_e$$

$$T_j = \frac{1}{2} \omega_e^2 \left(m_j g_{Gj}^2(\varphi_e) + I_{Gj} g_j^2(\varphi_e) \right)$$

La energía cinética total del mecanismo será

$$T = \frac{1}{2} \omega_e^2 \sum_{j=2}^{N} \left(m_i g_{Gi}^2(\varphi_e) + I_{Gi} g_i^2(\varphi_e) \right)$$

$$\varepsilon_j(\varphi_e) = \frac{T_j}{T} = \frac{m_j g_{Gj}^2(\varphi_e) + I_{Gj} g_j^2(\varphi_e))}{\sum_{i=2}^{N} \left(m_i g_{Gi}^2(\varphi_e) + I_{Gi} g_i^2(\varphi_e) \right)}$$

ε_j = coeficiente de contribución de energía del elemento

El problema dinamico directo se redefine como el cálculo de la velocidad y la aceleración angular del elemento de entrada cuando la coordenada generalizada toma un valor determinado.

$$[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} = \Upsilon(\varphi_e) - \Upsilon(\varphi_e^0)$$

$$\Gamma_e(\varphi_e) = \varepsilon_e(\varphi_e)\,\Upsilon(\varphi_e)$$

$$\frac{1}{2}\omega_e^2(m_e g_{\sigma e}^2(\varphi_e) + I_{\sigma e}\, g_e^2(\varphi_e) = \varepsilon_e(\varphi_e)\left[[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + \Upsilon(\varphi_e^0)\right]$$

manivela $v_{\sigma e} = \omega_e r_\sigma \rightarrow$

$\rightarrow g_{\sigma e}(\varphi_e) = \frac{v_{\sigma e}}{\omega_e} = r_\sigma$

$g_e(\varphi_e) = \frac{\omega_e}{\omega_e} = 1$

$$\frac{1}{2}\omega_e^2\underbrace{(m_e r_\sigma^2 + I_{\sigma e}(\varphi_e))}_{I_e} = \varepsilon_e(\varphi_e\left(\left([W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + \Upsilon(\varphi_e^0)\right)\right)$$

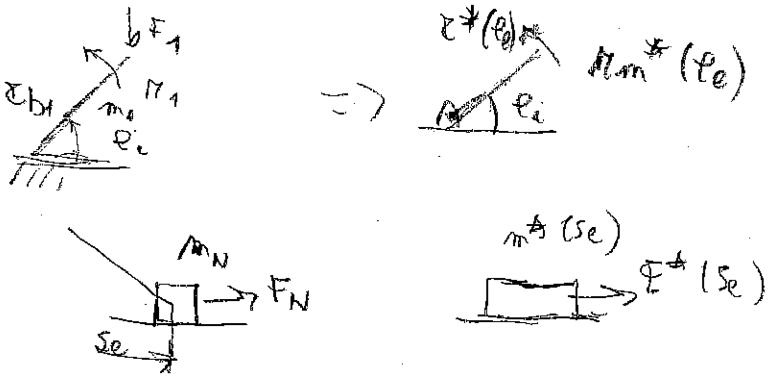
$$|\omega_e| = \sqrt{\frac{2\,\varepsilon_e(\varphi_e)\left(W_{ext}\right]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + \Upsilon(\varphi_e^0))}{I_e}}$$

Derivando

$$\alpha_e = \frac{1}{I_o}\left[\frac{d\varepsilon_e(\varphi_e)}{d\varphi_e}\left([W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + \Upsilon(\varphi_e^0)\right] + \varepsilon_e(\varphi_e\frac{d[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e}}{d\varphi_e}\right]$$

Método de Zhukovski

Se basa en el teorema sobre una palanca rígida: Elegido un elemento cualquiera de un mecanismo de un grado de libertad y con CIR fijo, al que se denomina elemento de reducción, como por ejemplo una manivela o una deslizadera, se puede tomar ese elemento aisladamente como representativo del mecanismo, dotándole de una inercia (o una masa) equivalente y aplicándole un momento (o una fuerza equivalente) de forma que el movimiento del elemento sea el mismo tanto aisladamente como perteneciente al mecanismo.



$I^*(\varphi_e)$ → Inercia reducida

$M^*(\varphi_e)$ → Momento reducido o generalizado

$m^*(S_e)$ → Masa reducida

$F^*(S_e)$ → Fuerza reducida o generalizada

Criterios de equivalencia

1- El trabajo realizado por las acciones exteriores en ambos mecanismos es el mismo → Se plantea en términos de potencia → Se extrae el concepto de acción generalizada → M^* y F^*

2- La E. cinética almacenada por ambos mecanismos es la misma → Se extrae el concepto de inercia generalizada → I^* y m^*

En el caso de que el elemento de reducción sea una manivela

$$M^*(\ell_e)\,\omega_e = \sum_j \vec{F_j}\cdot\vec{v_{g_j}} + \sum_j M_j\,\omega_j = \omega_e\left(\sum F_j \cos\alpha_{g_j} g_{g_j} + \sum M_j g_j\right)$$

$$M^*(\ell_e) = \sum F_j \cos\alpha_{g_j} g_{g_j} + \sum M_j g_j$$

$$\frac{1}{2} I^*(\ell_e)\,\omega_e^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{N} m_i v_{Gi}^2 + \sum_{i=2}^{N} I_{Gi}\,\omega_i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega_e^2 \sum_{i=2}^{N}\left(m_i g_{Gi}^2 + I_{Gi}\, g_i^2\right)$$

$$I^*(\ell_e) = \sum_{i=2}^{N}\left(m_i g_{Gi}^2 + I_{G} g_i^2\right)$$

Teorema de la energía

$$\int_{\ell_e^0}^{\ell_e} M^*(\ell_e)\,d\ell_e = \frac{1}{2} I^*(\ell_e)\,\omega_e^2 - \frac{1}{2} I^*(\ell_e^0)\,[\omega_e^0]^2$$

$$|\omega_e| = \sqrt{\frac{2\int_{\ell_e^0}^{\ell_e} M^*(\ell_e)\,d\ell_e + I^*(\ell_e^0)\,[\omega_e^0]^2}{I^*(\ell_e)}}$$

Potencia

$$M^*(\ell_e)\,\cancel{\omega_e} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} I^*(\ell_e)\,\omega_e^2\right] = \frac{1}{2}\,\frac{dI^*(\ell_e)}{d\ell_e}\,\omega_e^3 + I^*(\ell_e)\,\omega_e\alpha_e$$

$$M^*(\ell_e) = \frac{1}{2}\,\frac{dI^*(\ell_e)}{d\ell_e}\,\omega_e^2 + I^*(\ell_e)\,\alpha_e$$

A esta expresión se la conoce como "ecuación generalizada del movimiento para cualquier sistema de 1 grado de libertad.

$$\alpha_e = \frac{M^*(\ell_e) - \frac{1}{2}\,\frac{dI^*(\ell_e)}{d\ell_e}\,\omega_e^2}{I^*(\ell_e}$$

~~[illegible] diseño de un mecanismo~~

~~Esquemas de [illegible]~~

/ Sintesis de masas equivalentes: concepto, condición de equivalencia casos lineal, plano y espacial. ***

/ Obtención de las expresiones del amortiguamiento equivalente en serie y paralelo. **

/ Obtener la transmisibilidad de una máquina a la cimentación ***

- Explicar conceptual y analiticamente el fundamento de un acelerómetro. *

/ Problema dinámico directo: ✓ · Conceptos de momento/inercia reducida.
  ✓ · Definición.
  ✓ · Método de Djukovskii ****

- Integral de convolución para el cálculo de la respuesta de un sistema de un grado de libertad ante una excitación de forma cualquiera.

/ Equilibrado dinámico de las dos carreras (explicarlo) *****

/ Clasificación de los sistemas mecánicos/vibraciones mecánicas. *; **

/ Problema dinámico inverso. Describir el método de las potencias virtuales. ****

/ Obtención del factor de amplificación dinámica en un sistema de 1gdl con amortiguamiento estructural o histerético. **

· Respuesta de un sistema de 1gdl con amortiguamiento de Coulomb. *

- Cadena básica de medida experimental de vibraciones**

✓ Método aproximado de cálculo de volantes de inercia *****
**

- Explicar los diferentes métodos para el control de vibracione.

- Método del decremento logarítmico.*

- Ciclo de diseño de mecanismos*

- Comentar los distintos métodos para la visualización de los modos de vibración en sistemas reales.

✓ Funciones del volante. Describir y dar un ejemplo de las 3 aplicaciones fundamentales.***

- Método de la energía perdida por ciclo*

- Método de la anchura de banda y amplificación a la frecuencia de resonancia.*