ALJEBRA: Azterketetako Ariketak
Aplikazio linealak

1. ARIKETA:

A) Izan bitez E eta F $\mathbb{K}$ gorputzaren gaineko n eta m dimentsioko espazio bektorialak hurrenez hurren. Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ aplikazio lineala.

B_E eta B_F (E eta F espazioen oinarriak) oinarriei elkartutako aplikazio linealaren adierazpen matriziala jatorri bezala hartuta, ondorioztatu aplikazio linealaren adierazpen matriziala F espazioaren oinarria B_F^* oinarriagatik aldatzen bada.

Adierazi matrizeen dimentsioak eta azaldu nola lortzen diren matrize horiek laburki.

B) Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ aplikazio lineala. $B_E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eta $B_F = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ oinarriei elkartuta $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizea dago. F espazioaren oinarria $B_F^* = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1\}$ oinarriagatik aldatzen bada, elkartutako matrizea $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. dela lortzen da. Kalkula ezazu A_1 matrizea.

2011ko urtarrila

2. ARIKETA:

Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_2(x)$ aplikazio lineala ($\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala da). $\forall \alpha, \beta$ parametroentzat honako baldintzak betetzen dira

$$f(1\,1\,1)^t = 2 \cdot \beta + \alpha \cdot x, \quad f(0\ -1\ 1)^t = \alpha \cdot x + \beta \cdot x^2, \quad f(0\ 0\ 1)^t = \beta + (\alpha - 1) \cdot x$$

1) Lortu aplikazio linealari elkartutako matrizea ohiko oinarrietan.

2) Lortu α eta β parametroen balioak f ez-injektiboa izan dadin.

3) Lortu Ker f eta Im f azpiespazioen oinarriak α eta β parametroen arabera.

4) Izan bedi $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ / \ a + c = 0, b + c = 0 \right\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala. Lortu f(S) α eta β parametroen arabera.

2011ko urtarrila

3. ARIKETA:

A) 2 ordenako matrize karratu eta errealen espazio bektorialean, $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioan, honako azpiespazio bektorial hau kontsideratzen da:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;/\; a + d = 0 \right\}$$

Izan bedi $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ honako baldintza hauek betetzen dituen aplikazio lineala:

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Lor ezazu f aplikazioari elkartutako matrizea, U azpiespazioaren oinarri bat eta $\mathbb{R}^2$ espazioaren oinarri kanonikoa erabilita.

2) Lor itzazu nukleoaren eta irudi multzoaren dimentsioak. Lortu ere nukleoaren oinarri bat.

B) Izan bedi $f : E \longrightarrow E$ endomorfismo bat. B oinarriari elkartutako matrizea honako hau da:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Endomorfismo beraren matrizea baina hasierako espazioan B oinarria eta bukaerako espazioan U oinarria kontsideratzen badira, honako matrize hau lortzen da:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lor ezazu B eta U oinarrien arteko erlazioa.

2011ko maiatza

4. ARIKETA:

A) Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala. Izan bedi honako aplikazio lineala:

$$f : \mathbb{P}_2(x) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$a + b \cdot x + c \cdot x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} a - 2c \\ b + c \\ 2a + \alpha c \end{pmatrix}$$

1) Bila ezazu $\alpha \in \mathbb{R}$ balioa, f aplikazioa ez izateko bijektiboa. α parametroaren balio horretarako, bila itzazu nukleo eta irudi multzoaren oinarri eta ekuazio inplizituak.

2) Izan bedi $\alpha = 0$ balioa eta $S = \mathrm{Span}\{1, 1+x\}$. Kalkulatu gabe, ondoriozta ezazu f(S) azpiespazioaren dimentsioa.

B) Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala. Izan bedi honako aplikazio lineala:

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{P}_2(x) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(x) \\
p(x) &\longrightarrow f(p(x)) = p(x) + p'(x)
\end{aligned}
$$

Bila ezazu f aplikazioari elkartutako matrizea hasiera eta bukaerako espazioetako oinarriak $\{2, x+1, x^2-1\}$ badira.

2011ko uztaila

5 ARIKETA:

Izan bedi $f : E \longrightarrow F$ E eta F $\mathbb{K}$-gaineko bi espazio bektorialen arteko aplikazio lineal bat. E-ren dimentsioa n da eta F-ren dimentsioa m.

Aurkitu aplikazio linealaren adierazpen matriziala B_E (E-ren oinarri bat) eta B_F (F-ren oinarri bat) oinarrietan. Adierazpen matrizial hau erabiltzen aurkitu aplikazio linealaren adierazpen matriziala E-ren oinarria B_E^* bada (B_E oinarria aldatu dugu). Idatzi agertzen diren matrizeen ordenak eta adierazi laburki nola kalkulatzen diren matrize horiek.

2012ko urtarrila

6. ARIKETA:

Izan bedi hurrengo aplikazioa:

$$
\begin{aligned}
f : \quad E_{2x2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \quad \mathbb{P}_2(x) \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longrightarrow f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + (b-c)x + dx^2
\end{aligned}
$$

a) Frogatu f lineala dela.

b) Kalkula ezazu (urrats guztiak adierazten) f aplikazioaren nukleoaren oinarri bat eta ekuazio kartesiarra

c) Izan bedi U 2 ordenako matrize simetrikoen espazio bektoriala eta V $V = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(x) \ / \ p(-x) = -p(x)\}$. $f(U)$ eta V betegarriak al dira? **2012ko urtarrila**

7. ARIKETA:

Izan bedi $\mathbb{R}^4$ espazio bektorialaren hurrengo endomorfismoa:

I. Endomorfismoaren nukleoa da azpiespazio bektoriala hurrengo ekuazio kartesiarrekin: $x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ \ x_4 = 0.$

II. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bektorearen irudia bektore bera da eta $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bektorearen irudia bektore bera da.

Eskatzen da:

a) Aurkitu ezazu endomorfismoaren matrizea $\mathbb{R}^4$-ren oinarri kanonikoan.

b) Izan bedi hurrengo azpiespazio bektoriala

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \ / \ \ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ \ x_4 = 0,\ \ \ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Existitzen al da $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ bektore bat non $f(\mathbf{x}) \in V$?

c) Aurkitu ezazu endomorfismoaren matrizea hurrengo oinarrian:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$ **Ezin da erabili matrize antzekoen berdintza**.

2012ko urtarrila

8. ARIKETA:

2 ordenako matrize karratu errealen espacio bektorialean, $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioan, izan bedi honako azpiespazio bektorial hau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a - d = 0 \right\}$$

Izan bedi $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala honako baldintak betetzen dituena:

$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

a) U espazioaren oinarri bat eta $\mathbb{R}^2$ espazioaren oinarri kanonikoak erabilita, lor ezazu f aplikazioari elkartutako matrizea.

b) Lor itzazu nukleo eta irudI multzoaren dimentsioak. Lor ezazu nukleoaren oinarri bat.

2012ko Maiatzak

9. ARIKETA:

Izan bedi hurrengo aplikazioa $f\colon \mathbb{P}_2(x) \to E_{2x2}(\mathbb{R})\,/\quad f(p)=\begin{pmatrix}p(1)-p(0) & 0\\ 0 & p'(0)\end{pmatrix}$ non

$\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala den eta $E_{2x2}(\mathbb{R})$ 2 ordenako matrize karratuen espazio bektoriala.

a) Frogatu f aplikazio lineal bat dela

b) Aurkitu f-ren nukleoaren ekuazio kartesiarrak eta oinarri bat

c) Aurkitu f-ren irudiaren ekuazio kartesiarrak eta oinarri bat

2012ko Uztaila

10. ARIKETA:

Izan bedi V espazio bektorial erreal bat eta B V-ren oinarri bat. $\lambda \in \mathbb{R}$ balio bakoitzarentzat hurrengo endomorfismoa kontsideratzen da: $f_\lambda : V \longrightarrow V$. Endomofismo horri elkartutako matrizea B oinarrian honako hau da:

$A_\lambda = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & 0\\ 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}$. Sailkatu f_λ endomorfismoa λ parametroaren balioen arabera.

2012ko Uztaila

11. ARIKETA:

1) Izan bedi f endomorfismo lineal bat, dimentsio finitoko espazio bektorial batean definituta. Frogatu f injektiboa bada orduan f suprajektiboa izango dela ere

2) Izan bedi $\mathbb{P}_n(x)$, n edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala. Hurrengo aplikazio lineala definitzen da:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}_n(x) &\longrightarrow \mathbb{P}_n(x)\\ p(x) &\longrightarrow p(x)-p'(x) \end{aligned}.$$

a) Aztertu aplikazioaren izaera, bere matrizea kalkulatu gabe.

b) $\mathbb{P}_n(x)$ -ren oinarri kanonikoan aplikazio horren matrizea kalkulatu.

2013ko Urtarrila

12. ARIKETA:

1) Izan bedi $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_2(x)$ aplikazio lineal bat non:

- $(0,a,b)$ itxura duen $\mathbb{R}^3$-ren bektore bakoitzaren irudia $a\cdot x + b\cdot x^2$ polinomioa da.

- f-ren nukleoa $\mathbb{R}^3$ espazioaren azpiespazio bektorial bat da, non bektoreek hiru osagaiak berdinak dituzte.

Eskatzen da:

a) Oinarri kanonikoetan aplikazioaren matrizea aurkitu

b) f(S)-ren oinarri bat aurkitu, non S $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat da, hurrengo ekuazio parametrikoak dituena: $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = \alpha \end{cases}$.

c) Aurkitu, posible diren 2 era desberdinez, aplikazioaren matrizea $\mathbb{R}^3$-ren $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ oinarria eta $\mathbb{P}_2(x)$-ren oinarri kanonikoa erabilita.

2) Izan bedi $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo bat, oinarri kanonikoetan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ matrizea elkartuta duena. Aurkitu Ker f eta Im f azpiespazioen dimentsioak a eta b balioen arabera.

2013ko Urtarrila