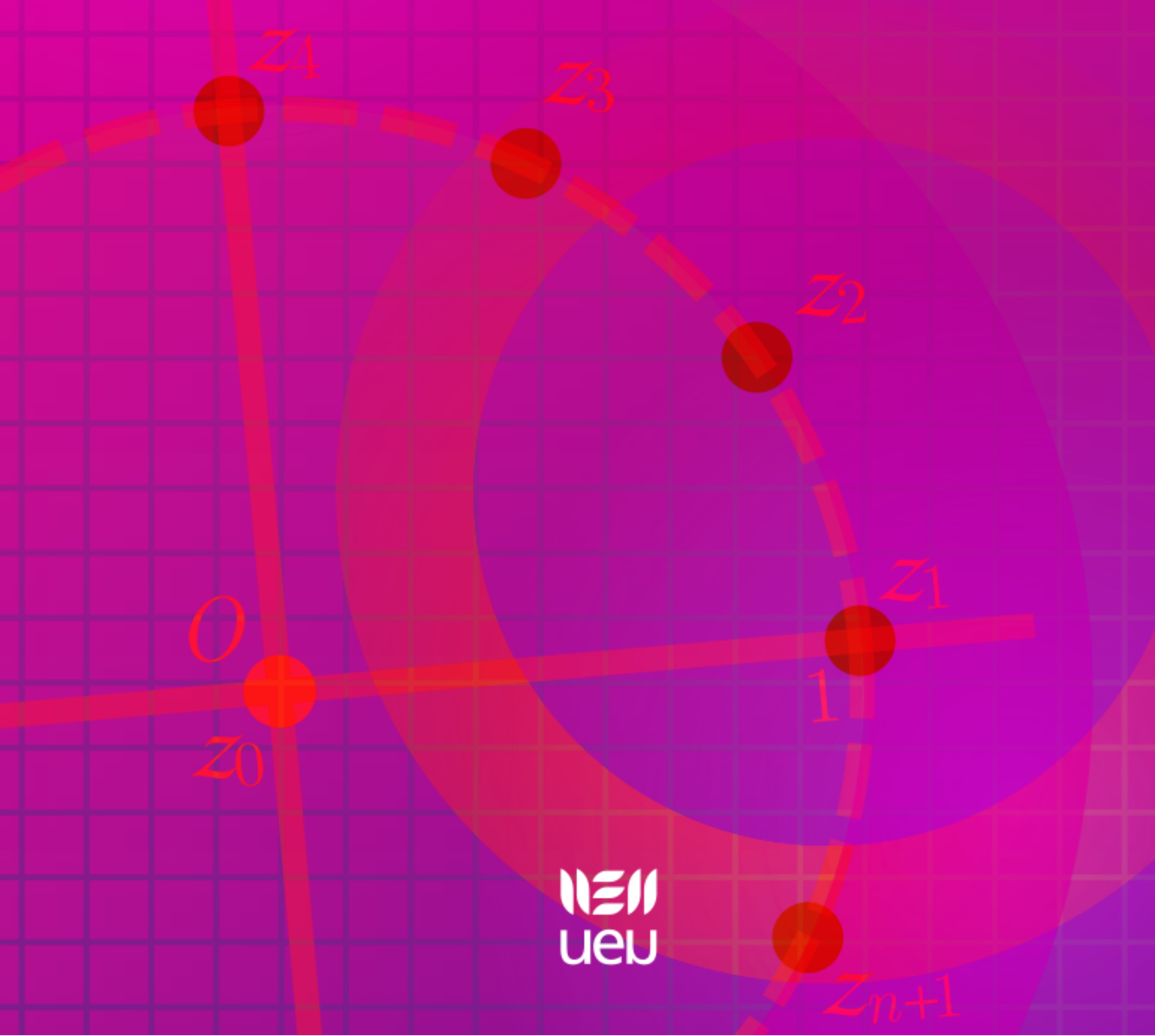
Analisi Matematikoa

Ariketa ebatziak

Patxi Angulo Martin



ueu

UEUren ISBNa: 978-84-8438-611-7
Lege-gordailua: BI-1908-2016

Inprimategia: PRINTHAUS S.L., Bilbo
Azalaren diseinua: Igor Markaida Uriagereka
Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Ander Altuna Gabiola

Banatzaileak: UEU. Erribera 14, 1, D BILBO. Telf. 946790546
Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.eus
www.ueu.eus

Elkar Banaketa: Igerabide, 88 DONOSTIA

Liburu honek UEUren argitalpengintzako ebaluazio-prozesua gainditu du; liburuaren jakintza-alorreko bi adituk ebaluatu dute jatorrizkoa, peer review erako ebaluazioan, horietako batek egilearen daturik ezagutu gabe (double-blind).

Gaien Aurkibidea

Hitzaurrea

Liburu hau Informatika Ingeniaritzako Graduko Analisi Matematikoa ikasgaian oinarritu dugu. Beraz, hautatu ditugun adibideak, ariketa ebatziak eta ariketa proposatuak bertan azaltzen diren kontzeptuekin lotuta daude.

Liburu hau ariketa ebatzien liburua da; eta, bereziki, ariketak ebazteko erabili ditugun arrazoibideak zaindu ditugu. Hori da, hain zuzen ere, gaien hasieran laburpen teorikoa idazteko arrazoia. Izan ere, ebazpenetan ematen diren urrats garrantzitsuak azpimarratzen saiatu gara; horretarako, teoriako definizioak, propietateak eta adibideak erabili ditugu. Horrez gain, eragiketak, sinplifikazioak, itxura-aldaketak eta abar ere erabili ditugu eta esplizituki idatzi ditugu, ikasleak bidean gal ez daitezen izanik helburua.

Analisi Matematikoa zientzia-ikasketa guztietako lehen mailako ikasgaia da. Hemen azaltzen ditugun ariketak, agian, ez dira zientzia-ikasketa guztietan ikusten, edo berdin aztertzen. Dena dela, uste dugu hemen aurkezten den materialaren zati handi bat erabilgarria izango dela zentro bakoitzean.

Liburu honetan hogeita hamar urteren eskarmentua bildu nahi izan dugu. Ariketa ebatziak hogeita hamar urte horietan izen desberdineko ikasgaien azterketetan agertu diren ariketak dira.

Liburuan zer ikusiko den gaiz gai laburtu nahiko genuke. Horrela ikasleak aukera izango du aldez aurretik jakiteko interesatzen zaion edo ez.

Lehenengo gaian, zenbakien multzoak aztertuko ditugu; bereziki, indukzio-printzipioa, zenbaki errealen multzoen gorena, beherena, maximoa eta minimoa eta zenbaki konplexuen arteko eragiketak landuko ditugu. Gai honetan, 17 adibide aurkituko ditu ikasleak teoriako kontzeptuen artean tartekatuta; ondoren, 30 ariketa ebatzi doaz eta, bukatzeko, 146 ariketa proposaturen zerrenda.

Bigarren gaian, topologiaren oinarri batzuk azalduko ditugu, espazio metrikoak eta normadunak, eta bertan barne-, kanpo- eta muga-puntuak; horiekin batera, barnealdea, kanpoaldea eta muga eta multzo irekiak eta itxiak aztertuko ditugu. Gai honetan, 14 adibidek lagunduko dute kontzeptuak azaltzen; ondoren, 10 ariketa ebatzi eta 21 ariketa proposatu datoz.

Hirugarren gaian, zenbaki-segidak aztertuko ditugu, dituzten propietateak eta limiteen kalkulua; bukaeran segida errepikariak laburki aipatuko ditugu. Gai honetan, 13 adibidek osatzen dute teoria; ondoren, 35 ariketa ebatzi eta 63 ariketa proposatu daude.

Laugarren gaian, zenbaki-serieak aztertuko ditugu; serieen izaera, serieen batura zehatza eta batura hurbildua landuko ditugu; ez gara sartuko serie absolutuki konbergenteekin. Gai honetan, 13 adibide-ariketa aurkituko ditu ikasleak; ondoren, 35 ariketa ebatzik osatuko dute adibideetan ikusitakoa; bukatzeko, 63 ariketa proposatu daude.

Bosgarren gaian, funtzio errealen azterketarekin hasiko gara. Kontzeptu nagusiak hasieran emango ditugu erakusteko ez daudela funtzioen jarraitutasunaren eta deribagarritasunaren mende. Funtzioen limitea, jarraitutasuna eta funtzio jarraituen propietateak landuko ditugu. Gai honetan, 13 adibidez hornitu dugu teoria; ondoren, 35 ariketa ebatzi ditugu, eta 101 ariketa proposatu.

Seigarren gaian, funtzio errealen deribagarritasuna aztertuko dugu. Funtzio deribagarrien propietateak landuko ditugu. Gai honetan, 12 adibide aukeratu ditugu teoriako kontzeptuak azaltzeko: ondoren, 30 ariketa ebatzi daude, batzuk aurreko gaikoen jarraipena izanik, eta 80 ariketa proposatu daude.

Zazpigarren gaian, funtzio errealen adierazpen grafikoa landuko dugu. Funtzioen muturrak eta inflexio-puntuak kalkulatuko ditugu. Horrez gain, gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak ere zehaztuko ditugu. Gai honen helburua funtzioak irudikatzea izan da, eta horretara zuzendu dugu azken hiru gaien teoria. Gai honetan, 4 adibidek argitzen dute teoria; ondoren, 16 ariketa ebatzi ditugu, eta 24 ariketa proposatu.

Hortaz, liburu honetan ikasleak kontzeptu teorikoak ulertzen lagunduko dioten 92 adibide aurkituko ditu. Batzuek ideiak era erraz batean azaltzea baino ez dute helburu. Beste batzuk, aldiz, benetako ariketak dira, ebazpeneko kalkulu errazagoak izango dituzte agian, baina ebazpen-metodo zorrotzez azaltzen dira. Horrez gain, eta hau da liburu honen alderdi interesgarriena, 186 ariketa ebatzi, teorikoak eta praktikoak, izango ditu ikasleak, xehetasunez garatuta eta urrats garrantzitsuak teoriarekin arrazoituak. Ikasleak praktika dezan, gaien bukaeran, 512 ariketa proposatu ditugu. Baina, bibliografian, eta bibliografiatik kanpo, milaka ariketa aurki ditzake ikasleak, liburu honetan ikasitakoa bere kasa eraman dezan praktikara.

Liburua ilustratzen duten irudiak Wolfram *Mathematica* aplikazioarekin eginak daude.

Bibliografiari dagokionez, hamarnaka dira hogeita hamar urtean erabili ditugun testuak ariketak bilatzeko; ezinezkoa da horiek guztiak hona ekartzea, horietako asko jadanik ahaztu ditugulako. Dena dela, saiatu gara zerrenda egokia bilatzen, ikasleak beste testu batzuk irakurtzeko aukera izan dezan, batzuek benetan merezi dute-eta. Jakina, sarean ere bila daitezke bai teoriako kontzeptuen azalpena bai ariketa ebatziak, baita bideoetan garatua ere.

Bukatzeko, azken lerro hauek baliatu nahi ditut eskerrak emateko.
Alde batetik, urte luzeetan nire maisua izan den Fernando Ferreres Alberdi irakasle ohiari eskerrak eman nahi dizkiot; berak utzi zidan duela hogeita hamar urte lan honen oinarria izan zen materiala, eta beregandik ikasi nuen nik orain hemen aurkezten dudan materialaren estiloa.
Beste aldetik, lan hau *Latex*-en idatzita dago. Baina, idaztetik agerian geratu arte egin beharrekoa Javier Álvez Giménez-ek egin du; liburua txukun ikusten bada, Javierren lan ezkutuari zor zaio; are gehiago, gauzak txukun egiteko duen gogoari zor zaio, eta hori ez da ordaintzen.

Donostia, 2016ko azaroaren 30a

Patxi Angulo Martin

1. Zenbaki-multzoak

1.1. ZENBAKI ARRUNTAK ETA OSOAK

1.1. Definizioa. *P multzoa, $0 \in P$ elementua eta $S : P \longrightarrow P$, $S(x) = x+1$ (hurrengoa), aplikazioa emanik, hiru axioma hauek betetzen badira:*

a) $\forall x \in P \quad S(x) \neq 0$ *(Zero ez da Pren inongo elementuren hurrengoa);*

b) $\forall x,y \in P \quad x \neq y \Longrightarrow S(x) \neq S(y)$ *(Bi elementu desberdinak badira, bien hurrengoak ere desberdinak dira; S aplikazio injektiboa da); eta*

c) Indukzio-axioma

$A \subseteq P$ bada, non $0 \in A$ eta $x \in A \Longrightarrow S(x) \in A$ betetzen baitira, $A = P$ izango da;

P multzoa zenbaki arrunten *multzoa da, eta $\mathbb{N}$ idatziko dugu; hau da:*

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}.$$

1.2. Propietatea. *$\mathbb{N}$ multzoa itxia da* $+$ batuketarako *eta* $\cdot$ biderketarako.

Horrekin esan nahi dugu bi zenbaki arrunt batzen edo biderkatzen baditugu, emaitzak, batura eta biderkadura, zenbaki arruntak izango direla.

1.3. Definizioa. *$\mathbb{N}$ multzoan* $\leq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioa *honela definituko dugu:*

$$\forall a,b \in \mathbb{N} \quad a \leq b \textit{ izango da } \quad \exists c \in \mathbb{N} \,/\, a+c = b \quad \textit{betetzen den.}$$

Horren ondorioz, zenbaki arruntak lerro zuzen horizontal batean koka ditzakegu; puntu batean 0 finkatzen da eta gainerakoak, ezkerretik eskuinera ordenaren arabera.

1.4. Propietatea. *$\mathbb{N}$ multzoa* ongi ordenatua *da. Horrek esan nahi du $\mathbb{N}$ multzoaren azpimultzo ez-huts guztiek* lehen elementua *dutela.*

1.5. Indukzio-printzipioa. *Propietate bat $n = k \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen bada eta $k \leq n \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen dela pentsatuz $(n+1) \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen dela frogatzen bada, propietatea beteko da k eta handiagoak diren zenbaki arrunt guztietarako.*

Hipotesiak:	1) $P(k)$ egiazkoa da 2) $n \geq k$, $P(n)$ egiazkoa bada, $P(n+1)$ egiazkoa da
Ondorioa:	$\forall n \geq k \quad P(n)$ egiazkoa da.

1.6. Adibidea. Izan bedi $a_n = ar^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a, r \in \mathbb{R}$ izanik. Froga dezagun lehenengo n gaien S_n batura hau izango dela:

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1 \text{ denean,} \\ na, & r = 1 \text{ denean.} \end{cases}$$

$r = 1$ denean, honela geratzen da:
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a + a + \cdots + a = na.$

Frogatu behar dugu $r \neq 1$ denean, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ betetzen dela. Horretarako, indukzio-printzipioa erabiliko dugu.

$n = 1$ denean, ezkerreko atalean $S_1 = a_1 = ar^{1-1} = a$ dugu eta, eskuinekoan, $\dfrac{a(1-r)}{1-r} = a$, $r \neq 1$ delako; beraz, kasu horretan berdintza betetzen da.

Demagun, orain, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ betetzen dela; frogatu beharko dugu $S_{n+1} = \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$ izango dela.

Indukzio-hipotesia erabiliko dugu eta, ondoren, eragiketak egingo ditugu:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \overset{(1)}{=} \frac{a(1-r^n)}{1-r} + ar^n = \frac{a - ar^n + ar^n - ar^{n+1}}{1-r} =$$
$$= \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}.$$

(1) berdintzan, $a_{n+1} = ar^n$ eta indukzio-hipotesia erabili ditugu, hau da, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Beraz, 1.5. Printzipioaren bi hipotesiak betetzen direnez, $k = 1$ izanik, lehenengo berdintza $\forall n \in \mathbb{N}$ beteko da.

$\mathbb{N}$ multzoak gabezia asko ditu eta, horregatik, multzo berri bat definitu beharko dugu. Gabezia bat aipatzeagatik, $3 + x = 2$ eta $5x = 4$ ekuazioek ez dute soluziorik $\mathbb{N}$ multzoan.

1.7. Definizioa. Zenbaki osoen $\mathbb{Z}$ *multzoa* $m = n + x$ *ekuazioen soluzioen multzoa da,* $\forall m, n \in \mathbb{N}$*, hau da,* $\mathbb{Z} = \{x \mid \exists m, n \in \mathbb{N} \quad m = n + x\}$*. Hortik multzo hau aterako da:*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Definizio horretatik $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ dela ondorioztatzen dugu. Bestalde, $\mathbb{Z}$ multzoa ez dela ongi ordenatua ere ondoriozta daiteke.

1.8. Propietatea. $\mathbb{Z}$ *multzoa itxia da* $+$ batuketarako*,* $\cdot$ biderketarako *eta* $-$ kenketarako*.*

1.9. Definizioa. $\mathbb{Z}$ *multzoan* $\leq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioa *honela definituko dugu:*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \textit{ izango da } \exists c \in \mathbb{N} \,/\, a + c = b \quad \textit{betetzen den.}$$

Definizio horrek aukera ematen digu zenbaki osoak zuzen batean irudikatzeko. Zuzenean jatorri bat finkatu eta gero, jatorriari 0 zenbakia esleituko diogu, zenbaki oso positiboak eskuin aldean kokatuko ditugu zenbaki arruntak bezala, eta zenbaki oso negatiboak ezker aldean, positiboekin irudi simetrikoa osatuz.

Zenbakien multzoa zabaldu badugu ere, oraindik gabezia asko geratzen dira ebazteke. Gabezia bat da, esaterako, $5x = 4$ ekuazioak ez duela soluziorik $\mathbb{Z}$ multzoan.

1.2. ZENBAKI ARRAZIONALAK

1.10. Definizioa. Zenbaki arrazionalen $\mathbb{Q}$ *multzoa* $m = nx$ *ekuazioen soluzioen multzoa da,* $\forall m,n \in \mathbb{Z}$ *eta* $n > 0$ *izanik; errepikapenik ez egoteko,* $\text{zkh}\{m,n\} = 1$ *baldintza jarriko dugu. Hortik multzo hau lortuko dugu:*

$$\mathbb{Q} = \{x \,/\, \exists m,n \in \mathbb{Z},\ n > 0 \quad \textit{eta} \quad \text{zkh}\{m,n\} = 1,\ m = nx\}$$

edo

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,/\, m,n \in \mathbb{Z},\ n > 0 \quad \textit{eta} \quad \frac{m}{n} \quad \textit{laburtezina den} \right\}.$$

Definizio horrekin egiazta daiteke $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ betetzen dela.

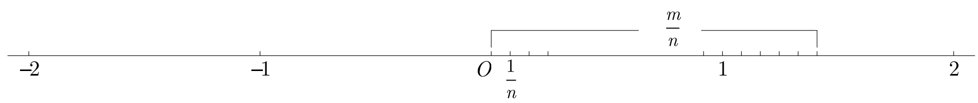
1.11. Propietatea. $\mathbb{Q}$ *multzoa itxia da* $+$ batuketarako*,* $\cdot$ biderketarako*,* $-$ kenketarako *eta* $/$ zatiketarako*, zati* 0 *izan ezik.*

1.12. Definizioa. $\mathbb{Q}$ *multzoan* $\leq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioa *honela definituko dugu:*

$$\forall \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \textit{ izango da } \quad m \cdot q \leq p \cdot n \quad \textit{betetzen bada.}$$

Horrek aukera ematen digu $\mathbb{Q}$ multzoaren adierazpen grafikoa egiteko:

1. Zuzen batean 0 zenbakiari O puntu bat, jatorria, egokituko diogu.
2. Distantzia finko bat, unitatea, aukeratu eta Oren eskuinean zenbaki arruntak irudikatuko ditugu, eta ezkerrean zenbaki oso negatiboak.
3. $\dfrac{m}{n}$ zenbaki arrazionala irudikatzeko, unitatea n zatitan banatuko dugu eta horietako m hartuko ditugu, eskuinean $m > 0$ bada eta ezkerrean $m < 0$ bada (ikus irudia).



Horrek esan nahi du zenbaki arrazional orori zuzeneko puntu bat dagokiola.

1.13. Propietatea. $\mathbb{Q}$ *multzoak propietate hauek ditu:*

1. $\mathbb{Q}$ *multzoa* zenbakigarria *da, hau da,* $\mathbb{Q}$ *multzoak* $\mathbb{N}$ *multzoak adina elementu ditu.*

2. $a,b \in \mathbb{Q}$ *badira,* $a \neq b$ *izanik,* $\exists c \in \mathbb{Q} \,/\, a < c < b$*. Ondorioz, bi zenbaki arrazionalen artean infinitu zenbaki arrazional daude.*

1.14. Definizioa. $A \subseteq \mathbb{Q}$ *multzoa emanik,*

1. A goitik bornatua *da* $k \in \mathbb{Q}$ *existitzen bada, non* $\forall x \in A \quad x \leq k$ *betetzen den, eta* k *Aren* goi-bornea *da.*

2. A behetik bornatua *da* $k \in \mathbb{Q}$ *existitzen bada, non* $\forall x \in A \quad k \leq x$ *betetzen den, eta* k *Aren* behe-bornea *da.*

3. A bornatua *da goitik eta behetik bornatua bada. Bestela, multzoa* bornegabea *dela esango dugu.*

1.15. Adibideak.

1. Har dezagun $\mathbb{N}$ multzoa; behetik bornatua da, -1 multzoaren behe-borne bat delako $\forall n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq n$ baita, hots, zenbaki arrunt guztiak -1 baino handiagoak baitira.

   Ez da, aldiz, goitik bornatua, ez delako existitzen zenbaki arrunt guztiak baino handiagoa den zenbaki arrazionalik.

2. Izan bedi $A=\left\{\frac{n+1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ multzoa[1]. Azter dezagun bornatua edo bornegabea den.

   $A=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\dots\right\}$ da. 3 zenbakia Aren goi-borne bat da, $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{n+1}{n}\leq 3$ baita; bestalde, 0 zenbakia behe-borne bat da, $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 0\leq\frac{n+1}{n}$ baita. Beraz, A multzoa bornatua da.

   Bestalde, goi- eta behe-borneak ez dira bakarrak. Hau da, goi-borne gehiago daude; adibidez, 2, 5, 100... ere Aren goi-borneak dira. Behe-borne gehiago daude; adibidez, -1, 1... ere Aren behe-borneak dira. Horietatik, goi-borne bat, 2, eta behe-borne bat, 1, bereziak dira.

1.16. Definizioa. $A\subset\mathbb{Q}$ *multzo bornatua emanik,*

1. *Aren goi-bornerik txikiena* goi-muturra *edo* gorena *da eta* sup*(A) idatziko dugu.*
2. *Aren behe-bornerik handiena* behe-muturra *edo* beherena *da eta* inf*(A) idatziko dugu.*

1.17. Adibideak.

1. $\mathbb{N}$ multzoaren beherena, beraz, 0 da, behe-bornea delako $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leq n$ baita eta edozein zenbaki positibok $\mathbb{N}$ren 0 elementua ezkerrean utziko lukeelako. Ondorioz, $\inf(\mathbb{N})=0$ da.

   $\mathbb{N}$ multzoak ez du gorenik, ez delako goitik bornatua.

2. $A=\left\{\frac{n+1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ multzoak gorena eta beherena izan ditzake, bornatua delako.

   $\sup(A)=2$ da, goi-bornea delako $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{n+1}{n}\leq 2$ baita; eta 2 baino txikiagoa den edozein zenbakik Aren 2 elementua eskuinean uzten duelako.

   Froga daiteke $\inf(A)=1$ dela.

$\mathbb{Q}$ multzoak ez ditu aurreko problema guztiak konpontzen. Adibide bat hiru ikuspuntutik aztertuko dugu.

1.18. Adibideak.

a) $x^2=2$ ekuazioak ez du soluziorik $\mathbb{Q}$ multzoan. Hau da, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

b) Zuzeneko puntu guztiak ez dira zenbaki arrazionalak.

c) $\mathbb{Q}$ multzoaren azpimultzo bornatu guztiek ez dute gorenik edo beherenik, $\mathbb{Q}$ multzoan:
$E=\{x\in\mathbb{Q}^+ \,/\, x^2\leq 2\}$ multzoak ez du gorenik $\mathbb{Q}$ multzoan. Eren gorena $\sqrt{2}$ da, baina $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

1.3. ZENBAKI ERREALAK

1.19. Definizioa. Zenbaki errealen $\mathbb{R}$ *multzoa propietate hauek betetzen dituen multzoa da:*

a) $\mathbb{R}$ *multzoan* $+$ batuketa*,* $\cdot$ biderketa*,* $-$ kenketa *eta* $/$ zatiketa*, zati* 0 *izan ezik, definiturik daude (gorputzaren axiomak);*

b) $\mathbb{R}$ *multzoan* $\leq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioa *dago definiturik (ordenaren axiomak);*

c) $\mathbb{R}$ *multzoan multzo ez-huts bornatu guztiek gorena eta beherena dauzkate (osotasun-axioma).*

1. $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$ da.

Definizio horretatik $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ betetzen dela ondoriozta daiteke. Bestalde, zenbaki arrazionalak ez diren zenbaki errealei *irrazional* deritze eta $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ edo $\mathbb{I}$ multzoa osatzen dute.

Horrez gain, $\mathbb{R}$ multzoaren eta zuzenaren artean *bijekzio* bat badago. Horregatik hitz egiten da, batzuetan, zenbaki errealei buruz zuzeneko puntu gisa.

1.20. Propietatea. *$\mathbb{R}$ multzoak propietate hauek ditu:*

1. *$\mathbb{R}$ multzoa* zenbakiezina *da, hau da, ezin da bijekzio bat definitu $\mathbb{R}$ eta $\mathbb{N}$ artean.*

2. *Bi zenbaki errealen artean infinitu zenbaki arrazional eta infinitu zenbaki irrazional daude.*

1.21. Definizioa. *$A \subset \mathbb{R}$ multzoa emanik,*

1. *A goitik bornatua bada eta Aren gorena Aren elementua bada, gorenari* maximo *deritzogu, eta* $\max(A)$ *idatziko dugu.*

2. *A behetik bornatua bada eta Aren beherena Aren elementua bada, beherenari* minimo *deritzogu, eta* $\min(A)$ *idatziko dugu.*

1.22. Adibideak.

1. $\mathbb{N}$ multzoak ez du maximorik, gorenik ez duelako; eta $0 \in \mathbb{N}$ denez, multzoaren minimoa 0 da, hots, $\min(\mathbb{N}) = 0$.

2. $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ multzoak, ordea, gorena eta beherena ditu, bornatua delako 1.17.2. Adibidean ikusi dugun bezala, eta $\inf(A) = 1$ eta $\sup(A) = 2$ dira.

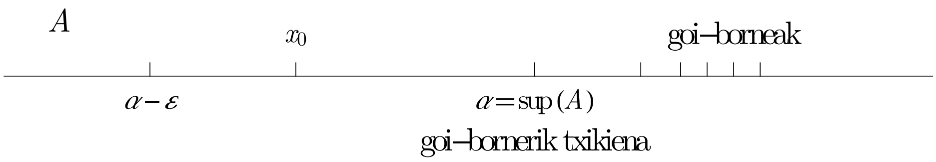
   Orain, $1 \notin A$ denez, ez da Aren minimoa. Baina, $2 \in A$ betetzen da; beraz, $\max(A) = 2$ da.

1.23. Teorema.

1. *$A \subset \mathbb{R}$ multzo goitik bornatua emanik, $\alpha \in \mathbb{R}$ Aren gorena da baldin eta soilik baldin:*

   1.1. $\forall x \in A \quad x \leq \alpha$ *bada eta*

   1.2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A \,/\, \alpha - \varepsilon < x_0 \leq \alpha$ *betetzen den* (ikus irudia).



2. *$A \subset \mathbb{R}$ multzo behetik bornatua emanik, $\beta \in \mathbb{R}$ Aren beherena da baldin eta soilik baldin:*

   2.1. $\forall x \in A \quad \beta \leq x$ *bada eta*

   2.2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A \,/\, \beta \leq x_0 < \beta + \varepsilon$ *betetzen den.*

1.24. Definizioa. *$I \subset \mathbb{R}$ multzoa* tartea *da* $\forall x, y \in I \quad x < z < y$ *bada, $z \in I$ betetzen bada.*

a) Tarte bornatu irekia: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$.

b) Tarte bornatu itxia: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$.

c) Tarte bornegabe irekia: $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x\}$;
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < x < b\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < b\}$.

d) Tarte bornegabe itxia: $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq \infty\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x\}$;
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty \leq x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b\}$.

Oharra. Tartea mugatzen duten a eta b zenbaki errealei 1.20.2 Propietatea aplikatuz, esan dezakegu tarte bornatuetan infinitu zenbaki arrazional eta infinitu zenbaki irrazional daudela. Berdin esan daiteke tarte bornegabeei buruz.

$\mathbb{R}$ multzoan beste eragiketa batzuk defini daitezke: logaritmoa, esponentziala, berreketa... Horiek funtzio elemental gisa ere defini daitezke.

$\mathbb{R}$ multzoarekin ez dira problema guztiak konpontzen. Esate baterako, $x^2+1=0$ ekuazioak ez du soluziorik $\mathbb{R}$ multzoan.

1.4. ZENBAKI KONPLEXUAK

1.4.1. Sarrera

Zenbaki errealen arteko zenbait eragiketak ez du emaitza errealik; esaterako, $(-2)^{3/4}$, $(-5)^{\pi}$, $\log_{-2}5$, $\log_{10}(-2)$, ... Emaitza horiek bilatzeko beste zenbaki batzuk behar dira, zenbaki konplexuak, hain zuzen. 1777an Euler-ek $\sqrt{-1}$ balioa i izendatu zuen eta 1832an Gauss-ek zenbaki konplexu izena asmatu zuen. Azkenik, zenbaki errealekin zuzena bete bagenuen, zenbaki berriak zuzenetik kanpo bilatu beharko ditugu, planoan hain zuzen; horregatik hitz egiten da plano konplexuaz.

1.25. Definizioa. Zenbaki konplexuen *multzoa hau da:*

$$\mathbb{C} = \{a+bi \;/\; a,b \in \mathbb{R} \;\; eta \;\; i^2=-1\}.$$

a zati erreala *eta* b zati irudikaria *dira eta* i unitate irudikaria *da.*

1.26. Definizioa. *Bi zenbaki konplexu,* $z=a+bi$ *eta* $w=c+di$*,* berdinak *dira,* $z=w$*,* $a=c$ *eta* $b=d$ *betetzen direnean.*

1.27. Definizioa. $z=a+bi$ *zenbaki konplexua emanik,*

1. $\sqrt{a^2+b^2}$ *balioari* z *zenbaki konplexuaren* modulu *deritzo eta* ρ *edo* $|z|$ *idazten da.*
2. $\arctan\dfrac{b}{a}$ *balioari* z *zenbaki konplexuaren* argumentu *deritzo eta* θ *edo* $\arg(z)$ *idazten da.*

   $\theta \in (-\pi,\pi]$ *edo* $\theta \in [0,2\pi)$ *denean* argumentu nagusia *lortzen da, eta* Arg*(z) idatzi.*

1.28. Definizioa. $z=a+bi$ *zenbaki konplexua emanik,* $\bar{z}=a-bi$ *zenbaki konplexuari* z *zenbakiaren* konjugatu *deritzo.*

Definizio horretatik bi ondorio hauek atera ditzakegu (ikus ezkerreko irudia):

$|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$, hau da, modulu bera dute.
$\mathrm{Arg}(\bar{z}) = \arctan\dfrac{-b}{a} = -\arctan\dfrac{b}{a} = -\mathrm{Arg}(z)$, hau da, elkarren aurkako argumentua dute.

1.4.2. Adierazpideak

$z \in \mathbb{C}$ zenbaki konplexua hartuko dugu adierazpideak azaltzeko.

Binomiala

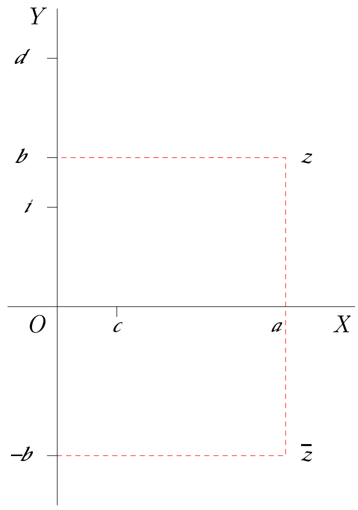
$a+bi$ adierazpenari z zenbaki konplexuaren *adierazpen binomial* deritzo.

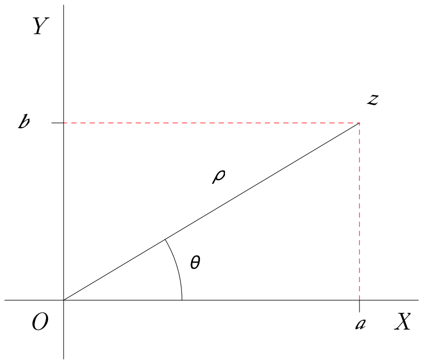
Geometrikoa

Pentsa dezakegu $z = a + bi$ zenbaki konplexua OXY planoko (a,b) puntua dela, non a zati erreala OX ardatzean eta b zati irudikaria OY ardatzean kokatzen diren (ikus ezkerreko irudia).

$(c,0)$ zenbaki konplexua OX ardatzean dago eta c zenbaki erreala adierazten du. Beraz, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ betetzen da. Horregatik deritzo OX ardatzari *ardatz erreal*.

$(0,d)$ zenbaki konplexua OY ardatzean dago eta *irudikari puru* izena du. $(0,1)$ zenbakia i unitate irudikaria da. Horregatik deritzo OY ardatzari *ardatz irudikari*.





Polarra

$z = a + bi$ zenbaki konplexua ρ eta θ parametroen bidez ere geratzen da finkaturik OXY planoan, non $a = \rho\cos\theta$ eta $b = \rho\sin\theta$ baitira. Beraz, z adierazteko ρ_θ erabil dezakegu. ρ_θ adierazpenari z zenbaki konplexuaren *adierazpen polar* deritzo (ikus eskuineko irudia).

$\rho = |z|$ eta $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ betetzen dira.

Trigonometrikoa

Adierazpen binomiala eta polarra kontuan hartuz, honela idatz dezakegu z:

$z = a + bi = (\rho\cos\theta) + (\rho\sin\theta)i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Hori da z zenbaki konplexuaren *adierazpen trigonometrikoa*.

Esponentziala

Lehendabizi, *Eulerren formula* gogoratuko dugu: $e^{bi} = \cos b + i\sin b$.

Hortaz, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{\theta i}$ da; hori da z zenbaki konplexuaren *adierazpen esponentziala*.

1.4.3. Eragiketak

Izan bitez $z = a + bi = \rho_\theta$ eta $w = c + di = \rho'_{\theta'}$ bi zenbaki konplexu, bion arteko eragiketa batzuk definituko ditugu.

Adibideetarako $z = 1 + \sqrt{3}i = 2_{\frac{\pi}{3}}$ eta $w = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$ zenbakiak erabiliko ditugu.

Batuketa / Kenketa

1.29. Definizioa. *z eta w zenbaki konplexuen batuketa / kenketa honela definitzen da:*

Adierazpide binomiala: $z \pm w = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$

Adierazpide geometrikoa: $z \pm w = (a,b) \pm (c,d) = (a \pm c, b \pm d).$

1.30. Adibidea. Kalkula dezagun z eta w zenbaki konplexuen arteko $z+w$ batura.

$z+w=(1+\sqrt{3}i)+(-2+2i)=-1+(2+\sqrt{3})i.$

Biderketa

1.31. Definizioa. *z eta w zenbaki konplexuen biderketa honela definitzen da:*

Adierazpide binomiala: $z\cdot w=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

Adierazpide polarra: $z\cdot w=(\rho_\theta)\cdot(\rho'_{\theta'})=(\rho\cdot\rho')_{(\theta+\theta')}.$

Adierazpide esponentziala: $z\cdot w=(\rho e^{\theta i})\cdot(\rho' e^{\theta' i})=(\rho\cdot\rho')e^{(\theta+\theta')i}.$

1.32. Adibidea. Kalkula dezagun zenbaki konplexuen arteko $z\cdot w$ biderkadura.

Adierazpide binomiala: $z\cdot w=(1+\sqrt{3}i)\cdot(-2+2i)=(-2-2\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})i.$

Adierazpide polarra: $z\cdot w=2_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}=4\sqrt{2}_{\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}}=4\sqrt{2}_{\frac{13\pi}{12}}.$

Zatiketa

1.33. Definizioa. *z eta w zenbaki konplexuen zatiketa honela definitzen da:*

Adierazpide binomiala: $z\div w=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$

Adierazpide polarra: $z\div w=(\rho_\theta)\div(\rho'_{\theta'})=(\rho\div\rho')_{(\theta-\theta')}.$

Adierazpide esponentziala: $z\div w=(\rho e^{\theta i})\div(\rho' e^{\theta' i})=(\rho\div\rho')e^{(\theta-\theta')i}.$

1.34. Adibidea. Kalkula dezagun zenbaki konplexuen arteko $\dfrac{z}{w}$ zatidura.

Adierazpide binomiala: $\dfrac{z}{w}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-2+2i}=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}=\dfrac{(-2+2\sqrt{3})+(-2-2\sqrt{3})i}{(-2)^2-(2i)^2}=$

$=\dfrac{(-2+2\sqrt{3})-(2+2\sqrt{3})i}{4+4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}i.$

Adierazpide polarra: $\dfrac{z}{w}=\dfrac{2_{\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}_{\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}_{\frac{-5\pi}{12}}.$

Berreketa

1.35. Definizioa. *z zenbaki konplexuaren berreketa honela definitzen da, $n\in\mathbb{N}$ izanik:*

Adierazpide polarra: $z^n=(\rho_\theta)^n=\rho^n_{n\theta}.$

Adierazpide trigonometrikoa: $z^n=[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$

Adierazpide esponentziala: $z^n=(\rho e^{\theta i})^n=\rho^n e^{n\theta i}.$

1.36. Adibidea. z^4 kalkulatuko dugu.

Adierazpide polarra: $z^4=\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^4=16_{\frac{4\pi}{3}}.$

Adierazpide trigonometrikoa: $z^4=\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^4=2^4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=$

$=16\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-8-8\sqrt{3}i.$

Erroketa

1.37. Definizioa. *z zenbaki konplexuaren erroketa honela definitzen da, $n \in \mathbb{N}^*$ izanik:*

Adierazpide polarra: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho_\theta} = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Adierazpide trigonometrikoa: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),$ $k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Adierazpide esponentziala: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{\theta i}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n} i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Errodurek bi ezaugarri hauek dituzte: guztiek modulu bera dute, $\sqrt[n]{\rho}$; beraz, $\sqrt[n]{\rho}$ erradioko zirkunferentzia batean daude kokaturik; bestalde, ondoz ondoko bi erroduren arteko aldea $\frac{2\pi}{n}$ angelua da.

Erro karratuak adierazpide binomialean ere kalkula daitezke.

1.38. Adibidea. Kalkula dezagun $\sqrt{-2+2i}$ adierazpen binomiala erabiliz.

$$\sqrt{-2+2i} = x + yi \Longrightarrow (x+yi)^2 = -2+2i \Longrightarrow (x^2-y^2) + 2xyi = -2+2i \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y \neq 0 \text{ denez,} \quad x = 1/y \Longrightarrow \frac{1}{y^2} - y^2 = -2 \Longrightarrow y^4 - 2y^2 - 1 = 0 \Longrightarrow y^2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$y^2 \geq 0 \text{ denez,} \quad y^2 = 1 + \sqrt{2} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} \Longrightarrow x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

Hortaz, bi soluzio hauek ditugu:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \sqrt{1+\sqrt{2}}\,i \quad \text{eta} \quad w_2 = \frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} - \sqrt{1+\sqrt{2}}\,i.$$

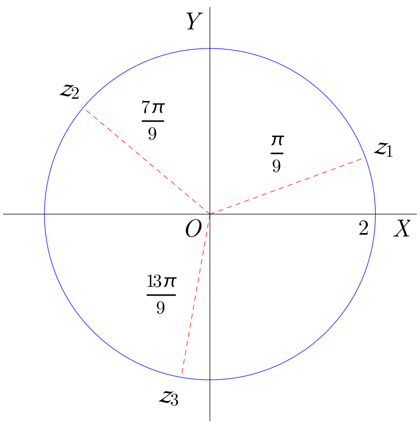
Errotzailea 2 baino handiagoa denean, adierazpide polarra, trigonometrikoa edo esponentziala erabiliko ditugu.

1.39. Adibidea. Kalkula dezagun $\sqrt[3]{z}$ adierazpen polarraren bidez.

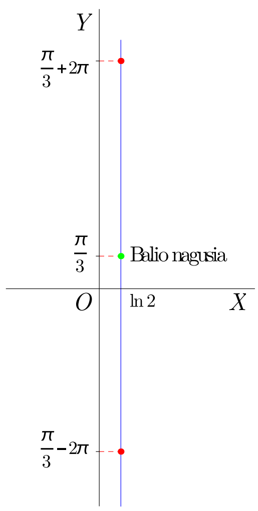
$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2_{\frac{\pi}{3}}} = \sqrt[3]{2}_{\frac{\pi/3+2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$

Hortaz, hiru soluzio hauek ditugu (ikus ezkerreko irudia):

$$z_1 = \sqrt[3]{2}_{\frac{\pi}{9}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{2}_{\frac{7\pi}{9}} \quad \text{eta} \quad z_3 = \sqrt[3]{2}_{\frac{13\pi}{9}}.$$



Erroketa



Logaritmo nepertarra

Logaritmo nepertarra

1.40. Definizioa. *z zenbaki konplexuaren logaritmo nepertarra honela definitzen da:*

Adierazpide esponentziala: $\ln z = \ln(\rho e^{\theta i}) = \ln\rho + (\theta + 2k\pi)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Beraz, infinitu logaritmo nepertar daude. $k = 0$ denean lortzen den $\ln z = \ln\rho + \theta i$ balioari logaritmoaren *balio nagusi* deritzo.

Logaritmo nepertarrek bi ezaugarri hauek dituzte: guztiek zati erreal bera dute, $\ln\rho$; beraz, guztiak daude $x = \ln\rho$ zuzen bertikalean; bestalde, ondoz ondoko bi logaritmo nepertarren arteko aldea 2π da.

1.41. Adibidea. $\ln z$ kalkulatuko dugu.

$$\ln z = \ln\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\ln 2 + \frac{\pi}{3}i$ da logaritmo nepertarraren balio nagusia (ikus eskuineko irudia).

Logaritmo orokorra

1.42. Definizioa. *z zenbaki konplexuaren w oinarriko logaritmoa honela definitzen da:* $\log_w z = \dfrac{\ln z}{\ln w}$.

1.43. Adibidea. $\log_w z$ kalkulatu nahi dugu.

$z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ eta $w = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ dira zenbaki konplexuen adierazpen esponentzialak. Hortaz,

$\ln z = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}$ eta $\ln w = \ln 2\sqrt{2} + \left(\frac{3\pi}{4} + 2l\pi\right)i, \quad l \in \mathbb{Z}$ dira.

Ondorioz, $\log_w z = \dfrac{\ln z}{\ln w} = \dfrac{\ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i}{\ln 2\sqrt{2} + \left(\frac{3\pi}{4} + 2l\pi\right)i}, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$

$k = l = 0$ direnean, logaritmoaren balio nagusia lortuko dugu: $\dfrac{\ln 2 + \frac{\pi}{3}i}{\ln 2\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i}$.

Berreketa orokorra

1.44. Definizioa. *z zenbaki konplexuaren w berretzaileko berreketa honela definitzen da:* $z^w = e^{w \ln z}$.

1.45. Adibidea. Orain, z^w kalkulatuko dugu.

$w = -2 + 2i$ eta $\ln z = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z},$ dira. Beraz,

$$w \ln z = (-2 + 2i)\left(\ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i\right) = \left[-2\ln 2 - \left(\frac{2\pi}{3} + 4k\pi\right)\right] + \left[2\ln 2 - \left(\frac{2\pi}{3} + 4k\pi\right)\right]i =$$

$$= -\left(\ln 4 + \left(\frac{2 + 12k}{3}\right)\pi\right) + \left(\ln 4 - \left(\frac{2 + 12k}{3}\right)\pi\right)i \text{ da.}$$

Eta hortik, $z^w = e^{w \ln z} = e^{-\left(\ln 4 + \left(\frac{2+12k}{3}\right)\pi\right) + \left(\ln 4 - \left(\frac{2+12k}{3}\right)\pi\right)i}$.

$k = 0$ eginez berreketaren balio nagusia lortuko dugu: $e^{-\left(\ln 4 + \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\ln 4 - \frac{2\pi}{3}\right)i}$.

1.5. ARIKETA EBATZIAK

1. Zenbaki arruntak eta osoak

1. Froga ezazu, indukzioa erabiliz, n elementuko multzoek 2^n azpimultzo dutela.

   Oharra: multzo hutsa edozein multzoren azpimultzoa da.

   Froga.

   $n=1$ denean, $A_1 = \{a_1\}$ multzoa dugu. Horren azpimultzoak $\emptyset$ eta A_1 bera dira; hau da, $2^1 = 2$ azpimultzo ditu.

   $n=2$ denean, $A_2 = \{a_1, a_2\}$ multzoa dugu. Honela osatuko ditugu horren azpimultzoak: aurreko bi azpimultzoak, $\emptyset$ eta A_1, hartuko ditugu eta bakoitzarekin bi aukera izango ditugu, elementu berria duen $\{a_2\}$ multzoa bildu, edo ez. Lau multzo osatuko ditugu: $\emptyset$, $\emptyset \cup \{a_2\} = \{a_2\}$, A_1 eta $A_1 \cup \{a_2\} = A_2$. Horiek dira A_2ren azpimultzoak, $2^2 = 4$ guztira.

   Demagun, orain, $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ multzoak 2^n azpimultzo dituela; frogatu beharko dugu $A_{n+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ multzoak 2^{n+1} azpimultzo dituela.

   Izan bitez B_1, B_2, ..., B_{2^n} multzoak A_n multzoaren azpimultzoak. Bakoitzarekin bi aukera izango ditugu: elementu berria duen $\{a_{n+1}\}$ multzoa bildu, edo ez.

   Ez badugu biltzen, multzo berak geratuko dira eta horiek A_{n+1} multzoaren azpimultzoak ere badira, $A_n \subset A_{n+1}$ delako; guztira, 2^n azpimultzo dira: B_1, B_2, ..., B_{2^n}.

   Elementu berria duen $\{a_{n+1}\}$ multzoa bilduz gero, azpimultzo hauek lortuko ditugu: $B_1 \cup \{a_{n+1}\}$, $B_2 \cup \{a_{n+1}\}$, ..., $B_{2^n} \cup \{a_{n+1}\}$. Alde batetik, aurrekoetatik desberdinak dira; beste aldetik, A_{n+1} multzoaren azpimultzoak dira, $\{a_{n+1}\} \subset A_{n+1}$ delako; eta berriro ere 2^n azpimultzo dira.

   Hortaz, A_{n+1} multzoak, guztira, $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ azpimultzo ditu.

   Ondorioz, 1.5. Printzipioaren bi hipotesiak betetzen direnez, propietatea n zenbaki arrunt guztietarako beteko da.

2. Froga ezazu indukzioaren bidez $\forall n \geq 3 \quad n! \geq 2^{n-1}$ desberdintza betetzen dela.

   Froga.

   $n=3$ denean, $2^{3-1} = 2^2 = 4$ eta $3! = 6$ dira, eta $4 < 6$ da; beraz, betetzen da.

   Demagun $2^{n-1} \leq n!$ betetzen dela; $2^{(n+1)-1} \leq (n+1)!$ ere beteko dela frogatu beharko dugu, hau da, $2^n < (n+1)!$ dela.

   $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

   Ondorioz, 1.5. Printzipioaren bi hipotesiak betetzen direnez, desberdintza $\forall n \geq 3$ beteko da.

3. $x' = 1$ eta $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ deribazio-arauak jakinik, froga ezazu indukzioa erabiliz:

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

   Froga.

   $n=1$ denean, $(x^1)' = x' = 1$ da, deribazio-araua erabiliz.

   $n=2$ denean, ezkerreko atalean hau dugu: $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$, deribazio-arauak erabiliz. Eskuineko atalean, aldiz, $n \cdot x^{n-1} = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$ dugu; beraz, berdintza betetzen da.

Pentsa dezagun $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ berdintza betetzen dela hipotesiz; frogatu behar dugu $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$ ere beteko dela.

$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + (x^n) \cdot x' \overset{1}{=} n \cdot x^{n-1} \cdot x + (x^n) \cdot 1 = n \cdot x^n + x^n = (n+1) \cdot x^n$

Indukzio-hipotesia hirugarren 1 berdintzan erabili dugu.

Ondoriozta dezakegu, 1.5. Printzipioa erabiliz, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ beteko dela $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Froga ezazu, indukzio-printzipioa erabiliz, $3^{2n} + 4^{n+1}$ 5en multiploa dela, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Froga.

$n = 1$ denean, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5 \cdot 5$ dugu, 5en multiploa da, $5 \in \mathbb{Z}$.

$n = 2$ denean, $3^4 + 4^3 = 81 + 64 = 145 = 29 \cdot 5$ dugu, 5en multiploa da, $29 \in \mathbb{Z}$.

Pentsa dezagun $3^{2n} + 4^{n+1}$ 5en multiploa dela; frogatu beharko dugu $3^{2(n+1)} + 4^{n+2}$ ere 5en multiploa dela.

Pentsa dezakegu $3^{2n} + 4^{n+1} = 5k$ dela, $k \in \mathbb{Z}$ izanik; hau da, $3^{2n} = 5k - 4^{n+1}$ dela.

$3^{2(n+1)} = 3^2 \cdot 3^{2n} = 9(5k - 4^{n+1}) = 45k - 9 \cdot 4^{n+1} = 45k - (5+4) \cdot 4^{n+1} = 45k - 5 \cdot 4^{n+1} - 4 \cdot 4^{n+1}$.

Beraz,

$3^{2(n+1)} + 4^{n+2} = 45k - 5 \cdot 4^{n+1} = 5(9k - 4^{n+1})$, $(9k - 4^{n+1}) \in \mathbb{Z}$ izanik.

Ondorioz, 1.5. Printzipioa erabiliz, $3^{2n} + 4^{n+1}$ 5en multiploa izango da $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. Indukzio-printzipioa erabiliko dugu frogatzeko $x = p + \sqrt{q}$ bada, $p, q \in \mathbb{Q}$ izanik, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a, b \in \mathbb{Q} \, / \, x^n = a + b\sqrt{q}$.

Froga.

Ikus dezagun propietatea lehenengo kasuetan betetzen dela.

$n = 1$ denean, $x^1 = x = p + \sqrt{q}$ da; hortik, $a = p \in \mathbb{Q}$ eta $b = 1 \in \mathbb{Q}$ ateratzen dira.

$n = 2$ denean, $x^2 = (p + \sqrt{q})^2 = p^2 + 2p\sqrt{q} + q = (p^2 + q) + 2p\sqrt{q}$ da, hots, propietatea betetzen da; hortik $a = p^2 + q \in \mathbb{Q}$ eta $b = 2p \in \mathbb{Q}$ ateratzen dira.

Orain, propietatea n zenbakirako betetzen dela pentsatuko dugu, hau da, $a, b \in \mathbb{Q}$ existitzen direla, non $x^n = a + b\sqrt{q}$ baita. Hortik ondorioztatu beharko dugu $n+1$ zenbakirako ere beteko dela, hau da, frogatu beharko dugu $A, B \in \mathbb{Z}$ existitzen direla, non $x^{n+1} = A + B\sqrt{q}$ baita.

$x^{n+1} = x \cdot x^n = (p + \sqrt{q})(a + b\sqrt{q}) = pa + pb\sqrt{q} + a\sqrt{q} + bq = (pa + qb) + (pb + a)\sqrt{q}$ dugu.

Hor, $A = pa + qb \in \mathbb{Q}$ eta $B = pb + a \in \mathbb{Q}$ lortu ditugu; beraz, kasu horretan ere propietatea betetzen da.

Ondorioz, propietatea frogatu dugu 1.5. Printzipioa erabiliz.

6. Froga dezagun ondoko berdintza betetzen dela, indukzio-printzipioa erabiliz:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^n = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3.$

Froga.

$n = 1$ denean, berdintzaren ezkerreko atalean $1 \cdot 3^1 = 3$ dugu eta eskuinekoan $0 \cdot 3^2 + 3 = 3$; beraz, betetzen da.

$n = 2$ denean, berdintzaren ezkerraldean $1 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 = 3 + 27 = 30$ dugu eta eskuinaldean $1 \cdot 3^3 + 3 = 27 + 3 = 3$; beraz, betetzen da.

Demagun n-rako berdintza betetzen dela, hau da,

$1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3.$

Froga dezagun $(n+1)$-erako ere berdintza beteko dela, hots, hau beteko dela:

$1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n+(2n+1)\cdot 3^{n+1}=n\cdot 3^{n+2}+3.$

Ezkerreko ataletik hasiko gara:

$1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n+(2n+1)\cdot 3^{n+1}\stackrel{1}{=}(n-1)\cdot 3^{n+1}+3+(2n+1)\cdot 3^{n+1},$
indukzio-hipotesia erabilita 1 berdintzan.

Orain, azken berdintzaren eskuineko atalean eragiketak egingo ditugu:

$(n-1)\cdot 3^{n+1}+3+(2n+1)\cdot 3^{n+1}=(n-1+2n+1)\cdot 3^{n+1}+3=3n\cdot 3^{n+1}+3=n\cdot 3^{n+2}+3.$

Ondorioz, 1.5. Printzipioa erabiliz, berdintza zenbaki arrunt guztietarako beteko da.

2. Zenbaki arrazionalak eta errealak

7. Froga ezazu $\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$ betetzen dela.

   Froga.

   $\sqrt[3]{2}\in\mathbb{Q}$ balitz, $\sqrt[3]{2}=\dfrac{p}{q}$ zenbaki arrazional laburtezina izango litzateke, hots, $q\not|\,p$. Beraz, $2=\dfrac{p^3}{q^3}$ litzateke, edo $2q^2=\dfrac{p^3}{q}$. $2q^2\in\mathbb{N}$ denez, berdintza bete dadin q zenbakiak p^3 zatitu beharko luke eta, hortaz, p ere zatituko luke. Baina, $\dfrac{p}{q}$ laburtezina denez, hori ezin da gertatu. Hori da kontraesana; ondorioz, $\sqrt[3]{2}$ ezin da arrazionala izan.

8. Froga ezazu bi zenbaki arrazional desberdinen artean infinitu zenbaki arrazional daudela.

   Froga.

   Bi zenbaki arrazionalak a eta b badira, $c=\dfrac{a+b}{2}$ bion artean dago eta arrazionala da, $\mathbb{Q}$ multzoa itxia delako batuketa eta zatiketarako (1.11. Propietatea).

   Orain, a eta c artean $d=\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{3a+b}{4}$ dago eta arrazionala da, arrazoi beragatik.

   Ondoren, $e=\dfrac{a+d}{2}=\dfrac{7a+b}{8}$ zenbaki arrazionala da eta a eta d artean dago; eta, berdintsu, a eta e artean $f=\dfrac{a+e}{2}=\dfrac{15a+b}{16}$ zenbaki arrazionala dago.

   Horrela eginez gero, zenbaki arrazionalen $\left\{\dfrac{(2^n-1)a+b}{2^n}\right\}$ segida lortuko dugu eta horren gai guztiak a eta b artean daude.

   Hortaz, a eta b artean dauden infinitu zenbaki arrazional eman ditugu.

9. Esan ezazu, arrazoituz, egiazkoa edo faltsua den ondoko inplikazioa:

   $a\in\mathbb{Q}-\{0\}$ eta $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ badira, $\dfrac{b}{a}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ izango da.

   Erantzuna.

   Egiazkoa da; $\dfrac{b}{a}\in\mathbb{Q}$ balitz, $a\in\mathbb{Q}^*$ denez, $\dfrac{b}{a}\cdot a\in\mathbb{Q}$ izango litzateke (1.11. Propietatea); beraz, $b\in\mathbb{Q}$ litzateke; baina, b ez da arrazionala. Hortaz, $\dfrac{b}{a}$ ezin da arrazionala izan. Ondorioz, $\dfrac{b}{a}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ da.

10. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

    a) $\mathbb{R}$ multzoaren azpimultzo bornatuek maximoa eta minimoa dituzte.

    b) $\mathbb{R}$ multzoaren azpimultzo infinituak bornegabeak dira.

    Erantzuna.

    a) Faltsua da; 1.19. Definizioak ziurtatzen digu multzo bornatuek beherena eta gorena dituztela; ez du ezer esaten minimoaz eta maximoaz. Esate baterako, $(0,1)$ tarte irekia bornatua da, $\sup(0,1)=1$ eta $\inf(0,1)=0$ dira, baina ez du minimorik ez maximorik.

    b) Faltsua da; ez dugu nahasi behar multzoak dituen elementu kopurua eta multzoa nolakoa den. Adibidez, 1.20. Propietateak dio $(0,1)$ tarte irekiak infinitu elementu dituela, baina bornatua da.

11. Izan bedi $A=(-\infty,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ multzoa. Bila itzazu $\inf(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$ eta $\max(A)$.

    Ebazpena.

    Multzoa ez dago behetik bornaturik; beraz, ez dira existitzen ez beherena ez minimoa.

    Goitik bornatua da; esaterako, $\forall x\in A \quad x\leq 1$ betetzen da, hau da, 1 Aren goi-borne bat da.

    Frogatuko dugu $\sup(A)=1$ dela 1.23.1. Teorema erabiliz.

    Har dezagun $\varepsilon>0$; orduan, $1-\varepsilon<1$ da eta, 1.20.2. Propietatearen arabera, bi zenbaki errealen artean infinitu zenbaki irrazional daudenez, $\exists x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\ /\ 1-\varepsilon<x_0<1$. Bestalde, $x_0\in(-\infty,1]$ betetzen da; beraz, $x_0\in A$ da, eta hortik ondorioztatzen dugu $1-\varepsilon$ ezin dela Aren goi-bornea izan, $\forall\varepsilon>0$.

    Ondorioz, 1 da Aren goi-bornerik txikiena, hots, $\sup(A)=1$ da.

    Azkenik, $1\notin A$, ez delako irrazionala; beraz, multzoak ez du maximorik.

12. Aurki itzazu ondoko G multzoaren goi-muturra, behe-muturra, maximoa eta minimoa:

    $$G=[0,1]-\left\{\frac{1}{n}\ /\ n=1,2,3...\right\}.$$

    Ebazpena.

    $\sup(G)=1$ da,

    $\forall x\in G \quad x\leq 1$ eta $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x_0=1-\dfrac{\varepsilon}{2}\in G \quad / \quad 1-\varepsilon<x_0\leq 1$ betetzen baitira, 1.23.1. Teorema aplikatuz.

    Bestalde, $1\notin G$ denez, $n=1$ denean, $\dfrac{1}{n}=1$ puntua G multzoari kendu diogulako, ez dago $\max(G)$.

    $\inf(G)=0$ da,

    $\forall x\in G \quad 0\leq x$ eta $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x_0\in G \quad / \quad 0\leq x_0<0+\varepsilon$ betetzen baitira, $(0,0+\varepsilon)$ tartean Gren infinitu zenbaki irrazional daudelako, 1.23.2. Teorema aplikatuz.

    Azkenik, $0\in G$, $[0,1]$ tartean dagoelako eta ez delako $\dfrac{1}{n}$ moduko zenbakia; beraz, $\min(G)=0$ da.

13. Bila itzazu Aren goi-muturra, behe-muturra, maximoa eta minimoa, non

$$A = \left\{ \frac{5n+1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in \mathbb{Q} \text{ eta } |x| < \pi\} \quad \text{baita.}$$

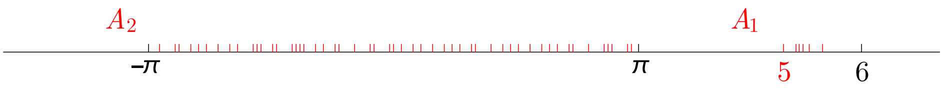
Ebazpena.

Bana dezagun A multzoa bi azpimultzo hauetan:

$A_1 = \left\{ \frac{5n+1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \left\{ 5 + \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \left\{ 6, \frac{11}{2}, \frac{16}{3}, \frac{21}{4}, \ldots \right\}$ eta

$A_2 = \{x \in \mathbb{R}/x \in \mathbb{Q} \text{ eta } |x| < \pi\} = (-\pi, \pi) \cap \mathbb{Q}$.

Bi multzoak disjuntuak dira eta A_2ren elementu guztiak A_1en elementu guztiak baino txikiagoak dira (ikus irudia).



$\sup(A_1) = 6$ da,

$\forall x \in A_1 \quad x = \frac{5n+1}{n} = 5 + \frac{1}{n} \leq 6$ eta $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = 6 \in A_1 \quad / \quad 6 - \varepsilon < x_0 \leq 6$ betetzen baitira, 1.23.1. Teorema erabiliz.

Bestalde, $6 \in A_1$ denez, $\max(A_1) = 6$ da.

$\inf(A_1) = 5$ da,

$\forall x \in A_1 \quad x = 5 + \frac{1}{n} > 5$ eta $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A_1 \,/\, 5 \leq x_0 < 5 + \varepsilon$ betetzen baitira, nahikoa da horretarako $x_0 = 5 + \frac{1}{n_0}$ aukeratzea, non $n_0 = \min\left\{ n \in \mathbb{N}^* \,/\, \frac{1}{\varepsilon} < n \right\}$ baita, 1.23.2. Teorema aplikatuz.

Bestalde, $5 \notin A_1$ denez, ez dago $\min(A_1)$.

$\sup(A_2) = \pi$ da,

$\forall x \in A_2 \quad x \leq \pi$ eta $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A_2 \quad / \quad \pi - \varepsilon < x_0 \leq \pi$ betetzen baitira, $(\pi - \varepsilon, \pi)$ tartean A_2 multzoaren infinitu zenbaki arrazional daudelako, 1.23.1. Teorema aplikatuz.

Bestalde, $\pi \notin A_2$ denez, ez dago $\max(A_2)$.

$\inf(A_2) = -\pi$ da,

$\forall x \in A_2 \quad -\pi \leq x$ eta $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A_2 / -\pi \leq x_0 < -\pi + \varepsilon$ betetzen baitira, $(-\pi, -\pi + \varepsilon)$ tartean A_2 multzoaren infinitu zenbaki arrazional daudelako, 1.23.2. Teorema.

Bestalde, $-\pi \notin A_2$ eta, beraz, ez dago $\min(A_2)$.

Bukatzeko, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \pi < \frac{5n+1}{n}$ denez, esan dezakegu A_2 multzoak emango dizkigula behe-muturra eta minimoa eta A_1 multzoak emango dizkigula goi-muturra eta maximoa:

$\inf(A) = -\pi$ da eta ez dago $\min(A)$ eta $\max(A) = 6$ da.

14. Eman itzazu multzo hauek tarteen bidez:

14.1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x^2 - 13| \geq 5\}$.

14.2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 - x < 0\}$.

14.3. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x + \frac{1}{x} \right\}$.

Ebazpena.

14.1. A multzoa emateko multzoan ez dauden puntuak bilatuko ditugu, hau da, $|x^2-13|<5$ baldintza betetzen duten puntuak.

$|x^2-13|<5 \overset{(1)}{\Longrightarrow} -5<x^2-13<5 \Longrightarrow 8<x^2<18.$

(1) inplikazioa 2. gaiko 1.1. Ariketa ebatzian frogatuko da.

Orain, kontuan izango dugu karratua kentzean zenbaki negatiboak ere lortzen direla; beraz, bi aukera hauek izango ditugu:

edo $-\sqrt{18}<x<-\sqrt{8}$ edo $\sqrt{8}<x<\sqrt{18}$ zenbakien karratuek $8<x^2<18$ betetzen dute.

Zenbaki horiek tarte hauek osatzen dituzte: $(-\sqrt{18},-\sqrt{8})$ eta $(\sqrt{8},\sqrt{18})$, eta erroak sinplifikatuz, $(-3\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ eta $(2\sqrt{2},3\sqrt{2})$.

Hasieran esan dugun bezala, tarte horietako puntuak ez daude A multzoan; beraz, A multzoan $(-\infty,-3\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ eta $(3\sqrt{2},\infty)$ tarteetako puntuak daude.

Ondorioz, $A=(-\infty,-3\sqrt{2})\cup(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})\cup(3\sqrt{2},\infty)$ da.

14.2. B multzoa emateko $x^3-x<0$ baldintza betetzen duten zenbakiak lortu behar ditugu.

$x^3-x=0 \Longrightarrow x(x^2-1)=0 \Longrightarrow x=0$ edo $x^2=1$; beraz, x^3-x adierazpena $x=0$, $x=-1$ eta $x=1$ puntuetan anulatzen da. Puntu horiek zuzena lau zatitan banatzen dute; orain, zati horietan puntu bana aukeratuko dugu: $x=-2$, $x=\dfrac{-1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$ eta $x=2$. Puntu horietan gertatzen dena dagokien zati osoan gertatuko da.

$x=-2$ denean, $(-2)^3-(-2)=-6<0$ da; beraz, $(-\infty,-1)$ tartean $x^3-x<0$ da.

$x=\dfrac{-1}{2}$ denean, $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3-\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}>0$ da; beraz, $(-1,0)$ tartean $x^3-x>0$ da.

$x=\dfrac{1}{2}$ denean, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{8}<0$ da; beraz, $(0,1)$ tartean ere $x^3-x<0$ da.

$x=2$ denean, $(2)^3-(2)=6>0$ da; beraz, $(1,\infty)$ tartean $x^3-x>0$ da.

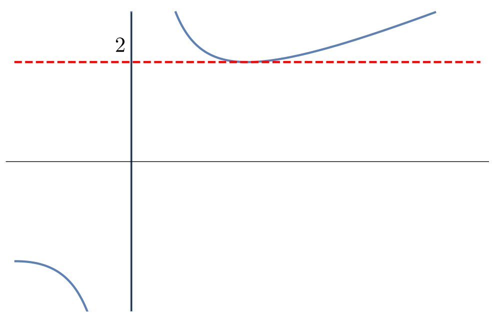
Hortaz, multzoa definitzen duen baldintza $(-\infty,-1)$ eta $(0,1)$ tarteetan betetzen da.

Ondorioz, $B=(-\infty,-1)\cup(0,1)$ da.

14.3. C multzoa definitzen duen baldintzari kasu egiten badiogu, kontura gaitezke $x\neq 0$ bete behar dela eta x-k positiboa izan behar duela.

Orain, baldintza garatuz gero honela geratuko da:

$2\leq x+\dfrac{1}{x} \Longleftrightarrow 2x\leq x^2+1 \Longleftrightarrow 0\leq x^2+1-2x \Longleftrightarrow 0\leq (x-1)^2.$



Azken desberdintza beti betetzen da; beraz, multzoa definitzen duen baldintza x positibo guztiek betetzen dute.

Ondorioz, $C=(0,\infty)$ da.

Irudian ikus daiteke $x+\dfrac{1}{x}$ adierazpenari dagokion lerro urdina beti dagoela 2ri dagokion lerro gorri etenaren gainetik OX ardatzerdi positiboan.

15. Kalkula itzazu $E = A \cap B$ multzoaren maximoa eta minimoa, $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 5\}$ eta $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |2x-1| < x^2\}$ izanik.

Ebazpena.

Alde batetik, $A = (-\infty, 5)$ tartea da.

Beste aldetik, B multzoa tarte moduan emateko, balio absolutua aztertuko dugu, 2. gaiko 2.14.2. Adibideko definizioaren arabera:

1) $2x-1 \geq 0 \Longrightarrow |2x-1| = 2x-1$ da; beraz, baldintza honela geratuko da:

$2x-1 < x^2 \Longrightarrow 0 < x^2-2x+1 \Longrightarrow 0 < (x-1)^2 \Longrightarrow x \neq 1.$

Hau da, $x \geq \dfrac{1}{2}$ denean, $x = 1$ baztertu behar dugu: $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$.

2) $2x-1 < 0 \Longrightarrow |2x-1| = -(2x-1) = 1-2x$ da; beraz, baldintza honela geratuko da:

$1-2x < x^2 \Longrightarrow 0 < x^2+2x-1.$

$x^2+2x-1 = 0$ ekuazioa ebatziz, $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$

Zuzena hiru tartetan banatu da $x = -1-\sqrt{2}$ eta $x = -1+\sqrt{2}$ puntuetan:

$x = -3$ denean, $(-3)^2+2(-3)-1 = 9-6-1 = 2 > 0$ da;

$x = 0$ denean, $0^2+0-1 = -1 = -1 < 0$ da;

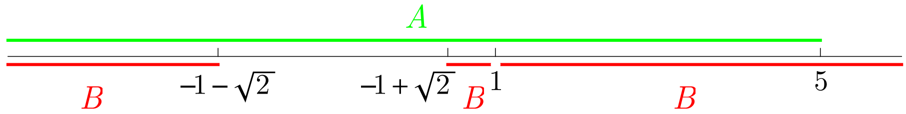
$x = 2$ denean, $2^2+4-1 = 7 > 0$ da;

beraz, $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ eta $(-1+\sqrt{2}, \infty)$ tarteetan beteko da $0 < x^2+2x-1$ desberdintza.

Hortaz, $x < \dfrac{1}{2}$ denean, $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ eta $\left(-1+\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ tarteak ditugu.

Ondorioz, $B = (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup \left(-1+\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right) \bigcup \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right) - \{1\}$ da, edo tarteak berridatziz, $B = (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, 1) \cup (1, \infty)$ da.

Azkenik, $E = A \cap B = (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, 1) \cup (1, 5)$ da (ikus irudia).



Orain, minimoa eta maximoa bilatuko ditugu.

$\sup(E) = 5$ da,

$\forall x \in E \quad x \leq 5$ eta $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in E \;/\; 5-\varepsilon < x_0 \leq 5$ betetzen baitira, $(5-\varepsilon, 5)$ tartean Eren infinitu elementu daudelako, 1.23.1. Teorema aplikatuz.

Bestalde, $5 \notin E$ denez, ez dago $\max(E)$.

E ez dago behetik bornaturik; beraz, ez dago beherenik, ezta minimorik ere.

3. Zenbaki konplexuak

16. Kalkula ezazu $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ zenbaki konplexuaren modulua:

Ebazpena.

$a+bi = z$ bada, $a-bi$ horren konjugatua da, hots, $a-bi = \bar{z}$.

1.28. Definizioaren ondorioa da $|\bar{z}| = |z|$ dela; beraz, hauxe dugu: $\left|\dfrac{a+bi}{a-bi}\right| = \left|\dfrac{z}{\bar{z}}\right| = \dfrac{|z|}{|\bar{z}|} = 1.$

17. z zenbaki konplexuak $e^{\sqrt{2}}$ modulua eta $\sqrt{2}$ rad-eko argumentua ditu.

17.1. Kalkula ezazu $\ln z$ eragiketaren w balio nagusia ($k=0$).

17.2. Idatz ezazu w zenbakiaren adierazpen esponentziala.

Ebazpena.

17.1. z zenbakiaren adierazpen polarra hau da: $z=(e^{\sqrt{2}})_{\sqrt{2}}$; beraz, logaritmo nepertarraren formula aplikatuz:

$$\ln z = \ln(e^{\sqrt{2}}) + (\sqrt{2}+2k\pi)i = \sqrt{2}+(\sqrt{2}+2k\pi)i \quad \text{da,} \quad k\in\mathbb{Z} \quad \text{izanik.}$$

Balio nagusia $k=0$ eginez lortzen da: $w=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

17.2. $w=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ zenbakiaren modulua eta argumentua kalkulatuko ditugu:

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\operatorname{Arg}(w) = \arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Beraz, w zenbakiaren adierazpen esponentziala hau da: $w=2e^{\frac{\pi}{4}i}$.

18. Froga ezazu 1 zenbakiaren n-erroen arteko batura 0 dela.

Froga.

$1\equiv 1_0$ zenbakiaren n-erroak kalkulatu behar ditugu: $z=\sqrt[n]{1_0}$.

Hortaz, $z=\sqrt[n]{1}_{\frac{0+2k\pi}{n}}$ da, $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$ izanik.

Hauek dira n erroak:

$$z_1=1_0=1e^{0i},\quad z_2=1_{\frac{2\pi}{n}}=1e^{\frac{2\pi}{n}i},\quad z_3=1_{\frac{4\pi}{n}}=1e^{\frac{4\pi}{n}i},\ \ldots,\ \text{eta azkenik,}\quad z_n=1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}=1e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}.$$

Horien batura hau da: $b=e^{0i}+e^{\frac{2\pi}{n}i}+e^{\frac{4\pi}{n}i}+\cdots+e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}$.

Batura hori segida geometriko finitu baten batura da, non arrazoia $r=e^{\frac{2\pi}{n}i}$ baita; baturaren formula aplikatuz honela geratuko da:

$$b=\frac{e^{0i}\left(1-\left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)^n\right)}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}}=\frac{1(1-e^{2\pi i})}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}}=\frac{1-(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}}=\frac{1-(1+0i)}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}}=0.$$

19. Kalkula ezazu $x\in\mathbb{R}$ zenbaki erreala $(2e^i)^x$ zenbaki konplexua irudikari purua izan dadin eta zati irudikari positiboa izan dezan.

Ebazpena.

$(2e^i)^x=2^xe^{xi}=2^x(\cos x+i\sin x)$ da.

Zenbaki hori irudikari purua izan dadin, $\cos x=0$ bete beharko da, eta zati irudikaria positiboa izateko, $\sin x>0$ bete beharko da.

$$\cos x=0 \Longrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\sin x>0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ondorioz, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ da, $k\in\mathbb{Z}$ izanik.

20. Kalkula ezazu $a \in \mathbb{R}$ zenbaki erreala $\dfrac{3-2ai}{4-3i}$ zenbaki konplexua

a) irudikari purua izan dadin.

b) Erreala izan dadin.

c) Lehenengo koadrantearen erdikarian egon dadin.

Ebazpena.

Lehenago zatiduraren adierazpen binomiala kalkulatuko dugu:

$$\frac{3-2ai}{4-3i} = \frac{(3-2ai)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{(12+6a)+(9-8a)i}{16+9} = \frac{(12+6a)}{25} + \frac{(9-8a)}{25}i.$$

a) Irudikari purua izateko, zati errealak 0 izan behar du. Hau da, $12+6a=0$; eta hortik $a=-2$ ateratzen dugu.

b) Zenbaki erreala izan dadin, zati irudikariak izan behar du 0; beraz, $9-8a=0$ bete behar da; hortik $a=9/8$ ateratzen dugu.

c) Lehenengo koadrantearen erdikarian egon dadin, zati errealak eta irudikariak berdinak izan behar dute; beraz, hau bete beharko da: $12+6a=9-8a$; hortik, $14a=-3$ edo $a=-3/14$ ateratzen dugu.

21. Kalkula ezazu $z \in \mathbb{C}$ zenbaki konplexua $\dfrac{z+i}{z-i}$ zenbaki erreala izan dadin. Berdin egin zatidura zenbaki irudikari purua izan dadin. Eman itzazu soluzioen interpretazio geometrikoak.

Ebazpena.

$z=x+yi$ bada, $\dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{(x+yi)+i}{(x+yi)-i} = \dfrac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}$ da.

Orain zatidura kalkulatuko dugu:

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{[x+(y+1)i][x-(y-1)i]}{[x+(y-1)i][x-(y-1)i]} = \frac{x^2+x(y+1)i-x(y-1)i+(y^2-1)}{x^2+(y-1)^2} = \frac{(x^2+y^2-1)+2xi}{x^2+(y-1)^2} =$$
$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}i.$$

Zatidura zenbaki erreala izan dadin, zati irudikariak 0 balio behar du, hau da, $2x=0$; hortaz, $x=0$ duten z zenbaki konplexuak dira; hau da, ardatz irudikarian dauden puntuak dira.

Zatidura zenbaki irudikari puru izan dadin, zati errealak 0 balio behar du, hots, $x^2+y^2-1=0$ edo $x^2+y^2=1$; beraz, 1 modulua duten zenbaki konplexuak dira; hau da, zentroa jatorrian eta 1 erradioa dituen zirkunferentziako puntuak dira.

22. Froga itzazu propietate hauek:

a) $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$; b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |e^{ix}| = 1$.

Froga.

a) Izan bedi $z=a+bi$; esponentziala kalkulatuz, $e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$ dugu.

Alde batetik, badakigu $e^a \neq 0$ dela, $a \in \mathbb{R}$ delako; beste aldetik, $(\cos b + i \sin b)$ adierazpena ezin da 0 izan, kosinua eta sinua ez baitira batera zero egiten.

Ondorioz, e^z ezin da inoiz zero izan.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $|e^{ix}| = 1$ dela frogatzeko, Eulerren formula erabiliko dugu: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
Orain, modulua kalkulatuz gero,
$|e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$ da.

23. Froga ezazu $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, desberdintza triangeluarra.

Froga.

Demagun kontrakoa betetzen dela; kontraesan batera iritsiko gara.

$z_1 = x_1 + y_1 i$ eta $z_2 = x_2 + y_2 i$ badira, hiru zenbakien moduluak hauek izango dira:

$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ eta

$|z_1 + z_2| = |(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$.

Eta kontrako desberdintza hau litzateke:

$|z_1 + z_2| > |z_1| + |z_2| \Longrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} > \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Orain, desberdintza horretan eragiketak egingo ditugu erroak kentzeko eta sinplifikatzeko eta, bukaeran, kontraesana ikusiko dugu.

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} > \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 > (x_1^2 + y_1^2) + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + (x_2^2 + y_2^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 > x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + x_2^2 + y_2^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x_1x_2 + 2y_1y_2 > 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \Longrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 > \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x_1x_2 + y_1y_2)^2 > (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 > x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x_1x_2y_1y_2 > x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 \Longrightarrow x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 < 0 \Longrightarrow (x_1y_2 - y_1x_2)^2 < 0.$$

Hori ezinezkoa denez, pentsatu dugun kontrako desberdintza ezin da bete eta, ondorioz, desberdintza triangeluarra bete beharko da.

24. Ebatz ezazu $2z^3 - 3z^2 + 5iz = 0$ ekuazioa.

Ebazpena.

Ekuazioaren ezkerreko atalean z faktore komuna aterako dugu:

$2z^3 - 3z^2 + 5iz = 0 \Longrightarrow z(2z^2 - 3z + 5i) = 0$; hortik soluzio bat erraz aterako dugu: $z_1 = 0$;
besteak $2z^2 - 3z + 5i = 0$ ekuaziotik aterako ditugu: $z = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 40i}}{4}$.

Orain, zenbakitzaileko erro karratua kalkulatuko dugu:

$\sqrt{9 - 40i} = x + yi$ bada, $9 - 40i = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ beteko da; hortik bi ekuazio aterako ditugu:

$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 9 \\ 2xy = -40 \end{array}\right|$ bigarrenetik $y = \dfrac{-20}{x}$ aterako dugu ($x \neq 0$ da), eta lehenengoan ordezkatuko dugu: $x^2 - \left(\dfrac{-20}{x}\right)^2 = 9 \Longrightarrow x^4 - 400 = 9x^2 \Longrightarrow x^4 - 9x^2 - 400 = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1600}}{2} = \frac{9 \pm 41}{2}.$$

Hortik $x^2 = 25$ eta $x^2 = -16$ ditugu; bigarrena ezinezkoa denez, baztertuko dugu; hortaz, $x = \pm 5$ dira soluzioak; hortik $y = \mp 4$ aterako ditugu; laburbilduz, erro karratuaren balioak $\sqrt{9-40i} = 5-4i$ eta $\sqrt{9-40i} = -5+4i$ dira.

$z$ren balioan ordezkatuz, soluzio hauek lortuko ditugu:

$z_2 = \dfrac{3+(5-4i)}{4} = 2-i$ eta $z_3 = \dfrac{3+(-5+4i)}{4} = \dfrac{-1}{2} + i$.

Azkenik, hiru soluzio hauek ditugu: $z_1 = 0$, $z_2 = 2-i$ eta $z_3 = \dfrac{-1}{2} + i$.

25. Ebatz ezazu $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ ekuazioa eta irudika itzazu soluzioak.

Ebazpena.

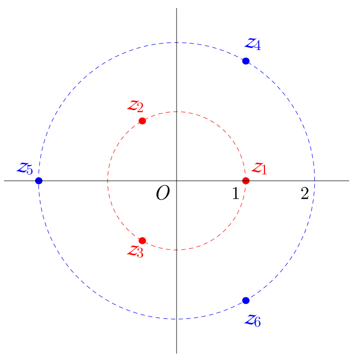
Ekuazioaren ezkerreko atalean $z^3 = t$ eginez, $t^2 + 7t - 8 = 0$ ekuazioa dugu. Hortik $t = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \dfrac{-7 \pm 9}{2}$ aterako dugu; beraz, $t = 1$ edo $t = -8$ da.

Hortaz, $z^3 = 1 \equiv 1_0$ eta $z^3 = -8 \equiv 8_\pi$ ekuazioak lortu ditugu.

Lehenengotik, $z = \sqrt[3]{1}_{\frac{0+2k\pi}{3}}$, $k = 0,1,2$, aterako dugu, hau da, hiru erro hauek: $z_1 = 1_0$, $z_2 = 1_{\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = 1_{\frac{4\pi}{3}}$.

Bigarrenetik, $z = \sqrt[3]{8}_{\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, $k = 0,1,2$, aterako dugu, hau da, hiru erro hauek: $z_4 = 2_{\frac{\pi}{3}}$, $z_5 = 2_\pi$, $z_6 = 2_{\frac{5\pi}{3}}$.

Lehenengo hirurak zentroa jatorrian duen 1 erradioko zirkunferentzian daude, eta azken hirurak 2 erradiokoan (ikus irudia).

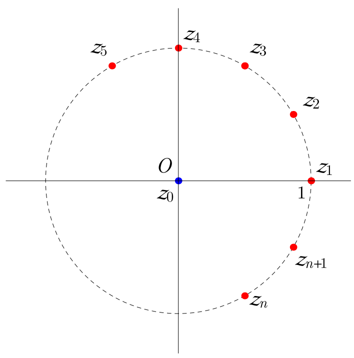


26. Ebatz ezazu $z^n = \bar{z}$ ekuazioa eta irudika itzazu soluzioak.

Ebazpena.

$z = \rho_\theta$ bada, $\bar{z} = \rho_{-\theta}$ da eta ekuazioa honela geratuko da: $(\rho_\theta)^n = \rho_{-\theta}$, edo $\rho^n_{n\theta} = \rho_{-\theta}$.

Hortik $\rho^n = \rho$ eta $n\theta = -\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ekuazioak lortuko ditugu.



$\rho^n = \rho \Longrightarrow \rho = 0$ edo $\rho = 1$ dira.

$n\theta = -\theta + 2k\pi \Longrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{n+1}$, $k = 0,1,\cdots,n$ izanik.

Emaitzak elkartuz, hauek dira soluzioak:

$\rho = 0$ emaitzak puntu bakarra ematen digu, jatorria. Gainerako soluzioak $\rho = 1$ emaitzatik datoz (ikus irudia).

$z_0 = 0$, $z_1 = 1_0$, $z_2 = 1_{\frac{2\pi}{n+1}}$, $z_3 = 1_{\frac{4\pi}{n+1}}$, $\ldots$, $z_{n+1} = 1_{\frac{2n\pi}{n+1}}$.

27. Irudika ezazu planoan $|z-2| \leq 2$ eta $|z-4| \leq 2$ betetzen duten zenbaki konplexuen multzoa.

Ebazpena.

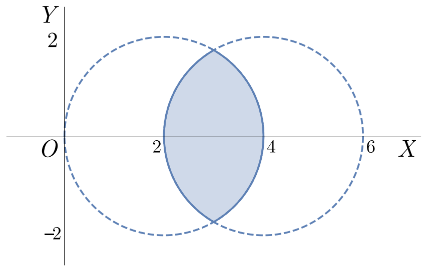
$z = x + yi$ adierazpen binomiala erabiliko dugu eta desberdintzetan ordezkatu.

$|z-2| \leq 2 \Longrightarrow |x+yi-2| \leq 2$ edo $|(x-2)+yi| \leq 2$ dugu; orain, modulua kalkulatuko dugu: $\sqrt{(x-2)^2+y^2} \leq 2$; eta erro karratua kenduz, $(x-2)^2+y^2 \leq 4$ desberdintza dugu; hori zirkulu baten ekuazioa da, non zentroa $(2,0)$ den, eta erradioa 2.

Beste era batean, $|z-4| \leq 2$ adierazpena honela uler dezakegu: 4 zenbakiaren eta z zenbakiaren arteko distantzia 2 baino txikiago edo berdina da; horrek zirkulu bat iradokitzen digu, $4 = 4+0i$ zentrokoa eta 2 erradiokoa.

Beraz, bi zirkulu ditugu, biak 2 erradiokoak, batak $(2,0)$ zentroa du eta besteak $(4,0)$ zentroa.

Bietan dauden puntuak bilatzen ditugu; beraz, irudi hau lortuko dugu:



28. Irudika ezazu planoan $z^2 + \bar{z}^2 \geq 8$ betetzen duten zenbaki konplexuen multzoa.

Ebazpena.

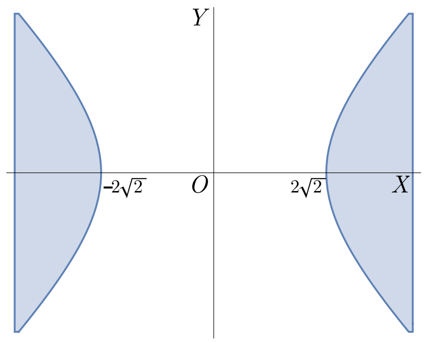
$z = x + yi$ bada, $\bar{z} = x - yi$; balio horiek desberdintzaren ezkerreko atalean ordezkatuz desberdintza honela geratuko da:

$(x+yi)^2 + (x-yi)^2 = (x^2-y^2+2xyi) + (x^2-y^2-2xyi) = 2x^2 - 2y^2$.

Beraz, $2x^2 - 2y^2 \geq 8$ desberdintza irudikatu behar dugu; eta sinplifikatuz gero, $x^2 - y^2 \geq 4$.

$x^2 - y^2 = 4$ hiperbola baten ekuazioa da; orain, hiperbolak planoa banatzen dituen hiru eskualdetan desberdintza non betetzen den ikusi behar dugu.

Esaterako, jatorrian, hots, $(0,0)$ puntuan $0^2 - 0^2 = 0 < 4$ betetzen denez, jatorria duen eskualdean ez da desberdintza betetzen. $(-4,0)$ eta $(4,0)$ puntuetan, aldiz, $(-4)^2 - 0^2 = 16 > 4$ eta $4^2 - 0^2 = 16 > 4$ betetzen direnez, beste bi eskualdeetan desberdintza betetzen da. Hortaz, eskatzen diguten multzoa irudi honetakoa da:



29. Adieraz itzazu bi eremu hauek planoan:

a) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2}$; b) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2}$.

Ebazpena.

Zenbaki beraren zati erreala eta zati irudikaria eskatzen dizkigute; beraz, lehenago, zenbakia kalkulatuko dugu: $z = x + yi$ bada,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(x+yi)-1} = \frac{1}{(x-1)+yi} = \frac{(x-1)-yi}{((x-1)+yi)((x-1)-yi)} = \frac{(x-1)-yi}{(x-1)^2+y^2} =$$
$$= \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\, i.$$

Hortaz, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$ eta $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) = -\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$ dira.

a) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} < \frac{1}{2} \Longrightarrow 2(x-1) < (x-1)^2 + y^2 \Longrightarrow$

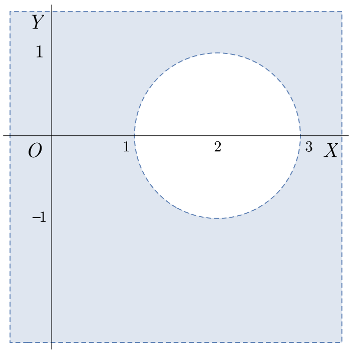
$\Longrightarrow 0 < (x-1)^2 - 2(x-1) + y^2 = [(x-1)-1]^2 + y^2 - 1 \Longrightarrow 1 < (x-2)^2 + y^2.$

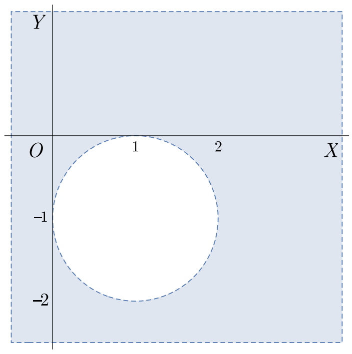
Hori $(2,0)$ zentroko eta 1 erradioko zirkuluaren kanpoaldea da (ikus ezkerreko irudia).

b) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{y}{(x-1)^2+y^2} < \frac{1}{2} \Longrightarrow -2y < (x-1)^2 + y^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 0 < (x-1)^2 + y^2 + 2y = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \Longrightarrow 1 < (x-1)^2 + (y+1)^2.$

Hori $(1,-1)$ zentroko eta 1 erradioko zirkuluaren kanpoaldea da (ikus ezkerreko irudia).





30. Adieraz ezazu eremu hau zenbaki konplexuen planoan:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z \cdot \bar{z} \le \operatorname{Re}(z)\} \cap \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im}(z) \le \operatorname{Re}(z)\}.$$

Ebazpena.

$z = x + yi$ eta $\bar{z} = x - yi$ badira, lehen multzoko baldintzaren atalak honela geratuko dira:

$z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$ da eta $\operatorname{Re}(z) = x$ da.

Hortaz, $x^2 + y^2 \le x$ inekuazioa geratuko da.

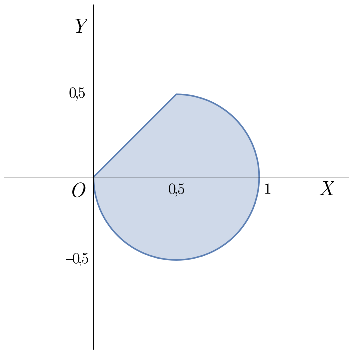
Orain, berdintzarekin, adierazpena aldatuko dugu kurba ezagun bat lortzeko:

$$x^2 + y^2 = x \Longrightarrow x^2 + y^2 - x = 0 \Longrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Hori $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ zentroa eta $\frac{1}{2}$ erradioa dituen zirkunferentzia da.

Hortaz, $x^2+y^2 \leq x$ desberdintza zirkunferentzian eta horrek mugatzen duen zirkuluan betetzen da, $\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2<\frac{1}{2}$ delako.

Bestalde, $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z) \Longrightarrow y \leq x$ desberdintza ere bete beharko da; hau da, $y=x$ zuzenak zirkulu itxia bitan banatzen du eta eskatzen diguten eremua zirkuluaren zentroa duen zatia da, alde batetik $0<\frac{1}{2}$ eta, beste aldetik, $\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2<\frac{1}{2}$ betetzen direlako (ikus irudia).



1.6. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Zenbaki arruntak eta osoak

1. Froga ezazu indukzio-printzipioaren bidez:

   1.1. $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

   1.2. $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{(n+1)n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

   1.3. $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

   1.4. $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \dfrac{(n+1)^2 n^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

   1.5. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

   1.6. Zenbaki errealen multzo finitu orok baditu maximoa eta minimoa;

   1.7. $f(n) = G(n) - G(n-1)$ bada, $f(1)+\cdots+f(n) = G(n) - G(0)$ beteko da;

   1.8. $m^n - 1$ zenbakia $(m-1)$ zenbakiaz zatigarria da, m zenbaki arrunta izanik;

   1.9. $n^3 - n$ zenbakia beti da 3ren multiploa;

   1.10. $(1+\delta)^n \geq 1+n\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0$ izanik.

2. Ondoriozta ezazu lege orokorra eta froga ezazu indukzio-printzipioa erabiliz:

   2.1.
   $$7+6\cdot 7 = 7^2,$$
   $$7+6\cdot(7+7^2) = 7^3,$$
   $$7+6\cdot(7+7^2+7^3) = 7^4;$$

   2.2.
   $$1+\frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3},$$
   $$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 9},$$
   $$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 27}.$$

2. Zenbaki arrazionalak eta errealak

3. Eman ezazu beherenik ez duen azpimultzo bornatu bat $\mathbb{Q}$ multzoan.

4. Irudika itzazu multzo hauek zuzenaren gainean eta idatz itzazu tarteen bidez:

   4.1. $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x| \leq 5\}$;

   4.2. $B = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x+2| \geq 1/3\}$;

   4.3. $C = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 - 4x - 3 > 0\}$;

   4.4. $D = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^\pi > e\}$;

   4.5. $E = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq \ln x \leq 1\}$.

5. Esan ezazu, arrazoituz, baieztapen hauek egiazkoak ala faltsuak diren $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ eta $\forall b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$:

   1) $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$; 2) $x = \dfrac{\sqrt{a}}{3}\left(\dfrac{3}{4}+2\right) \in \mathbb{Q}$;

   3) $\sqrt[3]{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; 4) $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

   5) $a+b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; 6) $a\cdot b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

6. Determina itzazu multzo hauen $\inf(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$ eta $\max(A)$:

1) $A=\{a,b,c\}$; 2) $A=\mathbb{N}$;
3) $A=\left\{\frac{1}{n}\ /\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$; 4) $A=\mathbb{Q}$;
5) $A=(-1,1]\cap\mathbb{Q}$; 6) $A=(a,b]$.

3. Zenbaki konplexuak

7. Egin itzazu ondoko eragiketak:

1) $\dfrac{1}{1-i}$; 2) $\dfrac{2+i}{1-i}$; 3) $\dfrac{2+i}{1-i}+\dfrac{2-i}{1+i}+i$;

4) $\left(1+i+\dfrac{1}{1+i}\right)^2$; 5) $\left(\dfrac{2+i}{3+4i}-\dfrac{2i}{3-4i}\right)^2$; 6) $\dfrac{(3+2i)i^{17}}{i^{243}(1-i)^3}$;

7) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$; 8) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1041}$; 9) $z=\sum_{k=0}^{100} i^k$.

8. Kalkula itzazu zenbaki konplexu hauen modulua eta argumentua:

1) -8; 2) $-i$; 3) $i(1+2i)(3+4i)$;

4) $i+\dfrac{(3+5i)(1+i)}{(3-5i)}$; 5) $\left(\dfrac{(3+4i)(1+i)}{(3-4i)}\right)^4$; 6) $\left(\dfrac{a+bi}{a-bi}\right)^n$;

7) $\cos\alpha+i\sin\alpha$; 8) $\sqrt{-3i}$; 9) $3e^{2+i}$.

9. Eman itzazu zenbaki konplexu hauen adierazpen polarra eta trigonometrikoa:

1) $2i$; 2) $-2i$; 3) $1+i$; 4) $\dfrac{1+i}{1-i}$; 5) $\dfrac{3\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-\frac{2}{3}i}$.

10. Kalula ezazu $x\in\mathbb{R}$ zenbaki erreala $(2e^{2i})^x$ zenbaki konplexua zenbaki erreal negatiboa izateko.

11. Esan ezazu, arrazoituz, egiazkoak edo faltsuak diren ondoko berdintzak:

1) $|z_1|^2=z_1\overline{z_1}$; 2) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$;
3) $|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|$; 4) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

12. Froga ezazu berdintza hauek betetzen direla $(z_1,z_2\in\mathbb{C})$:

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$;
3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$; 4) $\overline{z_1/z_2}=\bar{z}_1/\bar{z}_2$;
5) $\mathrm{Re}(\bar{z}_1\bar{z}_2)=\mathrm{Re}(z_1z_2)$; 6) $\mathrm{Im}(\bar{z}_1\bar{z}_2)=-\mathrm{Im}(z_1z_2)$.

13. Froga ezazu desberdintza hauek betetzen direla $(z_1,z_2\in\mathbb{C})$:

13.1. $\mathrm{Re}(z_1)\le|z_1|$;

13.2. $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\le|z_1||z_2|$;

13.3. $|z_1+z_2|^2\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$
(Iradokizuna: has zaitez $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$ adierazpena).

14. Kalkula itzazu ondoko erroak:

1) $z=\sqrt{i}$; 2) $z=\sqrt[3]{-8i}$; 3) $z=\sqrt{-7-24i}$;
4) $z=\sqrt[8]{1}$; 5) $z=\sqrt[3]{1+i}$; 6) $z=\sqrt[5]{1-2i}$.

15. Froga ezazu unitatearen n-erroen biderkadura
    a) -1 dela n bikoitia denean eta
    b) 1 dela n bakoitia denean.

16. Irudika itzazu planoan erlazio hauek betetzen dituzten zenbaki konplexuen multzoak:

1) $\lvert z\rvert > \lvert z-1\rvert$;	2) $\mathrm{Re}(\bar{z}-i)=2$;	3) $\lvert z-3\rvert+\lvert z+3\rvert=4$;
4) $\lvert 2z-1\rvert=4$;	5) $\lvert z\rvert=\dfrac{1}{\lvert z\rvert}=\lvert 1-z\rvert$;	6) $\mathrm{Im}(z+2i)=\mathrm{Re}(z-3)$;
7) $\dfrac{\lvert 1+z\rvert}{\lvert 1-z\rvert}\le 1$;	8) $\lvert z-1+i\rvert=1$;	9) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)<2$;
10) $\lvert z+i\rvert\le 3$;	11) $1<\lvert z+i\rvert<2$;	12) $\lvert z+2\rvert>1+\lvert z-2\rvert$;
13) $\left\lvert\dfrac{z-3}{z+3}\right\rvert=2$;	14) $\mathrm{Re}(z)\le\mathrm{Im}(z^2)$;	15) $1<\lvert z+i-1\rvert<2$;

16) $\{z\in\mathbb{C}\ /\ 8<\lvert z-z_1\rvert+\lvert z+z_2\rvert\le 12\}$, $z_1=3i$ eta $z_2=-3i$ izanik;

17) $\{z\in\mathbb{C}\ /\ \lvert z-2i\rvert\le 2$ eta $\mathrm{Re}(z)\ge 1\}$;

18) $\{z\in\mathbb{C}\ /\ -1\le\mathrm{Re}(z)\le 1$ eta $0<\lvert z\rvert<2\}$;

19) $\{z\in\mathbb{C}\ /\ \lvert z-1\rvert\le 4$ eta $\mathrm{Im}(z)\le\mathrm{Re}(z)\}$.

17. Ebatz itzazu ekuazio hauek eta adieraz itzazu grafikoen bidez soluzioak:

1) $e^z=-2$;	2) $\ln z=\dfrac{\pi}{2}i$;	3) $z^4=-i$;
4) $z^4=i$;	5) $z^4-z^2-2=0$;	6) $z^4=-1$;
7) $\cos z=2i$;	8) $\sin z=2i$;	9) $\tan z=2$;
10) $z^5=1$;	11) $z^{3/4}=1$;	12) $z^4+1-i=0$;
13) $z^{3/4}=2^i$;	14) $z^2-(5+i)z+8+i=0$;	15) $e^{4z}=i$.

18. Egin itzazu ondoko eragiketak:

1) $i^{1/2}$;	2) $(1+i)^i$;	3) 2^{2i};	4) $(2-i)^{1+i}$;
5) $(3+4i)^{1/3}$;	6) $\ln\sqrt[4]{1-i}$;	7) $\ln(-i)$;	8) $\ln(-\sqrt{3}-i)$.

2. Topologia

2.1. ESPAZIO METRIKOAK

2.1. Definizioa. *Izan bedi E multzo ez-hutsa.* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *aplikazioa* distantzia *edo* metrika *da propietate hauek betetzen baditu:*

M.1: $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$;

M.2: $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = d(y,x)$;

M.3: $\forall x, y, z \in E \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, desberdintza triangeluarra.

(E,d) *bikoteari* espazio metriko *deritzo.*

Definizio horren ondorio gisa, $\forall x, y \in E \quad d(x,y) \geq 0$ aterako dugu.

2.2. Adibideak.

1. $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ multzoa da. $x \in \mathbb{R}^m$ bada, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ izango da, $x_i \in \mathbb{R}$ izanik, $i = 1, \ldots, m$. x_i balioak x puntuaren *koordenatuak* dira.

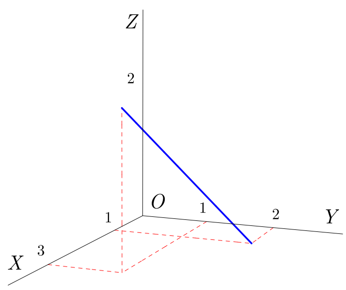
   $\mathbb{R}^m$ multzoan *distantzia euklidearra* honela definitzen da:

   $$d((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_m - x_m)^2}.$$

   Beraz, $(\mathbb{R}^m, d)$ espazio metrikoa da.

   Adibidez, $\mathbb{R}^3$ multzoan $(1,2,0)$ eta $(3,1,2)$ puntuak hartuz,

   $d((1,2,0),(3,1,2)) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$ da (ikus irudia).



   $m = 1$ denean, $\mathbb{R}$ multzoan distantzia euklidearra honela kalkulatuko dugu, $x, y \in \mathbb{R}$ emanik:

   $$d(x,y) = \sqrt{(y-x)^2} = |y - x|.$$

2. S sare batean ondoko metrika definituko dugu:

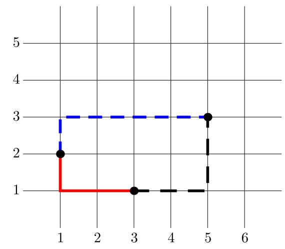
$$(i,j),(k,l)\in S \quad d((i,j),(k,l)) = |k-i|+|l-j|.$$

Kalkula ditzagun sareko $(1,2)$, $(5,3)$ eta $(3,1)$ korapiloen arteko distantziak (ikus irudia):

$d((1,2),(5,3)) = |5-1|+|3-2| = 4+1 = 5.$

$d((1,2),(3,1)) = |3-1|+|1-2| = 2+1 = 3.$

$d((3,1),(5,3)) = |5-3|+|3-1| = 2+2 = 4.$



2.3. Definizioa. *(E,d) espazio metriko bat, $a\in E$ eta $r\geq 0$ emanik, multzo hauek definituko ditugu:*

1. Bola irekia: $B(a,r) = \{x\in E \,/\, d(a,x) < r\}$.

2. Bola itxia: $\bar{B}(a,r) = \{x\in E \,/\, d(a,x) \leq r\}$.

3. Esfera: $S(a,r) = \{x\in E \,/\, d(a,x) = r\}$.

a bolen eta esferaren zentroa *da, eta r* erradioa*.*

2.4. Adibideak.

1. $\mathbb{R}^3$ multzoan distantzia euklidearra erabiliz, $B((3,3,3),3)$ bola irekia irudikatuko dugu.

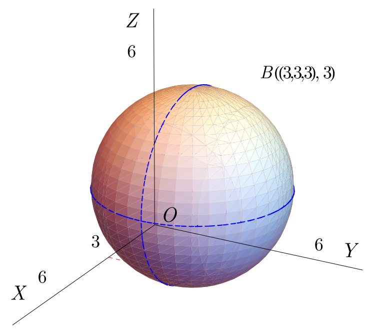
$$d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}.$$

$B((3,3,3),3) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, d((3,3,3),(x,y,z)) < 3\} =$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2} < 3\} =$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 < 9\};$

zentroa $(3,3,3)$ puntuan eta 3 erradioa dituen esfera da.



2. $\mathbb{R}^2$ multzoan distantzia euklidearra erabiliko dugu $B((2,1),2)$ bola irekia irudikatzeko.

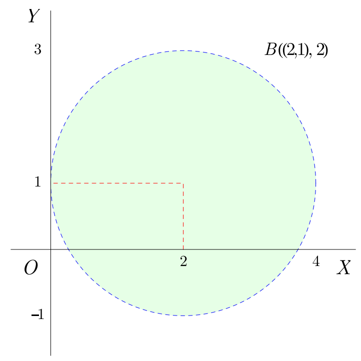
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}.$$

$B((2,1),2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, d((2,1),(x,y)) < 2\} =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} < 2\} =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x-2)^2+(y-1)^2 < 4\};$

zentroa $(2,1)$ puntuan eta 2 erradioa dituen zirkulua da.



3. $\mathbb{R}$ multzoan balio absolutua erabiliko dugu bolak irudikatzeko. Horrez gain, $\mathbb{R}$ multzoan bolak $\mathcal{E}(a,r)$ idatziko ditugu eta *ingurune* deritzegu.

   $\mathcal{E}(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, d(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| < r\} \overset{(1)}{=} \{x \in \mathbb{R} \,/\, -r < x-a < r\} =$
   $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a-r < x < a+r\} = (a-r, a+r)$.

   (1) berdintza 1.1. Ariketa ebatzian frogatuko da.

   Ingurune irekia: $\mathcal{E}(3,1) = (2,4)$.

   Ingurune itxia: $\bar{\mathcal{E}}(3,1) = [2,4]$.

   Esfera: $S(3,1) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, d(3,x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-3| = 1\} =$
   $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x-3) = 1 \text{ edo } -(x-3) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = 4 \text{ edo } x = 2\} = \{2,4\}$.

2.5. Definizioa. (E,d) *espazio metrikoa bada, eta* $A \subseteq E$ *azpimultzo bat,*

1. $x \in E$ *Aren* barne-puntua *da* $\exists r > 0 \,/\, x \in B(x,r) \subseteq A$ *edo* $B(x,r) \cap A^c = \emptyset$ *betetzen den*[1].
2. $x \in E$ *Aren* kanpo-puntua *da* $\exists r > 0 \,/\, x \in B(x,r) \subseteq A^c$ *edo* $B(x,r) \cap A = \emptyset$ *betetzen den.*
3. $x \in E$ *Aren* muga-puntua *da* $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ *eta* $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$ *betetzen bada.*

2.6. Definizioa. (E,d) *espazio metrikoa bada, eta* $A \subseteq E$ *azpimultzo bat,*

1. *A multzoaren barne-puntuen multzoa* barnealdea *da, eta* $\overset{\circ}{A}$ *idatziko dugu.*
2. *A multzoaren kanpo-puntuen multzoa* kanpoaldea *da, eta* $\operatorname{ext}(A)$ *idatziko dugu.*
3. *A multzoaren muga-puntuen multzoa* muga *da, eta* $\partial(A)$ *idatziko dugu.*

Definiziotik bertatik ondorioztatzen dira bi propietate hauek: $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ eta $\operatorname{ext}(A) \subseteq A^c$.

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] & & A^c \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\overset{\circ}{A} & & \partial(A) & & \operatorname{ext}(A)
\end{tikzcd}$$

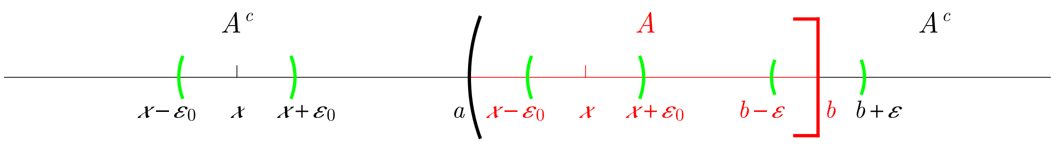
2.7. Adibideak.

1. $\mathbb{R}$ multzoan $A = (a,b]$ tartea hartuko dugu (ikus irudia).

   $\overset{\circ}{A} = (a,b)$ da,

   $x \in (a,b)$ bada, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\{d(x,a), d(x,b)\} > 0$ / $\mathcal{E}(x,\varepsilon_0) \subseteq A$; beraz, $x \in \overset{\circ}{A}$ eta, ondorioz, $(a,b) \subset \overset{\circ}{A}$ da.

   $x = b$ bada, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}(b,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ da, berez $(b, b+\varepsilon) \subset A^c$ da; beraz, $b \notin \overset{\circ}{A}$.



1. A^c multzoa A multzoaren osagarria da, hots, A multzoan ez dauden elementuen multzoa da.

$\partial(A) = \{a, b\}$ da,

$b \notin \overset{\circ}{A} \Longrightarrow b \in \partial(A)$, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}(b, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ delako, gutxienez b dago ebakiduran, eta, ikusi dugunez, $\mathcal{E}(b, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ delako.

$x = a$ bada, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ delako, berez $(a - \varepsilon, a) \subset A^c$ da, eta $\mathcal{E}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ delako, berez $(a, a + \varepsilon) \subset A^c$ da.

$\text{ext}(A) = \mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ da,

$x \in A^c$ bada, $x \neq a$ izanik, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} \min\{d(x, a), d(x, b)\} > 0$ / $\mathcal{E}(x, \varepsilon_0) \subseteq A^c$ baita; beraz, $x \in \text{ext}(A)$.

2. $\mathbb{R}$ multzoan $B = \left\{ \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ multzoa hartuko dugu (ikus irudia).

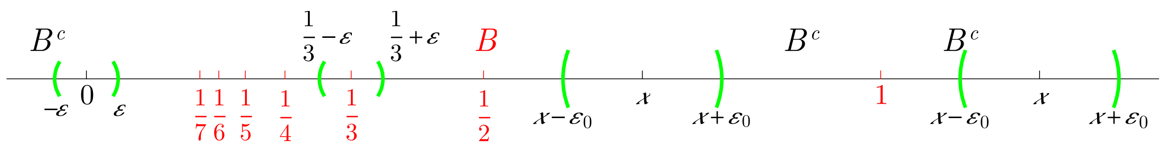
$\overset{\circ}{B} = \emptyset$ da:

$x = \dfrac{1}{n}$ bada, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{n}, \varepsilon\right) \cap B^c \neq \emptyset$ da, $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{n}, \varepsilon\right)$ tartean infinitu zenbaki irrazional daudelako; beraz, $\dfrac{1}{n} \notin \overset{\circ}{B}$.

$\partial(B) = \left\{ \dfrac{1}{n}, 0 \right\}$ da:

$\dfrac{1}{n} \notin \overset{\circ}{B} \Longrightarrow \dfrac{1}{n} \in \partial(B)$, $\dfrac{1}{n}$ Bren elementua delako, eta Bren elementuak ez badira barne-puntuak, muga-puntuak dira.

$x = 0$ bada, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}(0, \varepsilon) \cap B^c \neq \emptyset$ da, berez $(-\varepsilon, 0) \subset B^c$ da, eta $\mathcal{E}(0, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ da, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} / 0 < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, eta $\dfrac{1}{n_0} \in B$ delako.



$\text{ext}(B) = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{1}{n}, 0 \right\}$ da:

$x \in (0, 1)$ bada, $x \neq \dfrac{1}{n}$ izanik, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \dfrac{1}{n_0 + 1} < x < \dfrac{1}{n_0}$ baita;

beraz, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} \min\left\{ d\left(x, \dfrac{1}{n_0 + 1}\right), d\left(x, \dfrac{1}{n_0}\right) \right\} > 0$ aukera dezakegu; orduan, $\mathcal{E}(x, \varepsilon_0) \subseteq B^c$ beteko da; beraz, $x \in \text{ext}(B)$.

$x \notin (0, 1)$ bada, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} \min\{d(x, 0), d(x, 1)\} > 0$ / $\mathcal{E}(x, \varepsilon_0) \subseteq B^c$; beraz, $x \in \text{ext}(B)$.

2.8. Definizioa. (E, d) *espazio metrikoa bada, eta* $A \subseteq E$ *azpimultzo bat,*

1. A *multzo* irekia *da* $A = \overset{\circ}{A}$ *bada.*

2. A *multzo* itxia *da* $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial(A)$ *bada.*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & E \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& A \arrow[dl] & & A^c \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathring{A} & & \partial(A) & & \mathrm{ext}(A)
\end{tikzcd}$$

Multzo irekia

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & E \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& A \arrow[dl] \arrow[dr] & & A^c \arrow[dr] & \\
\mathring{A} & & \partial(A) & & \mathrm{ext}(A)
\end{tikzcd}$$

Multzo itxia

2.9. Adibideak.

1. Aurreko adibideetan ez $A=(a,b]$ ez $B=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ ez dira ez irekiak, ezta itxiak ere.

   A ez da irekia, $A=(a,b]$ eta $\mathring{A}=(a,b)$ direlako.

   A ez da itxia, $A=(a,b]$ eta $\mathring{A}\cup\partial(A)=[a,b]$ direlako.

   B ez da irekia, $B=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ eta $\mathring{B}=\emptyset$ direlako.

   B ez da itxia, $B=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ eta $\mathring{B}\cup\partial(B)=\left\{\frac{1}{n},0\right\}$ direlako.

2. Har dezagun $C=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\{0\}$ multzoa.

   2.7.2. Adibidean bezala, froga dezakegu $\mathring{C}=\emptyset$, $\partial(C)=\left\{\frac{1}{n},0\right\}$ eta $\mathrm{ext}(C)=\mathbb{R}-C$ dela.

   Hortaz, C ez da irekia, $C=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ eta $\mathring{C}=\emptyset$ direlako.

   Eta C itxia da, $C=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\{0\}$ eta $\mathring{C}\cup\partial(C)=\left\{\frac{1}{n},0\right\}$ direlako.

2.10. Definizioa. *Izan bedi* (E,d) *espazio metrikoa.* $A\subseteq E$ multzo bornatua *da* $\exists k\in\mathbb{R}$, *non* $\forall x,y\in A \quad d(x,y)\le k$ *betetzen den.*

2.11. Teorema. Baldintza nahikoa maximoa eta minimoa existitzeko $\mathbb{R}$ multzoan
$A\subset\mathbb{R}$ *multzo bornatu eta itxi orok maximoa eta minimoa dauzka.*

2.12. Adibideak.

1. $A=\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ multzoa hartuko dugu.

   Froga daiteke $\mathring{\mathbb{N}}=\emptyset$, $\partial(\mathbb{N})=\mathbb{N}$ eta $\mathrm{ext}(\mathbb{N})=\mathbb{R}-\mathbb{N}$ direla.

   $\mathbb{N}$ ez da goitik bornatua; beraz, ezin dugu teorema aplikatu.

   $\mathbb{N}$ behetik bornatua da, $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\le n$ delako.

   Bestalde, itxia den ikusteko aztertu behar dugu $\mathbb{N}=\mathring{\mathbb{N}}\cup\partial(\mathbb{N})$ betetzen den, edo ez.

   $\mathring{\mathbb{N}}\cup\partial(\mathbb{N})=\emptyset\cup\mathbb{N}=\mathbb{N}$ denez, $\mathbb{N}$ itxia da.

   Ondorioz, $\mathbb{N}$ multzoak minimoa dauka; froga daiteke $\min(\mathbb{N})=0$ dela.

2. $\mathbb{R}$ multzoan $B=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ multzoa hartuko dugu.

   B bornatua da, $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 0\le\frac{1}{n}\le 1$ delako.

   Jadanik ikusi dugu 2.9. Adibidean ez dela itxia; beraz, ezin dugu teorema aplikatu.

   Hala ere, badakigu B multzoak ez duela minimorik eta maximoa duela, $\max(B)=1$.

2.2. ESPAZIO NORMADUNAK

2.13. Definizioa. *Izan bedi* $(E,+,\cdot)$ *bektore-espazioa* $\mathbb{R}$ *gainean.* $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *aplikazioa* norma *da propietate hauek betetzen baditu:*

N.1: $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta_E$, *E espazioaren elementu neutroa;*

N.2: $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

N.3: $\forall x,y \in E \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(E, \|\cdot\|)$ *bikoteari* espazio normadun *deritzo.*

Definizio horren ondorio gisa, $\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0$ aterako dugu.

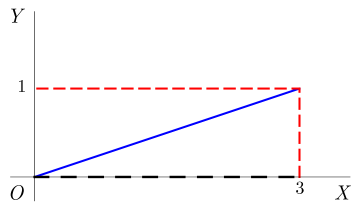
2.14. Adibideak.

1. $\mathbb{R}^m$ multzoan hiru norma desberdin definituko ditugu (ikus irudia):

   1. $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\}$, *gorenaren norma* da.
   $\|(3,1)\| = \max\{|3|, |1|\} = \max\{3,1\} = 3$.

   2. $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$, *baturaren norma* da.
   $\|(3,1)\| = |3| + |1| = 3 + 1 = 4$.

   3. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$, *norma euklidearra* da.
   $\|(3,1,-2)\| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.



   Irudian, segmentu berdearen luzera da gorenaren normaren balioa, segmentu urdinarena norma euklidearrarena eta segmentu eten gorrien luzeren batura baturaren normarena.

2. $\mathbb{R}$ multzoan aurreko hiru normak bat datoz, eta balio absolutuaren berdinak dira. Beraz, $\|x\| = |x|$ aplikazioa norma da, hau da, $\mathbb{R}$ multzoan definitzen den balio absolutu funtzioa norma da.

   Ikus dezagun balio absolutu funtzioak norma izateko baldintzak betetzen dituela.

   $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ balio absolutu funtzioa hau da:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x. \end{cases}$$

   N.1: $|x| = 0$ bada, $|x| = -x$ edo $|x| = x$ denez, edo $-x = 0$ edo $x = 0$ da; bi kasuetan, $x = 0$ da.

   Alderantziz, $x = 0$ bada, definizioaren bigarren kasuan gaude, eta $|x| = x$ da; beraz, $|x| = 0$ da.

   N.2: Har ditzagun $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $x \in \mathbb{R}$, eta horien arteko λx biderkadura.

   - $\lambda x = 0$ bada, $\lambda = 0$ edo $x = 0$ izango dira.
   Ezkerrean: $\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda x = 0 \Longrightarrow |\lambda x| = 0$.
   Eskuinean: $\lambda = 0 \Longrightarrow |\lambda| = 0 \Longrightarrow |\lambda||x| = 0 \cdot |x| = 0$;
   Antzera egingo genuke $x = 0$ kasuan.
   - $\lambda x > 0$ bada, $\lambda, x > 0$ edo $\lambda, x < 0$ izango dira.
   $\lambda > 0 \Longrightarrow |\lambda| = \lambda$ eta $x > 0 \Longrightarrow |x| = x$; beraz,
   $|\lambda||x| = \lambda x$ eta $|\lambda x| = \lambda x$, bi atalak berdinak.
   $\lambda < 0 \Longrightarrow |\lambda| = -\lambda$ eta $x < 0 \Longrightarrow |x| = -x$; beraz,
   $|\lambda||x| = (-\lambda)(-x) = \lambda x$ eta $|\lambda x| = \lambda x$, bi atalak berdinak.

- $\lambda x < 0$ bada, $\lambda > 0$, $x < 0$ edo $\lambda < 0$, $x > 0$ izango dira.
  $\lambda > 0 \Longrightarrow |\lambda| = \lambda$ eta $x < 0 \Longrightarrow |x| = -x$; beraz,
  $|\lambda||x| = \lambda(-x) = -\lambda x$ eta $|\lambda x| = -\lambda x$, bi atalak berdinak.
  $\lambda < 0 \Longrightarrow |\lambda| = -\lambda$ eta $x > 0 \Longrightarrow |x| = x$; beraz,
  $|\lambda||x| = (-\lambda)x = -\lambda x$ eta $|\lambda x| = -\lambda x$, bi atalak berdinak.

N.3: Har ditzagun $x, y \in \mathbb{R}$, eta horien arteko $x+y$ batura.

- $x+y=0$ bada, $x=-y$ izango da;
  beraz, $|x| = |-y| = |-1||y| = |y|$, aurreko propietatea erabiliz.
  Ezkerrean, $|x+y| = 0$ da, lehenengo propietatea erabiliz, eta eskuinean
  $|x|+|y| = |x|+|x| = 2|x| \geq 0$, balio absolutua ez delako negatiboa.
  Hortaz, $|x+y| = 0 \leq 2|x| = |x|+|y|$ betetzen da.
- $x+y>0$ bada, $x,y>0$ edo $y<0\leq x$ izango dira (berdin $x<0\leq y$ balitz).
  $x,y>0 \Longrightarrow |x| = x$ eta $|y| = y \Longrightarrow |x|+|y| = x+y$;
  bestalde, $|x+y| = x+y$ da definizioz; bi atalak berdinak dira beraz.
  $y<0\leq x \Longrightarrow |x| = x$ eta $|y| = -y \Longrightarrow x+y = |x|-|y| \leq |x|+|y|$;
  beraz, $|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$ betetzen da.
- $x+y<0$ bada, $x,y<0$ edo $y<0\leq x$ izango dira (berdin $x<0\leq y$ balitz).
  $x,y<0 \Longrightarrow |x| = -x$ eta $|y| = -y \Longrightarrow |x|+|y| = -x-y$;
  bestalde, $|x+y| = -(x+y) = -x-y$ da definizioz; bi atalak berdinak dira beraz.
  $y<0\leq x \Longrightarrow |x| = x$ eta $|y| = -y \Longrightarrow -x-y = -|x|+|y| \leq |x|+|y|$;
  beraz, $|x+y| = -(x+y) \leq |x|+|y|$ betetzen da.

2.15. Propietatea. *Izan bedi $(E, \|\cdot\|)$ espazio normaduna. Har dezagun $d: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa, non $d(x,y) = \|y-x\|$ den. Aplikazio hori metrika da.*

Propietate horrek esaten digu espazio normadunak espazio metrikoak direla.

2.16. Adibidea. $\mathbb{R}$ multzoan, $d(x,y) = |y-x|$ distantzia da. Zuzenean ondorioztatzen da 2.15. Propietatetik eta 2.14.2. Adibidetik.

2.17. Definizioa. *Izan bedi $(E, \|\cdot\|)$ espazio normaduna; $A \subseteq E$* multzo bornatua *da $\exists k \in \mathbb{R}$, non $\forall x \in A \quad \|x\| \leq k$ betetzen den.*

2.3. ARIKETA EBATZIAK

1. Froga dezagun $|\cdot|$ balio absolutuak propietate hauek dituela:

   1.1. $m \geq 0$ bada, $|x| \leq m \Longleftrightarrow -m \leq x \leq m$;

   1.2. $|x|-|y| \leq |x-y|$.

   Froga.

   1.1. Demagun $|x| \leq m$ dela, $m \geq 0$ izanik. Hortik, $-m \leq 0 \leq m$ dela aterako dugu.
   $x \geq 0$ bada, $|x| = x$ da; beraz, $x \leq m$ beteko da. Eta hortik ateratzen dugu $-m \leq 0 \leq x \leq m$ beteko da.
   Bestalde, $x < 0$ bada, $|x| = -x$ da eta $-x \leq m$ beteko da; hortik $-m \leq x$ dugu. Hortaz, $-m \leq x < 0 \leq m$ beteko da.
   Ondorioz, beti beteko da $-m \leq x \leq m$.

   Alderantziz, pentsa dezagun $-m \leq x \leq m$ betetzen dela.
   $x \geq 0$ bada, $|x| = x$ da; beraz, $-m \leq |x| \leq m$ ere beteko da. Hortaz, $|x| \leq m$ da.
   Bestalde, $x < 0$ bada, $|x| = -x$ da eta, hipotesian bider -1 eginez, $-m \leq -x \leq m$ ere beteko da; hortik $-m \leq |x| \leq m$ dugu. Hortaz, $|x| \leq m$ beteko da.
   Ondorioz, beti beteko da $|x| \leq m$.

   1.2. $|x| = |x-y+y| \overset{1}{\leq} |x-y|+|y| \Longrightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$.
   1 desberdintza 2.13. Definizioaren **N.3** propietatea da.

2. Izan bedi $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa

$$\forall x,y \in E \quad d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

   Froga dezagun aplikazio horrek metrika izateko baldintzak betetzen dituela. Aplikazioak *metrika diskretu* izena du.

   M.1: $d(x,y) = 0$ bada, definizioaren bigarren kasuan gaude, eta $x = y$ betetzen da.
   Alderantziz, $x = y$ denean, definizioz x eta $y$ren arteko $d(x,y)$ distantzia 0 da, hots, $d(x,y) = 0$ da.

   M.2: Har ditzagun distantziaren bi balioak, $d(x,y) = 0$ eta $d(x,y) = 1$; ikus dezagun zenbat balio duen, kasu bakoitzean, $d(y,x)$.
   $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow y = x \Longrightarrow d(y,x) = 0$; beraz, kasu horretan, $d(x,y) = 0 = d(y,x)$.
   $d(x,y) = 1 \Longrightarrow x \neq y \Longrightarrow y \neq x \Longrightarrow d(y,x) = 1$; beraz, kasu horretan, $d(x,y) = 1 = d(y,x)$.

   M.3: Har ditzagun $x,y,z \in E$, eta horien arteko $d(x,y)$, $d(x,z)$, $d(z,y)$ distantziak. Distantzia bakoitzak bi balio har ditzakeenez, zortzi kasu gerta daitezke:

$x,y,$	$x,z,$	z,y		$d(x,y)$		$d(x,z)+d(z,y)$		
$x=y,$	$x=z,$	$z=y$	$\Longrightarrow$	0	$\leq$	0	$+$	0;
$x=y,$	$x=z,$	$z\neq y$		hori ezinezkoa da;				
$x=y,$	$x\neq z,$	$z=y$		hori ezinezkoa da;				
$x=y,$	$x\neq z,$	$z\neq y$	$\Longrightarrow$	0	$\leq$	1	$+$	1;
$x\neq y,$	$x=z,$	$z=y$		hori ezinezkoa da;				
$x\neq y,$	$x=z,$	$z\neq y$	$\Longrightarrow$	1	$\leq$	0	$+$	1;
$x\neq y,$	$x\neq z,$	$z=y$	$\Longrightarrow$	1	$\leq$	1	$+$	0;
$x\neq y,$	$x\neq z,$	$z\neq y$	$\Longrightarrow$	1	$\leq$	1	$+$	1.

Hortaz, kasu posible guztietan betetzen da desberdintza triangeluarra.

Ondorioz, aplikazioak distantzia izateko hiru propietateak betetzen ditu.

3. Izan bedi $d: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa

$$d(x,y)=\begin{cases} 1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

metrika diskretua.

Izan bedi (E,d) espazio metrikoa, non d metrika diskretua baita. $a\in E$ emanik, kalkula itzazu a zentroa eta r erradioa dituzten bola irekia, bola itxia eta esfera, kasu hauetan:

1) $r=0'5$; 2) $r=1$; 3) $r=1'5$.

Ebazpena.

1) $B(a,0'5)=\{x\in E\ /\ d(a,x)<0'5\}=\{x\in E\ /\ d(a,x)=0\}$, metrika diskretuak hartzen dituen bi balioen artean 0 baita $d(a,x)=0<0'5$ betetzen duen bakarra. Hortaz, bilatzen ditugun $x\in E$ elementuetatik $x=a$ elementuak baino ez du baldintza betetzen. Ondorioz, bola irekia $B(a,0'5)=\{a\}$ da.

$\bar{B}(a,0'5)=\{x\in E\ /\ d(a,x)\leq 0'5\}=\{x\in E\ /\ d(a,x)=0\}$, aurreko arrazoi bera erabiliz. Hortaz, bola itxia $\bar{B}(a,0'5)=\{a\}$ da.

$S(a,0'5)=\{x\in E\ /\ d(a,x)=0'5\}$ da; baina, baldintza hori ez da inoiz beteko, metrika diskretuak 0 eta 1 balioak hartzen dituelako. Ondorioz, esfera $S(a,0'5)=\emptyset$ da.

2) $B(a,1)=\{x\in E\ /\ d(a,x)<1\}=\{x\in E\ /\ d(a,x)=0\}$, metrika diskretuak hartzen dituen bi balioen artean 0 baita $d(a,x)=0<1$ betetzen duen bakarra. Berriro ere, bola irekia $B(a,1)=\{a\}$ da.

$\bar{B}(a,1)=\{x\in E\ /\ d(a,x)\leq 1\}=\{x\in E\ /\ d(a,x)=0 \text{ edo } d(a,x)=1\}$, metrika diskretuaren bi balioek betetzen dutelako desberdintza. Hortaz, orain, Eren puntu guztiak sartuko dira eta bola itxia $\bar{B}(a,1)=\{x=a\}\cup\{x\neq a\}=E$ da.

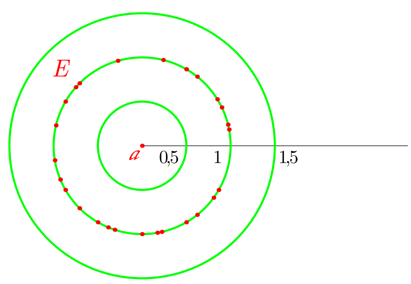
$S(a,1)=\{x\in E\ /\ d(a,x)=1\}$ da; baldintza $x\neq a$ elementuek betetzen dute, hots, Eren elementu guztiek a berak izan ezik. Ondorioz, esfera $S(a,1)=E-\{a\}$ da.

3) $B(a,1'5)=\{x\in E\ /\ d(a,x)<1'5\}=\{x\in E\ /\ d(a,x)=0 \text{ edo } d(a,x)=1\}$, metrika diskretuak hartzen dituen bi balioek desberdintza betetzen dutelako. Hortaz, bola irekia $B(a,1'5)=E$ da.

$\bar{B}(a,1'5)=\{x\in E\ /\ d(a,x)\leq 1'5\}=\{x\in E\ /\ d(a,x)=0 \text{ edo } d(a,x)=1\}$, aurreko arrazoi bera erabiliz. Hortaz, bola itxia $\bar{B}(a,1'5)=E$ da.

$S(a,1'5)=\{x\in E\ /\ d(a,x)=1'5\}$ da; baina, baldintza hori ez da inoiz beteko, metrika diskretuak 0 eta 1 balioak hartzen dituelako. Ondorioz, esfera $S(a,1'5)=\emptyset$ da.

E multzoaren a puntu bat finkatuz, metrika diskretuak a puntua bolen zentroan kokatuko du eta gainerako puntuak 1 erradioko zirkunferentzia batean utziko ditu (ikus irudia).



4. Irudika ezazu planoan $B((0,0),1)$ bola baturaren norma erabiliz, hau da, $\|(x,y)\| = |x|+|y|$.

Ebazpena.

Lehendabizi, bola baturaren normaren bidez idatziko dugu:

$B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ d((0,0),(x,y)) < 1\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x,y)-(0,0)\| < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x,y)\| < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x|+|y| < 1\}$.

Beraz, $|x|+|y| < 1$ inekuazioa bete behar dute bilatzen ditugun puntuek. Lau kasu bereiziko ditugu: $x < 0$, $0 \le x$ eta $y < 0$, $0 \le y$ balioen arabera.

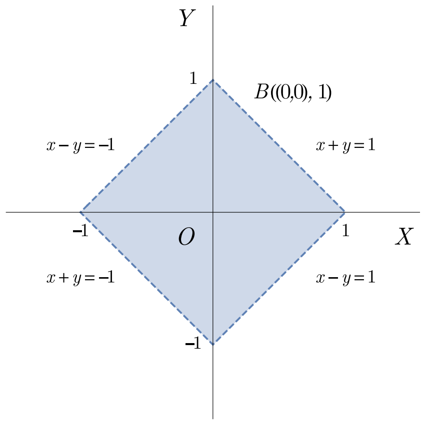
$x < 0$, $y < 0$ denean, inekuazio hau da:
$-x+(-y) < 1$ edo $x+y > -1$.

$x < 0$, $0 \le y$ denean, inekuazioa hau da: $-x+y < 1$.

$0 \le x$, $y < 0$ denean, inekuazioa hau da:
$x+(-y) < 1$ edo $x-y < 1$.

$0 \le x$, $0 \le y$ denean, inekuazioa hau da: $x+y < 1$.

Inekuazio horiek eskuineko karratua ematen dute.



5. Irudika ezazu planoan $\bar{B}((1,-2),2)$ bola itxia $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$ gorenaren norma erabiliz.

Ebazpena.

Lehendabizi, bola gorenaren normaren bidez idatziko dugu:

$\bar{B}((1,-2),2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ d((x,y),(1,-2)) \le 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x,y)-(1,-2)\| \le 2\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x-1,y+2)\| \le 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \max\{|x-1|,|y+2|\} \le 2\}$.

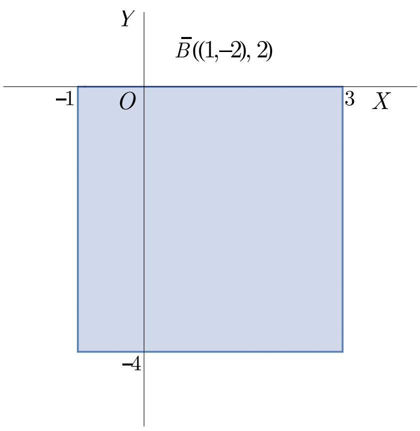
Beraz, $\max\{|x-1|,|y+2|\} \le 2$ inekuazioa bete behar dute puntuek. Bi balioen artean handienak 2 baino txikiagoa edo berdina izan behar badu, bi balioek 2 baino txikiagoak edo berdinak izan behar dute; eta alderantziz ere betetzen da, bi balio 2 baino txikiagoak edo berdinak badira, bietako handiena ere 2 baino txikiagoa edo berdina da. Hortaz, baliokidetza hau betetzen da: $\max\{|x-1|,|y+2|\} \le 2 \iff |x-1| \le 2$ eta $|y+2| \le 2$ bada.

$|x-1| \le 2 \iff -2 \le x-1 \le 2 \iff -1 \le x \le 3$ dugu, 1.1 Ariketa erabiliz.

$|y+2| \le 2 \iff -2 \le y+2 \le 2 \iff -4 \le y \le 0$ dugu, 1.1 Ariketa erabiliz.

Ondorioz, bilatzen ditugun puntuek x lehenengo koordenatua -1 eta 3 artean dute, biak barne, eta y bigarren koordenatua -4 eta 0 artean, biak barne.

Puntu horiek karratu hau ematen dute:



6. Izan bedi $A=(-\infty,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ multzoa. Bila itzazu $\mathring{A}$, $\partial(A)$ eta $\mathrm{ext}(A)$; ba al da A multzoa irekia? eta itxia?

Ebazpena.

$\mathring{A}=\emptyset$ da,

$\forall a\in A$ $\forall\varepsilon>0$ $\mathcal{E}(a,\varepsilon)\not\subseteq A$ eta $\mathcal{E}(a,\varepsilon)\not\subseteq A^c$, $\mathcal{E}(a,\varepsilon)$ ingurunean zenbaki arrazionalak eta irrazionalak daudelako; beraz, $a\in\partial(A)$ da eta, ondorioz, $(-\infty,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q}\subset\partial(A)$.

$\partial(A)=(-\infty,1]$ da;

jadanik esan dugu $(-\infty,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q}\subset\partial(A)$ dela; bestalde, $\forall x\in\mathbb{Q}/x\leq 1$ eta $\forall\varepsilon>0$ $\mathcal{E}(x,\varepsilon)\not\subseteq A$ eta $\mathcal{E}(x,\varepsilon)\not\subseteq A^c$, $\mathcal{E}(a,\varepsilon)$ ingurunean zenbaki arrazionalak eta irrazionalak daudelako; beraz, $x\in\partial(A)$.

Azkenik, $\mathrm{ext}(A)=\mathbb{R}-(-\infty,1]=(1,\infty)$ da, $\mathrm{ext}(A)=\mathbb{R}-\mathring{A}-\partial(A)$ delako.

A multzoa ez da irekia, barnealdea hutsa delako eta, beraz, $A\neq\mathring{A}$.

Ez da itxia ere, $A\neq\mathring{A}\cup\partial(A)=(-\infty,1]$ delako.

7. Bila itzazu $\mathring{A}$, $\partial(A)$ eta $\mathrm{ext}(A)$, non

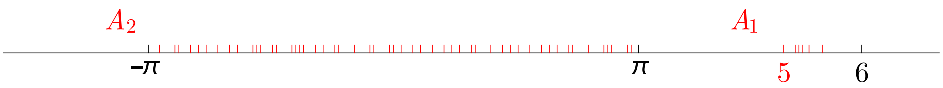
$$A=\left\{\frac{5n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{Q}\text{ eta }|x|<\pi\}\quad\text{baita.}$$

Ebazpena.

Bana dezagun A multzoa bi azpimultzo hauetan (ikus irudia):

$A_1=\left\{\frac{5n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}=\left\{5+\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}=\left\{6,\frac{11}{2},\frac{16}{3},\frac{21}{4},\dots\right\}$ eta

$A_2=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{Q}\text{ eta }|x|<\pi\}=(-\pi,\pi)\cap\mathbb{Q}$.



$\mathring{A}_1=\emptyset$ da;

$a\in A_1$ bada, $\forall\varepsilon>0$ $\mathcal{E}(a,\varepsilon)\not\subseteq A_1$ da, $\mathcal{E}(a,\varepsilon)$ ingurunean infinitu zenbaki irrazional daudelako; beraz, $a\notin\mathring{A}_1$. Hortaz, $a\in\partial(A_1)$ da; eta ondorioz, $A_1\subset\partial(A_1)$.

$\partial(A_1)=\left\{\frac{5n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{5\}$ da;

badakigu $A_1\subset\partial(A_1)$ dela.

$x=5\in A_1^c$ bada, $\forall\varepsilon>0$ $\mathcal{E}(5,\varepsilon)\not\subseteq A_1$ eta $\mathcal{E}(5,\varepsilon)\not\subseteq A_1^c$ betetzen dira, $n_0\in\mathbb{N}$ badagoelako, non $5<5+\frac{1}{n_0}<5+\varepsilon$ baita; hau da, $5+\frac{1}{n_0}\in\mathcal{E}(5,\varepsilon)$ eta $5+\frac{1}{n_0}\in A_1$; beraz, $5\in\partial(A_1)$.

$\forall x\notin A_1$ eta $x\neq 5$, $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}\min\{d(x,y),y\in A_1\}>0$, non $\mathcal{E}(x,\varepsilon_0)\cap A_1=\emptyset$ baita; beraz, $x\notin\partial(A_1)$.

$\mathring{A}_2=\emptyset$ da;

$\forall a\in A_2$ $\forall\varepsilon>0$ $\mathcal{E}(a,\varepsilon)\not\subseteq A_2$, $\mathcal{E}(a,\varepsilon)$ ingurunean A_2 multzoan ez dauden zenbaki irrazionalak daudelako; beraz, $a\notin\mathring{A}_2$ eta, halabeharrez, $a\in\partial(A_2)$; ondorioz, $A_2\subset\partial(A_2)$.

$\partial(A_2) = [-\pi,\pi]$ da;

badakigu $A_2 \subset \partial(A_2)$ dela.

Gainerako puntuekin, $\forall x \in [-\pi,\pi] \cap \mathbb{I}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}(x,\varepsilon) \not\subseteq A_2$ eta $\mathcal{E}(x,\varepsilon) \not\subseteq A_2^c$, $\mathcal{E}(x,\varepsilon)$ ingurunean zenbaki arrazionalak eta irrazionalak daudelako; beraz, $x \in \partial(A_2)$.

$\forall x \notin [-\pi,\pi] \cap \mathbb{I}$, $x \notin A_2$ izanik, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\{d(x,y), y \in A_2\} > 0$ / $\mathcal{E}(x,\varepsilon_0) \subset A_2^c$; ondorioz, $x \notin \partial(A_2)$.

A_1 eta A_2 multzoen barnealdeak eta mugak bilduz lortuko ditugu Aren barnealdea eta muga, disjuntuak direlako:

$\mathring{A} = \mathring{A_1} \cup \mathring{A_2} = \emptyset$ eta $\partial(A) = \partial(A_1) \cup \partial(A_2) = \left\{\dfrac{5n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{5\} \cup [-\pi,\pi]$.

Orain, Aren kanpoaldea lortuko dugu $\mathrm{ext}(A) = \mathbb{R} - \mathring{A} - \partial(A)$ eginez:

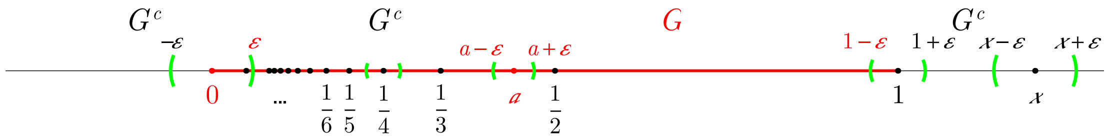
$$\mathrm{ext}(A) = \mathbb{R} - \left\{\frac{5n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{5\} \cup [-\pi,\pi] = (-\infty,-\pi) \cup (\pi,5) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+6}{n+1}, \frac{5n+1}{n}\right) \cup (6,\infty).$$

8. Aurki itzazu G multzoaren barnealdea, muga eta kanpoaldea:

$$G = [0,1] - \left\{\frac{1}{n} \,/\, n = 1,2,3\ldots\right\}.$$

Ebazpena.

$G = [0,1] - \left\{\dfrac{1}{n} \,/\, n = 1,2,3\ldots\right\} = \{0\} \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ da (ikus irudia).



$\mathring{G} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ da;

$a \in G$ bada, edo $a = 0$ edo $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, non $\dfrac{1}{n_0+1} < a < \dfrac{1}{n_0}$ baita.

$\forall a \in G$, $a \neq 0$, $\dfrac{1}{n_0+1} < a < \dfrac{1}{n_0}$ dugu; beraz, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\left\{d\left(a, \dfrac{1}{n_0}\right), d\left(a, \dfrac{1}{n_0+1}\right)\right\} > 0$, non $\mathcal{E}(a,\varepsilon_0) \subseteq G$ baita. Hortaz, $a \in \mathring{G}$.

$a = 0$ bada, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \dfrac{1}{n_0} \in \mathcal{E}(0,\varepsilon)$; beraz, $\mathcal{E}(0,\varepsilon) \not\subseteq G$ eta $0 \notin \mathring{G}$. Halabeharrez, $0 \in \partial(G)$ izango da.

$\partial(G) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n} \,/\, n = 1,2,3\ldots\right\}$ da;

$x = \dfrac{1}{n}$ bada, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{n},\varepsilon\right) \cap G^c \neq \emptyset$ da, $\dfrac{1}{n} \in G^c$ delako, eta $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{n},\varepsilon\right) \cap G \neq \emptyset$ da, $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{n},\varepsilon\right)$ ingurunean Gren infinitu zenbaki irrazional daudelako. Ondorioz, $\dfrac{1}{n} \in \partial(G)$.

$\mathrm{ext}(G) = \mathbb{R} - [0,1]$ da,

$x \in G^c$ bada, $x \neq \dfrac{1}{n}$ izanik, hots, $x < 0$ edo $x > 1$ denean, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\{d(x,1), d(x,0)\} > 0$, non $\mathcal{E}(x,\varepsilon_0) \subseteq G^c$ baita; ondorioz, $x \in \mathrm{ext}(G)$.

9. Irudika ezazu $A \subset \mathbb{R}^2$ multzoa eta esan ezazu bornatua, irekia, itxia den:
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \le x < 3 \text{ eta } 0 \le y \le 4\}$.

Ebazpena.

Distantzia eta norma euklidearrak erabiliko ditugu; beraz, bola irekiak zirkuluak izango dira.

Bornatua dela egiaztatzeko nahikoa da ikustea A multzoko puntu guztien norma $5'1$ baino txikiagoa dela, 2.17. Definizioaren arabera; bestela esanda, A multzoko puntu guztiak $B((0,0),5'1)$ bolan daudela.

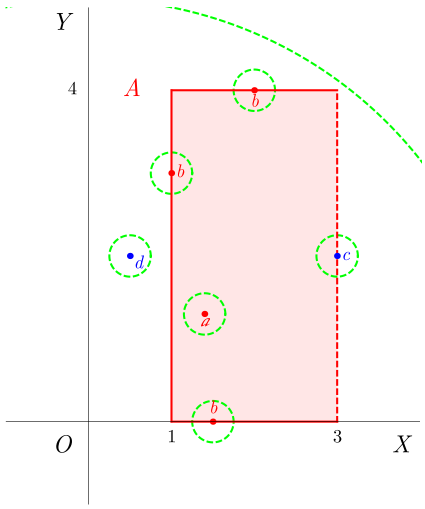
Aren barnealdea eta muga aztertzeko, planoko lau puntu mota bereiziko ditugu (ikus irudia):

a) $1 < x < 3$ eta $0 < y < 4$ koordenatuak dituztenak, laukizuzenaren barrukoak dira;

b) $x = 1$ eta $0 \le y \le 4$, edo $y = 0$ eta $1 \le x < 3$, edo $y = 4$ eta $1 \le x < 3$ koordenatuak dituztenak, laukizuzenaren hiru ertzetakoak dira;

c) $x = 3$ eta $0 \le y \le 4$ koordenatuak dituztenak, laukizuzenaren laugarren ertzekoak dira;

d) horiek betetzen ez dituztenak.



a) $1 < x < 3$ eta $0 < y < 4$ badira, $\exists \varepsilon_0 > 0 \ / \ \bar{B}((x,y),\varepsilon_0) \subseteq A$, horretarako nahikoa da $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\{|x-1|,|x-3|,|y|,|y-4|\}$ aukeratzea. Hortaz, puntu horiek guztiak Aren barne-puntuak dira.

b) $x = 1$ eta $0 \le y \le 4$, edo $y = 0$ eta $1 \le x < 3$, edo $y = 4$ eta $1 \le x < 3$ badira, $\forall \varepsilon > 0 \quad B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A$ eta $B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A^c$, bolaren puntu batzuetan $x < 1$, edo $y < 0$ edo $y > 4$ beteko delako eta beste batzuetan $1 < x < 3$ eta $0 < y < 4$ beteko direlako; beraz, puntu horiek Aren muga-puntuak dira.

c) $x = 3$ eta $0 \le y \le 4$ badira, $\forall \varepsilon > 0 \quad B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A$ da, bai eta $B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A^c$ ere, bolaren puntu batzuetan $x > 3$ beteko delako eta beste batzuetan $1 < x < 3$ eta $0 < y < 4$ beteko direlako; beraz, puntu horiek ere Aren muga-puntuak dira.

d) aurreko baldintzak ez badira betetzen, $x < 1$, edo $x > 3$, edo $y < 0$ edo $y > 4$ beteko dira; beraz, $\exists \varepsilon_0 > 0 \ / \ \bar{B}((x,y),\varepsilon_0) \subseteq A^c$, horretarako nahikoa da bolaren erradiotzat $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\{d((x,y),(a,b)) \ / \ (a,b) \in A \text{ edo } (a,b) = (3,y), 0 \le y \le 4\}$ aukeratzea. Hortaz, puntu horiek guztiak Aren kanpo-puntuak dira.

Ondorioz, esan dezakegu

$\overset{\circ}{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < x < 3 \text{ eta } 0 < y < 4\}$ dela, hots, irudiko laukizuzenaren barnealdea da;

$\partial(A) = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le y \le 4\} \cup \{(3,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le y \le 4\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \le x \le 3\} \cup$
$\cup \{(x,4) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \le x \le 3\}$ dela, hots, irudiko laukizuzenaren ertzak dira;

$\text{ext}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < 1, \text{ edo } x > 3, \text{ edo } y < 0 \text{ edo } y > 4\}$ dela, hots, gainerako guztia.

$\overset{\circ}{A} \neq A$ denez, barnealdean ez baitaude Aren hiru ertzak, A ez da multzo irekia.

Bestalde, $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial(A)$ ere ez da betetzen, Ari mugan dagoen ertz bat falta zaiolako; beraz, A ez da multzo itxia.

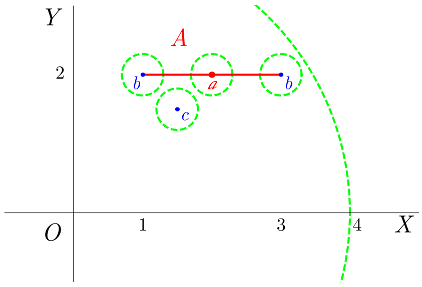
10. Irudika ezazu $\mathbb{R}^2$-ren A azpimultzoa eta esan ezazu bornatua, irekia, itxia den:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 1 < x < 3 \text{ eta } y = 2\}.$$

Ebazpena.

Distantzia eta norma euklidearrak erabiliko ditugu; beraz, bola irekiak zirkuluak izango dira.

Bornatua dela egiaztatzeko nahikoa da ikustea A multzoko puntu guztien norma 4 baino txikiagoa dela, 2.17. Definizioaren arabera; bestela esanda, A multzoko puntu guztiak $B((0,0),4)$ bolan daudela.



Aren barnealdea eta muga aztertzeko, planoko hiru puntu mota bereiziko ditugu (ikus irudia):

a) $1 < x < 3$ eta $y = 2$ koordenatuak dituztenak, muturrik gabeko segmentukoak dira;

b) $(x,y) = (1,2)$ eta $(x,y) = (3,2)$ puntuak, segmentuaren muturrak dira;

c) $x < 1$, edo $x > 3$, edo $y \neq 2$ koordenatuak dituztenak, segmentua ez gainerako guztia.

a) $1 < x < 3$ eta $y = 2$ badira, $\forall \varepsilon > 0$ $B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A$, bai eta $B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A^c$ ere, bolaren puntu batzuetan $y < 2$ edo $y > 2$ beteko delako eta beste batzuetan $1 < x < 3$ eta $y = 2$ beteko direlako; beraz, puntu horiek Aren muga-puntuak dira.

b) $(x,y) = (1,2)$ eta $(x,y) = (3,2)$ badira, $\forall \varepsilon > 0$ $B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A$ eta $B((x,y),\varepsilon) \not\subseteq A^c$, lehen bezala, bolaren puntu batzuetan $y \neq 2$ beteko delako eta beste batzuetan $1 < x < 3$ eta $y = 2$ beteko direlako; beraz, puntu horiek ere Aren muga-puntuak dira.

c) $x < 1$, edo $x > 3$, edo $y \neq 2$ badira, $\exists \varepsilon_0 > 0 \,/\, B((x,y),\varepsilon_0) \subseteq A^c$, horretarako nahikoa da $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\{d((x,y),(a,b)) \;/\; (a,b) \in A \text{ edo } (a,b) = (1,2),(3,2)\}$ aukeratzea. Hortaz, puntu horiek guztiak Aren kanpo-puntuak dira.

Ondorioz, esan dezakegu

$\overset{\circ}{A} = \emptyset$ dela, hots, ez dago barnealderik;

$\partial(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 1 \leq x \leq 3 \text{ eta } y = 2\}$ dela, hots, segmentu osoa, muturrak barne;

$\text{ext}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x < 1 \text{ edo } x > 3 \text{ eta } y = 2, \text{ edo } y \neq 2\}$ dela, hau da, segmentu osoa kenduta gainerako plano guztia.

$\overset{\circ}{A} \neq A$ denez, barnealdea hutsa delako, A ez da multzo irekia.

Bestalde, $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial(A)$ ere ez da betetzen, Ari mugan dauden segmentuaren muturrak falta zaizkiolako; beraz, A ez da multzo itxia.

2.4. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Determina itzazu multzo hauen barnealdea, muga eta kanpoaldea:

   1) $A=\{a,b,c\}$; 2) $A=\mathbb{N}$;
   3) $A=\mathbb{Q}$; 4) $A=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.
   5) $A=(-1,1]\cap\mathbb{Q}$; 6) $A=([-1,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\{2\}$.

2. Froga ezazu $\mathbb{R}$ multzoaren azpimultzo ireki ez-huts guztiek zenbaki arrazionalak eta irrazionalak badauzkatela.

3. Froga ezazu A multzoa itxia bada eta bere baitan $[0,1]$ tarteko zenbaki arrazional guztiak baditu, $[0,1]\subset A$ betetzen dela.

4. Froga ezazu $a\in\mathbb{R}$ $A\subseteq\mathbb{R}$ multzoaren goi-bornea bada eta, bestalde, $\forall\varepsilon>0$ $\mathcal{E}(a,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ bada, $a=\sup(A)$ izango dela.

5. Izan bedi $A\subseteq\mathbb{R}$ multzo irekia, ez-hutsa eta bornatua. $a=\inf(A)$ eta $b=\sup(A)$ badira, egiazta ezazu $a\notin A$ eta $b\notin A$ beteko direla.

6. Esan ezazu baieztapen hauek egiazkoak ala faltsuak diren $\mathbb{R}$ multzoan, eta zergatik:

   a) multzo finitu oro itxia da.

   b) Multzo batek maximoa badu, itxia da.

   c) Multzo itxi orok baditu maximoa eta minimoa.

7. Izan bitez $\mathbb{R}^2$ multzoa eta $\|\cdot\|:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ aplikazioa, non

   $$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

   baita. Froga ezazu aplikazio hori norma dela (norma euklidearra).

8. $(E,\|\cdot\|)$ espazio normaduna emanik, froga ezazu $d(x,y)=\|x-y\|$ aplikazioa distantzia dela (distantzia induzitua).

9. Kalkula ezazu $(1,3,0)$ eta $(-1,4,5)$ puntuen arteko distantzia, 2.14.1. Adibideko hiru normek induzitutako distantzien bidez.

10. Irudika itzazu $\mathbb{R}^2$ espazioaren azpimultzo hauek, eta esan ezazu irekiak, itxiak edo bornatuak diren:

    1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2-y^2<1\}$;

    2) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\geq 1\}$;

    3) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$;

    4) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x=5 \text{ eta } 1\leq y\leq 3\}$;

    5) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ d((0,3),(x,y))>1\}$.

3. Segidak $\mathbb{R}$ multzoan

3.1. SEGIDAK. SEGIDEN LIMITEAK

3.1. Definizioa. *$\mathbb{R}$ multzoko* segida *bat $\mathbb{N}$ multzotik $\mathbb{R}$ multzora doan aplikazio bat da, non $n \in \mathbb{N}$ zenbaki arruntari $a_n \in \mathbb{R}$ elementua esleitzen zaion.*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n \in \mathbb{R}.$$

$f(\mathbb{N}) = \{a_n\}$ segida $\mathbb{R}$-ren elementuen multzoa da; beraz, segida $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ azpimultzo gisa har dezakegu.

Segidaren elementuei gai *deritzegu eta $a_n \in \mathbb{R}$ elementuari segidaren* gai orokor *deritzogu.*

Segida batek bi ezaugarri ditu: alde batetik, segidak infinitu gai ditu eta, beste aldetik, “ordena” batean daude ordenaturik, {lehenengoa, bigarrena, hirugarrena, ...}.

3.2. Adibidea. $\mathbb{R}$ multzoan segida hauek definituko ditugu:
$\{a_n\} = \{\sin n\} = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3, ..., \sin n, ...\}$.
$\{b_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...\}$.
$\{c_n\} = \{1\} = \{1, 1, 1, ..., 1, ...\}$, segida konstantea da.

3.3. Definizioa. *$\{b_n\}$ segida $\{a_n\}$ segidaren* azpisegida *da $\{b_n\}$ segidaren gai guztiak $\{a_n\}$ segidaren gaiak badira.*

Beste era batean, $\{b_n\}$ segida $\{a_n\}$ segidaren azpisegida da $\{b_n\} \subseteq \{a_n\}$ betez gero.

3.4. Adibidea. $\{a_n\} = \{\sin n\}$ segidaren bi azpisegida:
$\{d_n\} = \{\sin n \ / \ \sin n > 1/2\} = \{\sin 1, \sin 2, \sin 7, \sin 8, \sin 14, \sin 15, ...\}$;
$\{e_n\} = \{\sin n \ / \ \sin n < -1/2\} = \{\sin 4, \sin 5, \sin 10, \sin 11, \sin 12, \sin 17, ...\}$.

3.5. Definizioa. *$\{a_n\}$ segida* konbergentea *da $\mathbb{R}$ multzoan $l \in \mathbb{R}$ badago, non l-ren edozein ingurune irekitan $\{a_n\}$ segidaren gai batetik aurrera segidaren gai guztiak dauden.*

Kasu horretan l-ri segidaren limite *deritzogu eta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

idatziko dugu. Batzuetan, $\{a_n\} \to l$ ere adieraziko dugu.

Definiziotik zuzenean adierazpen hau atera dezakegu[1]:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad a_n \in \mathcal{E}(l, \varepsilon).$$

Bestalde, $a_n \in \mathcal{E}(l, \varepsilon) \Longleftrightarrow d(l, a_n) < \varepsilon$ dugu. Beraz,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad d(l, a_n) < \varepsilon.$$

Azkenik, $\mathbb{R}$ multzoan $d(x, y) = |y - x|$ distantzia induzitua dugunez, honela idatz dezakegu:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad |a_n - l| < \varepsilon.$$

1. $n_0(\varepsilon)$ adierazpenak esan nahi du existitzen den n_0 hori ε balioaren mende dagoela.

3.6. Adibidea. Froga dezagun $\left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}$ segidaren limitea 2 dela.

$\mathbb{R}$ multzoan distantzia balio absolutuaren bidez kalkulatzen denez, aurreko adierazpena honela geratuko da:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2 \iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\,/\,\forall n\geq n_0(\varepsilon) \quad \left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<\varepsilon.$$

$n_0(\varepsilon)$ aurkitu behar dugu $\left|\dfrac{2n+1}{n}-2\right|<\varepsilon$ izan dadin, $\forall n\geq n_0(\varepsilon)$.

Sinplifika dezagun adierazpena: $\left|\dfrac{2n+1}{n}-2\right|=\left|\dfrac{2n+1-2n}{n}\right|=\left|\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n}>0$ delako.

Orain, $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ izan dadin, nahikoa da $\dfrac{1}{\varepsilon}<n$ izatea eta, orduan, $n_0(\varepsilon)=\min\left\{n\in\mathbb{N}\,/\,\dfrac{1}{\varepsilon}<n\right\}$ aukera dezakegu $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ bete dadin, $\forall n\geq n_0(\varepsilon)$.

$\forall\varepsilon>0$ minimo hori existitzen denez 1.4. Propietateagatik, esan dezakegu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=2$ dela.

3.7. Definizioa. $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *segida* dibergentea *da jatorriaren, O-ren, ingurune ireki guztietarako, $\{a_n\}$ segidaren gai batetik aurrera segidaren gai guztiak kanpoaldean badaude. Hori honela adieraziko dugu:*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty \iff \forall K>0 \quad \exists n_0(K)\in\mathbb{N}\,/\,\forall n\geq n_0(K) \quad a_n\in\operatorname{ext}(\mathcal{E}(O,K)).$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty \iff \forall K>0 \quad \exists n_0(K)\in\mathbb{N}\,/\,\forall n\geq n_0(K) \quad d(O,a_n)>K.$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty \iff \forall K>0 \quad \exists n_0(K)\in\mathbb{N}\,/\,\forall n\geq n_0(K) \quad |a_n|>K.$$

3.8. Definizioa. $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *segida* oszilatzailea *da ez bada konbergentea, ezta dibergentea ere.*

3.2. SEGIDA KONBERGENTEAK

3.9. Propietatea. $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *segida konbergentea bada, limite bakarra du.*

3.10. Propietatea. $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *segida konbergentea bada, horren azpisegida guztiak konbergenteak dira eta segidaren limite bera dute.*

3.11. Propietatea. $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *segida konbergentea bada, $\{a_n\}$ segida bornatua da.*

3.12. Propietatea. $\{a_n\}$ *segidaren limitea ez bada zero, segidaren gai batetik aurrera gai guztiek limitearen zeinu bera dute.*

3.13. Propietatea. $\{a_n\}$ *eta* $\{b_n\}$ *segiden limitea l bada eta* $\forall n\geq n_0$ $a_n\leq c_n\leq b_n$ *betetzen bada, $\{c_n\}$ segida ere konbergentea da eta horren limitea l da.*

3.14. Adibidea. $\{\sin n\}$ segida oszilatzailea da.

Har dezagun 3.4. Adibideko $\{d_n\}=\{\sin n\,/\,\sin n>1/2\}$ azpisegida; azpisegida horren l_1 limiteak $l_1\geq 1/2$ bete beharko luke, existitzekotan.

Orain, 3.4. Adibideko $\{e_n\}=\{\sin n\,/\,\sin n<-1/2\}$ azpisegida hartuko dugu; antzeko eran, azpisegida horren l_2 limiteak, existitzen bada, $l_2\leq -1/2$ beteko luke.

Beraz, bi azpisegidek ezin dute limite bera izan. Hortaz, $\{\sin n\}$ segidak ezin du limiterik izan 3.10. Propietaearen arabera, hots, ez da konbergentea.

Ez da dibergentea, segidaren gai guztiak $\mathcal{E}(0,2)=(-2,2)$ ingurunean daudelako.

Ondorioz, $\{\sin n\}$ segida oszilatzailea da.

3.2.1. Segida monotonoak

$\mathbb{R}$ multzoan $\leq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioa dago definiturik. Atal honetan ordena-erlazioak segiden jokaeran duen eragina aztertuko dugu.

3.15. Definizioa. *Izan bedi* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *segida bat,*

1. $\{a_n\}$ segida monotono gorakorra *da* $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq a_{n+1}$ *betetzen badu.*
2. $\{a_n\}$ segida hertsiki monotono gorakorra *da* $\forall n \geq n_0 \quad a_n < a_{n+1}$ *betetzen badu.*
3. $\{a_n\}$ segida monotono beherakorra *da* $\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n+1}$ *betetzen badu.*
4. $\{a_n\}$ segida hertsiki monotono beherakorra *da* $\forall n \geq n_0 \quad a_n > a_{n+1}$ *betetzen badu.*

3.16. Adibideak.
$\{1\}$ segida konstantea monotono gorakorra eta beherakorra da, definizioen arabera.
$\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da.
$\left\{\frac{n+1}{n}\right\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$ segida hertsiki monotono beherakorra da.

3.17. Teorema. *Segida monotono bornatu guztiak konbergenteak dira.*

3.18. Adibidea. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ segida konbergentea da.

Froga daiteke, alde batetik, segida hori hertsiki monotono gorakorra dela eta, beste aldetik, $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ betetzen dela. Hortaz, 3.17. Teorema aplikatuz, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ segida konbergentea da. Horren limitea hau da:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828182...$$

3.3. SEGIDEN ARTEKO ERAGIKETAK ETA LIMITEAK. INDETERMINAZIOAK

3.19. Definizioa. $\{a_n\}$ *eta* $\{b_n\}$ *segidak emanik, eragiketa hauek definituko ditugu:*

1. *Batuketa/Kenketa:* $\{a_n\} \pm \{b_n\} := \{a_n \pm b_n\}$.
2. *Biderketa:* $\{a_n\} \times \{b_n\} := \{a_n \cdot b_n\}$.
3. *Zatiketa:* $\{a_n\} \div \{b_n\} := \{a_n \div b_n\}, \quad b_n \neq 0$ *izanik.*
4. *Logaritmoa:* $\log_K\{a_n\} := \{\log_K a_n\}, \quad K > 0, \quad K \neq 1$ *eta* $a_n > 0$ *izanik.*
5. *Esponentziala:* $K^{\{a_n\}} := \{K^{a_n}\}, \quad K > 0$ *izanik.*
6. *Berreketa:* $\{a_n\}^{\{b_n\}} := \{a_n^{b_n}\}, \quad a_n > 0$ *izanik.*

Oro har, “segiden arteko eragiketen limitea = segiden limiteen arteko eragiketa” betetzen da. Baina, salbuespenak daude, eta eragiketa bakoitzak bere berezitasunak ditu. Bestalde, eragiketan limite infinitua duen segida sartzen badugu, limitearen kalkulua zaildu egin daiteke. Limite finituen kasuan, $\{a_n\} \longrightarrow a$ eta $\{b_n\} \longrightarrow b$ direla pentsatuko dugu; eta limite infinituen kasuan, limiteak $-\infty$ eta $+\infty$ direla.

Tauletan agertzen diren balioak segiden arteko eragiketen limiteak dira. Galdera-markekin adierazi nahi da kasu horietan limite indeterminatuak direla, hots, ezin dela “lege orokorra” aplikatu.

Batuketa: $\{a_n + b_n\}$,

$+$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Kenketa: $\{a_n - b_n\}$,

$-$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	**?**	$-\infty$	$-\infty$
a	$+\infty$	$a-b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**

Biderketa: $\{a_n \cdot b_n\}$,

$\times$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$0<b$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	$0<ab$	0	$ab<0$	$-\infty$
$a=0$	**?**	0	0	0	**?**
$0<a$	$-\infty$	$ab<0$	0	$0<ab$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Zatiketa: $\{a_n \div b_n\}$, $b_n \neq 0$ izanik,

$\div$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$0<b$	$+\infty$
$-\infty$	**?**	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	**?**
$a<0$	0	$0<a/b$	$\pm\infty$	$a/b<0$	0
$a=0$	0	0	**?**	0	0
$0<a$	0	$a/b<0$	$\pm\infty$	$0<a/b$	0
$+\infty$	**?**	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	**?**

Logaritmoa: $\{\log_K a_n\}$, $K>0$, $K\neq 1$ eta $a_n>0$ izanik,

$\log_K a_n$	$a=0$	$0<a$	$+\infty$
$0<K<1$	$+\infty$	$\log_K a$	$-\infty$
$1<K$	$-\infty$	$\log_K a$	$+\infty$

Esponentziala: $\{K^{a_n}\}$, $K>0$ izanik,

K^{a_n}	$-\infty$	a	$+\infty$
$0<K<1$	$+\infty$	K^a	0
$K=1$	1	1	1
$1<K$	0	K^a	$+\infty$

Berreketa: $\{a_n^{b_n}\}$, $a_n>0$ izanik,

$a_n^{b_n}$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$0<b$	$+\infty$
$a=0$	$+\infty$	$+\infty$	**?**	0	0
$0<a<1$	$+\infty$	a^b	1	a^b	0
$a=1$	**?**	1	1	1	**?**
$1<a$	0	a^b	1	a^b	$+\infty$
$+\infty$	0	0	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Tauletan ikusten denez, kasu batzuetan ezin da lege orokorra aplikatu. Kasu horiek **?** galdera-markarekin adierazi ditugu eta *indeterminazio* deritze. Hauek dira:

batuketan, $\infty - \infty$; biderketan, $\mathbf{0}\cdot\infty$; zatiketan, $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ eta $\dfrac{\infty}{\infty}$ eta berreketan, $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{1}^{\infty}$ eta $\infty^{\mathbf{0}}$. Beraz, zazpi indeterminazio mota ditugu.

3.4. INDETERMINAZIOAK EBAZTEKO METODOAK

Atal honetan indeterminazioak ebazteko zenbait metodo aztertuko ditugu.

3.4.1. Baliokidetasuna

3.20. Definizioa. $\{a_n\}$ *eta* $\{b_n\}$ *segidak* baliokideak *dira* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$ *denean.*

Honela adieraziko dugu:

$$\{a_n\}\sim\{b_n\}\iff\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1.$$

Baliokidetasunak limitera hurbiltzeko “abiadura” edo neurtzen du. Bi segida baliokide “abiadura berean” hurbiltzen dira limite berera.

3.21. Propietatea. $\{a_n\}$ *eta* $\{b_n\}$ *segida baliokideak badira, limite berdina dute.*

Horrek ez du esan nahi limite bera duten bi segida baliokideak direnik, hurrengo adibidean ikusiko den bezala.

3.22. Adibidea. Ikus dezagun $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ eta $\left\{\sin\dfrac{1}{n}\right\}$ segidak baliokideak diren, edo ez.

Hirurek dute 0 limitea. Goazen ikustera ea baliokideak diren.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$. Beraz, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ eta $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ segidak ez dira baliokideak.

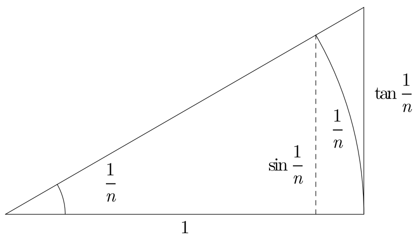
Irudian ikus daiteke $\sin\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}<\tan\dfrac{1}{n}$ betetzen dela.

Hortik, zati $\sin\dfrac{1}{n}$ eginez, $1<\dfrac{1/n}{\sin\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{\cos\frac{1}{n}}$ aterako dugu;

eta hortik, alderantzizkoak kalkulatuz, $\cos\dfrac{1}{n}<\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}<1$.

$\lim_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}1=1$ direnez, 3.13. Propietatea erabiliz,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}=1$ aterako dugu.



Orduan, esan dezakegu $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ eta $\left\{\sin\dfrac{1}{n}\right\}$ segida baliokideak direla.

3.23. Definizioa.

1. $\{a_n\}$ *segida* infinitesimala *da* $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ *bada.*
2. $\{a_n\}$ *segida* infinitua *da* $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ *bada.*

Hona hemen zenbait segida baliokide. Azpimarratzekoa da bi kasu bereizten ditugula eta ezin direla kasu horietako segidak nahasi.

1. **Infinitesimalak**: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ betetzen da.

   $\{a_n\}\sim\{\sin a_n\}\sim\{\tan a_n\}\sim\{\arcsin a_n\}\sim\{\arctan a_n\}$;

   $\{1-\cos a_n\}\sim\left\{\dfrac{a_n^2}{2}\right\}$;

   $\{a_n\}\sim\{\ln(1+a_n)\}$.

   Aurreko baliokidetzan, $b_n=1+a_n$ aldaketa eginez, honela idatz dezakegu baliokidetza: $\{b_n-1\}\sim\{\ln b_n\}$, $\lim_{n\to\infty}b_n=1$ izanik.

2. **Infinituak**: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ betetzen da.

$\{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0\} \sim \{a_k n^k\}$;

$\{\ln(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0)\} \sim \{\ln a_k n^k\}$, $a_k > 0$ izanik;

Stirling-en baliokidetza: $\{n!\} \sim \{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\}$.

3.24. Ordezkapen-printzipioa. *Segida baten gai orokorraren adierazpenean, biderkagai edo zatitzaile bat bere baliokide batez ordezka daiteke segidaren limitea aldatu gabe.*

3.25. Adibidea. Kalkula dezagun $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1}\right\}$ segidaren limitea.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1} \overset{1}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt[n]{10}}{\ln\sqrt[n]{100}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln 10}{\frac{1}{n}\ln 100} = \frac{\ln 10}{2\ln 10} = \frac{1}{2}.$$

1 berdintzan, $\{b_n - 1\} \sim \{\ln b_n\}$ baliokidetza erabili dugu, zenbakitzailean $b_n = \sqrt[n]{10}$ eta izendatzailean $b_n = \sqrt[n]{100}$ hartuz, bi kasuetan $\{\sqrt[n]{10}\} \longrightarrow 1$ eta $\{\sqrt[n]{100}\} \longrightarrow 1$ betetzen direlako.

3.26. Adibidea. Adibide gisa azter dezakegu polinomioen arteko zatiduraren limitearen kasua.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \overset{1}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_k}{b_l}n^{k-l} = \begin{cases} \infty, & k > l \text{ bada}, \\ \dfrac{a_k}{b_l}, & k = l \text{ bada}, \\ 0, & k < l \text{ bada}. \end{cases}$$

1 berdintzan, zenbakitzailean $\{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0\} \sim \{a_k n^k\}$ eta izendatzailean $\{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0\} \sim \{b_l n^l\}$ baliokidetzak erabili ditugu.

3.4.2. Infinituen ordenak

Infinituen kasuan ere esan daiteke ez direla "abiadura" berdinean hurbiltzen infinitura; "hurbiltze abiadura" horri infinituaren *ordena* deritzogu. Lau ordena hauek bereiziko ditugu, $q, p, r > 0$ eta $b, k > 1$ direnean eta $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ betetzen denean:

$$\underset{\text{logaritmikoa}}{\{(\log_b a_n)^q\}} \quad <<< \quad \underset{\text{polinomikoa}}{\{(a_n)^p\}} \quad <<< \quad \underset{\text{esponentziala}}{\{k^{a_n}\}} \quad <<< \quad \underset{\text{berreketa}}{\{(a_n)^{r a_n}\}}$$

Infinituen ordena erabiltzeko, limitea zatiketa moduan idatziko dugu.

3.27. Adibidea. Kalkula dezagun $\{\sqrt[n]{n}\}$ segidaren limitea.

Erroketa berreketa moduan idatziz, $\sqrt[n]{n} = n^{1/n}$, eta limitea zuzenean kalkulatzen saiatzen bagara, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \infty^0$ indeterminazioa dugu.

Indeterminazioa ebazteko, logaritmo nepertarra erabil dezakegu, eragiketen atalean ikusi dugunez, logaritmoek ez dutelako indeterminaziorik sortzen.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = l$ bada, $\ln l = \ln\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$ da, izendatzaileko infinituaren ordena goragokoa delako. Hortik, $\ln l = 0 \Longrightarrow l = e^0 = 1$ aterako dugu.

Beraz, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ da.

3.4.3. Stolz-en irizpideak

3.28. Teorema. *$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segidak emanik, baldintza hauek betetzen badira:*

1. *$\{b_n\}$ hertsiki monotonoa bada,*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ *existitzen bada eta*
3. *hauetako bat ere betetzen bada,*
   - *3.1.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;
   - *3.2.* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;
   - *3.3.* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Stolzen irizpideak dio berdintza hau beteko dela:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

3.29. Adibidea. Kalkula dezagun $\left\{ \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} \right\}$ segidaren limitea.

$\{b_n\} = \{\ln n\}$ segida monotono gorakorra da eta $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ da. Beraz, hiru hipotesietatik bi betetzen dira, 1. eta 3.3. Kalkula dezagun 2. hipotesiko limitea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

2. hipotesiko limitea existitzen denez, Stolzen irizpideak esaten digu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$ dela.

3.4.4. e zenbakiaren erabilera

e zenbakia $\left\{ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \right\}$ segidaren bidez definitu dugu 3.18. Adibidean. Segida horretan aldaketa batzuk eginez limitea ez da aldatuko edo gutxi aldatuko da. Beste aldetik, segida horretan ematen diren egoerak orokor daitezke e limite bera lortuz. Hona hemen emaitza nagusiak:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n; \qquad e^k = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n+l}\right)^{n+m}, \quad \forall m,l \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}; \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}.$$

3.30. Adibidea. $\left\{ \left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^{n+5} \right\}$ segidaren limitea kalkulatuko dugu.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+3}\right)^{n+5} = e^{-2}.$$

3.5. CAUCHY-REN SEGIDAK

3.31. Definizioa. *$\{a_n\}$ segida* Cauchyren segida *dela esango dugu baldintza hau betetzen badu:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall p,q \geq n_0(\varepsilon) \quad d(a_p,a_q) < \varepsilon.$$

3.32. Teorema. *Cauchyren irizpidea segidetarako*
$\mathbb{R}$ *multzoan, $\{a_n\}$ segida konbergentea da baldin eta soilik baldin $\{a_n\}$ Cauchyren segida bada.*

3.6. SEGIDA ERREPIKARIAK

3.33. Definizioa. $\{a_n\}$ segida errepikaria *da ekuazio errepikari baten bidez definiturik badago, non segidaren gai bat aurreko gai batzuen funtzioan ematen baita.*

Segida errepikariek duten arazoa da gai bat ezagutzeko aurreko guztiak ezagutu behar izatea. Hala ere, gai orokorra ezagutu gabe, batzuetan, segida konbergentea den ala ez jakin daiteke, eta konbergentea denean horren limitea kalkulatu.

3.34. Adibidea. *Fibonacci-ren segida*
$a_1 = 1$ eta $a_2 = 1$ emanik, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ defini dezakegu.

Definiziotik aterako ditugu Fibonacciren segidaren lehenengo gaiak:

$$\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...\}.$$

Segida hori dibergentea da.

Baina, har dezagun, orain, $\{b_n\}$ segida, non $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ baita. Lehenengo gaiak hauek dira:

$b_1 = \dfrac{1}{1} = 1$, $b_2 = \dfrac{2}{1} = 2$, $b_3 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$, $b_4 = \dfrac{5}{3} = 1{,}666...$, $b_5 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$, $b_6 = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$, $b_7 = \dfrac{21}{13} = 1{,}615...$, $b_8 = \dfrac{34}{21} = 1{,}619...$

Ba al da $\{b_n\}$ segida konbergentea? Eta, horrela bada, zein izango da horren limitea?

Alde batetik, $\{b_n\}$ segida bornatua da; hori 1.5. Indukzio-Printzipioz froga daiteke:

Goiko zerrendan ikus daiteke $n = 1,2,3...$ kasuetan $1 \leq b_1, b_2, b_3... \leq 2$ betetzen dela.

Pentsatuz $1 \leq b_n \leq 2$ betetzen dela, ikusiko dugu $1 \leq b_{n+1} \leq 2$ ere beteko dela:

$b_{n+1} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = 1 + \dfrac{1}{b_n}$ betetzen da.

Hipotesiz, $1 \leq b_n \leq 2$ dugu; beraz, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{b_n} \leq 1$ dugu. Aurreko desberdintza erabiliz,

$b_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{b_n} \leq 1 + 1 = 2$ lortuko dugu.

Ondorioz, 1.5. Indukzio-Printzipioaren arabera, $\{b_n\}$ segida bornatua da; berez, $1 \leq b_n \leq 2$ betetzen da $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\{b_n\}$ segidaren gaiak bi azpisegidatan bana ditzakegu, posizio bakoitietan daudenak batean eta posizio bikoitietan daudenak bestean:

$\{b_{2n-1}\} = \left\{\dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right\} = \left\{1, \dfrac{3}{2} = 1{,}5, \dfrac{8}{5} = 1{,}6, \dfrac{21}{13} = 1{,}615...\right\}$ gorakorra da; eta

$\{b_{2n}\} = \left\{\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right\} = \left\{2, \dfrac{5}{3} = 1{,}666..., \dfrac{13}{8} = 1{,}625, \dfrac{34}{21} = 1{,}619...\right\}$ beherakorra da.

Bi azpisegiden gaiek $b_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{b_n}$ betetzen dute. Berdintzaren bi ataletan limitea kalkulatuz, $b = 1 + \dfrac{1}{b}$ beteko da; eta hortik, $b^2 = b + 1$ edo $b^2 - b - 1 = 0$ ekuazioa lortuko dugu; ekuazioaren soluzioak hauek dira: $b = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; soluzio negatiboa baztertu behar dugu $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n > 0$ delako.

Hortaz, bi azpisegiden limitea $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ da. Hortik froga daiteke $\{b_n\}$ segidaren limitea ere b dela. Zenbaki hori ϕ izendatzen da, eta horren zenbakizko balioa hau da:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988...$$

3.35. Adibidea. $\{a_n\}$ segida honela definituko dugu: $a_1 = 5/2$, $5a_{n+1} = a_n^2 + 6$. Segida konbergentea dela frogatuko dugu eta, geroago, horren limitea kalkulatuko dugu.

$$a_1 = \frac{5}{2} = 2,5, \quad a_2 = \frac{49}{20} = 2,45, \quad a_3 = \frac{4801}{2000} = 2,4005, \quad a_4 = \frac{47049601}{20000000} = 2,3524...$$

Konbergentea dela frogatzeko segida monotonoa eta bornatua dela frogatuko dugu.

$n = 1$ denean, $2 < a_1 < 3$ betetzen da.

$2 < a_n < 3$ betetzen dela pentsatuz, $2 < a_{n+1} < 3$ beteko dela frogatuko dugu.

$2 < a_n < 3$ bada, $\dfrac{2^2+6}{5} < \dfrac{a_n^2+6}{5} < \dfrac{3^2+6}{5}$ ere beteko da, hiru ataletan eragiketa berak eginez. Erdiko atalean a_{n+1} dugu; beraz, sinplifikatu eta gero, $2 < a_{n+1} < 3$ izango dugu.

Ondorioz, 1.5. Indukzio-Printzipioa erabiliz, $\{a_n\}$ segida bornatua da.

Orain, segida monotono beherakorra dela ikusiko dugu: $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{5}(a_n^2 + 6) - a_n = \dfrac{1}{5}(a_n^2 - 5a_n + 6) = \dfrac{1}{5}(a_n - 3)(a_n - 2) < 0$ da, $2 < a_n < 3$ delako.

Hortaz, $\{a_n\}$ segida monotono beherakorra eta bornatua da eta, 3.17. Teorema erabiliz, konbergentea. Hau da, $\{a_n\}$ segidaren limitea existitzen da. Demagun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dela. Ekuazio errepikariaren bi ataletan limitea kalkulatzen badugu:

$$\lim_{n\to\infty} 5a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n^2 + 6).$$

Eta limitea ordezkatuz,

$$5a = a^2 + 6.$$

Hortik, $a^2 - 5a + 6 = 0$. Bi aukera ditugu, $a = 2$ edo $a = 3$ izatea. $a = 3$ ezin da izan, $\{a_n\}$ segida beherakorra delako. Orduan, aukera bakarra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ da.

3.7. ARIKETA EBATZIAK

1. Froga ezazu segida monotono beherakor eta bornatu guztiak konbergenteak direla.

   Froga.

   Frogatuko dugu segidaren beherena dela segidaren limitea.

   Segida behetik bornatua denez, $\exists \beta = \inf(a_n)$ segidaren behe-muturra eta hau betetzen du:

$$(1.23.2.1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \beta \le a_n \quad \text{eta}$$

$$(1.23.2.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \beta \le a_{n_1} < \beta + \varepsilon.$$

   Bestalde, $\{a_n\}$ segida monotono beherakorra denez, hau ere beteko da:

$$(3.15.3) \quad \forall n \ge n_2 \quad a_{n_2} \ge a_n.$$

   $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2\}$ aukeratuz, hirurak elkar ditzakegu eta hau idatzi:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \ge n_0(\varepsilon) \quad \beta - \varepsilon < \beta \le a_n \le a_{n_0} < \beta + \varepsilon$$

   edo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \ge n_0(\varepsilon) \quad a_n \in (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$$

   edo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \ge n_0(\varepsilon) \quad a_n \in \mathcal{E}(\beta, \varepsilon)$$

   edo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \beta.$$

2. Froga ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$ dela, $a_n > 0$ izanik.

   Froga.

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bada,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \ge n_0(\varepsilon) \quad |a_n| < \varepsilon.$$

   $a_n > 0$ denez, $|a_n| = a_n$ da; beraz, $\forall n \ge n_0(\varepsilon)$ $a_n < \varepsilon$; hortik, bi ataletan logaritmo nepertarra hartuz, $\forall n \ge n_0(\varepsilon)$ $\ln a_n < \ln \varepsilon$.

   Baina, ε oso txikia hartuz, $\varepsilon < 1$ denean, $\ln \varepsilon < 0$ zenbaki negatiboa eta oso txikia egingo da. $K = \ln \varepsilon$ eginez, ε edozein denez, K ere edozein da, eta honela geratuko da:

$$\forall K < 0 \quad \exists n_0(K) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \ge n_0(K) \quad \ln a_n < K.$$

   Existitzen den $n_0(K)$ hori $n_0(\varepsilon)$ bera da, $a_n < \varepsilon$ eta $\ln a_n < K$ desberdintzak gai beretik aurrera betetzen direlako.

   Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$ da.

3. Izan bedi $\{b_n\}$ segida bat, non $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \ne 0$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \ne 0$ baita. Froga ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$ dela.

   Froga.

   Pentsatuko dugu $b > 0$ dela. Orduan, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ bada,

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon') \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \ge n_0(\varepsilon') \quad |b_n - b| < \varepsilon'.$$

Hortik, $b-\varepsilon' < b_n < b+\varepsilon'$ izango da. ε' txikia dela pentsatzen dugunez, $\varepsilon' < b$ aukera dezakegu eta, orduan, $0 < b-\varepsilon' < b_n < b+\varepsilon'$ izango dugu. Hortik, $0 < \dfrac{1}{b_n} < \dfrac{1}{b-\varepsilon'}$; bestalde, $0 < b-\varepsilon' < b$ ere betetzen denez, $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{b-\varepsilon'}$ dugu.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$ izango da, baldin eta soilik baldin,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon.$$

Desberdintzaren ezkerreko atala garatuz, $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \left|\dfrac{b-b_n}{b\cdot b_n}\right| = \dfrac{|b_n-b|}{|b\cdot b_n|} < \dfrac{\varepsilon'}{(b-\varepsilon')^2}$ dugu.

Hortaz, nahikoa da $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{(b-\varepsilon')^2} > 0$ aukeratzea; eta hori edozein zenbaki positibo da, ε' edozein zenbaki positibo delako.

Existitzen den $n_0(\varepsilon)$ hori $n_0(\varepsilon')$ bera da, $|b_n-b| < \varepsilon'$ eta $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| < \varepsilon$ desberdintzak gai beretik aurrera betetzen direlako.

Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$ da.

4. Kalkula dezagun polinomioen erroketen limitea: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}$, $a_k > 0$ izanik.

Froga.

Limitea zuzenean kalkulatzen badugu, erroketa berreketa moduan idatziz, ∞^0 indeterminazioa agertuko zaigu. Indeterminazioa ebazteko, logaritmo nepertarra erabiliko dugu, ez duelako indeterminaziorik sortzen.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} = l$ bada,

$$\ln l = \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} \overset{(1)}{=}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0)}{n} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_k n^k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_k + \ln n^k}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_k}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{k \ln n}{n} \overset{(3)}{=} 0 + 0 = 0$$

(1) berdintzan, logaritmoen propietatea erabili dugu errotzailea logaritmotik atera eta zatitzaile moduan jarriz.

(2) berdintzan, $\{\ln(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0)\} \sim \{\ln a_k n^k\}$ baliokidetza erabili dugu.

(3) berdintzan, $\{\ln n\}$ eta $\{n\}$ infinituen ordenak konparatu ditugu bigarren limitea 0 dela esateko.

Hortaz, $\ln l = 0 \Longrightarrow l = e^0 = 1$ dugu, hots,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} = 1 \quad \text{da.}$$

Kasu partikular gisa, polinomioaren maila 0 denean, hau da, polinomioa konstante positibo bat denean, $a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 = a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dugu.}$$

5. Kalkula dezagun $\{a^n\}$ segidaren limitea, $a \in \mathbb{R}$ izanik.

Ebazpena.

Hiru kasu nabarmenak dira: $a = 0$, $a = 1$ eta $a = -1$.

$a = 0$ denean, segidaren gai guztiak 0 dira: $a_1 = 0^1 = 0$, $a_2 = 0^2 = 0$, $a_3 = 0^3 = 0...$ Beraz, $\{0\}$ segida konstantea dugu, eta horren limitea 0 da.

$a = 1$ denean, segidaren gai guztiak 1 dira: $a_1 = 1^1 = 1$, $a_2 = 1^2 = 1$, $a_3 = 1^3 = 1...$ Beraz, $\{1\}$ segida konstantea dugu, eta horren limitea 1 da.

$a = -1$ denean, segidaren gaiak -1 edo 1 dira, txandaka: $a_1 = (-1)^1 = -1$, $a_2 = (-1)^2 = 1$, $a_3 = (-1)^3 = -1$, $a_4 = (-1)^4 = 1$, ... Beraz, $\{(-1)^n\}$ segidak bi azpisegida konstante ditu, eta bataren limitea -1 da eta bestearen limitea 1 da. Hortaz, ezin da konbergentea izan 3.10. Propietatearen arabera. Bestalde, bornatua denez, dibergentea ere ezin da izan. Ondorioz, oszilatzailea da.

Gainerako kasuak hiru multzotan banatuko ditugu: $a < -1$, $-1 < a < 1$ eta $1 < a$.

$1 < a$ denean, $a = 1 + \delta$ idatz dezakegu, $\delta > 0$ izanik. Beraz, $a^n = (1+\delta)^n$ dugu. Lehenengo gaiko 1.10 Ariketan frogatzen da $a^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta$ dela. Orain, bi muturretan limitea kalkulatuz, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n \geq \lim\limits_{n\to\infty} (1 + n\delta) = \infty$ dugu.

Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ da.

$a < -1$ denean, segidaren gaiak positiboak eta negatiboak dira, txandaka. Beraz, $\{a^n\}$ segidak bi azpisegida hauek ditu:

$$a^n = \begin{cases} -|a|^n, & n \text{ bakoitia bada,} \\ |a|^n, & n \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$

bi kasuetan $|a| > 1$ denez, $\lim\limits_{n\to\infty} -|a|^n = -\infty$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = \infty$ dira; beraz, $\{a^n\}$ segidak ez du limiterik, ez finitua ez infinitua.

Azkenik, $-1 < a < 1$ denean, $0 \leq |a| < 1$ da, eta $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$ betetzen da. Orduan, $|a| = \dfrac{1}{b}$ idatz dezakegu, $b > 1$ izanik. Hortaz, limitea kalkulatuz,

$\lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b^n} = 0$ da, $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = \infty$ delako.

$-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$ desberdintzen hiru ataletan limitea kalkulatuz eta 3.13. Propietatea erabiliz, esan dezakegu $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dela.

Laburbilduz, beraz, emaitza hau dugu:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \nexists, & a \leq -1 \text{ bada,} \\ 0, & |a| < 1 \text{ bada,} \\ 1, & a = 1 \text{ bada.} \\ +\infty, & 1 < a \text{ bada.} \end{cases}$$

6. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a, b \geq 0$ izanik.

Ebazpena.

$a \leq b$ dela pentsatuz gero, $\sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{b^n + b^n} = \sqrt[n]{2b^n}$ betetzen da. Hortik ateratzen da $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2}b$ dela eta, orain, desberdintzen hiru ataletan limitea aplikatuz gero, $b \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}b = b$, 4. Ariketa ebatziaren azken emaitza erabiliz.

3.13. Propietatearen arabera, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$ da.

$b<a$ dela pentsatuz gero, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = a$ aterako dugu.

Beraz, orokorrean, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$ izango da.

7. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

Ebazpena.

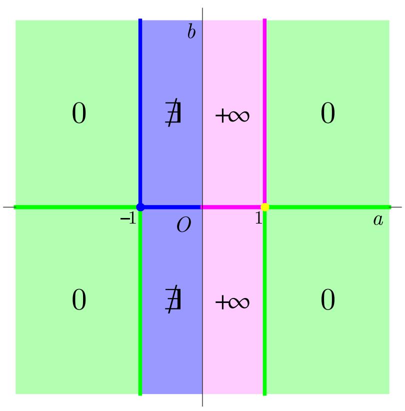
Hasteko, $a\neq 0$ dela pentsatu behar dugu. Limitea a-ren eta b-ren balioen araberakoa da eta, kasu honetan, balio horiek aurretik banatu behar ditugu. Emaitzak irudian laburtu ditugu.

$a>0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & 0<a<1, \\ 1, & a=1, \\ +\infty, & 1<a, \end{cases}$ dira, 5. Ariketaren arabera.

$b>0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} n^b = +\infty$ da. Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1, \\ +\infty, & a=1, \\ 0^{(1)}, & 1<a, \end{cases}$ ditugu.

$b=0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1, \\ 1, & a=1, \\ 0, & 1<a, \end{cases}$ ditugu.

$b<0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} n^b = 0$ da. Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = \begin{cases} +\infty^{(2)}, & 0<a<1, \\ 0, & a=1, \\ 0, & 1<a, \end{cases}$ ditugu.



$a<0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & -1<a<0, \\ \nexists, & a=-1, \\ \nexists, & a<-1, \end{cases}$ dira, 5. Ariketaren arabera.

$b>0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} n^b = +\infty$ da. Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = \begin{cases} \nexists^{(3)}, & -1<a<0, \\ \nexists^{(3)}, & a=-1, \\ 0^{(4)}, & a<-1, \end{cases}$ ditugu.

$b=0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = \begin{cases} \nexists^{(3)}, & -1<a<0, \\ \nexists^{(3)}, & a=-1, \\ 0, & a<-1, \end{cases}$ ditugu.

$b<0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} n^b = 0$ da. Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = \begin{cases} \nexists^{(2)}, & -1<a<0, \\ 0, & a=-1, \\ 0, & a<-1, \end{cases}$ ditugu.

Hamazortzi emaitzetatik gehienak zuzenak dira eta lau kasu baino ez ditugu azaldu behar:

(1) kasuan, $1 < a$ eta $0 < b$ direnean, infinituen ordena erabili dugu.

(2) kasuetan, $-1 < a < 1$ eta $b < 0$ direnean, $\dfrac{0}{0}$ indeterminazioa dugu.
$b < 0$ denez, $b = -c$ idatz dezakegu, $c > 0$ izanik.
$0 < a < 1$ bada, $a = \dfrac{1}{d}$ idatz dezakegu, $d > 1$ izanik.
Orduan, $\dfrac{n^b}{a^n} = \dfrac{n^{-c}}{\left(\frac{1}{d}\right)^n} = \dfrac{d^n}{n^c}$. Orain, $\{d^n\}$ infinituaren ordena $\{n^c\}$ infinituarena baino goragokoa denez, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d^n}{n^c} = +\infty$ da.
$-1 < a < 0$ bada, $a = \dfrac{-1}{d}$ idatz dezakegu, $d > 1$ izanik.
Orduan, $\dfrac{n^b}{a^n} = \dfrac{n^{-c}}{\left(\frac{-1}{d}\right)^n} = (-1)^n \dfrac{d^n}{n^c}$. Orain, $\{d^n\}$ infinituaren ordena $\{n^c\}$ infinituarena baino goragokoa denez, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d^n}{n^c} = \infty$ da; baina, aurretik $(-1)^n$ dagoenez, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{d^n}{n^c}$ ez da existituko.

(3) kasuetan, $a < 0$ denez, $\{a^n\}$ segidaren gaiak positiboak eta negatiboak dira eta, beraz, $\left\{\dfrac{n^b}{a^n}\right\}$ segidarenak ere bai.
$-1 < a < 0$ eta $0 \leq b$ direnean, zatiduraren gaiak $+\infty$ eta $-\infty$ balioetara hurbiltzen dira eta, beraz, limitea ez da existitzen.
$a = -1$ eta $0 < b$ direnean, zatiduraren gaiak $+\infty$ eta $-\infty$ balioetara hurbiltzen dira eta, beraz, limitea ez da existitzen.
$a = -1$ eta $b = 0$ direnean, zatiduraren gaiak $+1$ eta -1 dira eta, beraz, limitea ez da existitzen.

(4) kasuan, $a < -1$ eta $b > 0$ direnean, $\dfrac{\infty}{\nexists}$ kasua dugu.
$a < -1$ bada, $a = -d$ idatz dezakegu, $d > 1$ izanik.
Orduan, $\dfrac{n^b}{a^n} = \dfrac{n^b}{(-d)^n} = (-1)^n \dfrac{n^b}{d^n}$. Orain, $\{d^n\}$ infinituaren ordena $\{n^b\}$ infinituarena baino goragokoa denez, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{d^n} = 0$ da, baita $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^b}{d^n} = 0$ ere.

8. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a, b \geq 0$ izanik.

Ebazpena.

Limitea zuzenean kalkulatuz gero, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1+1}{2}\right)^\infty = 1^\infty$ indeterminazio dugu, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$ direlako.

Indeterminazioa ebazteko, logaritmoa erabiliko dugu, ez duelako indeterminaziorik sortzen.

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = l$ bada,

$\ln l = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} n \ln \dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} n \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1\right)$, $\{b_n - 1\} \sim \{\ln b_n\}$ baliokidetza erabiliz, $b_n = \dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}$ hartuz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} = 1$ delako.

Azkeneko emaitzarekin segituz gero,

$$\ln l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{2}\right)+n\left(\frac{\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{2}\right)+\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{b}-1}{2}\right).$$

Orain, bi limite horiek berdintsuak direnez, bat kalkulatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{2}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} n\frac{\ln\sqrt[n]{a}}{2} = \lim_{n\to\infty} n\frac{\ln a}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln a}{2} = \frac{\ln a}{2}.$$

(1) berdintzan, $\{\sqrt[n]{a}-1\}\sim\{\ln\sqrt[n]{a}\}$ baliokidetza erabili dugu.

Antzeko eran, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)=\frac{\ln b}{2}$ da.

Hortaz, $\displaystyle\ln l = \frac{\ln a}{2}+\frac{\ln b}{2}=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\frac{\ln ab}{2}=\ln\sqrt{ab}$ dugu.

Ondorioz, $l=\sqrt{ab}$ da.

9. Kalkula ezazu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

Ebazpena.

Bai zenbakitzailea bai izendatzailea zati 3^{n+1} egingo dugu; beraz, limitea honela geratuko zaigu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}} = \frac{0+1}{0+\frac{1}{3}} = 3.$$

10. Kalkula ezazu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

Ebazpena.

Zenbakitzailea eta izendatzailea zati $\sqrt{n}$ egingo dugu eta, ondoren, adierazpenaren itxura aldatuko dugu:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}}}}.$$

Orain, limitea zuzenean kalkulatuz gero, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ aterako da.

11. Kalkula ezazu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}+1}$, $k\in\mathbb{N}$ denean.

Ebazpena.

Limitea Stolzen irizpidea erabiliz kalkulatuko dugu.

$\{a_n\}=\{1^k+2^k+\cdots+n^k\}$ eta $\{b_n\}=\{n^{k+1}+1\}$ dira. $\{n^{k+1}+1\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da eta horren limitea infinitua da; 1 eta 3.2 hipotesiak betetzen dira beraz.

Orain, bigarren hipotesian agertzen den limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1^k+2^k+\cdots+n^k+(n+1)^k)-(1^k+2^k+\cdots+n^k)}{((n+1)^{k+1}+1)-(n^{k+1}+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{((n+1)^{k+1}+1)-(n^{k+1}+1)} = l.$$

Zenbakitzaileko polinomioaren maila k da. Izendatzaileko polinomioaren maila ere k da:

$$((n+1)^{k+1}+1)-(n^{k+1}+1) = (n+1)^{k+1}-n^{k+1} = (n^{k+1}+(k+1)n^k+\cdots+1)-n^{k+1} =$$

$$= (k+1)n^k+\cdots+1.$$

Beraz, $l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^k+\cdots+1}{(k+1)n^k+\cdots+1} = \dfrac{1}{k+1}$.

Ondorioz, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}+1} = \dfrac{1}{k+1}$ da.

12. Kalkula ezazu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

Ebazpena.

Stolzen irizpidea erabiliko dugu. Izendatzaileko $\{n!\}$ segida hertsiki gorakorra da eta horren limitea $+\infty$ da, irizpidearen 1 eta 3.2 hipotesiak. Bigarren hipotesiko limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1!+2!+\cdots+n!+(n+1)!)-(1!+2!+\cdots+n!)}{(n+1)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{[(n+1)-1]n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ondorioz, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} = 1$ da.

13. Kalkula ezazu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n} \tan\dfrac{1}{n}$.

Ebazpena.

Stolzen irizpidea erabili baino lehen tangentearen baliokide bat ordezkatuko dugu, limitea aldatu gabe.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n} \tan\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}\,\frac{1}{n} \quad \text{da,} \quad \left\{\tan\frac{1}{n}\right\} \sim \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad \text{delako.}$$

Orain, Stolzen irizpidea erabiliko dugu bigarren limitea kalkulatzeko. Alde batetik, izendatzaileko $\{(1+2+\cdots+n)n\}$ segida hertsiki gorakorra da eta, bestetik, horren limitea $+\infty$ da, irizpidearen 1 eta 3.2 hipotesiak. Bigarren hipotesiko limitea kalkulatuko dugu.

Limitearekin hasi baino lehen, zenbakitzailea eta izendatzailea sinplifikatuko ditugu:

$$a_{n+1}-a_n = (1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2)-(1^2+2^2+\cdots+n^2) = (n+1)^2;$$

$$b_{n+1}-b_n = (1+\cdots+n+(n+1))(n+1)-(1+\cdots+n)n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}n =$$

$$= \frac{n+1}{2}((n+1)(n+2)-n^2) = \frac{n+1}{2}(3n+2).$$

Hortaz, hau dugu limitea: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{\frac{n+1}{2}(3n+2)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$.

Ondorioz, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n} \tan\dfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}\,\dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{3}$ da.

14. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ebazpena.

Segidaren gai orokorra honela ere idatz daiteke: $\dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}$.

Orain, Stolzen irizpidea erabil dezakegu $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ eta $b_n=\sqrt{n}$ eginez.

Irizpidearen 1 eta 3.2 hipotesiak egiaztatuko ditugu: $\{\sqrt{n}\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da eta $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$ da; eta, bestalde, $b_n-b_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ da.

Orain, $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ bada, $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ da. Beraz, bigarren hipotesiko limitea honela geratuko da:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}.$$

Orain, $\{n-\sqrt{n^2-n}\}$ segidaren limitea kalkulatuko dugu:

$$\{n-\sqrt{n^2-n}\}=\left\{n\left(1-\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}\right)\right\}=\left\{n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\right\}\sim\left\{n\left(-\ln\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\right\}=$$

$$=\left\{\frac{-n}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}\sim\left\{\frac{-n}{2}\frac{-1}{n}\right\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\frac{1}{2}$ da.

Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}=\frac{1}{1/2}=2$ da.

15. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{an^2+7}\right)$, $\forall a>0$.

Ebazpena.

$$\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{an^2+7}=\sqrt[3]{n^2+1}\left(1-\sqrt[3]{\frac{an^2+7}{n^2+1}}\right).$$

Orain, bi kasu bereiziko ditugu:

$a=1$ bada, hau dugu:

$$\left(1-\sqrt[3]{\frac{n^2+7}{n^2+1}}\right)\sim-\ln\sqrt[3]{\frac{n^2+7}{n^2+1}}=-\frac{1}{3}\ln\frac{n^2+7}{n^2+1}\sim-\frac{1}{3}\left(\frac{n^2+7}{n^2+1}-1\right)=-\frac{1}{3}\frac{6}{n^2+1}=\frac{-2}{n^2+1};$$

beraz, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2+1}\left(1-\sqrt[3]{\frac{n^2+7}{n^2+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2+1}\frac{-2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2}{(n^2+1)^{2/3}}=0.$

$a\neq 1$ bada,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt[3]{\frac{an^2+7}{n^2+1}}\right)=1-\sqrt[3]{a}\neq 0;\ \text{beraz,}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2+1}\left(1-\sqrt[3]{\frac{an^2+7}{n^2+1}}\right)=\begin{cases}\infty, & a<1,\\ -\infty, & 1<a.\end{cases}$$

16. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\ln\dfrac{n^2-3n+5}{n^2+9n}\right)^{\frac{2n^2+3}{n+1}}$.

Ebazpena.

Limitea zuzenean kalkulatzen saiatuz gero, 1^∞ indeterminazioa lortuko genuke. Beraz, limiteari l izena eman eta limitearen logaritmo nepertarra kalkulatuko dugu:

$\ln l = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n+1}\ln\left(1+\ln\dfrac{n^2-3n+5}{n^2+9n}\right)$; orain, $\infty\cdot 0$ indeterminazioa dugu.

$\{\ln(1+a_n)\}\sim\{a_n\}$ baliokidetza erabiliz, eskuineko logaritmoaren ordez horren baliokidea jar dezakegu, $a_n=\ln\dfrac{n^2-3n+5}{n^2+9n}$ eginez.

Hortaz, $\ln l = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n+1}\ln\dfrac{n^2-3n+5}{n^2+9n}$; berriro $\infty\cdot 0$ indeterminazioa dugu.

Orain, logaritmoaren baliokidea hau da:

$$\ln\frac{n^2-3n+5}{n^2+9n}\sim\frac{n^2-3n+5}{n^2+9n}-1=\frac{n^2-3n+5-n^2-9n}{n^2+9n}=\frac{-12n+5}{n^2+9n}.$$

Hortaz,

$$\ln l=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n+1}\left(\frac{-12n+5}{n^2+9n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-24n^3+10n^2-26n+15}{n^3+10n^2+9n}=-24.$$

Hortik, $\ln l=-24\Longrightarrow l=e^{-24}$.

17. Kalkula itzazu p-ren eta q-ren balioak ondoko berdintza bete dadin:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+q}{n-q}\right)^{2n}.$$

Ebazpena.

Ezkerreko ataleko limitea kalkulatuko dugu lehendabizi.

$p=0$ denean,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{3n^2-2}=1 \quad \text{da.}$$

$p\neq 0$ denean, adierazpena moldatuko dugu:

$$\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1}=\left(1-\frac{3}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1}=\frac{\left(1-\frac{3}{3n^2+1}\right)^{pn^2}}{1-\frac{3}{3n^2+1}}=\frac{\left[\left(1-\frac{3}{3n^2+1}\right)^{3n^2}\right]^{p/3}}{1-\frac{3}{3n^2+1}}=$$

$$=\frac{\left[\left(1-\frac{3}{3n^2+1}\right)^{3n^2+1}\right]^{p/3}\left(1-\frac{3}{3n^2+1}\right)^{-p/3}}{1-\frac{3}{3n^2+1}}.$$

Zati desberdinen limiteak hauek dira:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{3n^2+1}\right)^{3n^2+1}\right]^{p/3}=(e^{-3})^{p/3}=e^{-p}\quad\text{eta}\quad\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{3n^2+1}\right)=1.$$

Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1}=\dfrac{e^{-p}\cdot 1^{-p/3}}{1}=e^{-p}$ da, $p\neq 0$ bada.

Bigarrenik, eskuineko ataleko limitea kalkulatuko dugu.

$q=0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+q}{n-q}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n}\right)^{2n}=1$ da.

$q\neq 0$ denean, adierazpena moldatuko dugu:

$$\left(\frac{n+q}{n-q}\right)^{2n}=\left(1+\frac{2q}{n-q}\right)^{2n}=\left[\left(1+\frac{2q}{n-q}\right)^{n}\right]^{2}=\left[\left(1+\frac{2q}{n-q}\right)^{n-q}\left(1+\frac{2q}{n-q}\right)^{q}\right]^{2}.$$

Zati desberdinen limiteak hauek dira:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2q}{n-q}\right)^{n-q}=e^{2q}$ eta $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2q}{n-q}\right)^{q}=1.$

Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+q}{n-q}\right)^{2n}=\left[e^{2q}\cdot 1\right]^{2}=e^{4q}$ da, $q\neq 0$ bada.

Ondorioz, bi limiteak berdinak dira kasu hauetan:

a) $e^{-p}=e^{4q}$ denean; beraz, $4q=-p$ bete beharko da;
b) $e^{-p}=1$ denean; beraz, $q=0$ da eta $p=0$ bete beharko da;
c) $1=e^{4q}$ denean; beraz, $p=0$ da eta $q=0$ bete beharko da;
d) $1=1$ denean; beraz, $p=q=0$ dira.

Aukera guztiak batean biltzen dira: $4q=-p$ bete beharko da.

18. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2-2}\right)^{3-n^2}$.

Ebazpena.

Alde batetik, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2-2}=0$ da; bestetik, $\lim\limits_{n\to\infty}(3-n^2)=-\infty$ da.

Beraz, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2-2}\right)^{3-n^2}=0^{-\infty}=\dfrac{1}{0^{\infty}}=\dfrac{1}{0}=\infty.$

19. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{kn-2}{3n}}$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

Ebazpena.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ da.

$k\neq 0$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{kn-2}{3n}=\dfrac{k}{3}$ dugu. Bi kasu bereiziko ditugu:

$k<0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{kn-2}{3n}}=0^{k/3}=\dfrac{1}{0^{-k/3}}=\infty$ da.

$k>0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{kn-2}{3n}}=0^{k/3}=0$ da.

$k=0$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{kn-2}{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{-2}{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{2}{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2\ln(n+1)}{3n}}=e^0=1$ da, $\{\ln(n+1)\}$ segida infinituaren ordena $\{3n\}$ segidarena baina beheragokoa delako.

Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{kn-2}{3n}}=\begin{cases}+\infty, & k<0,\\ 1, & k=0,\\ 0, & 0<k,\end{cases}$ da.

20. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ izanik.

Ebazpena.

Stolzen irizpidearen 1 eta 3.2 hipotesiak egiaztatuko ditugu: $\{b_n\}=\{n^2\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da eta $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty$ da.

$b_{n+1}-b_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$ da.

Orain, $a_n = a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ eginez gero, $a_{n+1}-a_n=(n+1)a_{n+1}$ da. Beraz, bigarren hipotesiko limitea honela geratuko da:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{a}{2}.$$

Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$ da.

21. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{kn+1}{n^2}\right)^{n^2}$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

Ebazpena.

$k=0$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$ dugu.

$k\neq 0$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{kn+1}{n^2}\right)^{n^2}=l$ izendatuz eta logaritmo nepertarra hartuz gero, logaritmoek ez dutelako indeterminaziorik sortzen:

$$\ln l=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kn+1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{kn+1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{kn+1}{n^2}\right).$$

Orain, $\{a_n\}\sim\{\ln(1+a_n)\}$ baliokidetza erabiliko dugu $a_n=\dfrac{kn+1}{n^2}$ eginez. Beraz,

$\ln l=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\dfrac{kn+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(kn+1)$ da.

Hortik,

$k<0$ bada, $\ln l=-\infty$ da; beraz, $l=0$ da.

$k>0$ bada, $\ln l=+\infty$ da; beraz, $l=+\infty$ da.

Ondorioz,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kn+1}{n^2}\right)^{n^2}=\begin{cases}0, & k<0,\\ e, & k=0,\\ +\infty, & 0<k,\end{cases}\quad\text{da.}$$

22. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}3n(n^2+7n-1)\left(1-e^{1/5n^3}\right)$.

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty}3n(n^2+7n-1)\left(1-e^{1/5n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}-3n(n^2+7n-1)\left(e^{1/5n^3}-1\right)\overset{(1)}{=}$$
$$=\lim_{n\to\infty}-3n(n^2+7n-1)\ln e^{1/5n^3}=\lim_{n\to\infty}-3n(n^2+7n-1)\frac{1}{5n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n(n^2+7n-1)}{5n^3}=\frac{-3}{5}.$$

(1) berdintzan, $\{e^{1/5n^3}-1\}\sim\{\ln e^{1/5n^3}\}$ baliokidetza erabili dugu, $\lim\limits_{n\to\infty}e^{1/5n^3}=1$ delako.

23. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+\ln n}$.

Ebazpena.

Hasteko, izendatzaileko segida baliokide batez ordezkatuko dugu, kalkuluak errazteko.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+\ln n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{\ln n}{n^3}\right) = 1$ da, $\{n^3\}$ infinitua goragoko ordenakoa delako. Hortaz, $\{n^3\} \sim \{n^3+\ln n\}$ da; eta ondorioz, bigarrenaren ordez lehenengoa jar dezakegu limitea kalkulatzeko:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Orain, Stolzen irizpidea aplikatzeko, 1 eta 3.2 hipotesiak betetzen direla egiaztatuko dugu.

$\{n^3\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da eta ∞ limitea du. Beraz, Stolzen irizpidea aplikatu ahal izateko, bigarren hipotesia egiaztatzea baino ez da geratzen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2)-(1^2+\cdots+n^2)}{(n+1)^3-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \dfrac{1}{3}$ da eta $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+\ln n} = \dfrac{1}{3}$.

24. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\sqrt[n]{a})$, $a>0$ izanik.

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} n(1-\sqrt[n]{a}) = \lim_{n\to\infty} -n(\sqrt[n]{a}-1) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} -n\ln\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} -n\frac{1}{n}\ln a = -\ln a = \ln\frac{1}{a}.$$

(1) berdintzan, $\{\sqrt[n]{a}-1\} \sim \{\ln\sqrt[n]{a}\}$ baliokidetza erabili dugu, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ delako.

25. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n\cdot 2n}}\right)$.

Ebazpena.

Segidaren gai orokorra honela ere idatz daiteke: $\dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)}{\sqrt{n}}$.

Orduan, Stolzen irizpidea erabil dezakegu. Irizpidearen 1 eta 3.2 hipotesiak egiaztatuko ditugu: $\{b_n\} = \{\sqrt{n}\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da eta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ da. Beraz, bigarren hipotesia egiaztatzea baino ez da geratzen.

$b_{n+1}-b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ da.

Orain, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ denez,

$a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ da. Beraz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2}\sqrt{n+1}-\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}\sqrt{2n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{2n+1}+\sqrt{2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}\sqrt{2n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(1-\sqrt{2})\sqrt{2n+1}+\sqrt{2}\sqrt{n+1}\right](\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}\sqrt{2n+1}((n+1)-n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\sqrt{n+1}\left[(1-\sqrt{2})\sqrt{\dfrac{2n+1}{2n+2}}+1\right](\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}\sqrt{2n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(1-\sqrt{2})\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}}+1\right]\left[\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\right] = \left[(1-\sqrt{2})+1\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = (2-\sqrt{2})\sqrt{2}.$$

Ondorioz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)}{\sqrt{n}} = (2-\sqrt{2})\sqrt{2}$ da.

26. Kalkula ezazu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}-n\right)$.

Ebazpena.

Hasteko, adierazpenaren itxura aldatuko dugu:

$$\left(\sqrt[3]{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}-n\right) = n\left(\sqrt[3]{\frac{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}{n^3}}-1\right).$$

Ondoren, $\{b_n-1\}\sim\{\ln b_n\}$ baliokidetza erabiliko dugu, $b_n = \sqrt[3]{\dfrac{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}{n^3}}$ hartuz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}{n^3}}=1$ delako.

Beraz, bilatzen dugun limitea l bada, $\displaystyle l = \lim_{n\to\infty} n\ln\sqrt[3]{\frac{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}{n^3}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\ln\frac{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\left(\frac{(n+b_1)(n+b_2)(n+b_3)}{n^3}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\frac{n^3+(b_1+b_2+b_3)n^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)n+b_1b_2b_3-n^3}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(b_1+b_2+b_3)n^3+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)n^2+b_1b_2b_3n}{3n^3} = \frac{b_1+b_2+b_3}{3}.$$

27. Kalkula ezazu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{2\ln 5}{n}}\right)^n$.

Ebazpena.

Limitea zuzenean kalkulatuz gero, 1^∞ indeterminazioa lortuko dugu. Indeterminazio hori ebazteko, logaritmoa erabiliko dugu, ez duelako indeterminazio gehiagorik sortzen.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{2\ln 5}{n}}\right)^n = l$ bada, $\displaystyle\ln l = \lim_{n\to\infty} n\ln\cos\sqrt{\frac{2\ln 5}{n}}$ izango da.

Orain, $\left\{\cos\sqrt{\dfrac{2\ln 5}{n}}-1\right\}\sim\left\{\ln\cos\sqrt{\dfrac{2\ln 5}{n}}\right\}$ baliokidetza erabiliko dugu, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\sqrt{\frac{2\ln 5}{n}}=1$ delako.

Beraz, $\ln l = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cos\sqrt{\dfrac{2\ln 5}{n}} - 1\right)$ da.

Kasu honetan, $\{1-\cos a_n\} \sim \left\{\dfrac{a_n^2}{2}\right\}$ baliokidetza erabiliko dugu $a_n = \sqrt{\dfrac{2\ln 5}{n}}$ eginez, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2\ln 5}{n}} = 0$ delako. Kontuan izan zeinua aldatu behar dugula.

Beraz, $\ln l = \lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{-\left(\sqrt{\frac{2\ln 5}{n}}\right)^2}{2} = -\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\frac{2\ln 5}{n}}{2}\right) = -\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\ln 5}{2n} = -\ln 5$ da.

Hortaz, $\ln l = -\ln 5 = \ln\dfrac{1}{5}$ da; ondorioz, $l = \dfrac{1}{5}$ da.

28. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{2+\ln n}}$.

Ebazpena.

Zuzenean kalkulatuz gero, 0^0 indeterminazioa dugu. Indeterminazio hori ebazteko, logaritmoa erabiliko dugu, ez duelako indeterminazio gehiagorik sortzen.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{2+\ln n}} = l$ bada, $\ln l = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{2+\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2+\ln n}\ln\dfrac{2}{n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(\ln 2 - \ln(n+1))}{2+\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\ln 2}{2+\ln n} - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\ln(n+1)}{2+\ln n} = 0 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\ln(n+1)}{2+\ln n} = -2$ da,

$\{2+\ln n\} \sim \{\ln n\} \sim \{\ln(n+1)\}$ direlako.

Hortaz, $\ln l = -2$ da. Hortik, $l = e^{-2}$ da.

29. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}}{\arctan\frac{1}{n^2}}$.

Ebazpena.

Zuzenean kalkulatuz gero, $\dfrac{0}{0}$ indeterminazioa dugu. Indeterminazio hori ebazteko, zenbakitzaileko eta izendatzeileko infinitesimoak beren baliokidez ordezkatuko ditugu; zenbakitzailea itxuraz aldatuko dugu hori egin baino lehen.

$$\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3} = \sqrt[n+1]{3}\left(\dfrac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n+1]{3}} - 1\right) = \sqrt[n+1]{3}\left(3^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

Orain, $\{3^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\} \sim \{\ln 3^{\frac{1}{n(n+1)}}\}$ baliokidetza erabiliko dugu, $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$ delako.

Beraz, $\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3} \sim \sqrt[n+1]{3}\ln 3^{\frac{1}{n(n+1)}} = \sqrt[n+1]{3}\dfrac{\ln 3}{n(n+1)}$ da.

Bestalde, $\arctan\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ dugu.

Bi baliokidetzak limitean ordezkatuz, honela geratuko zaigu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}}{\arctan\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{3}\frac{\ln 3}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{3}\frac{n^2}{n(n+1)}\ln 3 = \ln 3.$$

30. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$.

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2}{\sqrt{n}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)}{\sqrt{n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n}{2n\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}.$$

Stirlingen baliokidetza erabili dugu bi aldiz, zenbakitzailean eta izendatzailean. Izendatzailearen kasuan honela da: $\{(2n)!\} \sim \{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}\} = \{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}\}$.

31. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

Ebazpena.

Zuzenean kalkulatuz gero, $\dfrac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa dugu. Indeterminazio hori ebazteko, gai orokorraren adierazpenaren itxura aldatuko dugu eta baliokidetzak erabiliko ditugu:

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{n!(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n!}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \overset{(1)}{\sim}$$

$$\sim \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{2^{2n}n^n e^{-n}\sqrt{2}} = \frac{1}{n}2^2 n e^{-1}\sqrt[2n]{2} = \frac{4}{e}\sqrt[2n]{2}.$$

(1) urratsean, Stirlingen baliokidetza erabili dugu bi aldiz: batetik, $\{n!\} \sim \{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\}$ eta, bestetik, $\{(2n)!\} \sim \{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}\} = \{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}\}$.

Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{e}\sqrt[2n]{2} = \dfrac{4}{e}$.

32. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

Ebazpena.

Zuzenean kalkulatuz gero, $\dfrac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa dugu. Indeterminazio hori ebazteko, logaritmoa erabiliko dugu, ez duelako indeterminazio gehiagorik sortzen.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = l$ bada,

$$\ln l = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\ln n^{\ln n} - \ln(\ln n)^n\right] = \lim_{n\to\infty} [\ln n \ln n - n\ln(\ln n)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln(\ln n)\right].$$

Orain, atalez atal kalkulatuko dugu limitea:

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ da;

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n} = 0$ da, $\{n\}$ infinituaren ordena $\{(\ln n)^2\}$ infinituarena baino goragokoa delako, 3.4.2. atalean ikusi den bezala;

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\ln n) = +\infty$ da.

Hortaz, $\ln l = +\infty(0-\infty) = -\infty$ da. Hortik, $l = e^{-\infty} = 0$ da.

33. Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^2-2n+1\right)^{\frac{1}{\ln n}}$.

Ebazpena.

Zuzenean kalkulatuz gero, ∞^0 indeterminazioa dugu. Indeterminazio hori ebazteko, logaritmoa erabiliko dugu, ez duelako indeterminazio gehiagorik sortzen.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^2-2n+1\right)^{\frac{1}{\ln n}}=l$ bada,

$$\ln l=\lim_{n\to\infty}\ln\left(3n^2-2n+1\right)^{\frac{1}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\ln(3n^2-2n+1).$$

Orain, $\{\ln(3n^2-2n+1)\}\sim\{\ln 3n^2\}$ baliokidetza erabiliko dugu. Hortaz,

$$\ln l=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 3n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 3+2\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 3}{\ln n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln n}=0+2=2.$$

Ondorioz, $\ln l=2$ da. Hortik, $l=e^2$ da.

34. Egiazta ezazu ondoko segida monotonoa dela: $a_{n+1}=a_n+\dfrac{n+1}{n}$, $a_1=1$ izanik.

Ba al du limiterik?

Erantzuna.

$a_1=1,\quad a_2=1+\dfrac{2}{1}=3,\quad a_3=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2},\quad a_4=\dfrac{9}{2}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{35}{6}\ldots$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}-a_n=\dfrac{n+1}{n}>0$ da; beraz, $\{a_n\}$ hertsiki monotono gorakorra da.

Bornatua balitz, segidak goi-muturra izango luke, 1.19. Definizioaren c propietatearen arabera; eta 1. Ariketan egin dugun 3.17. Propietatearen frogak diosku goi-mutur hori izango litzatekeela segidaren limitea.

Bestalde, segidak l limitea balu, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+\dfrac{n+1}{n}\right)\Longrightarrow l=l+1$ bete beharko litzateke. Baina, ez dago baldintza hori betetzen duen zenbaki errealik. Hortaz, segidak ez du limiterik eta, beraz, ezin du goi-muturrik izan; beste hitzetan, segida ez dago goitik bornaturik eta, ondorioz, horren limitea $+\infty$ da.

35. Ondoko segida errepikaria emanik, $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$:

35.1. froga ezazu monotonoa eta bornatua dela $(\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<a_n\leq 10)$.

35.2. Kalkula ezazu horren limitea, existitzen bada.

Ebazpena.

35.1. Ikus dezagun, lehenbizi, gorakorra dela 1.5. Indukzio-Printzipioa erabiliz:

$a_1=1,\quad a_2=\sqrt{6+a_1}=\sqrt{7}=2,645,\quad a_3=\sqrt{6+\sqrt{7}}=2,9403,$

$a_4=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}}=2,9904.$

Lehenengo gaiek betetzen dute: $a_1<a_2<a_3<a_4$.

Demagun $a_{n-1}<a_n$ dela; frogatu behar dugu $a_n<a_{n+1}$ dela.

Eta horrela da $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}\overset{(1)}{>}\sqrt{6+a_{n-1}}=a_n$ betetzen delako.

(1) desberdintzan, indukzio-hipotesia erabili dugu, hots, $a_{n-1}<a_n$ dela.

1.5. Indukzio-Printzipioaren ondorioz, frogatuta geratzen da segida gorakorra dela.

Ikus dezagun, orain, bornatua dela 1.5. Indukzio-Printzipioa erabiliz:

$a_1 = 1, \quad a_2 = 2,645, \quad a_3 = 2,9403, \quad a_4 = 2,9904...$

Beraz, lehenengo gaiek honako hau betetzen dute: $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 10$.

Demagun $0 < a_n \leq 10$ dela; frogatu behar dugu $0 < a_{n+1} \leq 10$ dela.

$0 < a_n < a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \leq \sqrt{6+10} = \sqrt{16} = 4 \leq 10$.

Ondorioz, 1.5. Indukzio-Printzipioaren arabera, frogatuta geratzen da segida bornatua dela.

35.2. Aurreko atalean frogatu dugu $\{a_n\}$ segida monotono eta gorakorra dela, 3.17. Propietateak dio konbergentea dela, hots, limitea duela.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ bada, limitea segidaren definizioaren bi ataletan kalkulatuz gero, berdintza hau beteko da:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n} \Longrightarrow l = \sqrt{6+l} \Longrightarrow l^2 = 6+l \Longrightarrow l^2 - l - 6 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow l = -2$ edo $l = 3$; baina, $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a_n \leq 10$ denez, $l = 3$ baino ezin da izan.

3.8. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Froga itzazu limitearen definizioa erabiliz:

   1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$; 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$;

   3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n} = \infty$; 4) ez dela existitzen $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$.

2. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren:

   2.1. segida monotono oro konbergentea da.

   2.2. Segida bornatu oro konbergentea da.

   2.3. Segida konbergente guztiak ez dira monotonoak.

   2.4. Segida konbergente oro bornatua da.

   2.5. Infinitesimal guztiak ez dira baliokideak.

3. Froga itzazu ondoko inplikazioak:

   3.1. $\lim_{n\to\infty} | a_n |= 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   3.2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} | a_n |= 0$.

   3.3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} | a_n |= 1$.

   3.4. $\lim_{n\to\infty} | a_n |= 1$ betetzeak ez du esan nahi $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ beteko denik.

   3.5. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bada eta $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$ betetzen bada, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ beteko da.

   3.6. $\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segida baliokideak badira, limite berdina dute.

   3.7. $\{a_n\}$ segida konbergentea bada, limite bakarra du.

   3.8. $\{a_n\}$ segida konbergentea bada, horren azpisegida guztiak konbergenteak dira eta segidaren limite bera dute.

   3.9. $\{a_n\}$ segida konbergentea bada, $\{a_n\}$ segida bornatua da.

   3.10. $\{a_n\}$ segidaren limitea ez bada zero, segidaren gai batetik aurrera gai guztiek limitearen zeinu bera dute.

   3.11. $\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segiden limitea l bada eta $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq c_n \leq b_n$ betetzen bada, $\{c_n\}$ segida ere konbergentea da eta horren limitea l da.

   3.12. $\{a_n\}$ bornatua bada eta $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ bada, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ beteko da.

   3.13. $\{a_n\}$ bornatua bada eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ bada, $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$ beteko da.

   3.14. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n)$ existitzeak ez du esan nahi $\lim_{n\to\infty} a_n$ existituko denik.

   3.15. $\lim_{n\to\infty} a_n$ ez existitzeak ez du esan nahi $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n)$ existituko ez denik.

   3.16. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ badira, $\{a_n b_n\}$ segida konbergente, dibergente edo oszilatzailea izan daiteke.

   3.17. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bada, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$, edo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$, edo ez da existitzen.

   3.18. $\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ bornatuak izateak ez du esan nahi $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ segida bornatua denik.

4. Kalkula itzazu gai orokor hauek dituzten segiden limiteak:

1) $\dfrac{1/n}{\log_a(1+7/n)}, \quad a>0;$
2) $\left(\dfrac{n}{3n^2+2}\right)^{\ln n};$
3) $\dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{k};$

4) $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3};$
5) $\dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{k};$
6) $n^{-1/n}\ln\sqrt{n};$

7) $\left(1-\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{kn-1}{3}}, \quad k\in\mathbb{R};$
8) $\left(\dfrac{3+2n^2}{3n+n^2}\right)^{\frac{n^3+2n}{n^2-5}};$
9) $\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2};$

10) $\left(1+\ln\dfrac{n^2-5n+3}{n^2+5n-5}\right)^{2n-5};$
11) $\dfrac{n+1}{\ln n};$
12) $n-\ln n;$

13) $\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1};$
14) $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n^3}{3n^2+2}};$
15) $\dfrac{n^3+4n+2}{3n^2+7};$

16) $(\ln(n^2+3n-1))^{-\frac{n^2-1}{3n^2+4n-1}};$
17) $\dfrac{\ln n}{\cot(1/n)};$
18) $n\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}-1\right);$

19) $\sqrt[p]{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_p)}-n;$
20) $\left(\sqrt{\dfrac{1-n}{1-2n}}\right)^{\frac{2n-1}{3n+1}};$
21) $\sin\dfrac{3n^2+1}{\ln n};$

22) $\dfrac{n^{\frac{n+1}{n}}-n}{\ln n};$
23) $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+1};$
24) $\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}-\sqrt[3]{n};$

25) $\dfrac{1^2+2^2\sin\frac{1}{2}+\cdots+n^2\sin\frac{1}{n}}{n^2};$
26) $n^2e^{-\sqrt{n}};$
27) $n(\sqrt{n^2+1}-n);$

28) $\dfrac{\ln\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\,\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}\cdots\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}}\right)}{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}, \quad a,b>0;$

29) $\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{2}{1}+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right).$

30) $(1-\ln(n^2-5)+\ln(n^2+6n-3))^{n+2}.$

5. Froga ezazu hurrengo segida errepikariak konbergenteak direla eta kalkula itzazu horien limiteak:

1) $a_1=a>0, \quad a_{n+1}=\dfrac{n}{4n+1}a_n;$
2) $a_1=1, \quad a_{n+1}=\dfrac{4-a_n}{3-a_n};$

3) $b_1=\sqrt{b}, \quad b>0; \quad b_2=\sqrt{b+\sqrt{b}}; \quad b_{n+1}=\sqrt{b+b_n};$
4) $a_1=1, \quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+2;$

5) $a_1=\sqrt{a}, \quad a>0; \quad a_2=\sqrt{a\sqrt{a}}; \quad a_{n+1}=\sqrt{a\cdot a_n};$
6) $a_1=1, \quad a_{n+1}=\sqrt{2a_n}.$

4. Serieak $\mathbb{R}$ multzoan

4.1. SERIEAK. SERIEEN IZAERAK

Izan bedi $\{a_n\}$ zenbaki errealen segida bat. Horren gaiak batzeko , segida hauek osatuko ditugu:

$$\begin{array}{ll}
S_1 = a_1 & R_1 = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \\
S_2 = a_1 + a_2 & R_2 = a_3 + a_4 + \cdots \\
S_3 = a_1 + a_2 + a_3 & R_3 = a_4 + \cdots \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n & R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \\
\quad\vdots & \quad\vdots
\end{array}$$

Hau da, S_n $\{a_n\}$ segidaren lehenengo n gaien batura da, eta R_n segidaren gainerako gaien batura.

Kontura gaitezen $\forall n \in \mathbb{N}$ beti betetzen dela hau:

$$S_n + R_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Lehenengo segidari limitea kalkulatzen badiogu,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

infinitu batugai dituen batuketa lortuko dugu.

4.1. Definizioa. $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *segida emanik, segidaren gai guztien batuketari,*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

serie *deritzogu eta honela adieraziko dugu:* $\sum_n a_n$.

a_n *seriearen* gai orokorra *da.*
S_n *seriearen n.* batura partziala *da, eta* $\{S_n\}$ batura partzialen segida.
R_n *seriearen n.* hondarra *da, eta* $\{R_n\}$ hondarren segida.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adierazpenarekin seriearen* batura *adieraziko dugu, eta honela kalkulatzen da:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

4.2. Adibideak.

1. $\sum_n 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots.$
2. $\sum_n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots.$

3. $\sum\limits_n \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots.$

4. $\sum\limits_n \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots.$

5. $\sum\limits_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots.$

6. $\sum\limits_n (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots.$

4.3. Definizioa. $\sum\limits_n a_n$ *seriea* konbergentea*,* dibergentea *edo* oszilatzailea *dela esango dugu batura partzialen* $\{S_n\}$ *segida konbergentea, dibergentea edo oszilatzailea denean, hurrenez hurren.*

Definizioak esaten digu seriea konbergentea denean, batura finitua duela; dibergentea denean, batura infinitua duela, eta oszilatzailea denean, ez duela baturarik.

Serieen azterketak bi arazo azaleratzen ditu:
- Seriearen gaien joeraren arabera seriearen izaera ezagutzea.
- Seriea konbergentea denean, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ batura kalkulatzea.

4.4. Adibidea. *Serie geometrikoa*
$a_n = ar^{n-1}$ gai orokorra duen serieari *serie geometriko* deritzo, $a \neq 0$ eta $r \in \mathbb{R}$ izanik, eta r balioari serie geometrikoaren *arrazoi* deritzo:

$$\sum_n ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots.$$

Seriearen lehenengo n gaien batura, hots, n. batura partziala, hau da (1. gaiko 1.6. Adibidea):

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1 \quad \text{denean,} \\ \\ na, & r = 1 \quad \text{denean.} \end{cases}$$

Azter dezagun, orain, seriearen izaera $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ kalkulatuz. Horretarako, 3. gaiko 5. Ariketa ebatziaren emaitza hartuko dugu kontuan.

1. $r < -1$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ez da existitzen, ez eta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ere; beraz, $\sum\limits_n ar^{n-1}$ seriea oszilatzailea da.

2. $r = -1$ bada, $\{S_n\} = \{a, 0, a, 0, a...\}$ da, hots, oszilatzailea da; beraz, $\sum\limits_n a(-1)^{n-1}$ serie oszilatzailea da.

3. $|r| < 1$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ da, eta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$; beraz, $\sum\limits_n ar^{n-1}$ seriea konbergentea da, eta horren batura $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ da.

4. $r = 1$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ da eta, beraz, $\sum\limits_n a$ serie dibergentea da.

5. $r > 1$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ da, eta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; beraz, $\sum\limits_n ar^{n-1}$ seriea dibergentea da.

Laburbilduz, emaitza hau lortu dugu:

1. $r \leq -1$ denean, $\sum\limits_n ar^{n-1}$ serie geometrikoa oszilatzailea da.

2. $|r| < 1$ denean, $\sum\limits_n ar^{n-1}$ serie geometrikoa konbergentea da eta batura $\dfrac{a}{1-r}$ du.

3. $1 \leq r$ denean, $\sum\limits_n ar^{n-1}$ serie geometrikoa dibergentea da.

4.5. Adibideak.
4.2. Adibideko serietatik 1., 4. eta 6. serieak serie geometrikoak dira.

1. $\sum\limits_n 1$ seriearen kasuan, $a = 1$ eta $r = 1$ dira. Aurreko adibidearen emaitzen arabera, $r = 1$ denez, seriea dibergentea da.

2. $\sum\limits_n \dfrac{1}{2^{n-1}}$ seriearen kasuan, $a = 1$ eta $r = \dfrac{1}{2}$ dira. Aurreko adibidearen emaitzen arabera, $r = \dfrac{1}{2} < 1$ denez, seriea konbergentea da; eta horren batura hau da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

3. $\sum\limits_n (-1)^{n-1}$ seriearen kasuan, $a = 1$ eta $r = -1$ dira. Aurreko adibidearen emaitzen arabera, $r = -1$ denez, seriea oszilatzailea da.

Batura partzialen limitea kalkulatu baino lehen, seriearen batura existituko denetz esango digun irizpidea interesatzen zaigu.

4.6. Teorema. *Cauchyren irizpidea serieetarako*
$\sum\limits_n a_n$ *seriea konbergentea da baldin eta soilik baldin hau betetzen badu:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, / \, \forall p, q \geq n_0(\varepsilon) \quad |S_q - S_p| = |a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q| < \varepsilon.$$

Aurreko teoremaren ondorio hauek dira praktikan erabilgarriak:

4.7. Korolarioa. $\sum\limits_n a_n$ *seriea konbergentea bada,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *beteko da.*

Oharra. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ izateak ez du esan nahi $\sum\limits_n a_n$ seriea konbergentea denik.

4.8. Adibideak.
4.2. Adibideko serietatik 1., 2. eta 6. serieak aztertuko ditugu.

1. $\sum\limits_n 1$ seriearen kasuan, $a_n = 1$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ da. Hortaz, ezin da konbergentea izan.

2. $\sum\limits_n (-1)^{n-1}$ seriearen kasuan, $a_n = (-1)^{n-1}$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ ez da existitzen; beraz, seriea ezin da konbergentea izan.

3. $\sum\limits_n \dfrac{1}{n}$ serieari *serie harmoniko* deritzo. Serie horrek ez du Cauchyren irizpidearen baldintza betetzen.
$|S_q - S_p| = |a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q| = \left|\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p+2} + \cdots + \dfrac{1}{q}\right|$ dugu.

Har ditzagun $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ eta $q = 2p$. Orduan,

$$|S_q - S_p| = \left|\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{2p}\right| > \left|\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \cdots + \frac{1}{2p}\right| = p\frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$$

beteko da. Beraz, $|S_q - S_p|$ balioa ezin da egin nahi bezain txikia beti. Hortaz, $\sum_n \dfrac{1}{n}$ seriea ezin da konbergentea izan. Eta, hala ere, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ da.

4.9. Korolarioa.
$\sum_n a_n$ *seriea konbergentea da baldin eta soilik baldin* $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ *bada.*

4.2. GAI POSITIBOKO SERIEAK

4.2.1. Definizioa eta propietateak

4.10. Definizioa. $\sum_n a_n$ gai positiboko seriea *da* $\forall n \geq n_0$ $a_n > 0$ *bada*[1].

4.11. Propietateak.

1. $\{S_n\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da.
2. $\sum_n a_n$ seriea konbergentea edo dibergentea da, baina inoiz ez oszilatzailea.
3. Elkartze-legea: $\sum_n a_n$ seriearen izaera eta batura ez dira aldatzen ondoz ondoko gaien taldeen ordez beren baturak jartzen badira.
4. Banatze-legea: $\sum_n a_n$ seriearen izaera ez da aldatzen bere gai guztiak $\lambda \neq 0$ konstante batez biderkatzen badira. Horrez gain, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ bada, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda s$ izango da.
5. Trukatze-legea: $\sum_n a_n$ serieak bere gaien edozein berrordenazio onartzen du, izaera eta batura aldatu gabe.

4.12. Adibidea. $\sum_n (-1)^{n-1}$ seriearen s batura kalkulatzen saiatuko gara.

$1-1+1-1+1-1+1-1+... = 1-(1-1+1-1+1-1+1-...)$ da, bigarren gaitik aurrera -1 faktore komuna aterata, banatze-legea beteko balitz.

Ezkerreko atalaren batura s da, eta eskuinekoarena $1-s$. Beraz, $s = 1-s$ da; eta hortik, $s = \dfrac{1}{2}$ dugu.

Orain, elkartze-legea beteko balitz, seriearen gaiak binaka elkar genitzake seriearen batura lortzeko:
$s = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+0+\cdots = 0.$

Edo, seriearen gaiak beste era honetan elkartuz gero, seriearen batura hau lortuko dugu:
$s = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-0-0-0-0-\cdots = 1.$

Adibide honekin ikusi dugu elkartze-legea eta banatze-legea ez direla serie oszilatzaileekin betetzen.

1. Gai positiboko seriea izateko, nahikoa da gai batetik aurrera gai guztiak positiboak izatea; nahiko genuke positiboak ez diren gaiak bere aldetik batzea. Atal honetan serie guztiak gai positiboko serieak direla pentsatuko dugu.

4.2.2. Konparaziozko irizpide orokorra

4.13. Definizioa.

1. $\sum_n b_n$ *seriea* $\sum_n a_n$ *seriearen* serie maiorantea *da* $\forall n \geq n_0 \quad b_n \geq a_n$ *bada.*

2. $\sum_n b_n$ *seriea* $\sum_n a_n$ *seriearen* serie minorantea *da* $\forall n \geq n_0 \quad b_n \leq a_n$ *bada.*

4.14. Teorema. *Konparaziozko irizpide orokorra*

1. $\sum_n a_n$ *serieak serie maiorante konbergentea onartzen badu,* $\sum_n a_n$ *seriea ere konbergentea izango da.*

2. $\sum_n a_n$ *serieak serie minorante dibergentea onartzen badu,* $\sum_n a_n$ *seriea ere dibergentea izango da.*

4.15. Adibidea. *Serie harmoniko orokorra*

$a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$ denean, $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ *serie harmoniko orokorra* dugu.

1. $\alpha = 1$ kasuan, $\sum_n \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dugu. 4.8.3. Adibidean ikusi dugu ezin dela konbergentea izan. Beraz, gai positiboko seriea denez, dibergentea da.

   Seriea harmoniko deritzo gai bakoitza aurreko eta hurrengoaren arteko *batezbesteko harmonikoa* delako, $a_n = \dfrac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1}+a_{n+1}}$.

2. $\alpha < 1$ denean, $n^\alpha < n^1$ da eta $\dfrac{1}{n^\alpha} > \dfrac{1}{n}$ da, $\forall n \in \mathbb{N}$. Beraz, $\sum_n \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ seriearen serie minorante dibergentea da. Bigarren irizpidea erabiliz, $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ seriea ere dibergentea da.

3. $\alpha > 1$ kasuan, elkartze-legea erabiliko dugu.

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \underline{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}} + \underline{\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}} + \underline{\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \cdots} + \cdots \overset{(1)}{\leq}$$

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \cdots\right) + \cdots \overset{(2)}{=} 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2\alpha-2}} + \frac{1}{2^{3\alpha-3}} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \cdots = \sum_n \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$$

(1) desberdintzan, serie maiorante bat erabili dugu, $\dfrac{1}{(n+k)^\alpha} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ delako $\alpha > 1$ denean, $k > 0$ izanik.

(2) berdintzan, elkartze-legea erabili dugu, bi aldeetako serieen izaera eta batura aldatu gabe; hortik aurrera batugaien sinplifikazioak egin ditugu.

Azkena $r = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$ arrazoidun serie geometrikoa da. Gainera, $r < 1$ da $\alpha > 1$ delako. Beraz, $\sum_n \left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$ serie maiorante konbergentea da. Ondorioz, lehenengo irizpidea erabiliz, $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ seriea ere konbergentea da.

Laburbilduz, emaitza hau lortu dugu:

1. $\alpha \leq 1$ denean, $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokorra dibergentea da.
2. $\alpha > 1$ denean, $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokorra konbergentea da.

Emaitza hori ikusita, esan dezakegu 4.2. Adibideko $\sum_n \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea dela, $\alpha = 1 \leq 1$ delako, eta $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ seriea konbergentea dela, $\alpha = 2 > 1$ delako.

4.16. Korolarioa. *Izan bitez* $\sum_n a_n$ *eta* $\sum_n b_n$ *serieak.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ *bada,* $\sum_n a_n$ *eta* $\sum_n b_n$ *serieek izaera bera dute.*

   $c = 1$ *kasuan,* $\{a_n\}$ *eta* $\{b_n\}$ *segidak baliokideak dira. Hortaz, bi segida baliokideak direnean, dagozkien serieak izaera berekoak dira.*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *denean, bi inplikazio hauek betetzen dira:*

   $\sum_n a_n$ *dibergentea bada,* $\sum_n b_n$ *ere dibergentea da.*

   $\sum_n b_n$ *konbergentea bada,* $\sum_n a_n$ *ere konbergentea da.*

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ *denean, bi inplikazio hauek betetzen dira:*

   $\sum_n a_n$ *konbergentea bada,* $\sum_n b_n$ *ere konbergentea da.*

   $\sum_n b_n$ *dibergentea bada,* $\sum_n a_n$ *ere dibergentea da.*

4.17. Adibidea. Determina dezagun $\sum_n \sin\dfrac{1}{n}$ seriearen izaera.

Aurreko gaian (3.22. Adibidea), $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \sim \left\{\sin\dfrac{1}{n}\right\}$ baliokidetza ikusi genuen; beraz, $\sum_n \sin\dfrac{1}{n}$ eta $\sum_n \dfrac{1}{n}$ serieek izaera bera dute; serie harmonikoa dibergentea denez, $\sum_n \sin\dfrac{1}{n}$ seriea ere dibergentea da.

4.2.3. Konparaziozko irizpide orokorraren aplikazioak

4.18. Teorema. *Cauchyren edo erroaren irizpidea*

r existitzen bada, non $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ *den,* $\sum_n a_n$ *konbergentea izango da.*

Bestela, $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *bada,* $\sum_n a_n$ *dibergentea izango da.*

Erregela praktikoa

$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ bada,

$l < 1$ denean, $\sum_n a_n$ konbergentea izango da;

$l > 1$ denean, $\sum_n a_n$ dibergentea izango da;

$l = 1$ denean, zalantzazko kasua dugu.

4.19. Teorema. *D'Alembert-en edo zatiduraren irizpidea*

r existitzen bada, non $\forall n \geq n_0 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ *den,* $\displaystyle\sum_n a_n$ *konbergentea izango da.*

Bestela, $\forall n \geq n_0 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *bada,* $\displaystyle\sum_n a_n$ *dibergentea izango da.*

Erregela praktikoa

$\displaystyle\sum_n a_n$ seriea emanik, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ bada,

$l < 1$ denean, $\displaystyle\sum_n a_n$ konbergentea izango da;

$l > 1$ denean, $\displaystyle\sum_n a_n$ dibergentea izango da;

$l = 1$ denean, zalantzazko kasua dugu.

4.20. Teorema. *Raabe-ren irizpidea*

r existitzen bada, non $\forall n \geq n_0 \quad n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r > 1$ *den,* $\displaystyle\sum_n a_n$ *konbergentea izango da.*

Bestela, $\forall n \geq n_0 \quad n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$ *bada,* $\displaystyle\sum_n a_n$ *dibergentea izango da.*

Irizpide hau $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ denean erabiliko dugu.

Erregela praktikoa

$\displaystyle\sum_n a_n$ seriea emanik, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$ bada,

$l > 1$ denean, $\displaystyle\sum_n a_n$ konbergentea izango da;

$l < 1$ denean, $\displaystyle\sum_n a_n$ dibergentea izango da;

$l = 1$ denean, zalantzazko kasua dugu.

4.21. Adibidea. Azter dezagun $\displaystyle\sum_n \frac{a^{\ln n}}{b^n}$ seriearen izaera a eta b balioen arabera, $a, b > 0$ izanik.

Erroaren irizpidea erabiliko dugu:

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{a^{\ln n}}{b^n}} = \dfrac{a^{\ln n/n}}{b}$ da eta, beraz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\ln n/n}}{b} = 1/b$ da.

$1/b < 1$, hau da, $b > 1$ bada, $\displaystyle\sum_n \frac{a^{\ln n}}{b^n}$ konbergentea da.

$1/b > 1$, hau da, $b < 1$ bada, $\displaystyle\sum_n \frac{a^{\ln n}}{b^n}$ dibergentea da.

$1/b = 1$, hau da, $b = 1$ bada, zalantzazko kasua dugu.

$b = 1$ denean, $\displaystyle\sum_n a^{\ln n}$ seriea dugu.

Horren izaera determinatzeko, zatiduraren irizpidea erabiliko dugu orain.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = a^{\ln(n+1) - \ln n} = a^{\ln \frac{n+1}{n}}$ da; eta limitea, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\ln \frac{n+1}{n}} = 1$ da. Hortaz, berriro ere zalantzazko kasua dugu.

Azkenik, Raaberen irizpidea erabiliko dugu.

$n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - a^{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$ da, eta limitea kalkulatuz, honela geratuko da:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - a^{\ln \frac{n+1}{n}}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} -n\left(\ln a^{\ln \frac{n+1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} -n \ln \frac{n+1}{n} \ln a \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} -n\frac{1}{n} \ln a = -\ln a = \ln \frac{1}{a}.$$

(1) eta (2) berdintzetan, $\left\{\left(1-a^{\ln\frac{n+1}{n}}\right)\right\} \sim \left\{-\ln a^{\ln\frac{n+1}{n}}\right\}$ eta $\left\{\ln\frac{n+1}{n}\right\} \sim \left\{\frac{1}{n}\right\}$ baliokidetzak erabili ditugu.

$\ln\frac{1}{a} > 1$, edo $\frac{1}{a} > e$, edo $a < \frac{1}{e}$ bada, $\sum_n a^{\ln n}$ konbergentea da.

$\ln\frac{1}{a} < 1$, edo $\frac{1}{a} < e$, edo $a > \frac{1}{e}$ bada, $\sum_n a^{\ln n}$ dibergentea da.

$\ln\frac{1}{a} = 1$, edo $\frac{1}{a} = e$, edo $a = \frac{1}{e}$ bada, $\sum_n (1/e)^{\ln n} = \sum_n \frac{1}{n}$ serie harmonikoa dugu, eta hori dibergentea da, 4.15.1. Adibidearen arabera.

4.22. Teorema. *Pringsheim-en edo biderkaduraren irizpidea*

Izan bedi $\sum_n a_n$ *gai positiboko seriea.* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = l \in [0,\infty)$ *existitzen bada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *baterako,*

1. $\alpha > 1$ *eta* $l < \infty$ *direnean,* $\sum_n a_n$ *konbergentea izango da;*

2. $\alpha \leq 1$ *eta* $l > 0$ *(*$l = \infty$ *barne) direnean,* $\sum_n a_n$ *dibergentea izango da;*

4.23. Adibidea. Azter dezagun $\sum_n \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ seriearen izaera.

Pringsheimen irizpidea erabiltzeko, n^α biderkatu behar dugu gai orokorrarekin; ondoren, limitea kalkulatuko dugu, α egokia aukeratuz.

$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-4}$ da, $\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right\} \sim \left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ delako.

(1) berdintzan, $\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right\} \sim \left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ baliokidetza erabili dugu.

Limite finitua lortu nahi badugu, $\alpha - 4 \leq 0$ bete beharko da, hau da, $\alpha \leq 4$. Hortaz, $\alpha = 4 > 1$ aukeratuz gero, $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to\infty} n^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 < \infty$ da eta Pringsheimen irizpideak dio seriea konbergentea dela.

4.2.4. Serieen batura zehatza

Gai positiboko serieak konbergenteak edo dibergenteak izan daitezke. Bigarren kasuan, serieen batura infinitu da, hots, $\sum_{n=1}^\infty a_n = \infty$ da.

Serie konbergenteen kasuan, batura finitua da eta hori kalkulatu nahi dugu. Serie berezi batzuen batura zehatza kalkulatuko dugu.

1) **Serie geometrikoak**

$\sum_n ar^{n-1}$, $a \neq 0$ eta $r \in \mathbb{R}$ izanik.

Batura: $\sum_{n=1}^\infty ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ da, $|r| < 1$ denean (ikus 4.4. Adibidea).

2) **Serie hipergeometrikoak**

$\sum_n a_n$, non $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$ baita.

D'Alemberten irizpidea erabiliz, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma} = 1$ da.

Orain, Raaberen irizpidea aplikatuz, $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}\right) = n\frac{\gamma-\beta}{\alpha n+\gamma} = \frac{(\gamma-\beta)n}{\alpha n+\gamma}$ da, eta limitea kalkulatuz, honela geratuko da:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\gamma-\beta)n}{\alpha n+\gamma} = \frac{\gamma-\beta}{\alpha}.$$

$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha} > 1$ edo $\gamma > \alpha+\beta$ denean, seriea konbergentea izango da.

Kasu horretan, batura hau izango da: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1\gamma}{\gamma-(\alpha+\beta)}$.

4.24. Adibidea. Kalkula dezagun $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ seriearen batura zehatza, $a \notin \mathbb{Z}^-$.

Lehendabizi, serie konbergentea dela egiaztatuko dugu:

$a_n = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ bada,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)}}{\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}} = \frac{(n+1)!(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)} = \frac{n+1}{n+a+1} \quad \text{izango da.}$$

Badakigu serie hipergeometrikoa konbergentea dela $\gamma > \alpha+\beta$ denean; kasu honetan, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ eta $\gamma = a+1$ dira eta, beraz, baldintza beteko da $a+1 > 1+1$ bada, hots, $a > 1$ bada.

Kasu horretan, batura hau izango dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} = \frac{\frac{1}{a+1}(a+1)}{(a+1)-(1+1)} = \frac{1}{a-1}, \quad a > 1 \ \text{izanik.}$$

3) **Serie aritmetiko-geometrikoak**

$\displaystyle\sum_n P(n)r^n$, non $P(n)$ polinomio bat baita.

D'Alemberten irizpidea erabiliko dugu izaera determinatzeko.

$a_n = P(n)r^n$ bada, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{P(n+1)r^{n+1}}{P(n)r^n} = \dfrac{P(n+1)}{P(n)}r$ da, eta zatiduraren limitea kalkulatuz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{P(n+1)}{P(n)}r = r$ ateratzen da, bi polinomioek maila bera dutelako, eta maila handieneko koefizienteak berdinak. Ondorioz, seriea konbergentea da $r < 1$ bada.

Kasu hauetan, honela kalkulatuko dugu batura zehatza: seriearen s batura hartuko dugu, eta r arrazoiaz biderkatuko dugu.

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)r^n = P(0)+P(1)r+P(2)r^2+\cdots+P(n)r^n+\cdots$$

$$r\cdot s = r\cdot\sum_{n=0}^{\infty} P(n)r^n = P(0)r+P(1)r^2+P(2)r^3+\cdots+P(n-1)r^n+\cdots$$

Bion arteko kendura kalkulatuz gero,

$$s-r\cdot s = (1-r)s = P(0)+\sum_{n=1}^{\infty}(P(n)-P(n-1))r^n.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(P(n)-P(n-1))r^n$ serie aritmetiko-geometriko berri bat da, non $Q(n) = P(n)-P(n-1)$ polinomioak maila bat gutxiago baitu eta, beraz, prozedura bera erabil dezakegu.

4.25. Adibidea. Ikus dezagun zein den $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}$ seriearen batura zehatza.

Lehendabizi, konbergentzia egiaztatuko dugu: $r = \dfrac{1}{2} < 1$ denez, seriea konbergentea da.

$$s = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n} = 1+\frac{2}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots+\frac{n^2+1}{2^n}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}\cdot s = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{10}{2^4}+\cdots+\frac{(n-1)^2+1}{2^n}+\cdots$$

Bion arteko kendura kalkulatuz gero,

$$s-\frac{1}{2}s=\left(1-\frac{1}{2}\right)s=\frac{1}{2}s=1+\frac{2-1}{2}+\frac{5-2}{2^2}+\frac{10-5}{2^3}+\cdots\frac{(n^2+1)-((n-1)^2+1)}{2^n}+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots\frac{2n-1}{2^n}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$$

Orain, prozedura errepikatuko dugu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ seriearekin, hori ere serie aritmetiko-geometrikoa delako.

$$s'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}\cdot s'=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\cdots$$

Bion arteko kendura kalkulatuz gero,

$$s'-\frac{1}{2}s'=\left(1-\frac{1}{2}\right)s'=\frac{1}{2}s'=\frac{1}{2}+\frac{3-1}{2^2}+\frac{5-3}{2^3}+\cdots\frac{(2n-1)-(2n-3)}{2^n}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots\frac{2}{2^n}+\cdots=\frac{1}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Azkena, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, serie geometriko konbergentea da, $r=\dfrac{1}{2}<1$ delako, eta horren batura ezagutzen dugu: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

Hortaz, $\dfrac{1}{2}s'=\dfrac{1}{2}+2\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$ da; hortik, $s'=3$ da.

Azkenik, $\dfrac{1}{2}s=1+s'=1+3=4$ da; eta, beraz, $s=8$ da.

4) **Serie teleskopikoak**

$\displaystyle\sum_n a_n$, non $a_n=b_n-b_{n+1}$ eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=b$ baitira.

Kasu hauetan, batura hau dugu: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=b_1-b$.

4.26. Adibidea. Ikus dezagun zein den $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ seriearen batura zehatza.

Lehendabizi, seriearen gai orokorra deskonposatuko dugu:

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1/2}{2n+1}-\frac{1/2}{2n+3} \quad \text{da.}$$

Beraz, esan dezakegu serie teleskopikoa dela, $b_n=\dfrac{1/2}{2n+1}$ izanik.

Ondorioz, $b_1=\dfrac{1}{6}$ eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1/2}{2n+1}=0$ direnez, batura hau izango du:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}.$$

5) **Serie harmonikotik eratorriak**

$\displaystyle\sum_n\frac{1}{n}$ serie harmonikoa da, eta serie dibergentea da. Horren n. batura partziala H_n idazten da: $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

Froga daiteke $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ dela, non $\gamma = 0,57721566...$ Eulerren konstantea baita eta $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ baita.

Bestalde, posizio bikoitiko eta bakoitiko batugaien n. batura partzialak honela izendatzen dira: $P_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$ eta $I_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$.

$P_n + I_n = H_{2n}$ betetzen denez, bi batura partzial horiek H_n batura partzialaren funtzioan idatz ditzakegu:

$P_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}H_n$ eta $I_n = H_{2n} - P_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$ ditugu.

4.27. Adibidea. Kalkula dezagun zein den $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie harmoniko alternatuaren batura zehatza[2].

Seriearen $2n$. batura partziala hartuko dugu eta deskonposatuko dugu:

$S_{2n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ da.

Hortaz, $S_{2n} = I_n - P_n$ da. Orain, I_n eta P_n beren balioz ordezkatuko ditugu:

$S_{2n} = I_n - P_n = \left(H_{2n} - \frac{1}{2}H_n\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n.$

Orain, H_{2n} eta H_n beren balioz ordezkatuko ditugu:

$S_{2n} = H_{2n} - H_n = (\ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n)$, non $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{2n} = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ baitira.

Hortaz, $S_{2n} = (\ln 2 + \ln n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n) = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$, non $\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) = 0$ baita.

Ondorioz, S_{2n} batura partzialen limitea kalkulatzen badugu,

$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}(\ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) = \ln 2$ izango dugu. Hau da, serie harmoniko alternatuaren batura zehatza hau da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

6) **Serie arrazionalak**

$\sum_n \frac{P(n)}{Q(n)}$ serieak dira, non $P(n)$ eta $Q(n)$ k eta l mailetako polinomioak baitira, hurrenez hurren.

Pringsheimen irizpidea erabiliko dugu izaera determinatzeko.

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ bada, $n^\alpha a_n = n^\alpha \frac{P(n)}{Q(n)}$ da, eta limitea $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{P(n)}{Q(n)}$.

Seriea konbergentea izateko $\alpha > 1$ eta limite finitua lortu behar dugu; horretarako, $\alpha + k < l$ bete beharko da.

Ondorioz, serie konbergentea izango da $l \geq k+2$ denean, 3.26. Adibidea kontuan hartuz.

Batura kalkulatzeko, seriearen $\frac{P(n)}{Q(n)}$ gai orokorra frakzio bakunetan deskonposatuko dugu, serie harmoniko orokorrak lortuz. Serie harmoniko horien baturak erabiliz kalkulatuko da serie arrazionalaren batura.

Lagungarria izan daiteke Riemann-en ζ funtzioa: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$ izanik. Bi kasu nabariak dira:

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ eta $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Bestalde, lehenengo kasutik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ ere atera daiteke.

2. Kontuan izan seriea ez dela gai positiboko seriea; hala ere, metodoa erabil dezakegu batura zehatza kalkulatzeko.

4.28. Adibidea. Kalkula dezagun $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3+2n^2-n-2}$ serie arrazionalaren batura zehatza.

Serie konbergentea da izendatzaileko polinomioaren maila $l=3$ eta zenbakitzailekoarena $k=0$ direlako; beraz, $l\geq k+2$ baldintza betetzen da.

Izendatzaileko polinomioa deskonposa dezakegu: $n^3+2n^2-n-2=(n-1)(n+1)(n+2)$.

Beraz, gai orokorra hiru batugai bakunetan deskonposa dezakegu honela:

$$\frac{1}{n^3+2n^2-n-2}=\frac{1}{(n-1)(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Kalkuluak eginez, $A=\dfrac{1}{6}$, $B=\dfrac{-1}{2}$ eta $C=\dfrac{1}{3}$ aterako ditugu. Eta seriea honela deskonposa dezakegu:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3+2n^2-n-2}=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+2}.$$

Orain, seriearen n. batura partziala kalkulatuko dugu:

$$S_n=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right).$$

Hiru parentesietan $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$ batura komuna da; beraz, faktore komun gisa atera dezakegu; gainerako batugaiak ondoren jarriko ditugu:

$$S_n=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

$\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=0$ denez, lehenengo batugaia desagertuko da; gainerakoak sinplifikatuz honela idatz dezakegu S_n batura partziala:

$$S_n=\frac{1}{6}\frac{11}{6}-\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{n+2}=\frac{5}{36}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{n+2}.$$

S_n batura partzialaren limitea kalkulatuz lortuko dugu batura zehatza:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5}{36}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{n+2}\right]=\frac{5}{36}.$$

7) $\displaystyle\sum_n\frac{P(n)}{n!}$ erako serieak

D'Alemberten irizpidea erabiliko dugu izaera determinatzeko.

$a_n=\dfrac{P(n)}{n!}$ bada, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{P(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{P(n)}{n!}}=\dfrac{n!P(n+1)}{(n+1)!P(n)}=\dfrac{P(n+1)}{(n+1)P(n)}$ da, eta limitea kalkulatuz,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{P(n+1)}{(n+1)P(n)}=0<1$ ateratzen da, bi polinomioek maila bera dutelako. Ondorioz, seriea konbergentea da polinomio guztietarako.

Batura kalkulatzeko, $\dfrac{P(n)}{n!}=\dfrac{A}{n!}+\dfrac{B}{(n-1)!}+\cdots+\dfrac{C}{(n-k)!}$ deskonposaketa egingo dugu, non k baita $P(n)$ polinomioaren maila.

Batukariaren hasierako balioa egokitu beharko dugu izendatzaileetako faktorialen arabera.

Deskonposaketaren batugai bakoitzean $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ berdintza erabiliko dugu.

4.29. Adibidea. Kalkula dezagun $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n!}$ seriearen batura zehatza.

Frogatu denez, serie konbergentea da. Orain, hiru batugaitan deskonposatuko dugu:

$$\frac{n^2+3n+2}{n!}=\frac{A}{n!}+\frac{B}{(n-1)!}+\frac{C}{(n-2)!},\quad \forall n\geq 2.$$

Koefizienteak kalkulatzeko, izendatzaileak berdinduko ditugu, eta sinplifikatuz, berdintza hau lortuko dugu: $n^2+3n+2 = A+Bn+Cn(n-1)$. Hortik, $C=1$, $B-C=3 \Rightarrow B=4$ eta $A=2$ lortuko ditugu.

Izendatzaile batean $(n-2)!$ dugunez, batukarien lehenengo balioa $n=2$ izatea komeni da; horretarako aldaketa hau egingo dugu batura osoan:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n!} = \frac{6}{1!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n!} = 6+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n!}.$$

Orain, deskonposaketa ordezkatuko dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n!} = 6+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\right) = 6+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}+4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} =$$

$$= 6+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)+4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{0!}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} =$$

$$= 6+2(e-2)+4(e-1)+e = 7e-2.$$

4.2.5. Serie baten batura hurbildua

Seriea konbergentea denean, horren batura kalkulatzea interesatuko zaigu. Kasu askotan batura hori kalkulatzeko metodoak edo formulak daude; baina, beste kasu askotan ez dago metodorik edo formularik batura kalkulatzeko. Hemen, batura zehazki ezin denean kalkulatu, batura gutxi gorabehera, hots, hurbilpena, nola kalkula daitekeen ikusiko dugu. Hurbilpen horri *batura hurbildu* deritzogu. Batura hurbildua kalkulatzen denean, *errore* bat egiten da; errore hori bornatuko dugu. Errorearen arabera esango dugu hurbilpena ona den ala ez.

S_n izango da batura hurbildua eta R_n egiten den errorea. Hau da, batura hurbildutzat batugai kopuru finituaren batura hartzen da, hots, batura partziala, eta gainerakoak, hondarrak, errorea ematen du.

Batura hurbildua kalkulatzeko eta errorea bornatzeko gaiaren hasieran eman genituen emaitzak erabiliko ditugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

eta Cauchyren irizpidearen 4.9. Korolarioa:

$\sum\limits_n a_n$ seriea konbergentea da baldin eta soilik baldin $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ bada.

Serie konbergenteetarako, beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ denez, hau beteko da:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad |R_n| < \varepsilon.$$

Beraz, $n \geq n_0(\varepsilon)$ hartzen badugu, $|R_n| < \varepsilon$ izango da, hots, errorea nahi bezain txikia egin dezakegu.

Bi problema mota izango ditugu. Batean, batura hurbildua emango digute eta egiten dugun errorea zehaztu beharko dugu. Bestean, errorearen maila emango digute eta batura hurbildua kalkulatu beharko dugu. Bigarren hori da zailagoa.

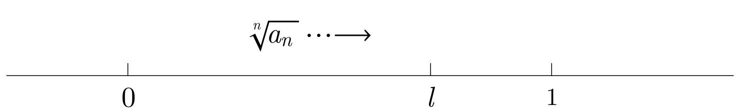
Bi problemak ebazteko erroaren eta zatiduraren irizpideak erabiliko ditugu.

Erroaren irizpidea

$\sum\limits_n a_n$ konbergentea da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ bada.

$\{\sqrt[n]{a_n}\}$ segida l limitera ezkerretik edo eskuinetik hurbil daiteke:

1. $\forall n > k \quad \sqrt[n]{a_n} \leq l$ bada (ikus irudia), $a_n \leq l^n$ beteko da $\forall n > k$.



Beraz, $R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots \leq l^{k+1} + l^{k+2} + l^{k+3} + \cdots$ da.

Azkena serie geometriko konbergentea da, $l < 1$ delako, eta horren batura $\dfrac{l^{k+1}}{1-l}$ da. Hortaz, errorea honela bornatuko dugu:

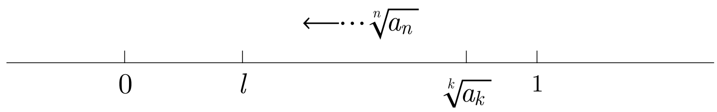
$$R_k \leq \frac{l^{k+1}}{1-l}.$$

2. $\forall n > k$ $\sqrt[n]{a_n} \geq l$ bada, $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ segida beherakorra da eta, hortaz, $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[k]{a_k}$ beteko da $\forall n > k$. Hau da, $a_n \leq (\sqrt[k]{a_k})^n$ betetzen da, $\forall n > k$.

   $R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots \leq (\sqrt[k]{a_k})^{k+1} + (\sqrt[k]{a_k})^{k+2} + (\sqrt[k]{a_k})^{k+3} + \cdots$ da.

   Berriro ere, serie geometrikoa lortu dugu. Baina, oraingoan, ez dakigu konbergentea den ala ez, $\sqrt[k]{a_k}$ arrazoia ezezaguna delako.

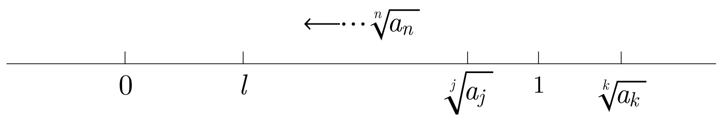
   a) $\sqrt[k]{a_k} < 1$ bada (ikus irudia),



   serie geometrikoa konbergentea da eta errorearen borne hau lortzen dugu:

$$R_k \leq \frac{(\sqrt[k]{a_k})^{k+1}}{1-\sqrt[k]{a_k}}.$$

   b) $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ bada, $\sqrt[j]{a_j} < 1$ betetzen duen lehen $j > k$ bilatuko dugu (ikus irudia).



   Hortik aurrera, $\forall n > j$ $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[j]{a_j}$ edo $a_n \leq (\sqrt[j]{a_j})^n$ beteko da. Beraz, errorearen borne hau lortuko dugu:

   $R_k = a_{k+1} + \cdots + a_j + \cdots \leq a_{k+1} + \cdots + a_j + (\sqrt[j]{a_j})^{j+1} + \cdots$.

   Orain, serie geometriko maiorantearen arrazoia $\sqrt[j]{a_j} < 1$ da. Hortik,

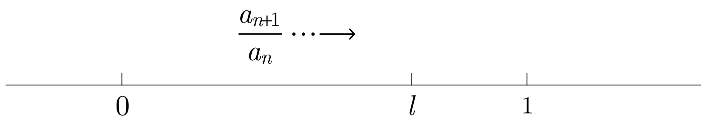
$$R_k \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_j + \frac{(\sqrt[j]{a_j})^{j+1}}{1-\sqrt[j]{a_j}}.$$

Zatiduraren irizpidea

$\sum_n a_n$ konbergentea da $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ bada.

$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ segida l limitera ezkerretik edo eskuinetik hurbil daiteke:

1. $\forall n > k$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq l$ bada (ikus irudia), $a_{n+1} \leq l a_n$ beteko da $\forall n > k$.



   Beraz, $R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots \leq a_{k+1} + l a_{k+1} + l^2 a_{k+1} + \cdots$.

   Azkena serie geometriko konbergentea da, $l < 1$ delako, eta horren batura $\dfrac{a_{k+1}}{1-l}$ da. Hortaz, errorea honela bornatuko dugu:

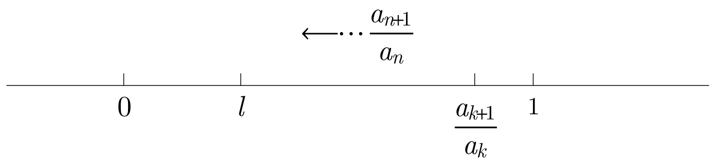
$$R_k \leq \frac{a_{k+1}}{1-l}.$$

2. $\forall n > k$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq l$ bada, $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ segida beherakorra da eta, hortaz, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ beteko da, $\forall n > k$. Hau da, $a_{n+1} \leq \dfrac{a_{k+1}}{a_k} a_n$ betetzen da, $\forall n > k$.

$$R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots \leq a_{k+1} + \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) a_{k+1} + \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^2 a_{k+1} + \cdots$$

Berriro ere, serie geometrikoa lortu dugu. Baina, oraingoan, ez dakigu konbergentea den ala ez, $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ arrazoia ezezaguna delako.

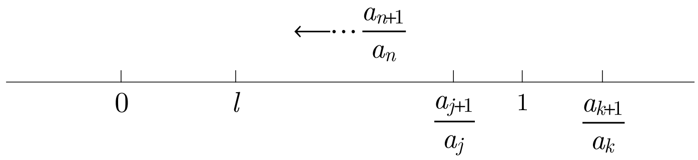
a) $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ bada (ikus irudia),



serie geometrikoa konbergentea da eta errorearen borne hau dugu:

$$R_k \leq \frac{a_{k+1}}{1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}} = \frac{a_k a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}}.$$

b) $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ bada, $\dfrac{a_{j+1}}{a_j} < 1$ betetzen duen lehen $j > k$ bilatuko dugu (ikus irudia).



Hortik aurrera, $\forall n > j$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{a_{j+1}}{a_j}$ edo $a_{n+1} < a_n \left(\dfrac{a_{j+1}}{a_j}\right)$ beteko da.

$$R_k = a_{k+1} + \cdots + a_j + a_{j+1} + +a_{j+2} + \cdots \leq a_{k+1} + \cdots + a_j + a_{j+1} + \left(\frac{a_{j+1}}{a_j}\right) a_{j+1} + \cdots.$$

Orain, serie geometriko maiorantearen arrazoia $\dfrac{a_{j+1}}{a_j} < 1$ da. Hortik,

$$R_k \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_j + \frac{a_{j+1}}{1 - \dfrac{a_{j+1}}{a_j}} = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_j + \frac{a_j a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}}.$$

4.30. Adibidea. Borna dezagun R_3 errorea $\displaystyle\sum_n \frac{300}{n^n}$ serierako.

1) Erroaren irizpidea

$a_n = \dfrac{300}{n^n}$ bada, $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{300}{n^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{300}}{n}$ da. Eta erroaren limitea kalkulatuz,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{300}}{n} = 0 < 1$ da; beraz, seriea konbergentea da. Hortik ere ateratzen dugu $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{300}}{n}\right\}$ segida $l = 0$ limitera eskuinetik hurbiltzen dela. Beraz, 2. kasuan gaude.

$k = 3$ denez, $\dfrac{\sqrt[3]{300}}{3} = 2{,}23 > 1$ lortzen dugu. Horrek esan nahi du 2.b kasuan gaudela eta $j > 3$ bilatu behar dugula.

$\dfrac{\sqrt[4]{300}}{4} = 1{,}04 > 1$ eta $\dfrac{\sqrt[5]{300}}{5} = 0{,}62 < 1$ dugu. Beraz, $j = 5$ da, eta errorearen bornea hau da:

$$R_3 < \frac{300}{4^4} + \frac{300}{5^5} + \frac{\left(\frac{\sqrt[5]{300}}{5}\right)^6}{1 - \frac{\sqrt[5]{300}}{5}} = 1{,}428.$$

2) Zatiduraren irizpidea

$a_n = \dfrac{300}{n^n}$ bada, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{300}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{300}{n^n}} = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ da, eta limitea kalkulatuz,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) = 0 < 1$ ateratzen da. Ondorioz, seriea konbergentea da eta, horrez gain, $\left\{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\}$ segida $l = 0$ limitera eskuinetik hurbiltzen da, eta 2. kasuan gaude.

$k = 3$ denez, $\dfrac{3^3}{4^4} = 0{,}10 < 1$ dugu eta 2.a kasuan gaude. Hortaz, errorearen bornea hau da:

$$R_3 \le \frac{a_3 a_4}{a_3 - a_4} = \frac{\frac{300}{3^3}\frac{300}{4^4}}{\frac{300}{3^3} - \frac{300}{4^4}} = 1{,}310.$$

4.31. Adibidea. $\sum\limits_n \dfrac{300}{n^n}$ seriea emanik, kalkula dezagun batura hurbildua R_k errorea $0{,}001$ baino txikiagoa izan dadin.

1) Erroaren irizpidea erabiliko dugu.

Badakigu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{300}}{n} = 0 < 1$ dena; beraz, seriea konbergentea da.

Badakigu ere $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{300}}{n}\right\}$ segida $l = 0$ limitera eskuinetik hurbiltzen dena, $\forall n \quad \dfrac{\sqrt[n]{300}}{n} > 0$ delako. Hortaz, 2. kasuan gaude.

Pentsatuko dugu $\dfrac{\sqrt[k]{300}}{k} < 1$ dela; geroago egiaztatuko dugu hori.

Hortaz, 2.a kasuan gaudela pentsatu dugu; kasu horretan, errorea bornatzeko formula hau da: $R_k \le \dfrac{(\sqrt[k]{a_k})^{k+1}}{1-(\sqrt[k]{a_k})}$. Bestalde, $R_k < 0{,}001$ izatea nahi badugu, nahikoa da $\dfrac{(\sqrt[k]{a_k})^{k+1}}{1-(\sqrt[k]{a_k})} < 0{,}001$ izatea. Hortik k-ren balioa askatuko dugu. Lehenago, desberdintza sinplifikatuko dugu:

$\dfrac{(\sqrt[k]{a_k})^{k+1}}{1-(\sqrt[k]{a_k})} < 0{,}001 = \dfrac{1}{1000} \implies$ a_k ordezkatuz, $\dfrac{\left(\frac{\sqrt[k]{300}}{k}\right)^{k+1}}{1-\frac{\sqrt[k]{300}}{k}} < \dfrac{1}{1000} \implies$

$\implies$ sinplifikatuz, $\dfrac{300\sqrt[k]{300}}{k^k(k-\sqrt[k]{300})} < \dfrac{1}{1000} \implies 300.000\sqrt[k]{300} < k^k(k-\sqrt[k]{300})$.

Orain, hurbilpenen bidez kalkulatuko dugu k-ren balioa:

$k = 6$ denean, ezkerrean $776.202{,}071$ eta eskuinean $159.221{,}054$ ditugu;

$k = 7$ denean, ezkerrean $677.634{,}829$ eta eskuinean $3.904.596{,}267$ geratzen dira. Hortaz, $k = 7$ da.

Gogora dezagun esan dugula $\dfrac{\sqrt[k]{300}}{k} < 1$ dela; egiazta dezagun, aurrera egin baino lehen, $k = 7$ denean, horrela dela: $\dfrac{\sqrt[7]{300}}{7} = 0{,}322 < 1$ da.

Bukatzeko, kalkula dezagun batura hurbildua, hau da, S_7:

$$S_7 = \frac{300}{1^1} + \frac{300}{2^2} + \frac{300}{3^3} + \frac{300}{4^4} + \frac{300}{5^5} + \frac{300}{6^6} + \frac{300}{7^7} = 387{,}38578043$$

da, eta errorea $R_7 < 0{,}001$.

2) Zatiduraren irizpidea erabiliko dugu.

Kasu honetan ere $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=0<1$ da; beraz, seriea konbergentea da.

$\left\{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\}$ segida $l=0$ limitera eskuinetik hurbiltzen da, frakzioak positiboak direlako; hortaz, 2. kasuan gaude.

Orain ere, $\dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}<1$ dela pentsatuko dugu; k kalkulatu ondoren egiaztatuko dugu hori.

Baldintza horrekin 2.a kasuko formula erabil dezakegu: $R_k\le\dfrac{a_ka_{k+1}}{a_k-a_{k+1}}$.

$R_k<0{,}001$ izatea nahi badugu, nahikoa da $\dfrac{a_ka_{k+1}}{a_k-a_{k+1}}<0{,}001$ izatea. Hortik k-ren balioa askatuko dugu. Lehenago, desberdintza sinplifikatuko dugu:

$$\frac{\frac{300}{k^k}\frac{300}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{300}{k^k}-\frac{300}{(k+1)^{k+1}}}<0{,}001 \implies \text{sinplifikatuz,}\quad \frac{\frac{300}{k^k(k+1)^{k+1}}}{\frac{(k+1)^{k+1}-k^k}{k^k(k+1)^{k+1}}}=\frac{300}{(k+1)^{k+1}-k^k}<0{,}001=\frac{1}{1.000};$$

azkenik, izendatzaileak aldez trukatuz, $300.000<(k+1)^{k+1}-k^k$ desberdintza dugu.

Orain, k-ri balioak emanez, azken baldintza betetzen duen lehen k aurkituko dugu:

$k=5$ denean, ezkerrean 300.000 eta eskuinean 43.531 ditugu;

$k=6$ denean, ezkerrean 300.000 eta eskuinean 776.887 ditugu; beraz, $k=6$ da.

Gogora dezagun $\dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}<1$ dela esan dugula; egiazta dezagun, aurrera egin baino lehen, $k=6$ denean, horrela dela: $\dfrac{6^6}{7^7}=0{,}056<1$ da.

Bukatzeko, kalkula dezagun batura hurbildua, hau da, S_6:

$$S_6=\frac{300}{1^1}+\frac{300}{2^2}+\frac{300}{3^3}+\frac{300}{4^4}+\frac{300}{5^5}+\frac{300}{6^6}=387{,}38541615$$

da, eta errorea $R_6<0{,}001$.

4.3. SERIE ALTERNATUAK

4.32. Definizioa. *Izan bedi* $\{a_n\}$ *segida, non* $\forall n\ge n_0$ $a_n>0$ *baita;* $\displaystyle\sum_n(-1)^{n-1}a_n$ *serieari* serie alternatu *deritzo.*

Gogoan izan segidaren gaiak positiboak direla, baina seriearen gaiak positiboak eta negatiboak direla, txandaka.

4.33. Teorema. *Leibniz-en irizpidea*

Izan bedi $\displaystyle\sum_n(-1)^{n-1}a_n$ *serie alternatua.* $\{a_n\}$ *segida beherakorra bada eta* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ *bada,* $\displaystyle\sum_n(-1)^{n-1}a_n$ *seriea konbergentea izango da.*

4.34. Adibidea. Azter dezagun 4.2. Adibideko $\displaystyle\sum_n\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie alternatuaren izaera.

$a_n=\dfrac{1}{n}$ da; beraz, segida beherakorra da eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ da. Orduan, Leibnizen teoremaren arabera, $\displaystyle\sum_n\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie konbergentea da.

Batura hurbildua eta errorearen bornapena

Serie alternatu konbergenteetan batura hurbilduek eta s batura zehatzak desberdintza hauek betetzen dituzte:

$$\forall k \quad S_{2k} \leq s \leq S_{2k+1}.$$

Serie alternatuen kasuan errorearen bornapena honela geratzen da:

$$|R_k| < a_{k+1}.$$

4.35. Adibidea. Borna dezagun $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie alternatuaren R_5 errorea.

$|R_k| < a_{k+1}$ denez, $|R_5| < a_6 = \frac{1}{6} = 0,16666...$ da.

Orain, jakin nahi badugu zenbat batugai hartu behar ditugun errorea $0,01$ baino txikiagoa izan dadin, formula bera erabiliz, nahikoa da $a_{k+1} < 0,01$ izatea; beraz, $\frac{1}{k+1} < 0,01 = \frac{1}{100}$ betetzea nahikoa izango da; hortik, $k = 100$ lortuko dugu.

Hau da, lehenengo 100 batugai batu behar ditugu.

$$S_{100} = \sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{100} = 0.6881721793...$$

da, eta errorea $R_{100} < 0,01$.

4.4. ARIKETA EBATZIAK

1. Ariketa teorikoak

1. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko inplikazioa egiazkoa edo faltsua den:
$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} R_k = 0$, non $R_k = a_k + a_{k+1} + \cdots$ baita.
Erantzuna.
Faltsua da; adibidez, $\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea da. Cauchyren irizpidearen 4.9. Korolarioaren arabera, $\lim_{n\to\infty} R_n \neq 0$ da; baina, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ da.

2. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko inplikazioa egiazkoa edo faltsua den:
$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim_{k\to\infty} R_k = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Erantzuna.
Egiazkoa da; Cauchyren irizpidearen 4.9. Korolarioak dio serie bat konbergentea dela baldin eta soilik baldin hondarren limiteak 0ra jotzen badu. $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ denez, $\sum_n a_n$ seriea konbergentea da eta, Cauchyren irizpidearen 4.7. Korolarioaren arabera, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ da.

3. Froga ezazu gai positiboko $\sum_n a_n$ seriea konbergentea bada, $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ seriea ere konbergentea dela.
Froga.
Bi serieak gai positiboko serieak dira, lehenengoa horrela delako. Bestalde, $\forall n \geq n_0$ $0 < a_n$ bada, $1 < 1 + a_n \Longrightarrow \frac{1}{1+a_n} < 1 \Longrightarrow \frac{a_n}{1+a_n} < a_n$. Hortaz, $\sum_n a_n$ seriea $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ seriearen serie maiorante konbergentea da; Konparaziozko irizpide orokorraren arabera, $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ seriea ere konbergentea da.

4. Froga ezazu, $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a_n < 1$ bada, $\sum_n a_n$ eta $\sum_n \frac{a_n}{1-a_n}$ serieek izaera bera dutela.
Froga.
   - $\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ izango da; hortik, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{a_n}{1-a_n}} = \lim_{n\to\infty} (1 - a_n) = 1$ da; beraz, $\{a_n\}$ eta $\left\{\frac{a_n}{1-a_n}\right\}$ segida baliokideak dira eta $\sum_n a_n$ eta $\sum_n \frac{a_n}{1-a_n}$ serieek izaera bera dute, 4.16.1. Korolarioaren arabera; beraz, $\sum_n \frac{a_n}{1-a_n}$ seriea ere konbergentea da.
   - $\sum_n a_n$ dibergentea bada eta $0 < a_n < 1$ bada, $0 < 1 - a_n < 1$ eta $1 < \frac{1}{1-a_n}$ beteko dira; beraz, $a_n < \frac{a_n}{1-a_n}$ beteko da; hau da, $\sum_n a_n$ seriea $\sum_n \frac{a_n}{1-a_n}$ seriearen serie minorante dibergentea da; 4.14.2. Konparaziozko irizpide orokorraren arabera, $\sum_n \frac{a_n}{1-a_n}$ seriea ere dibergentea da.

5. Froga ezazu $\sum_n a_n$ serie konbergentea bada, $\sum_n \ln(1+a_n)$ seriea ere konbergentea dela.

Froga.

$\sum_n a_n$ seriea konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ izango da; beraz, $\{a_n\} \sim \{\ln(1+a_n)\}$ baliokidetza erabil dezakegu esateko $\sum_n a_n$ eta $\sum_n \ln(1+a_n)$ serieek izaera bara dutela, 4.16.1. Korolarioaren arabera. Ondorioz, $\sum_n \ln(1+a_n)$ seriea ere konbergentea da.

6. Ondoko baieztapenak emanik:

a) $\sum_n a_n$ seriea konbergentea da,

b) $\sum_n |a_n|$ seriea konbergentea da,

c) $\sum_n (a_n)^2$ seriea konbergentea da;

esan ezazu, arrazoituz edo kontraadibidea jarriz, ondoko inplikazioak betetzen diren, edo ez:
1) *a*) $\Longrightarrow$ *b*). 2) *b*) $\Longrightarrow$ *a*). 3) *b*) $\Longrightarrow$ *c*). 4) *c*) $\Longrightarrow$ *b*).

Erantzuna.

1) Faltsua da; $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ bada, $|a_n| = \dfrac{1}{n}$ izango da, eta $\sum_n \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie harmoniko alternatua konbergentea da, 4.34. Adibidean ikusi dugunez, baina $\sum_n \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea.

2) Egiazkoa da. $\sum_n |a_n|$ konbergentea bada, Cauchyren baldintza beteko da:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall p,q \geq n_0 \quad \big||a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \cdots + |a_q|\big| < \varepsilon.$$

Baina,
$|a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q| \leq |a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \cdots + |a_q| = \big||a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \cdots + |a_q|\big|$ da; beraz,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall p,q \geq n_0 \quad |a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+1}| < \varepsilon$$

ere betetzen da; ondorioz, Cauchyren baldintza betetzen denez, $\sum_n a_n$ seriea ere konbergentea da.

3) Egiazkoa da. $\sum_n |a_n|$ konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ beteko da, hau da, $\varepsilon = 1 > 0$ hartuz, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0 \quad |a_n| < 1$.
Orduan, $a_n^2 = |a_n| \cdot |a_n| < |a_n|$ da; beraz, $\sum_n |a_n|$ seriea $\sum_n a_n^2$ seriearen serie maiorante konbergentea da; 4.14.1. Konparaziozko irizpidearen arabera, $\sum_n a_n^2$ seriea ere konbergentea da.

4) Faltsua da. $a_n = \dfrac{1}{n}$ bada, $a_n^2 = \dfrac{1}{n^2}$ izango da, eta $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ serie harmoniko orokorra konbergentea da, $\alpha = 2 > 1$ delako, baina $\sum_n \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea da.

7. Esan ezazu, arrazoituz, inplikazio hau egiazkoa denetz: $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ bada, $\sum_n a_n$ dibergentea da.

Erantzuna.

Ez da egiazkoa. Hori ikusteko, kontraadibide bat jarriko dugu.

Har dezagun $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ segida. Alde batetik, $\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n^2} = 0$ betetzen da; baina, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ serie konbergentea da, serie harmoniko orokorra delako, $\alpha = 2 > 1$ izanik.

8. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapena egiazkoa edo faltsua den:

Gai positiboko $\sum_n a_n$ seriea konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ beteko da.

Erantzuna.

$\lim_{n\to\infty} na_n = \infty$ balitz, $\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0 \quad na_n > K$ baita; beraz, $a_n > \frac{K}{n}$ genuke $\forall n \geq n_0$; horrek esan nahiko luke $\sum_n \frac{K}{n}$ serie harmoniko dibergentea $\sum_n a_n$ seriearen minorantea litzatekeela; ondorioz, 4.14.1. Konparaziozko irizpide orokorraren arabera, $\sum_n a_n$ seriea ere dibergentea litzateke.

$\lim_{n\to\infty} na_n = l \neq 0$ balitz, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{l}{n}} = 1$ beteko litzateke eta $\{a_n\} \sim \left\{\frac{l}{n}\right\}$ izango litzateke; beraz, $\sum_n \frac{l}{n}$ eta $\sum_n a_n$ serieek izaera bera izango lukete, 4.16.1 Korolarioaren arabera; beraz, biak dibergenteak lirateke, $\sum_n \frac{l}{n}$ serie harmonikoa dibergentea delako.

Hortaz, aukera bakarra $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ izatea da.

2. Serieen izaeren azterketa

9. Seriearen lehenengo n gaien batura $S_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1}$ dela jakinik, kalkula itzazu:

9.1. seriearen gai orokorra;

9.2. seriearen izaera.

Ebazpena.

9.1. Seriearen gai orokorra $a_n = S_n - S_{n-1}$ da. Beraz,

$$S_n - S_{n-1} = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1} - \frac{5(n-1)^2 - 3(n-1) + 2}{(n-1)^2 - 1} = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1} - \frac{5n^2 - 13n + 10}{n^2 - 2n} =$$

$$= \frac{(5n^2 - 3n + 2)(n^2 - 2n) - (5n^2 - 13n + 10)(n^2 - 1)}{(n^2 - 1)(n^2 - 2n)} = \frac{3n^2 - 17n - 10}{(n^2 - 1)(n^2 - 2n)}.$$

9.2. Seriearen izaera determinatzeko, nahikoa dugu 4.3. Definizioa aplikatzea, hau da, batura partzialen $\{S_n\}$ segidaren limitea kalkulatzea: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1} = 5.$

$\{S_n\}$ segidaren limitea finitua denez, $\{S_n\}$ segida konbergentea da eta, aipatutako definizioa erabiliz, $\sum_n \dfrac{3n^2 - 17n - 10}{(n^2 - 1)(n^2 - 2n)}$ seriea ere konbergentea da. Are gehiago, seriearen batura zehatza ere lortu dugu, $\{S_n\}$ segidaren limitea bera baita, hots, 5.

Bestela, seriearen $a_n = \dfrac{3n^2-17n-10}{(n^2-1)(n^2-2n)}$ gai orokorra ezagututa eta positiboa denez, bere izaera honela ere determina dezakegu:
$\left\{\dfrac{3n^2-17n-10}{(n^2-1)(n^2-2n)}\right\} \sim \left\{\dfrac{3n^2}{n^4}\right\} = \left\{\dfrac{3}{n^2}\right\}$ betetzen da.
Hortaz, $\displaystyle\sum_n \frac{3n^2-17n-10}{(n^2-1)(n^2-2n)}$ eta $\displaystyle\sum_n \frac{3}{n^2}$ serieek izaera bera dute, 4.16.1. Korolarioaren arabera.
$\displaystyle\sum_n \frac{3}{n^2}$ serie harmoniko orokorra konbergentea da, $\alpha = 2 > 1$ delako. Ondorioz, gure seriea ere konbergentea da.

10. Determina ezazu $\displaystyle\sum_n \frac{1+\sin^2 an}{n^n}$ seriearen izaera.

Ebazpena.

Hasteko, gai positiboko seriea denez, konparaziozko irizpide orokorra erabil dezakegu. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1+\sin^2 an}{n^n} \leq \dfrac{2}{n^n}$ betetzen da; beraz, $\displaystyle\sum_n \frac{2}{n^n}$ seriea enuntziatuko seriearen maiorantea da. Ikus dezagun zein den horren izaera.

Gai positibokoa denez, erroaren irizpidea aplika dezakegu:

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{2}{n^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{2}}{n}$ da. Hortaz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n} = 0 < 1$ da. Ondorioz, serie maiorantea konbergentea da.

4.14.1. Konparaziozko irizpide orokorra aplikatuz, $\displaystyle\sum_n \frac{1+\sin^2 an}{n^n}$ seriea ere konbergentea da.

11. Determina ezazu $\displaystyle\sum_n a_n$ seriearen izaera a-ren balioen arabera, gai orokorra ondokoa izanik:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}\right)^a.$$

Ebazpena.

Gai positiboko seriea da; beraz, zatiduraren irizpidea erabil dezakegu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2}\right)^a}{\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}\right)^a} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^a = 1^a = 1; \text{ zalantzazko kasua da.}$$

Orain, Raaberen irizpidea erabiliko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^a\right) = l,\ \infty\cdot 0 \text{ indeterminazioa da.}$$

Indeterminazioa ebazteko, $\left\{1-\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^a\right\} \sim \left\{-\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^a\right\}$ baliokidetza erabiliko dugu eta limitea honela geratuko da:

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(-\ln\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^a\right) = \lim_{n\to\infty} -an\ln\frac{2n+1}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} -an\ln\left(1-\frac{1}{2n+2}\right) \overset{(1)}{=}$$
$$= \lim_{n\to\infty} -an\left(\frac{-1}{2n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{an}{2n+2} = \frac{a}{2}.$$

(1) berdintzan, $\left\{\ln\left(1-\dfrac{1}{2n+2}\right)\right\} \sim \left\{\dfrac{-1}{2n+2}\right\}$ baliokidetza erabili dugu.

Ondorioz,

$\dfrac{a}{2} < 1$ edo $a < 2$ bada, seriea dibergentea da.

$\dfrac{a}{2} > 1$ edo $a > 2$ bada, seriea konbergentea da.

$\dfrac{a}{2} = 1$ edo $a = 2$ bada, zalantzazko kasua da.

$a = 2$ denean, Raaberen irizpidean, $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right) = \dfrac{4n^2+3n}{4n^2+8n+4} < 1$ dugu; hortaz, seriea dibergentea da.

12. Determina ezazu $\sum\limits_n a_n$ seriearen izaera, non $a_n = \dfrac{n!a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}$ baita, $a > 0$ izanik.

Ebazpena.

Gai positiboko seria denez, D'Alemberten irizpidea erabil dezakegu.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)(1+(n+1)a)}}{\frac{n!a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}} = \frac{(n+1)a}{1+(n+1)a}$$ da, eta zatiduraren limitea hau da:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a}{1+(n+1)a} = 1.$$

Zalantzazko kasua da; beraz, Raaberen irizpidea erabiliko dugu.

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{(n+1)a}{1+(n+1)a}\right) = \frac{n}{1+(n+1)a}$$ da, eta horren limitea hau da:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+(n+1)a} = \frac{1}{a}.$$

Hortaz,

$\dfrac{1}{a} > 1$ edo $a < 1$ bada, seriea konbergentea da;

$\dfrac{1}{a} < 1$ edo $1 < a$ bada, seriea dibergentea da;

$\dfrac{1}{a} = 1$ edo $a = 1$ bada, zalantzazko kasua da.

$a = 1$ denean, $a_n = \dfrac{n! \cdot 1^n}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)} = \dfrac{n!}{(1+n)!} = \dfrac{1}{n+1}$ da; eta hori serie harmoniko dibergentearen gai orokorra da; beraz, seriea kasu honetan ere dibergentea da.

Laburbilduz, beraz,

$a < 1$ denean, seriea konbergentea da.

$1 \le a$ denean, seriea dibergentea da.

13. Determina itzazu ondoko serieen izaerak:

a) $\sum\limits_n \ln\left(2 + \dfrac{1}{5n}\right)$; b) $\sum\limits_n \dfrac{2}{1+2+\cdots+n}$.

Ebazpena.

a) $a_n = \ln\left(2 + \dfrac{1}{5n}\right)$ da; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(2 + \dfrac{1}{5n}\right) = \ln 2 \neq 0.$

Ondorioz, 4.7. Korolarioaren arabera, $\sum_n \ln\left(2+\frac{1}{5n}\right)$ seriea ezin da konbergentea izan; gai positiboko seriea denez, dibergentea da.

b) Gai positiboko seriea denez, zatiduraren irizpidea erabil dezakegu.

$a_n = \dfrac{2}{1+2+\cdots+n}$ da; hortik, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1+2+\cdots+n}{1+2+\cdots+n+(n+1)}$ aterako dugu;

beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{1+2+\cdots+n+(n+1)} \overset{(1)}{=}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2+\cdots+n+(n+1))-(1+2+\cdots+n)}{(1+2+\cdots+n+(n+1)+(n+2))-(1+2+\cdots+n+(n+1))} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1.$

(1) berdintzan, 3.28. Stolzen irizpidea erabili dugu.

Orain, Raaberen irizpidea erabiliko dugu.

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{1+2+\cdots+n}{1+2+\cdots+n+(n+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{n+1}{1+2+\cdots+n+(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{(n+2)} = 2 > 1.$

Ondorioz, $\sum_n \dfrac{2}{1+2+\cdots+n}$ seriea konbergentea da.

14. Determina ezazu ondoko serieen izaera, $\alpha > 0$ izanik:

a) $\sum_n (-1)^n \alpha^n$; b) $\sum_n \dfrac{n}{\alpha^n}$.

Ebazpena.

a) Serie alternatua denez, 4.33. Leibnizen irizpidearen arabera, $\{\alpha^n\}$ segida beherakorra bada eta $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ bada, $\sum_n (-1)^n\alpha^n$ konbergentea da; hori gertatuko da $\alpha < 1$ denean, 3. gaiko 5 Ariketa ebatzian ikusi genuen bezala.

$\alpha = 1$ denean, $\sum_n (-1)^n$ serie oszilatzailea dugu, 4.4. Adibidean ikusi dugun bezala.

$1 < \alpha$ denean, aldiz, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = \infty$ da eta $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\alpha^n$ ez da existitzen; beraz, seriea ezin da konbergentea izan, 4.7. Korolarioa erabiliz.

Ondotrioz,

i. $\alpha < 1$ denean, $\sum_n (-1)^n\alpha^n$ konbergentea da;

ii. $1 \le \alpha$ denean, $\sum_n (-1)^n\alpha^n$ ez da konbergentea.

b) Gai positiboko seriea denez, Cauchyren irizpidea erabil dezakegu.

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n}{\alpha^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\alpha}$ da; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ da.

Hortaz,

i. $\dfrac{1}{\alpha} < 1$ edo $1 < \alpha$ denean, $\sum_n \dfrac{n}{\alpha^n}$ konbergentea da;

ii. $\dfrac{1}{\alpha} > 1$ edo $\alpha < 1$ denean, $\sum_n \dfrac{n}{\alpha^n}$ dibergentea da;

iii. $\dfrac{1}{\alpha} = 1$ edo $\alpha = 1$ denean, $\sum_n n$ seriea dugu, eta dibergentea da, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ delako (4.7. Korolarioa) eta gai positiboko seriea delako.

15. Determina ezazu ondoko seriearen izaera, p-ren balioen arabera:

$$\sum_n \left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right)^{n^2}.$$

Ebazpena.

Gai positiboko seriea da; Cauchyren irizpidea erabiliko dugu:

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right)^{n}$ da;

beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right)^{n} = l$ kalkulatu behar dugu.

$$\ln l = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right)^{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n^2+pn+1}{n^2} \overset{(1)}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{pn+1}{n^2} = p \quad \text{da.}$$

(1) berdintzan, $\left\{\ln\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right\} \sim \left\{\left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}-1\right)\right\}$ baliokidetza erabili dugu.

Hortaz, $\ln l = p$ da, eta $l = e^p$ da. Kasu desberdinak aztertuko ditugu:

$l = e^p < 1$ edo $p < 0$ denean, seriea konbergentea da;

$l = e^p > 1$ edo $0 < p$ denean, seriea dibergentea da;

$l = e^p = 1$ edo $p = 0$ denean, zalantzazko kasua da.

Baina, $p = 0$ denean, seriearen gai orokorra $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$ da; eta horren limitea

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e \neq 0$ da; beraz, seriea ezin da konbergentea izan, 4.7. Korolarioa erabiliz; gai positibokoa denez, dibergentea da.

16. Determina ezazu ondoko seriearen izaera, a-ren eta b-ren balioen arabera:

$$\sum_n \frac{n!}{(a+b)(a+2b)\cdots(a+nb)}, \quad a,b>0 \ \text{ izanik.}$$

Ebazpena.

Gai positiboko seriea da eta zatiduraren irizpidea erabiliko dugu.

$a_n = \frac{n!}{(a+b)(a+2b)\cdots(a+nb)}$ da;

beraz, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(a+b)(a+2b)\cdots(a+nb)(a+(n+1)b)}}{\frac{n!}{(a+b)(a+2b)\cdots(a+nb)}} = \frac{n+1}{a+(n+1)b} = \frac{n+1}{bn+(a+b)}$ da.

Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{bn+(a+b)} = \frac{1}{b}$ da; D'Alemberten irizpidearen arabera,

$\frac{1}{b} < 1$ denean, hau da, $1 < b$ denean, seriea konbergentea da;

$1 < \frac{1}{b}$ denean, hau da, $b < 1$ denean, seriea dibergentea da;

$\dfrac{1}{b} = 1$ denean, hau da, $b = 1$ denean, zalantzazko kasua da.

$b = 1$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, seriea dugu, $a > 0$ izanik, eta, orain, Raaberen irizpidea erabil dezakegu.

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{n+1}{n+(a+1)}\right) = \frac{an}{n+a+1} \quad \text{da.}$$

Hortaz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n+a+1} = a$ da. Eta Raaberen irizpidearen arabera,

$a > 1$ denean, seriea konbergentea da;

$a < 1$ denean, seriea dibergentea da.

$a = 1$ denean, seriea dibergentea da.

$a = 1$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)} = \sum_n \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_n \frac{1}{n+1}$ seriea dugu, hots, serie harmonikoa, eta hori dibergentea da.

3. Serieen batura zehatzak

Kalkula itzazu serie hauen batura zehatzak:

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$.

Ebazpena.

Lehendabizi, seriea noiz den konbergentea egiaztatuko dugu:

$$a_n = \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} \quad \text{bada,} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)(b+n+1)}}{\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}} = \frac{n+a+1}{n+b+1} \quad \text{da.}$$

Hortaz, serie hipergeometrikoa da, $\alpha = 1$, $\beta = a+1$ eta $\gamma = b+1$ izanik. Teorian ikusi dugun bezala, konbergentea izango da $b+1 > 1+a+1$ bada, hots, $b > a+1$ denean.

Hori betetzen denean, batura hau izango du serieak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} = \frac{\frac{a+1}{b+1}(b+1)}{(b+1)-(1+a+1)} = \frac{a+1}{b-a-1}, \quad \text{betiere } b > a+1 \text{ izanik.}$$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Ebazpena.

Serie aritmetiko-geometrikoa da, $P(n) = n$ eta $r = x$ izanik. Teorian ikusi dugun bezala, serie hori konbergentea izango da $x < 1$ denean. Kasu horretan kalkula dezakegu s batura.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n + \cdots$$

$$x \cdot s = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \cdots + (n-1)x^n + nx^{n+1} + \cdots$$

Bion arteko kendura hau da: $\displaystyle s - xs = (1-x)s = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Azkena, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, serie geometriko konbergentea da $x<1$ denean, eta horren batura zehatza $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ da.

Hortaz, $(1-x)s = \frac{x}{1-x}$ da; hortik, $s = \frac{x}{(1-x)^2}$ da.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Lehendabizi, seriearen gai orokorra deskonposatuko dugu:

$a_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \ln\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n}{n+1}} = \ln\frac{n-1}{n} - \ln\frac{n}{n+1}$ da.

Beraz, esan dezakegu serie teleskopikoa dela, $b_n = \ln\frac{n-1}{n}$ eta $n \geq 2$ izanik.

$b_2 = \ln\frac{1}{2}$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n-1}{n} = 0$ direnez, batura hau izango du:

$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{1}{2} - 0 = \ln\frac{1}{2}$.

20. $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{9}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$

Ebazpena.

Serie horren gaiak serie harmoniko alternatuarenak dira; beraz, aplika dezakegu teorian ikusitako deskonposaketaren ideia. Lehendabizi, seriearen $3n$. batura partziala hartuko dugu eta, ondoren, deskonposatuko dugu:

$$S_{3n} = \frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{4n+1}\right) - \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n+3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right) =$$

$$= (I_{n+1}-1) - \left(I_{2n+2}-1-\frac{1}{3}\right) = I_{n+1} - I_{2n+2} + \frac{1}{3}, \quad .$$

Orain, I_{n+1} eta I_{2n+2} beren balioz ordezkatuko ditugu, $I_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$ balioa erabiliz:

$I_{n+1} = H_{2n+2} - \frac{1}{2}H_{n+1}$ eta $I_{2n+2} = H_{4n+4} - \frac{1}{2}H_{2n+2}$ dira.

Hortaz, $S_{3n} = \left(H_{2n+2}-\frac{1}{2}H_{n+1}\right) - \left(H_{4n+4}-\frac{1}{2}H_{2n+2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}H_{2n+2} - \frac{1}{2}H_{n+1} - H_{4n+4} + \frac{1}{3}$ da.

Orain, H_{2n+2}, H_{n+1} eta H_{4n+4} beren balioz ordezkatuko ditugu:

$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ da, $\gamma = 0,57721566...$ Eulerren konstantea eta $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ izanik.

$H_{2n+2} = \ln(2n+2)+\gamma+\varepsilon_{2n+2}$, $H_{n+1} = \ln(n+1)+\gamma+\varepsilon_{n+1}$ eta $H_{4n+4} = \ln(4n+4)+\gamma+\varepsilon_{4n+4}$.

Hortaz, $S_{3n} = \frac{3}{2}(\ln(2n+2)+\gamma+\varepsilon_{2n+2}) - \frac{1}{2}(\ln(n+1)+\gamma+\varepsilon_{n+1}) - (\ln(4n+4)+\gamma+\varepsilon_{4n+4}) + \frac{1}{3}$ da, non $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ baita.

Hortaz,

$$S_{3n}=\frac{3}{2}(\ln 2+\ln(n+1)+\gamma+\varepsilon_{2n+2})-\frac{1}{2}(\ln(n+1)+\gamma+\varepsilon_{n+1})-(\ln 4+\ln(n+1)+\gamma+\varepsilon_{4n+4})+\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln 2+\frac{3}{2}\varepsilon_{2n+2}-\varepsilon_{n+1}-2\ln 2-\varepsilon_{4n+4}+\frac{1}{3}=\frac{-1}{2}\ln 2+\frac{3}{2}\varepsilon_{2n+2}-\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_{4n+4}+\frac{1}{3} \quad \text{da,}$$

non $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{4n+4}=0$ baitira.

Ondorioz, S_{3n} batura partzialen limitea kalkulatzen badugu,

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\ln 2+\frac{3}{2}\varepsilon_{2n+2}-\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_{4n+4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{izango dugu.}$$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Ebazpena.

Serie arrazional konbergentea da, zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen $k=0$ eta $l=4$ mailek $l\geq k+2$ betetzen dutelako.

Izendatzaileko polinomioa deskonposa dezakegu: $(4n^2-1)^2=(2n-1)^2(2n+1)^2$.

Beraz, seriearen gai orokorra lau batugaitan deskonposa dezakegu honela:

$$\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{(2n-1)^2}+\frac{C}{2n+1}+\frac{D}{(2n+1)^2}.$$

Kalkuluak eginez, $A=\dfrac{-1}{4}$, $B=\dfrac{1}{4}$, $C=\dfrac{1}{4}$ eta $D=\dfrac{1}{4}$ aterako ditugu. Eta seriea honela deskonposa dezakegu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{-1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Orain, seriearen s batura zehatza kalkulatuko dugu:

$$s=\frac{-1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\cdots\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\right).$$

Lehen eta hirugarren parentesiak sinplifikatuz, $\dfrac{-1}{4}$ geratzen da. Eta bigarren eta laugarren parentesiak honela sinplifikatuko ditugu:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$$

Azkeneko berdintzan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ berdintza erabili dugu.

Beraz, s batura honela geratuko da: $s=\dfrac{-1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{8}-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{8}-1\right)=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}.$

22. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3-1}{n!}$.

Ebazpena.

Teorian frogatu denez, serie konbergentea da. Orain, lau batugaitan deskonposatuko dugu, izendatzaileko polinomioaren maila 3 delako:

$$\frac{n^3-1}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!} + \frac{C}{(n-3)!}, \quad \forall n \geq 3.$$

Koefizienteak kalkulatzeko, izendatzaileak berdinduz eta sinplifikatuz, ekuazio hau lortuko dugu: $n^3-1 = A + Bn + Cn(n-1) + Dn(n-1)(n-2)$. Hortik, $A=-1$, $B=1$, $C=3$ eta $D=1$ lortuko ditugu.

Izendatzaile batean $(n-3)!$ dugunez, batukarien lehenengo balioa $n=3$ izatea komeni da; horretarako aldaketa hau egingo dugu batura osoan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3-1}{n!} = \frac{-1}{0!} + 0 + \frac{8-1}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3-1}{n!} = \frac{5}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3-1}{n!}.$$

Orain, deskonposaketa ordezkatuko dugu azken seriean:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3-1}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \right) =$$

$$= -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} =$$

$$= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) + 3\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{0!} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} =$$

$$= -\left(e - \frac{5}{2} \right) + (e-2) + 3(e-1) + e = 4e - \frac{5}{2}.$$

Ondorioz, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3-1}{n!} = \frac{5}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3-1}{n!} = \frac{5}{2} + \left(4e - \frac{5}{2} \right) = 4e$ da.

4. Erroreen bornapena eta batura hurbilduak

23. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^{n^2}$ seriea emanik, $a, b > 0$ izanik,

23.1. azter ezazu horren izaera a-ren eta b-ren balioen arabera.

23.2. Borna ezazu errorea seriearen baturatzat lehenengo bi gaien batura hartzen bada, $a=1$ eta $b=2$ direnean.

Ebazpena.

23.1. Gai positiboko seriea denez, Cauchyren irizpidea erabil dezakegu:

$\displaystyle\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+a}{n+b} \right)^{n^2}} = \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^n$ da; beraz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^n$ da.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a-b}{n+b} \right)^n = e^{a-b}$ da.

Kasu desberdinak aztertuko ditugu:

$l = e^{a-b} < 1$ da $a < b$ denean, eta seriea konbergentea da;

$l = e^{a-b} > 1$ da $a > b$ denean, eta seriea dibergentea da;

$l = e^{a-b} = 1$ da $a = b$ denean, eta zalantzazko kasua da.

Baina, $a=b$ denean, seriearen gai orokorra $a_n = \left(\dfrac{n+a}{n+a} \right)^{n^2} = 1^{n^2} = 1$ da; kasu horretan, $\displaystyle\sum_n 1$ seriea dugu eta dibergentea da.

23.2. $a=1$ eta $b=2$ direnean, $\sum_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ serie konbergentea dugu, $a<b$ betetzen delako.

$\{\sqrt[n]{a_n}\} = \left\{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\right\}$ erroen segida $l=e^{1-2}=\frac{1}{e}$ limitera eskuinetik hurbiltzen da, $\frac{n+1}{n+2}$ zatidurak gero eta txikiagoak direlako.

(Adibidez, $\left(\frac{1000+1}{1000+2}\right)^{1000} = 0,368430...$ da eta $\frac{1}{e} = 0,367879...$)

Seriearen baturatzat lehenengo bi batugaien batura hartzen dugunez, $k=2$ da, eta $\sqrt[2]{a_2} = \left(\frac{2+1}{2+2}\right)^2 = \frac{9}{16} < 1$ baldintza betetzen da; beraz, R_2 errorea bornatzeko, formula hau erabil dezakegu: $R_2 \leq \frac{(\sqrt{a_2})^3}{1-\sqrt{a_2}}$.

Balioak ordezkatuz, $R_2 \leq \frac{((3/4)^2)^3}{1-(3/4)^2} = \frac{(9/16)^3}{1-(3/16)} = \frac{729}{1792} = 0,406808...$ bornapena lortzen dugu.

24. $\sum_n \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} p^n$ seriea emanik, non $a,b,p>0$ diren;

24.1. determina ezazu seriearen izaera a, b eta p-ren balio desberdinetarako.

24.2. Borna ezazu egiten den errorea seriearen baturatzat lehenengo hiru gaiena hartuz, $a=2$, $b=1$ eta $p=\frac{1}{2}$ balioekin.

Ebazpena.

24.1. Gai positiboko seriea da eta zatiduraren irizpidea erabiliko dugu.

$a_n = \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} p^n$ bada, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)(b+n+1)} p^{n+1}}{\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} p^n} = \frac{a+n+1}{b+n+1} p$ da. Hortaz, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+n+1}{b+n+1} p = p$ da.

D'Alemberten irizpidearen arabera,

$p<1$ denean, seriea konbergentea da;

$1<p$ denean, seriea dibergentea da;

$p=1$ denean, ez dakigu. Baina, Raaberen irizpidea erabiltzeko aukera ematen du.

Lehenago, irizpidean agertzen den adierazpena sinplifikatuko dugu:

$p=1$ denean, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a+n+1}{b+n+1}$ da, eta $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{a+n+1}{b+n+1}\right) = \frac{n(b-a)}{b+n+1}$.

Beraz, $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(b-a)}{b+n+1} = b-a$ da.

Raaberen irizpidearen arabera,

$b-a>1$ denean, seriea konbergentea da;

$b-a<1$ denean, seriea dibergentea da;

eta $b-a=1$ denean, zalantzazko kasua da.

Baina, $b-a=1$ denean, $a_n = \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(a+2)(a+3)\cdots(a+1+n)} = \frac{a+1}{a+1+n}$ dugu. Eta $\sum_n \frac{a+1}{a+1+n}$ serie harmoniko bat da eta, beraz, dibergentea da.

Laburbilduz, beraz,

- $p<1$ denean, seriea konbergentea da;
- $1<p$ denean, seriea dibergentea da;
- $p=1$ denean,
  i. $b-a>1$ edo $b>a+1$ denean, seriea konbergentea da;
  ii. $b-a\leq 1$ edo $b\leq a+1$ denean, seriea dibergentea da.

24.2. $a=2,\quad b=1$ eta $p=\dfrac{1}{2}$ balioak ordezkatuz gero, serie hau lortuko dugu:

$$\sum_n \frac{(2+1)(2+2)\cdots(2+n)}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_n \frac{n+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_n \frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

Badakigu $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+3}{n+2}\dfrac{1}{2}$ dela, eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$ da.

Lehenengo hiru batugaiak hartu behar ditugunez kontuan, $k=3$ da, eta $\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{6}{5}\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{5}<1$ betetzen da; beraz, errorea bornatzen duen desberdintza hau da:

$$R_3\leq \frac{a_3a_4}{a_3-a_4}=\frac{\frac{5}{2^4}\frac{6}{2^5}}{\frac{5}{2^4}-\frac{6}{2^5}}=\frac{\frac{30}{2^9}}{\frac{4}{2^5}}=\frac{30}{2^6}=\frac{15}{32}=0,46875.$$

25. 25.1. Determina ezazu $\displaystyle\sum_n(-1)^n\frac{1}{p^nn}$ seriearen izaera $\forall p\in\mathbb{R}-\{0\}$.

25.2. Kalkula ezazu batura hurbildua $p=10$ aukeratuz eta 10^{-4} baino errore txikiagoa eginez.

Ebazpena.

25.1. $p>0$ denean, serie alternatua da. Orduan, Leibnizen irizpidea erabil dezakegu.

$p=1$ denean, $\displaystyle\sum_n(-1)^n\frac{1}{n}$ seriea dugu eta hori konbergentea da, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ beherakorra delako eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ delako.

$p\neq 1$ denean, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^nn}=l$ bada,

$$\ln l=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{p^nn}=\lim_{n\to\infty}-\ln(p^nn)=\begin{cases}-\infty, & p>1 \text{ denean,}\\ \infty, & p<1 \text{ denean.}\end{cases}$$

Hortaz,

$p>1$ denean, $\ln l=-\infty\Longrightarrow l=0$ da eta $\left\{\dfrac{1}{p^nn}\right\}$ beherakorra da; beraz, $\displaystyle\sum_n(-1)^n\frac{1}{p^nn}$ konbergentea da.

$p<1$ denean, $\ln l=\infty\Longrightarrow l=\infty$ eta, beraz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{p^nn}$ ez da existitzen; beraz, $\displaystyle\sum_n(-1)^n\frac{1}{p^nn}$ ezin da konbergentea izan, 4.7. Korolarioaren arabera.

$p<0$ denean, gai positiboko seriea da, $\displaystyle\sum_n\frac{1}{(-p)^nn}$ hain zuzen, $-p>0$ izanik. Hortaz, zatiduraren irizpidea erabil dezakegu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(-p)^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{(-p)^nn}}=\frac{(-p)^nn}{(-p)^{n+1}(n+1)}=\frac{n}{-p(n+1)}$$ da. Beraz, limite hau izango dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-p(n+1)}=\frac{1}{-p}.$$

Ondorioz,

$0<\dfrac{1}{-p}<1$ edo $1<-p$ edo $p<-1$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(-p)^n n}$ konbergentea da.

$1<\dfrac{1}{-p}$ edo $-1<p$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(-p)^n n}$ dibergentea da;

$\dfrac{1}{-p}=1$ edo $p=-1$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmoniko dibergentea dugu.

25.2. $p=10$ denean, $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{1}{10^n n}$ serie alternatu konbergentea dugu.

Serie alternatuetan egiten den errorea baztertzen den lehenengo gaia baino txikiagoa da, balio absolutuan; hau da, $|R_k|<a_{k+1}$.

Gure kasuan, $a_{k+1}=\dfrac{1}{10^{k+1}(k+1)}$ da. Hortaz, errorea 10^{-2} baino txikiagoa izatea nahi badugu, nahikoa da $\dfrac{1}{10^{k+1}(k+1)}<10^{-4}=\dfrac{1}{10.000}$ izatea. Hortik, $10.000<10^{k+1}(k+1)$ aterako dugu.

Ezkerreko atala konstantea denez, eskuinekoa baino ez dugu kalkulatu behar.

$k=2$ denean, eskuineko atalean $10^3\cdot 3=3.000$ dugu; ez da desberdintza betetzen;

$k=3$ denean, eskuineko atalean $10^4\cdot 4=40.000$ dugu; desberdintza betetzen da.

Hortaz, S_3 batura partziala kalkulatu behar dugu:

$S_3=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{200}-\dfrac{1}{3.000}=\dfrac{-286}{3.000}=-0,09533...$ da, errorea $R_3<a_4=\dfrac{1}{40.000}$ izanik.

26. 26.1. Determina ezazu $\displaystyle\sum_n \frac{n^b}{a^n}$ seriearen izaera, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

26.2. Kalkula ezazu batura hurbildua 10^{-2} baino errore txikiagoa eginez, ondoko kasuetan:

a) $a=10$ eta $b=1$ direnean; b) $a=1$ eta $b=3$ direnean.

Ebazpena.

26.1. Hasteko, $a\neq 0$ dela pentsatuko dugu. Ondoren, bi kasu bereiziko ditugu: $a>0$ denean, gai positiboko seriea izango dugu; $a<0$ denean, ordea, serie alternatua izango dugu. Emaitzak irudian laburtu ditugu.

i. $a>0$ denean, Cauchyren irizpidea erabil dezakegu:

$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\dfrac{n^b}{a^n}}=\dfrac{\sqrt[n]{n^b}}{a}$ da; beraz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^b}}{a}=\frac{1}{a}$ da.

Ondorioz,

- $\dfrac{1}{a}<1$ edo $1<a$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{n^b}{a^n}$ konbergentea da;
- $\dfrac{1}{a}>1$ edo $a<1$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{n^b}{a^n}$ dibergentea da;
- $\dfrac{1}{a}=1$ edo $a=1$ denean, $\displaystyle\sum_n n^b$ seriea dugu.

Orain, b-ren arabera aztertuko dugu azken kasu hori.

$b\geq 0$ denean, seriea dibergentea da, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^b\neq 0$ delako, 4.7. Korolarioa erabiliz.

$b<0$ denean, $\displaystyle\sum_n n^b$ seriea honela idatz dezakegu: $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{-b}}$.

Hori serie harmoniko orokorra da; beraz, 4.15. Adibidearen arabera,

- $-b > 1$ edo $b < -1$ denean, $\sum_n \frac{1}{n^{-b}}$ edo $\sum_n n^b$ konbergentea da;
- $-b \leq 1$ edo $-1 \leq b$ denean, $\sum_n \frac{1}{n^{-b}}$ edo $\sum_n n^b$ dibergentea da.

ii. $a < 0$ denean, Leibnizen irizpidea erabil dezakegu:
$\frac{n^b}{a^n} = \frac{n^b}{(-1)^n(-a)^n} = (-1)^n \frac{n^b}{(-a)^n}$ egiten badugu, serie alternatuaren gai orokorra $a_n = \frac{n^b}{(-a)^n}$ da. Orain, gai orokorraren limitea kalkulatu behar dugu.

Hasteko, b-ren balioak hartuko ditugu kontuan:

$b = 0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^b}{(-a)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(-a)^n} = \begin{cases} +\infty, & -1 < a < 0, \\ 1, & a = -1, \\ 0, & a < -1, \end{cases}$ da; beraz,

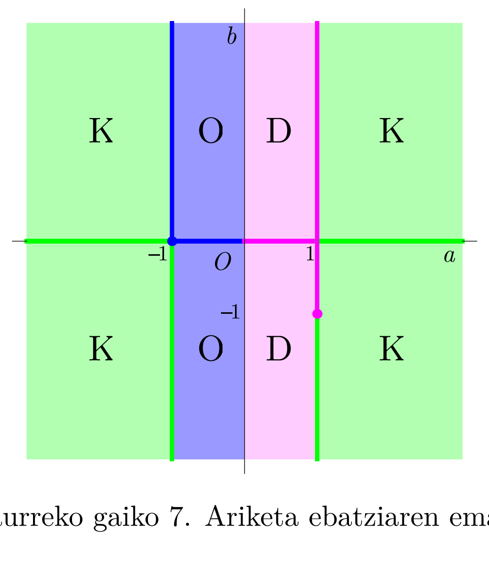
- $a < -1$ denean, $\sum_n (-1)^n \frac{1}{(-a)^n}$ edo $\sum_n \frac{1}{a^n}$ konbergentea da.
- $-1 \leq a < 0$ denean, $\sum_n (-1)^n \frac{1}{(-a)^n}$ edo $\sum_n \frac{1}{a^n}$ oszilatzailea da;

$b > 0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^b}{(-a)^n} = \begin{cases} +\infty, & -1 < a < 0, \\ +\infty, & a = -1, \\ 0, & a < -1, \end{cases}$ da; beraz,

- $a < -1$ denean, $\sum_n (-1)^n \frac{n^b}{(-a)^n}$ edo $\sum_n \frac{n^b}{a^n}$ konbergentea da.
- $-1 \leq a < 0$ denean, $\sum_n (-1)^n \frac{n^b}{(-a)^n}$ edo $\sum_n \frac{n^b}{a^n}$ oszilatzailea da;

$b < 0$ denean, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^b}{(-a)^n} = \begin{cases} +\infty, & -1 < a < 0, \\ 0, & a = -1, \\ 0, & a < -1, \end{cases}$ da; beraz,

- $a \leq -1$ denean, $\sum_n (-1)^n \frac{n^b}{(-a)^n}$ edo $\sum_n \frac{n^b}{a^n}$ konbergentea da.
- $-1 < a < 0$ denean, $\sum_n (-1)^n \frac{n^b}{(-a)^n}$ edo $\sum_n \frac{n^b}{a^n}$ oszilatzailea da;



Konpara ezazu irudia aurreko gaiko 7. Ariketa ebatziaren emaitzarekin.

26.2. i. $a=10$ eta $b=1$ direnean, $\sum_n \frac{n}{10^n}$ seriea dugu eta konbergentea da, $a=10>1$ delako.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{10}=\frac{1}{10}$ da, eta $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{\sqrt[n]{n}}{10}>\frac{1}{10}$ da; beraz, errorea bornatzeko formula hau da:

$$R_k\le\frac{(\sqrt[k]{a_k})^{k+1}}{1-\sqrt[k]{a_k}},$$

$\sqrt[k]{a_k}<1$ dela pentsatuz.

Gure kasuan, $R_k\le\frac{\left(\frac{\sqrt[k]{k}}{10}\right)^{k+1}}{1-\frac{\sqrt[k]{k}}{10}}=\frac{(\sqrt[k]{k})^{k+1}}{10^k(10-\sqrt[k]{k})}$ da.

$R_k<10^{-2}$ izatea nahi badugu, nahikoa da $\frac{(\sqrt[k]{k})^{k+1}}{10^k(10-\sqrt[k]{k})}<10^{-2}$ betetzea.

$\frac{(\sqrt[k]{k})^{k+1}}{10^k(10-\sqrt[k]{k})}<10^{-2}\Longrightarrow 100(\sqrt[k]{k})^{k+1}<10^k(10-\sqrt[k]{k})\Longrightarrow k\sqrt[k]{k}<10^{k-2}(10-\sqrt[k]{k})$;

azken horretan balioak emango dizkiogu k-ri.

$k=1$ denean, ezkerreko atala 1 da; eta eskuinekoa, $0,9$;

$k=2$ denean, ezkerrean $2\sqrt{2}=2,8284$ eta eskuinean $10^0(10-\sqrt{2})=8,5857$ ditugu; desberdintza betetzen da.

$\sqrt[2]{a_2}<1$ dela egiaztatuko dugu: $\sqrt[2]{a_2}=\frac{\sqrt{2}}{10}=0,1414<1.$

Hortaz, $k=2$ hartu behar dugu eta S_2 batura hurbildua kalkulatu.

$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{10^1}+\frac{2}{10^2}=\frac{1}{10}+\frac{2}{100}=\frac{12}{100}=0,12$ da eta errorea $R_2<10^{-2}$ da.

ii. $a=1$ eta $b=3$ direnean, $\sum_n n^3$ seriea dugu; serie hori dibergentea da, $a=1$ eta $b=3>0$ direlako; beraz, ezin da errorea bornatu.

27. Izan bedi $\sum_n \frac{a^n \ln n}{n+4}$ seriea, $a>0$ izanik.

27.1. Determina ezazu seriearen izaera a-ren balioen arabera.

27.2. Kalkula ezazu S_k $R_k<0,0001$ izan dadin, $a=1$ eta $a=1/10$ kasuetan.

Ebazpena.

27.1. Gai positiboko seriea da. Cauchyren irizpidea erabil dezakegu:

$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a^n\ln n}{n+4}}=a\sqrt[n]{\frac{\ln n}{n+4}}$ da; beraz, limite hau izango dugu:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}a\frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n+4}}=a.$

Kasu desberdinak aztertuko ditugu:

$a<1$ bada, seriea konbergentea da;

$a>1$ bada, seriea dibergentea da;

$a=1$ bada, $\sum_n \frac{\ln n}{n+4}$ seriea dugu; kasu horretan, $\forall n\ge 3$ $\frac{1}{n+4}<\frac{\ln n}{n+4}$ betetzen da; beraz, $\sum_n \frac{1}{n+4}$ serie harmoniko dibergente minorantea onartzen du eta, 4.14.2. Konparaziozko irizpide orokorraren arabera, $\sum_n \frac{\ln n}{n+4}$ seriea dibergentea da.

27.2. $a=1$ denean, serie dibergentea da, eta ezin da errorea bornatu.

$a=\dfrac{1}{10}$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{\ln n}{(n+4)10^n}$ serie konbergentea dugu.

Badakigu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n+4}}=\frac{1}{10}$ dela.

Bestalde, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt[n]{\dfrac{\ln n}{n+4}}<1$ da; beraz, $\dfrac{1}{10}\sqrt[n]{\dfrac{\ln n}{n+4}}<\dfrac{1}{10}$ betetzen da $\forall n\in\mathbb{N}$, eta erroen segida ezkerretik hurbiltzen da limitera; lehenengo kasuan gaude.

Hortaz, errorea bornatzeko, formula hau erabiliko dugu:

$$R_k\le\frac{l^{k+1}}{1-l},\qquad \text{hau da,}\qquad R_k\le\frac{\frac{1}{10^{k+1}}}{1-\frac{1}{10}}.$$

Orain, $R_k<0{,}0001$ izateko, nahikoa da $\dfrac{\frac{1}{10^{k+1}}}{1-\frac{1}{10}}<0{,}0001=\dfrac{1}{10.000}$ izatea, hau da, $10.000\dfrac{1}{10^{k+1}}<1-\dfrac{1}{10}$ edo $\dfrac{1}{10^{k-3}}<\dfrac{9}{10}$ edo $10<9\cdot10^{k-3}$ edo $1<9\cdot10^{k-4}$.

Hortik, $k=4$ aterako dugu. Eta eskatzen diguten batura hurbildua S_4 izango da:

$$S_4=0+\frac{\ln 2}{6\cdot10^2}+\frac{\ln 3}{7\cdot10^3}+\frac{\ln 4}{8\cdot10^4}=\frac{2.800\ln 2+240\ln 3+21\ln 4}{1.680.000}=0{,}001329518593...$$

28. Izan bedi $\displaystyle\sum_n\frac{(n+1)p^n}{n!}$ seriea, $p>0$ izanik.

28.1. Determina ezazu seriearen izaera p-ren balioen arabera.

28.2. Borna ezazu R_4 erroaren eta zatiduraren irizpideak erabiliz, $p=1$ kasuan.

28.3. Kalkula ezazu k, $R_k<0'01$ izan dadin, $p=1$ kasuan.

Ebazpena.

28.1. $p>0$ denez, gai positiboko seriea da eta D'Alemberten irizpidea erabil dezakegu.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{(n+2)p^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)p^n}{n!}}=\dfrac{p(n+2)}{(n+1)^2}$ da; beraz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p(n+2)}{(n+1)^2}=0<1$ da, $\forall p>0$.

Hortaz, seriea beti da konbergentea.

28.2. $p=1$ denean, $\displaystyle\sum_n\frac{n+1}{n!}$ seriea dugu. R_4 bornatuko dugu.

Erroaren irizpidea erabiliz:

$a_n=\dfrac{n+1}{n!}\Longrightarrow\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n!}}=\dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n!}}$ da; beraz,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n!}}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}}{ne^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}}=0\ \text{ da.}$$

(1) berdintzan, Stirlingen baliokidetza erabili dugu.

Hortaz, $\{\sqrt[n]{a_n}\}=\left\{\dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$ segida eskuinetik hurbiltzen da limitera.

Bestalde, $\sqrt[4]{a_4}=\sqrt[4]{\dfrac{5}{4!}}=\sqrt[4]{\dfrac{5}{24}}<1$ denez, $R_4\le\dfrac{\left(\sqrt[4]{a_4}\right)^5}{1-\sqrt[4]{a_4}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{\frac{5}{24}}\right)^5}{1-\sqrt[4]{\frac{5}{24}}}=0{,}4338780816$ da.

Zatiduraren irizpidea erabiliz:
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ denez, $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{\frac{n+2}{(n+1)^2}\right\}$ segida eskuinetik hurbiltzen da limitera.
Bestalde, $\frac{a_5}{a_4} = \frac{6}{5^2} < 1$ da; beraz,

$$R_4 \leq \frac{a_4 a_5}{a_4 - a_5} = \frac{\frac{5}{4!}\frac{6}{5!}}{\frac{5}{4!} - \frac{6}{5!}} = \frac{\frac{30}{4!5!}}{\frac{5\cdot 5! - 6\cdot 4!}{4!5!}} = \frac{30}{(25-6)4!} = \frac{5}{76} = 0{,}06578947368.$$

28.3. Zatiduraren irizpidea erabiliko dugu.

Badakigu zatiduren segida eskuinetik hurbiltzen dela bere limitera. Hortaz, pentsatuz $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ dela, errorea bornatzeko, formula hau erabiliko dugu:

$$R_k \leq \frac{a_k a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}}.$$

$$\frac{a_k a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} = \frac{\frac{k+1}{k!}\frac{k+2}{(k+1)!}}{\frac{k+1}{k!} - \frac{k+2}{(k+1)!}} = \frac{\frac{k+2}{(k!)^2}}{\frac{(k+1)^2-(k+2)}{(k+1)!}} = \frac{(k+2)!}{(k!)^2\left((k+1)^2 - (k+2)\right)} = \frac{(k+2)(k+1)}{k!(k^2+k-1)} \quad \text{da.}$$

Hortik, $R_k < 0{,}001$ izateko, nahikoa da $\frac{(k+2)(k+1)}{k!(k^2+k-1)} < 0{,}001 = \frac{1}{1.000}$ izatea, hau da, nahikoa da $100(k+2)(k+1) < k!(k^2+k-1)$ betetzea.

k-ri balioak emanez honela geratzen da (aurreko atalean ikusi dugu $R_4 < 0{,}066$ dela, beraz, $k = 5$ baliotik has gaitezke):
$k = 5$ denean, ezkerreko atalean $100 \cdot 7 \cdot 6 = 4.200$ dugu eta eskuineko atalean, aldiz, $5!(25+5-1) = 120 \cdot 29 = 3.480$.
$k = 6$ denean, ezkerreko atalean $100 \cdot 8 \cdot 7 = 5.600$ dugu eta eskuineko atalean, aldiz, $6!(36+6-1) = 720 \cdot 41 = 29.520$; beraz, kasu honetan desberdintza betetzen da.

Orain, egiaztatuko dugu $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ dela: $\frac{a_7}{a_6} = \frac{6+2}{(6+1)^2} = \frac{8}{7^2} = 0{,}163 < 1$; beraz, formula zuzena zen.

Eskatzen ziguten balioa, beraz, $k = 6$ da.

(Batura hurbildua S_6 da: $S_6 = \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} + \frac{6}{5!} + \frac{7}{6!} = \frac{3.193}{720} = 4{,}4347222222.$)

29. Izan bedi $\sum_n \frac{1}{(n+1)L^n}$ seriea, $L > 0$ izanik.

29.1. Determina ezazu seriearen izaera L-ren balioen arabera.

29.2. Borna ezazu errorea baturatzat lehenengo lau gaien batura hartzen badugu, $L = 1$ eta $L = 2$ kasuetan.

29.3. Kalkula ezazu seriearen batura hurbildua 10^{-3} baino errore txikiagoa eginez, $L = 1$ eta $L = 2$ kasuetan.

Ebazpena.

29.1. Gai positiboko seriea da, $L > 0$ delako. Zatiduraren irizpidea erabiliz, hauxe dugu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+2)L^{n+1}}}{\frac{1}{(n+1)L^n}} = \frac{n+1}{(n+2)L} \quad \text{da. Hortaz,} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)L} = \frac{1}{L} \quad \text{da.}$$

Ondorioz,

$0 < \dfrac{1}{L} < 1$ edo $1 < L$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(n+1)L^n}$ konbergentea da.

$1 < \dfrac{1}{L}$ edo $L < 1$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(n+1)L^n}$ dibergentea da;

$\dfrac{1}{L} = 1$ edo $L = 1$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n+1}$ serie harmoniko dibergentea dugu.

29.2. $L = 1$ denean, serie dibergentea da; beraz, ezin da erorea bornatu.

$L = 2$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(n+1)2^n}$ serie konbergentea dugu.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2(n+2)} < \dfrac{1}{2}$ da eta, beraz, zatiduren segida ezkerretik hurbiltzen da limitera; lehenengo kasuan gaude. Errorea bornatzeko, formula hau daukagu:

$$R_k \leq \frac{a_{k+1}}{1-l}.$$

Eta balioak ordezkatuz, $R_4 \leq \dfrac{a_5}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{6\cdot 2^5}}{1/2} = \dfrac{1}{3\cdot 2^5} = \dfrac{1}{96} = 0{,}0104166...$ dugu.

29.3. $L = 1$ denean, serie dibergentea da; beraz, ezin da errorea bornatu.

$L = 2$ denean, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(n+1)2^n}$ serie konbergentea dugu.

Esan dugunez, errorea bornatzeko, formula hau da: $R_k \leq \dfrac{a_{k+1}}{1-l} = \dfrac{\frac{1}{(k+2)2^{(k+1)}}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(k+2)2^k}$.

Beraz, errorea 10^{-3} baino txikiagoa izateko, $\dfrac{1}{(k+2)2^k} < \dfrac{1}{1.000}$ izatea nahikoa da.

$\dfrac{1}{(k+2)2^k} < \dfrac{1}{1.000} \Longrightarrow 1.000 < (k+2)2^k$ desberdintza dugu.

Orain, k-ri balioak emango dizkiogu:

$k = 6$ bada, $1.000 > 8\cdot 2^6 = 12$ da, eta desberdintza ez da betetzen.

$k = 7$ bada, $1.000 < 9\cdot 2^7 = 1152$ da, eta desberdintza betetzen da.

Hortaz, $k = 7$ hartuko dugu eta S_7 batura partziala kalkulatu:

$$S_7 = \frac{1}{2\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^4} + \frac{1}{6\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^6} + \frac{1}{8\cdot 2^7} =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{32} + \frac{1}{80} + \frac{1}{192} + \frac{1}{448} + \frac{1}{1.024} = 0{,}385500372...$$

30. Izan bedi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ seriea, $a > 0$ izanik.

30.1. Determina ezazu seriearen izaera a-ren balioen arabera.

30.2. Kalkula ezazu S_k $R_k < 0'001$ izan dadin, $a = 1$ eta $a = 10$ kasuetan.

Ebazpena.

30.1. Gai positiboko seriea denez, Cauchyren irizpidea erabil dezakegu:

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{2n+1}{n}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n} = \sqrt[n]{\dfrac{2n+1}{n}}\dfrac{1}{a}$ da; beraz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}}\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ da.

Kasu desberdinak aztertuko ditugu:

$\frac{1}{a} < 1$ bada, hots, $1 < a$ denean, seriea konbergentea da;

$\frac{1}{a} > 1$ bada, hots, $a < 1$ denean, seriea dibergentea da;

$\frac{1}{a} = 1$ bada, hots, $a = 1$ denean, $\sum_n \frac{2n+1}{n}$ seriea dugu; kasu horretan, gai orokorraren limitea ez da zero: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 \neq 0$; beraz, ezin da konbergentea izan, 4.7. Korolarioaren arabera; gai positiboko seriea denez, dibergentea da.

30.2. $a = 1$ denean, seriea dibergentea da; beraz, ezin da errorea bornatu.

$a = 10$ denean, $\sum_n \frac{2n+1}{n} \frac{1}{10^n}$ serie konbergentea dugu.

Badakigu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ dela.

Bestalde, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} > 1$ da; beraz, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}} \frac{1}{10} > \frac{1}{10}$ betetzen da, eta erroen segida eskuinetik hurbiltzen da limitera; bigarren kasuan gaude. Hortaz, pentsatuz $\sqrt[k]{a_k} < 1$ dela, errorea bornatzeko, formula hau erabiliko dugu:

$$R_k \leq \frac{(\sqrt[k]{a_k})^{k+1}}{1-\sqrt[k]{a_k}}.$$

$$\frac{(\sqrt[k]{a_k})^{k+1}}{1-\sqrt[k]{a_k}} = \frac{\left(\sqrt[k]{\frac{2k+1}{k}}\frac{1}{10}\right)^{k+1}}{1-\sqrt[k]{\frac{2k+1}{k}}\frac{1}{10}} = \frac{\frac{2k+1}{k}\sqrt[k]{\frac{2k+1}{k}}\frac{1}{10^{k+1}}}{\frac{10\sqrt[k]{k}-\sqrt[k]{2k+1}}{10\sqrt[k]{k}}} =$$

$$= \frac{(2k+1)\sqrt[k]{2k+1}10\sqrt[k]{k}}{\left(10\sqrt[k]{k}-\sqrt[k]{2k+1}\right)10^{k+1}k\sqrt[k]{k}} = \frac{(2k+1)\sqrt[k]{2k+1}}{10^k k\left(10\sqrt[k]{k}-\sqrt[k]{2k+1}\right)}.$$

Orain, $R_k < 0{,}001$ izateko, nahikoa da $\frac{(2k+1)\sqrt[k]{2k+1}}{10^k k\left(10\sqrt[k]{k}-\sqrt[k]{2k+1}\right)} < 0{,}001 = \frac{1}{1.000}$ izatea, hau da, nahikoa da $1.000(2k+1)\sqrt[k]{2k+1} < 10^k k(10\sqrt[k]{k}-\sqrt[k]{2k+1})$ izatea edo, azkenik, $(2k+1)\sqrt[k]{2k+1} < 10^{k-3}k\left(10\sqrt[k]{k}-\sqrt[k]{2k+1}\right)$ betetzea.

k-ri balioak emanez honela geratzen da:

$k = 1$ denean, ezkerrean $3 \cdot 3 = 9$ eta eskuinean $10^{-2} \cdot 1 \cdot (10 \cdot 1 - 3) = 0{,}07$.

$k = 2$ denean, ezkerrean $5 \cdot \sqrt{5} = 11{,}18$ eta eskuinean $10^{-1} \cdot 2 \cdot (10 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5}) = 2{,}38$.

$k = 3$ denean, ezkerrean $7 \cdot \sqrt[3]{7} = 13{,}39$ eta eskuinean $10^0 \cdot 3 \cdot (10 \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{7}) = 37{,}52$.

Beraz, desberdintza $k = 3$ denean betetzen da.

Orain, egiaztatuko dugu $\sqrt[k]{a_k} < 1$ dela: $\sqrt[3]{a_3} = \sqrt[3]{\frac{7}{3}} \frac{1}{10} = 0{,}132 < 1$; beraz, zuzen ginen formula erabiltzeko.

Eta eskatzen diguten batura hurbildua S_3 da:

$S_3 = \frac{3}{1}\frac{1}{10} + \frac{5}{2}\frac{1}{100} + \frac{7}{3}\frac{1}{1.000} = \frac{1.964}{6.000} = 0{,}32733333...$

4.5. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Determina ezazu konparaziozko irizpidea erabiliz serie hauen izaera:

   1) $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$; 2) $\displaystyle\sum_n \frac{1+\sin^2 n}{n^2}$;

   3) $\displaystyle\sum_n \log\left(1+\frac{1}{n^k+3}\right)$, $k>0$; 4) $\displaystyle\sum_n \left(a^{1/n}-1\right)^3$, $a>1$.

2. Esan ezazu, arrazoituz, baieztapen hauek egiazkoak ala faltsuak diren, guztiak gai positiboko serieak izanik:

   2.1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ eta $\displaystyle\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\displaystyle\sum_n b_n$ ere konbergentea da.

   2.2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ eta $\displaystyle\sum_n a_n$ dibergentea bada, $\displaystyle\sum_n b_n$ ere dibergentea da.

   2.3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 a_n=\infty$ bada, $\displaystyle\sum_n a_n$ dibergentea da.

   2.4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 a_n=0$ bada, $\displaystyle\sum_n a_n$ dibergentea da.

   2.5. $\displaystyle\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\displaystyle\sum_n \frac{a_n}{n}$ konbergentea izango da.

3. $\displaystyle\sum_n a_n$ eta $\displaystyle\sum_n b_n$ gai positiboko serieak badira, zer esan daiteke serie hauen izaeraz?

   1) $\displaystyle\sum_n \min\{a_n,b_n\}$; 2) $\displaystyle\sum_n \max\{a_n,b_n\}$.

4. Determina itzazu gai orokor hauek dituzten serieen izaerak:

   1) $\dfrac{1000^n}{n!}$; 2) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}a^n$, $a>0$; 3) $\dfrac{3^{n+1}}{n^4+2}e^{-na}$;

   4) $\dfrac{n^2}{\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n}$, $a>0$; 5) $\left(\sin\dfrac{1}{n^2}\right)^\alpha$, $\alpha>0$; 6) $\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$;

   7) $\dfrac{4\cdot 7\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdots(4n-2)}$; 8) $\dfrac{a^n\ln n}{n+4}$, $a>0$; 9) $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$;

   10) $\dfrac{(n!)e^n}{n^{n+p}}$, $p>\dfrac{1}{2}$; 11) $n\sin n$; 12) $\dfrac{\ln n}{n}$;

   13) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots$; 14) $\dfrac{1+\sin^2 n}{n}$; 15) $\left(\ln\dfrac{n+1}{n-1}\right)^a$, $a\in\mathbb{Z}$;

   16) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots$; 17) $\sin\dfrac{1}{n}$; 18) $\dfrac{|\sin n\theta|}{n^2}$;

   19) $\dfrac{n^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; 20) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$; 21) $\dfrac{n^2+\ln n}{10^n}$;

   22) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$; 23) $(\sqrt[n]{n}-1)^n$; 24) $\left(\dfrac{2n+1}{n-3}\right)^{\dfrac{5n^2+1}{n-4}}$;

25) $(-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$; 26) $\dfrac{1}{n}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$; 27) $\dfrac{\log_a(1+n^2)}{\ln n}$, $a>0$;

28) $\dfrac{\ln n}{e^n}$; 29) $(\ln n)^p$, $p>0$; 30) $(-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;

31) $\dfrac{n!}{n^n}$; 32) $\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$; 33) $\dfrac{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}{n^a}$, $a\neq 1$;

34) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$; 35) $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n=m^2,\\[2mm] \dfrac{1}{n^2}, & n\neq m^2;\end{cases}$

36) $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\cdots$; 37) $1+\dfrac{1}{1.001}+\dfrac{1}{2.001}+\dfrac{1}{3.001}+\cdots$.

5. Kalkula itzazu serie hauen batura zehatza:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n!}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{3^n}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n+5}{(2n+1)^2(n^2-1)}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}$; 6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}x^n$;

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{(n+2)!}\right)^2$; 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{n!}$; 9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-5n+2}{n!}$;

10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$; 11) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3n+5}{n^3-6n^2+11n-6}$; 12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$;

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4n}$; 14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{2^n}$; 15) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2-1}{(n-1)n(n+3)}$;

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}$; 17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(a+3^{n+1})(a+3^n)}$; 18) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2-1}\sin\frac{1}{n(n^2-1)}$;

19) $\dfrac{3}{2\cdot 4}+\dfrac{3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$;

20) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{20}-\cdots$;

21) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{4}+\cdots$;

22) $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{12}+\cdots$;

23) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{11^2}+\cdots$;

24) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{17}-\cdots$.

6. 6.1. Determina itzazu serie hauen izaerak.

   6.2. Borna itzazu erroreak baturatzat lehenengo k gaien batura hartzen badugu.

   6.3. Kalkula itzazu batura hurbilduak 10^{-3} baino errore txikiagoa eginez.

   1) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{1+2^n}, \quad k=3;$ 2) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(2n+1)!}, \quad k=4;$ 3) $\displaystyle\sum_n \frac{n^3}{(n+2)!}, \quad k=5;$

   4) $\displaystyle\sum_n \frac{n}{2^n}, \quad k=6;$ 5) $\displaystyle\sum_n \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\ln n}, \quad k=7;$

7. 7.1. Determina itzazu serie hauen izaerak, $\alpha \in \mathbb{R}$ balio desberdinetarako.

   7.2. Borna itzazu erroreak baturatzat lehenengo hiru gaien batura hartzen badugu, $\alpha = 10$ kasuan.

   7.3. Kalkula itzazu batura hurbilduak 10^{-3} baino errore txikiagoa eginez, $\alpha = 10$ baliorako.

   1) $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{1}{\alpha^n n};$ 2) $\displaystyle\sum_n \frac{n^n}{\alpha^n n!}.$

5. Aldagai errealeko funtzio errealak

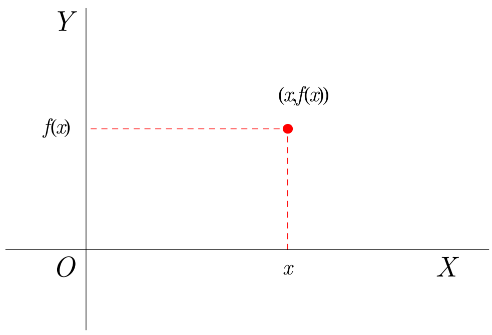
5.1. ALDAGAI ERREALEKO FUNTZIO ERREALAK

5.1. Definizioa. Aldagai errealeko funtzio erreala $A \subset \mathbb{R}$ *multzotik* $\mathbb{R}$ *multzora doan funtzioa da.* Funtzioa *edo* funtzio erreala *esan ohi da.*

$$\begin{array}{rcl} f : A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \in A & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

Funtzioaren kontzeptuarekin batera beste kontzeptu batzuk agertzen dira:
A *multzoa* definizio-eremua *da; batzuetan* D_f *ere idazten da.*
$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists x \in A, f(x) = y\}$ irudi multzoa *da.*
$x \in A$ aldagai independentea *da eta* $y \in f(A)$ mendeko aldagaia *da.*
Funtzioaren grafoa *multzo hau da:* $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in A\}$.

Grafoari esker, funtzioa honela irudika dezakegu:



5.2. Adibidea. Izan bedi $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ funtzioa. Bila dezagun horren definizio-eremua.
Logaritmoa argumentua positiboa denean baino ez da existitzen. Beraz, $x^2 - 4 > 0$ denean; hortik, $x^2 > 4$ aterako dugu. Azkenik, $x < -2$ edo $2 < x$ lortuko dugu. Ondorioz, $f(x)$ funtzioaren definizio-eremua hau da: $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - [-2, 2]$.

5.3. Definizioa. *Gorakortasuna eta beherakortasuna*
$f(x)$ *funtzioa* A *multzoan* monotono gorakorra *da* $\forall x, y \in A \,/\, x < y, \quad f(x) \leq f(y)$ *bada.*
$f(x)$ *funtzioa* A *multzoan* hertsiki monotono gorakorra *da* $\forall x, y \in A \,/\, x < y, \quad f(x) < f(y)$ *bada.*
$f(x)$ *funtzioa* A *multzoan* monotono beherakorra *da* $\forall x, y \in A \,/\, x < y, \quad f(x) \geq f(y)$ *bada.*
$f(x)$ *funtzioa* A *multzoan* hertsiki monotono beherakorra *da* $\forall x, y \in A \,/\, x < y, \quad f(x) > f(y)$ *bada.*

5.4. Definizioa. *Mutur absolutuak*
$f(x)$ *funtzioak* $x = a$ *puntuan* maximo absolutua *du* $\forall x \in A \quad f(x) \leq f(a)$ *bada.*
$f(x)$ *funtzioak* $x = a$ *puntuan* minimo absolutua *du* $\forall x \in A \quad f(a) \leq f(x)$ *bada.*

5.5. Definizioa. *Mutur erlatiboak*
$f(x)$ *funtzioak* $x = a$ *puntuan* maximo erlatiboa *du* $\forall x \in \mathcal{E}(a, \varepsilon) \quad f(x) \leq f(a)$ *bada.*
$f(x)$ *funtzioak* $x = a$ *puntuan* minimo erlatiboa *du* $\forall x \in \mathcal{E}(a, \varepsilon) \quad f(a) \leq f(x)$ *bada.*

5.6. Definizioa. *Ahurtasuna eta ganbiltasuna*

$f(x)$ funtzioa A multzoan ahurra *da Aren puntuen irudiak zuzen ukitzaile guztien gainetik badaude.*

Bestela esanda, $f(x)$ funtzioa ahurra da A multzoan $\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \geq f(\lambda a+(1-\lambda)b)$ bada, $\forall a,b \in A$ eta $\lambda \in (0,1)$.

$f(x)$ funtzioa A multzoan ganbila *da Aren puntuen irudiak zuzen ukitzaile guztien azpitik badaude.*

Bestela esanda, $f(x)$ funtzioa ganbila da A multzoan $\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \leq f(\lambda a+(1-\lambda)b)$ bada, $\forall a,b \in A$ eta $\lambda \in (0,1)$.

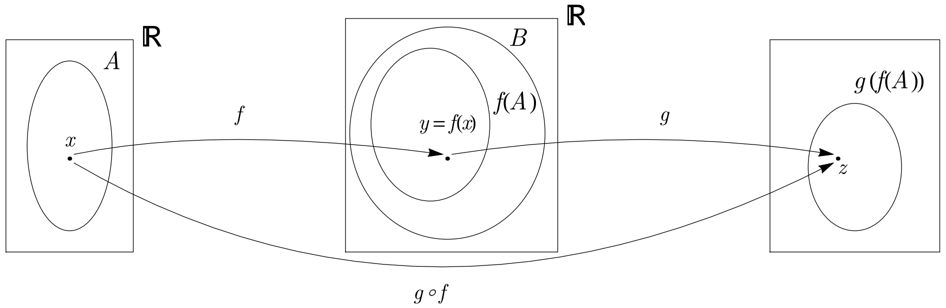
5.7. Definizioa. *Inflexio-puntuak*

$f(x)$ funtzioak $x=a$ puntuan inflexio-puntua *du puntu horretan ahurra (ganbila) izatetik ganbila (ahurra) izatera pasatzen bada.*

5.8. Definizioa. *Funtzio konposatua*

$f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eta $g: B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioak emanik, $f(A) \subset B$ izanik, f funtzioaren eta g funtzioaren arteko funtzio konposatua *honela definituko dugu:*

$$(g \circ f): A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



5.9. Adibidea. Izan bitez $f(x)=\ln x$ eta $g(x)=\sin x$ funtzioak. Ikus dezagun zein den bion arteko konposizioa.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \ln \sin x$ da funtzio konposatua. Baina, zein da horren definizio-eremua?

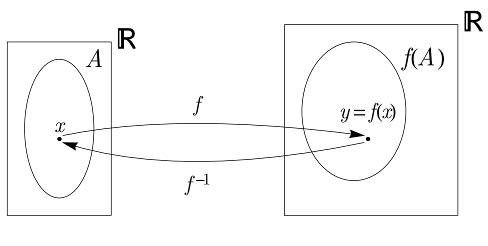
Badakigu logaritmoaren argumentuak positibo izan behar duela. Hortaz, $\sin x > 0$ bete beharko da. Eta hori $(0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, tarteetan soilik gertatzen da. Ondorioz, funtzio konposatuaren definizio-eremua $D_{f\circ g} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (0+k\pi, \pi+k\pi)$ da.

Adibideak agerian utzi du, funtzioak konposatzean, definizio-eremuekin kontuz ibili behar dela.

5.10. Definizioa. *Alderantzizko funtzioa*

$f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=y$, funtzioa emanik, alderantzizko funtzioa*, existitzen bada, honela definituko dugu:*

$$f^{-1}: f(A) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = x, f(x) = y \text{ bada.}$$



5.11. Adibidea. Izan bedi $f(x) = \sin x$ funtzioa. Zein da alderantzizko funtzioa?

Lehenik eta behin, azpimarratu beharra dago alderantzizko funtzioak funtzio izateko baldintzak bete behar dituela. Esaterako, puntu bati irudi bat egokitu behar dio.

$\sin x = y$ bada, $x = \arcsin y$ izango dugu. Baina, y baterako infinitu x dauzkagu. Adibidez, $y = 0$ denean, $x = \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ aukerak ditugu.

Beraz, alderantzizko funtzioa definitzeko, x aldagaiaren balioak murriztu beharrean gaude. Horretarako, $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tartea hartuko dugu.

Ondorioz, alderantzizko funtzioa honela geratuko da:

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Adibideak erakutsi du, alderantzizko funtzioak ematerakoan, funtzioaren definizio-eremua eta irudi multzoa kontuan hartu behar direla.

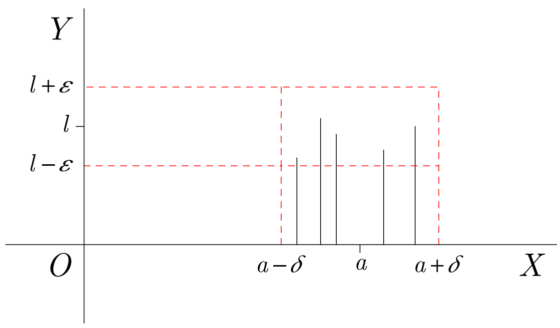
5.2. FUNTZIOEN LIMITEAK

5.12. Definizioa. *Limitea*

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa emanik, eta $a \in A$ izanik, $f(x)$ funtzioaren limitea *$x = a$ puntuan $l \in \mathbb{R}$ da baldintza hau betetzen badu:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in A \text{ eta } 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

eta honela adieraziko dugu: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *(ikus irudia).*



Azpimarratuko dugu definizioan agertzen den $\delta > 0$ hori $\varepsilon > 0$ balioaren mende egongo dela.

5.13. Adibidea. Ikus dezagun $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$ betetzen dela.

Idatz dezagun limitearen definizioa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in A \text{ eta } 0 < |x - 5| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{x^2 - 25}{x - 5} - 10 \right| < \varepsilon.$$

Hasteko, azken desberdintzaren eskuineko ataleko balio absolutua sinplifikatuko dugu ahalik eta gehien:

$$\left| \frac{x^2 - 25}{x - 5} - 10 \right| = \left| \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} \right| = \left| \frac{(x - 5)^2}{x - 5} \right| = |x - 5|.$$

Bestalde, $|x - 5| < \delta$ betetzen dela esan dugu. Sinplifikazioa eta hipotesi hori konparatuz, alde batetik, $|x - 5| < \varepsilon$ betetzea nahi dugu, eta, beste aldetik, $|x - 5| < \delta$ betetzen dela badakigu. Beraz, esan dezakegu $\varepsilon > 0$ ematen badigute, nahikoa dela $\delta < \varepsilon$ aukeratzea nahi duguna bete dadin, $|x - 5| < \delta < \varepsilon$ betetzen delako.

5.14. Definizioa. *Ezker-limitea*

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzioa emanik, eta* $a \in A$ *izanik,* $f(x)$ *funtzioaren* ezker-limitea $x = a$ *puntuan* $l^- \in \mathbb{R}$ *da baldintza hau betetzen badu:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in A \quad eta \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - l^-| < \varepsilon,$$

eta honela adieraziko dugu: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l^- = f(a^-)$.

5.15. Definizioa. *Eskuin-limitea*

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzioa emanik, eta* $a \in A$ *izanik,* $f(x)$ *funtzioaren* eskuin-limitea $x = a$ *puntuan* $l^+ \in \mathbb{R}$ *da baldintza hau betetzen badu:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in A \quad eta \quad a < x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - l^+| < \varepsilon,$$

eta honela adieraziko dugu: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l^+ = f(a^+)$.

5.16. Teorema. *$x = a$ puntuan $f(x)$ funtzioaren l limitea existitzen da baldin eta soilik baldin $x = a$ puntuko ezker- eta eskuin-limiteak, l^- eta l^+, existitu eta berdinak badira. Orduan, $l^- = l^+ = l$ beteko da.*

5.17. Adibidea. $f(x) = \dfrac{1}{e^{\tan x} + 1}$ funtzioaren limitea kalkulatuko dugu $x = \dfrac{\pi}{2}$ puntuan.

$x = \dfrac{\pi}{2}$ puntura ezkerretik hurbiltzen garenean, $\tan x$ funtzioa $+\infty$ baliora hurbiltzen da. Hortik, esponentziala ere $+\infty$ baliora hurbilduko da. Azkenik, frakzioaren izendatzailea $+\infty$ baliora hurbilduko da, eta frakzioa bera 0 limitera.

$x = \dfrac{\pi}{2}$ puntura eskuinetik hurbiltzen garenean, $\tan x$ funtzioa $-\infty$ baliora hurbiltzen da. Hortik, esponentziala 0 limitera hurbilduko da. Azkenik, frakzioaren izendatzailea 1 limitera hurbilduko da, eta frakzioa bera 1 limitera.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{e^{\tan x} + 1} = 0 \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{e^{\tan x} + 1} = 1.$$

Ezker- eta eskuin-limiteak desberdinak direnez, limitea ez da existitzen $x = \dfrac{\pi}{2}$ puntuan.

Limitearen kasu bereziak

Limitearen definizioan, bai a puntua, bai l limitea finituak direla pentsatu dugu. Hots, $a, l \in \mathbb{R}$. Hala ere, definizio berak balio du $a = \pm\infty$ edota $l = \pm\infty$ direnean, aldaketa batzuk eginez. Honela geratuko dira definizioak:

$a = \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in A \quad \text{eta} \quad M < |x| \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$l = \pm\infty$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta(M) > 0 \,/\, x \in A \quad \text{eta} \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

$a = \pm\infty$ eta $l = \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists N(M) > 0 \,/\, x \in A \quad \text{eta} \quad N < |x| \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

5.18. Teorema. *Segiden bidezko limitea*

$f(x)$ funtzioaren limitea $x = a$ puntuan $l \in \mathbb{R}$ da baldin eta soilik baldin

$$\forall \{a_n\} \subset \mathbb{R} \,/\, \{a_n\} \to a, \quad \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

betetzen bada.

Teorema horri esker ondoriozta dezakegu funtzioen limiteek segiden limiteek dituzten propietate berak dituztela. Aipa ditzagun, orain, funtzioen limiteen propietate batzuk, segiden limiteek dituztenen antzekoak.

5.19. Propietateak. *Demagun $f(x)$ funtzioaren limitea existitzen dela $x = a$ puntuan.*

1. *Funtzioaren limitea $x = a$ puntuan bakarra da.*
2. *$x = a$ puntuaren ingurune batean funtzioa bornatua da.*
3. *$x = a$ puntuko limitea ez bada nulua, puntuaren ingurune batean funtzioak limitearen zeinua izango du.*
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ *bada eta $x = a$ puntuaren ingurune batean* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *bada,* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ *izango da.*
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Hurrengo atalean aipatuko ditugu limiteak kalkulatzeko segidekin erabiltzen genituen metodoen antzeko batzuk.

5.3. FUNTZIOEN ARTEKO ERAGIKETAK ETA LIMITEAK. INDETERMINAZIOAK

5.20. Definizioa. *$f(x)$ eta $g(x)$ funtzio errealak emanik, bion arteko eragiketak honela definituko ditugu:*

1. Batuketa, kenketa*:* $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. *Definizio-eremua:* $D_f \cap D_g$.
2. Biderketa*:* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. *Definizio-eremua:* $D_f \cap D_g$.
3. Zatiketa*:* $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$, $g(x) \ne 0$ *izanik.*
   Definizio-eremua: $D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} \; / \; g(x) = 0\}$.

Bi funtzioren arteko eragiketen limiteek propietate hauek betetzen dituzte:

5.21. Propietateak. *$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen limiteak existitzen badira $x = a$ puntuan, berdintza hauek beteko dira:*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to a}(f \div g)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$ *bada.*

Segidekin gertatzen zen bezala, funtzioekin ere gertatzen da: eragiketen limitea ez da beti limiteen arteko eragiketen berdina eta batzuetan indeterminazioak sortzen dira; horrez gain, limite finituak ez ezik, limite infinituak ere sartzen baditugu, indeterminazioak agertzen dira. Zazpi indeterminazio mota ditugu:

batuketan, $\infty - \infty$; biderketan, $\mathbf{0} \cdot \infty$; zatiketan, $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ eta $\dfrac{\infty}{\infty}$, eta berreketan, $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{1}^{\infty}$ eta $\infty^{\mathbf{0}}$.

Indeterminazio horiek ebazteko metodo desberdinak daude. Hurrengo atalean aztertuko ditugu.

5.4. INDETERMINAZIOAK EBAZTEKO METODOAK

5.4.1. Baliokidetasuna

5.22. Definizioa. *$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak* baliokideak *dira $x=a$ puntuan* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ *bada.*

5.23. Definizioa.

1. *$f(x)$ funtzioa $x=a$ puntuan* infinitesimala *da* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ *bada.*
2. *$f(x)$ funtzioa $x=a$ puntuan* infinitua *da* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ *bada.*

Hona hemen zenbait infinitesimal baliokide:

$x\to a$ **edo** $x=a$ **puntuan**

$x-a\sim\sin(x-a)\sim\tan(x-a)\sim\arcsin(x-a)\sim\arctan(x-a)\sim e^{x-a}-1.$

$x\to 0$ **edo** $x=0$ **puntuan**

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^{x}-1.$

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}.$

$\ln(1+x)\sim x.$

$x\to 1$ **edo** $x=1$ **puntuan**

$\ln x\sim\ x-1.$

5.24. Ordezkapen-printzipioa. *f(x) funtzio baten puntu bateko limitea kalkulatzen denean, funtzioaren adierazpeneko biderkagai edo zatitzaile bat bere baliokide batez ordezka daiteke funtzioaren limitea aldatu gabe.*

5.25. Adibidea. Kalkula dezagun $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{10^x-10}{100^x-100}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{10^x-10}{100^x-100}=\lim_{x\to 1}\frac{10(10^{x-1}-1)}{100(100^{x-1}-1)}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{10}\frac{\ln 10^{x-1}}{\ln 100^{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{10}\frac{(x-1)\ln 10}{(x-1)\ln 100}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln 10}{10\ln 100}=\frac{\ln 10}{10\ln 100}=\frac{\ln 10}{20\ln 10}=\frac{1}{20}.$$

(1) berdintzan, $\ln 10^{x-1}\sim 10^{x-1}-1$ eta $\ln 100^{x-1}\sim 100^{x-1}-1$ baliokidetzak erabili ditugu, $10^{x-1}\to 1$ eta $100^{x-1}\to 1$ betetzen direlako.

5.4.2. Infinituen ordenak

Beste aldetik, funtzioen kasuan ere infinituak lau ordenatan sailka daitezke, $q,p,r>0$ eta $b,k>1$ direnean eta $x\to+\infty$ doanean:

$$(\log_b x)^q <<< x^p <<< k^x <<< x^{rx}.$$

5.26. Adibidea. Kalkula dezagun $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x}$.

$xe^{1/x}=\dfrac{e^{1/x}}{1/x}$ idatz dezakegu. Orduan, alde batetik, $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{1/x}=+\infty$ da eta, beste aldetik, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ da. Baina, esponentzialaren ordena goragokoa denez, zatiduraren limitea $+\infty$ da, hau da, $\lim\limits_{x\to 0^+}xe^{1/x}=+\infty$ da.

5.5. FUNTZIO JARRAITUAK

5.27. Definizioa. *$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa $x = a$ puntuan* jarraitua *da* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *bada. Hau da,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in A \quad eta \quad |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definiziotik atera dezakegu funtzio bat puntu batean jarraitua izateko, hiru baldintza hauek bete behar dituela:

1. $f(a)$ balioak existitu behar du (hots, $a \in A$);
2. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ limiteak existitu behar du;
3. biek berdinak izan behar dute, $l = f(a)$.

5.28. Adibidea. $f(x) = \cos x$ funtzioa jarraitua da jatorrian, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$ betetzen delako.

Aldeetako limiteak kontuan hartzen baditugu, aldeetako jarraitutasuna defini dezakegu:

5.29. Definizioa. *Ezker-jarraitua*
Funtzio bat ezker-jarraitua *da $x = a$ puntuan* $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ *betetzen bada.*

5.30. Definizioa. *Eskuin-jarraitua*
Funtzio bat eskuin-jarraitua *da $x = a$ puntuan* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ *betetzen bada.*

5.31. Adibidea. Azter dezagun $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & 0 \le x, \end{cases}$ funtzioaren jarraitutasuna.

$f(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan dago definiturik eta jarraitua da $\forall\, x \neq 0$, funtzio elementalez osatuta dagoelako.

Jatorrian jarraitutasuna aztertzeko, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatu beharko ditugu.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 = f(0)$, ezker-jarraitua da.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)$, eskuin-jarraitua da.

Hortaz, $f(x)$ jarraitua da jatorrian. Eta, ondorioz, $\mathbb{R}$ osoan da jarraitua.

5.32. Definizioa. *$f(x)$ jarraitua da $A \subset \mathbb{R}$ multzoan A multzoko puntu guztietan jarraitua bada.*

5.33. Definizioa. *$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua da (a,b) tarteko puntuetan jarraitua, $x = a$ puntuan eskuin-jarraitua eta $x = b$ puntuan ezker-jarraitua bada.*

5.34. Definizioa. *Funtzioa jarraitua ez denean* etena *dela esango dugu, eta puntuari funtzioaren* etenune *esango diogu.*

Etenuneen sailkapena

1. *Etenune gaindigarria*

   $\lim_{x\to a} f(x) = l$ eta $f(a) \neq l$.

2. *Lehen mailako etenunea*

   $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ betetzen da.

   2.1. $f(a^-), f(a^+) \in \mathbb{R}$ bada, $f(a^+) - f(a^-)$ jauzi finitua da.

   2.2. $f(a^-) = \pm\infty$ edota $f(a^+) = \pm\infty$ bada, jauzi infinitua da.

3. *Bigarren mailako etenunea*

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ edota $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ez da existitzen.

5.35. Adibidea. Azter dezagun $f(x)$ funtzioaren jarraitutasuna jatorrian, $f(x)$ funtzio hau izanik:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1/x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funtzio horrek jatorrian du arazo bakarra, $\frac{1}{x}$ agertzen delako. Ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu jatorrian:

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0 = f(0) \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = +\infty.$$

Ezker-limitea berehalakoa da eta eskuin-limitea 5.26. Adibidean kalkulatu dugu. Hortaz, $x = 0$ puntuan funtzioa ezker-jarraitua da. Funtzioak lehen mailako etenunea du, jauzia infinitua izanik.

5.6. FUNTZIO JARRAITUEN PROPIETATEAK

5.36. Propietatea. *Funtzio elementalak jarraituak dira beren definizio-eremuetan.*

Esaterako, polinomioak, logaritmoak, esponentzialak eta funtzio trigonometrikoak jarraituak dira.

5.37. Propietatea. *$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak jarraituak badira $x = a$ puntuan, $f \pm g$, $f \cdot g$ eta $f \div g$ $(g \neq 0)$ ere jarraituak dira $x = a$ puntuan.*

5.38. Teorema. *Funtzio konposatuaren jarraitutasuna*

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa jarraitua bada $x = a$ puntuan eta $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa jarraitua bada $y = b = f(a)$ puntuan, $f(A) \subset B$ izanik, $(g \circ f) : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa jarraitua izango da $x = a$ puntuan.

5.39. Adibidea. Izan bedi $f(x) = e^{-|x|}$ funtzioa. Jarraitutasuna aztertuko dugu.

Funtzio hori balio absolutu eta esponentzialaren arteko konposizioa da. Balio absolutua jarraitua dela 5.31. Adibidean ikusi dugu, eta esponentziala jarraitua da, funtzio elementala delako. Bion definizio-eremua $\mathbb{R}$ da; beraz, konposizioa ere jarraitua izango da $\mathbb{R}$ osoan.

5.40. Teorema. *Alderantzizko funtzioaren jarraitutasuna*

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa hertsiki monotonoa eta jarraitua bada, $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alderantzizko funtzioa existituko da, eta hertsiki monotonoa eta jarraitua izango da.

5.41. Adibidea. Har ditzagun $f(x) = \sin x$ funtzio elementala eta $f^{-1}(x) = \arcsin x$ horren alderantzizko funtzioa.

$f(x) = \sin x$ funtzioa jarraitua denez, alderantzizkoa ere jarraitua izango da, bere definizio-eremuan jakina, hau da, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tartean, 5.11. Adibidean ikusi dugun bezala.

5.42. Teorema. *$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua bada, bornatua izango da bertan.*

5.43. Teorema. *Weierstrass-en teorema*

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada, maximoa eta minimoa lortuko ditu bertan.

5.44. Teorema. *Bolzano-ren teorema*

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada eta $f(a) \cdot f(b) < 0$ bada, $\exists c \in (a,b) \;/\; f(c) = 0$.

5.45. Teorema. *Darboux-en teorema edo Tarteko balioen teorema*

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada eta $f(a) \neq f(b)$ bada,

$$\forall \mu \in (f(a), f(b)) \; (\textit{edo} \;\; \forall \mu \in (f(b), f(a))) \quad \exists c \in (a,b) \;/\; f(c) = \mu.$$

5.46. Korolarioa. *$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada,* $f([a,b]) = [m,M]$ *izango da.*

Hau da, funtzio jarraituek tarte itxiak tarte itxi bihurtzen dituzte.

5.47. Adibidea. Bila ditzagun $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{2}$ funtzioaren muturrak eta ikus dezagun ea anulatzen den punturen batean $[1,2]$ tartean.

$\dfrac{x^2}{2}$ funtzioa jarraitua da $[1,2]$ tartean, polinomioa delako. Bestalde, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x^2}{2} \leq 2$ da, gorakorra delako. Beraz, $\ln \dfrac{x^2}{2}$ existitzen da $[1,2]$ tartean, eta jarraitua da bertan, funtzio jarraituen konposizioa delako. Weierstrassen teoremak dio tarte horretan maximoa eta minimoa lortuko dituela; teoremak ez du, ordea, esaten non hartzen dituen. Kalkula ditzagun mutur horiek.

$\dfrac{x^2}{2}$ eta $\ln x$ funtzio hertsiki gorakorrak dira $[1,2]$ tartean; beraz, $f(x)$ ere hertsiki gorakorra da bertan. Ondorioz, minimoa $x = 1$ puntuan eta maximoa $x = 2$ puntuan lortuko ditu; hauek dira: $f(1) = \ln \dfrac{1^2}{2} = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2 = -0,69$ minimoa eta $f(2) = \ln \dfrac{2^2}{2} = \ln 2 = 0,69$ maximoa.

Bolzanoren teorema erabiliko dugu jakiteko ea punturen batean anulatzen den.

Badakigu $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{2}$ funtzioa jarraitua dela $[1,2]$ tartean. Bestalde, $f(1) = -0,69 < 0$ eta $f(2) = 0,69 > 0$ dira; beraz, teoremaren bigarren hipotesia ere betetzen da. Ondorioz, $\exists c \in (1,2)$, non $f(c) = 0$ baita. Hau da, $\ln \dfrac{c^2}{2} = 0$ da, $c \in (1,2)$ izanik. Kalkula ditzagun c-ren balio guztiak.

$$\ln \frac{c^2}{2} = 0 \Longrightarrow \frac{c^2}{2} = 1 \Longrightarrow c^2 = 2 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

Baina, $c = -\sqrt{2}$ balioa ez dago $(1,2)$ tartean; beraz, aukera hori baztertuko dugu. Ondorioz, funtzioa puntu bakar batean anulatzen da, $c = \sqrt{2}$ puntuan hain zuzen.

5.7. ARIKETA EBATZIAK

1. Galdera teorikoak

1. $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2x, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ funtzioa emanik, froga itzazu, 5.18. Teorema aplikatuz:

   1.1. ez dela existitzen $\lim_{x\to 1} f(x)$.

   1.2. $\lim_{x\to -2} f(x)$ existitzen dela.

Erantzuna.

1.1. Izan bedi $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$, non $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ den.
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (3x_n+2) = 3\cdot 1+2 = 5$ izango dugu.
Izan bedi, orain, $\{x'_n\} \not\subset \mathbb{Q}$, non $\lim_{n\to\infty} x'_n = 1$ den.
$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} 2x'_n = 2\cdot 1 = 2$ izango dugu.
Ondorioz, limitea ezin da existitu.

1.2. $\forall \{x_n\} \subset \mathbb{Q}$, non $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$ den,
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (3x_n+2) = (3(-2)+2) = -4$ izango dugu.
$\forall \{x'_n\} \not\subset \mathbb{Q}$, non $\lim_{n\to\infty} x'_n = -2$ den,
$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} 2x'_n = 2(-2) = -4$ izango dugu.
Ikus dezagun orain, definizioa erabiliz, $\lim_{x\to -2} f(x) = -4$ dela:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x+2| < \delta \Longrightarrow |f(x)+4| < \varepsilon.$$

$$|f(x)+4| = \begin{cases} |3x+2+4| = |3x+6| = 3|x+2| < 3\delta, & x \in \mathbb{Q}, \\ |2x+4| = 2|x+2| < 2\delta, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Hortaz, nahikoa da $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ aukeratzea $|f(x)+4| < \varepsilon$ izan dadin, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ondorioz, $\lim_{x\to -2} f(x) = -4$ da.

2. $x_0 = 0$ puntuan ondoko ezaugarriak dituzten funtzioen adibide bana eman ezazu:

   2.1. etenune gaindigarria.

   2.2. Lehen mailako etenune bornatua.

   2.3. Lehen mailako etenune bornegabea.

   2.4. Bigarren mailako etenune bornatua.

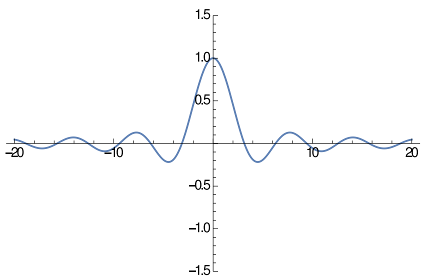
   2.5. Bigarren mailako etenune bornegabea.

Erantzuna.

2.1. Etenune gaindigarria:

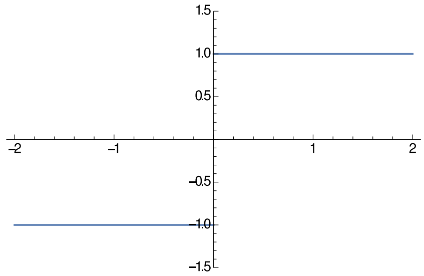
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$$

$f(0) = 1$ har daiteke funtzioa jarraitua izan dadin.



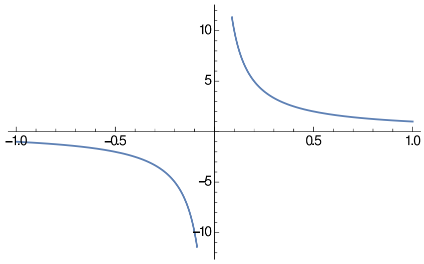
2.2. Lehen mailako etenune bornatua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



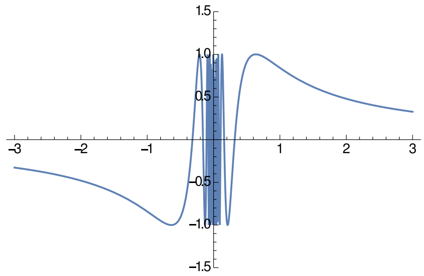
2.3. Lehen mailako etenune bornegabea:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



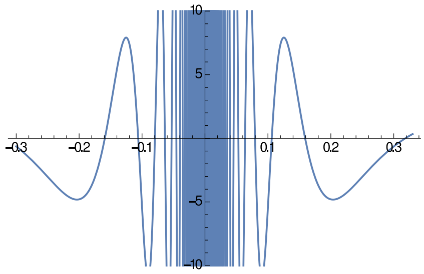
2.4. Bigarren mailako etenune bornatua:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



2.5. Bigarren mailako etenune bornegabea:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



3. Izan bedi $f(x)$ funtzioa jarraitua $I = [a,b]$ tartean. Esan ezazu, laburki arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

3.1. $f(x)$ funtzioak onartzen du alderantzizkoa I tartean.

3.2. $f(a) < r < f(b)$ bada, $c \in (a,b)$ existituko da, non $f(c) = r$ baita.

3.3. $f(x)$ bornaturik dago (a,b) tartean.

3.4. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

3.5. $\{x_n\} \to x_0$ bada, $\{f(x_n)\} \to f(x_0)$ beteko da, $x_0 \in (a,b)$ izanik.

3.6. $0 \in I$ bada, $\lim\limits_{x \to 0} x f(x) = 0$ izango da.

3.7. $\log f(x)$ jarraitua da I tartean.

3.8. $e^{f(x)}$ jarraitua da I tartean.

3.9. $\dfrac{f(x)}{\sin x}$ jarraitua da I tartean.

3.10. $f(a)=f(b)=f(c)$ bada, $c\in(a,b)$ izanik, $f(x)$ funtzioak maximoa eta minimoa tartearen barnealdean (hots, (a,b) tarte irekian) lortuko ditu.

3.11. $f(a)<f(b)$ bada, $f(x)$ ez da beherakorra I tarteko inongo puntutan.

Erantzuna.

3.1. Faltsua da; esaterako, $\sin x$ funtzioa $[0,2\pi]$ tartean ez da bijektiboa.

3.2. Egiazkoa da; Darbouxen teoremaren ondorioa da.

3.3. Egiazkoa da. 5.42. Teoremaren ondorioz, funtzio jarraitua denez, bornatua da tarte itxian eta, beraz, tarte irekian ere.

3.4. Faltsua da; funtzioa ez delako existitzen a-ren ezkerrean.

3.5. Egiazkoa da. Funtzioa jarraitua denez (a,b) tarteko puntu guztietan, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ betetzen da. Bestalde, segiden bidezko limitea limite orokorraren kasu partikularra da.

3.6. Egiazkoa da. $f(x)$ funtzio jarraitua bornaturik dago; beraz, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ balio finitua da; ondorioz, $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=0\cdot f(0)=0$ betetzen da.

3.7. Faltsua da; $f(x)$ negatiboa izan daitekeelako; eta orduan $\log f(x)$ ez litzateke existituko.

3.8. Egiazkoa da, esponentziala $\mathbb{R}$ osoan definiturik dagoelako.

3.9. Faltsua da; $\sin x$ funtzioa I tartean anula daitekeelako.

3.10. Egiazkoa da. $[a,b]$ tartea $[a,c]$ eta $[c,b]$ tarteetan bana daiteke; Weierstrassen teorema azpitarte bakoitzean aplikatuz gero, funtzioak maximoa eta minimoa bi azpitarte horietan lortuko lituzke; ez bada horien barnealdean, tarteen muturretan lortuko lituzke, bai maximoa bai minimoa; baina, $f(a)=f(b)=f(c)$ denez, $c\in(a,b)$ puntuan ere funtzioak maximoa edo minimoa lortuko luke; hau da, $[a,b]$ tartearen barnealdean.

3.11. Faltsua da. $\left[-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tartea eta $f(x)=\sin x$ funtzioa hartuz gero, $\sin(-\pi)=0<\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ betetzen da; baina, sinu funtzioa beherakorra da tarte horren $\left[-\pi,\dfrac{-\pi}{2}\right]$ azpitartean.

4. Ba al dago ondoko baldintzak betetzen dituen funtziorik?

4.1. Bornatua da tarte bornatuan eta ez du maximorik.

4.2. Tarte bornatu eta itxian definitua eta maximorik gabea.

Erantzuna.

4.1. Bai, esaterako, $f(x)=x^2$ funtzioak ez du maximorik $(-1,1)$ tartean; eta bornatua da, $\forall x\in(-1,1)\quad |f(x)|<1$ delako. Ez du, ordea, maximorik lortzen, tarte irekia delako.

4.2. Bai, esaterako, $f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{1}{x}\right|, & x\in[-1,1]-\{0\},\\ 0, & x=0,\end{cases}$
funtzioak ez du maximorik $[-1,1]$ tartean; berez, etena da $x=0$ puntuan.

5. Esan ezazu, arrazoituz, egiazkoa edo faltsua den hurrengo baieztapena:

$f(x)$ jarraitua bada (a,b) tarte ireki eta bornatuan, bornatua izango da aipatu tartean.

Erantzuna.

Faltsua da; esaterako $f(x)=\dfrac{1}{b-x}$ funtzio jarraitu bornegabea da (a,b) tartean, $b-x$ ez delako anulatzen bertan eta $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{1}{b-x}=+\infty$ delako.

2. Funtzioen limiteak

6. $\lim\limits_{x\to\pi^+} (\sin x)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$.

Ebazpena.

$\lim\limits_{x\to\pi^+} \sin x = \sin\pi = 0$ eta $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{1}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = -\infty$ dira, $\dfrac{x}{2} > \dfrac{\pi}{2}$ delako. Hortaz,

$\lim\limits_{x\to\pi^+} (\sin x)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}} = 0^{-\infty} = \infty$ (ez da indeterminazioa).

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos(\pi x)\log_a(1+x)$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos(\pi x)\log_a(1+x) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\log_a(1+x) \overset{(2)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x}\frac{\ln(1+x)}{\ln a} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x}\frac{x}{\ln a} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

(1) berdintzan, $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(\pi x) = 1$ erabili dugu.

(2) berdintzan, $\log_a(1+x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln a}$ erabili dugu.

(3) berdintzan, $\ln(1+x) \sim x$ baliokidetza erabili dugu.

8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\ln x}$.

Ebazpena.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$ ez da existitzen; baina, sinua bornatua da: $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ da, $\forall x$.

Bestalde, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ da.

Ondorioz, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\ln x} = 0$ da.

9. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - \sin x)^{\cot x}$.

Ebazpena.

1^∞ indeterminazioa dugu.

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - \sin x)^{\cot x} = l$ bada, $\ln l = \ln \lim\limits_{x\to 0} (\cos x - \sin x)^{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos x - \sin x)^{\cot x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \cot x \ln(\cos x - \sin x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x - \sin x)}{\tan x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} - \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^2}{2}}{x} - 1 = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

(1) berdintzan, $\ln(\cos x - \sin x) \sim \cos x - \sin x - 1$ eta $\tan x \sim x$ baliokidetzak erabili ditugu.

(2) berdintzan, $\cos x - 1 \sim \dfrac{-x^2}{2}$ baliokidetza eta $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ emaitza erabili ditugu.

Ondorioz, $\ln l = -1$ denez, $l = e^{-1}$ da.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+|x|}{\sin x}$.

Ebazpena.

Balio absolutua agertzen denez, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu.

Ezker-limitea: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x+|x|}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x-x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{\sin x} = 2$ da.

Eskuin-limitea: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x+|x|}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x+x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4x}{\sin x} = 4$ da.

Beraz, ez da limitea existitzen.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2},$$

(1) berdintzan, $\ln\cos x \sim \cos x - 1$ baliokidetza erabili dugu.

(2) berdintzan, $\cos x - 1 \sim \dfrac{-x^2}{2}$ baliokidetza erabili dugu.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{3^x-1}$

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{3^x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2^x}{\ln 3^x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln 2}{x\ln 3} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

(1) berdintzan, $2^x - 1 \sim \ln 2^x$ eta $3^x - 1 \sim \ln 3^x$ baliokidetzak erabili ditugu.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{x^3\cos x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}.$$

(1) berdintzan, $\sin x \sim x$ baliokidetza erabili dugu.

(2) berdintzan, adierazpena sinplifikatu eta $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ baliokidetza erabili dugu.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx}(e^{(a-b)x}-1)}{x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx}(a-b)x}{x} = \lim_{x\to 0}(a-b)e^{bx} = a-b.$$

(1) berdintzan, $e^{(a-b)x} - 1 \sim (a-b)x$ baliokidetza erabili dugu.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Ebazpena.

$\sin\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$ da, $x\to\infty$ doanean. Hortaz, $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} 1=1$ da.

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\cos x=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x(e^{-x}+1))}{x}=\lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x+\ln(e^{-x}+1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}=1+0=1.$$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}\,\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)-a}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1\right)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 0} x\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}\ln\frac{x^2}{x^2-1}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)=\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}\,\frac{1}{x^2-1}=0.$$

(1) berdintzan, $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1\right)\sim\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ baliokidetza erabili dugu; izan ere,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\overset{*}{=}\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}=1 \quad \text{betetzen baita,} \quad {}^*\ x>0 \quad \text{delako.}$$

(2) berdintzan, $\ln\dfrac{x^2}{x^2-1}\sim\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}-1\right)$ baliokidetza erabili dugu, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1}=1$ delako.

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

Ebazpena.

$\lim\limits_{x\to 1}(x+x^2+\cdots+x^n-n)=0$ denez, $x+x^2+\cdots+x^n-n$ polinomioa $x-1$ binomioz zati daiteke: $x+x^2+\cdots+x^n-n=(x-1)(x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n)$.

Hortaz, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}[x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n] = 1+2+\cdots+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{k-2x}{3x}}$.

Ebazpena.

Berrekizunaren limitea hau da: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x+1} = 0$.

Berretzailean, k parametroa agertzen denez, limitea kalkulatzeko orduan, horren balioa hartu beharko dugu kontuan.

$k=0$ denean, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{-2}{3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \infty$ limitea dugu.

$k>0$ denean, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{k-2x}{3x} = \infty$ da; beraz, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{k-2x}{3x}} = 0^\infty = 0$ da.

$k<0$ denean, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{k-2x}{3x} = -\infty$ da; beraz, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{k-2x}{3x}} = 0^{-\infty} = \dfrac{1}{0^\infty} = \infty$ da.

22. $\lim\limits_{x\to a} \left(4-\dfrac{3x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$.

Ebazpena.

Zuzenean kalkulatuz gero, hau lortuko genuke:

$\lim\limits_{x\to a} \left(4-\dfrac{3x}{a}\right) = 1$ eta $\lim\limits_{x\to a} \tan\dfrac{\pi x}{2a} = \pm\infty$. Hortaz, 1^∞ indeterminazioa lortuko genuke.

Limiteari l deituz eta logaritmo nepertarra hartuz gero, honela geratuko litzateke:

$$\ln l = \lim_{x\to a} \ln\left(4-\frac{3x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = \lim_{x\to a} \tan\frac{\pi x}{2a} \ln\left(4-\frac{3x}{a}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to a} \tan\frac{\pi x}{2a}\left(3-\frac{3x}{a}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{\pi x}{2a}}{\cos\frac{\pi x}{2a}}\left(3-\frac{3x}{a}\right) \overset{(2)}{=} \lim_{x\to a} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)}\left(3-\frac{3x}{a}\right) \overset{(3)}{=} \lim_{x\to a} \frac{3\left(1-\frac{x}{a}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{3}{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{\pi}.$$

(1) berdintzan, $\ln\left(4-\dfrac{3x}{a}\right) \sim \left(4-\dfrac{3x}{a}\right)-1 = 3-\dfrac{3x}{a}$ baliokidetza erabili dugu.

(2) berdintzan, $\lim\limits_{x\to a} \sin\dfrac{\pi x}{2a} = 1$ limitea eta $\cos\dfrac{\pi x}{2a} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2a}\right)$ berdintza erabili ditugu.

(3) berdintzan, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2a}\right) \sim \left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2a}\right) = \dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$ baliokidetza erabili dugu.

23. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Ebazpena.

0^0 indeterminazioa dugu.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = l$ bada, $\ln l = \ln \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$

Azkeneko berdintzan, bi infiniturен arteko zatiduran, izendatzaileko $\dfrac{1}{x}$ infinitua goragoko ordenakoa da zenbakitzaileko $-\ln \dfrac{1}{x}$ infinitua baino; beraz, zatiduraren limitea 0 da.

Ondorioz, $\ln l = 0$ denez, $l = e^0 = 1$ da.

3. Funtzio jarraituak

24. Azter dezagun $\ln \left| \tan \dfrac{x}{2} \right|$ funtzioaren jarraitutasuna.

Erantzuna.

Hiru funtzio konposatu dira funtzio hori lortzeko, logaritmo nepertarra, balio absolutua eta tangentea. Hiruren jarraitutasuna hartuko dugu kontuan, 5.36. eta 5.38. Teoremak aplikatzeko.

Logaritmo nepertarra existitu eta jarraitua da argumentua positiboa denean. Horrek esan nahi du $\left| \tan \dfrac{x}{2} \right| > 0$ bete behar dela.

Baina, balio absolutua beti da positiboa edo zero eta jarraitua; beraz, zero kasua baztertu beharko dugu, hau da, $\left| \tan \dfrac{x}{2} \right| = 0$. Balio absolutua zero da argumentua zero denean, hots, $\tan \dfrac{x}{2} = 0$ denean. Eta hori betetzen da tangentearen argumentua $k\pi$ modukoa denean, $k \in \mathbb{Z}$ izanik. Hortaz, $\dfrac{x}{2} = k\pi \Longrightarrow x = 2k\pi$ puntuak baztertu behar ditugu, $k \in \mathbb{Z}$ izanik.

Bestalde, tangente jarraitua da argumentua $\dfrac{k\pi}{2}$ modukoa denean izan ezik, $k \in \mathbb{Z}$ izanik. Hortaz, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{k\pi}{2} \Longrightarrow x = k\pi$ puntuak ere baztertu behar ditugu, $k \in \mathbb{Z}$ izanik.

Azkeneko kasuak aurrekoa hartzen du barnean. Ondorioz, bi emaitzak kontuan hartuz, funtzioa jarraitua da $x = k\pi$ puntuetan izan ezik, $k \in \mathbb{Z}$ izanik.

25. Azter ezazu ondoko funtzioaren jarraitutasuna:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ x^2, & 1 \le x. \end{cases}$$

Ebazpena.

$f(x)$ funtzioa jarraitua da $\forall x \neq 0, 1,$ funtzio elementalez osatuta dagoelako.

$x = 0$ puntuan,

$\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 e^x = 0$ eta $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$ dira; beraz, $x = 0$ puntuan funtzioak lehen mailako etenunea du, jauzi infinitukoa hain zuzen.

$x=1$ puntuan,

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x}=1$ eta $\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$ dira; $f(1)=1$ denez, funtzioa jarraitua da $x=1$ puntuan.

26. Azter ezazu $f(x)$ funtzioaren jarraitutasuna:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q},\\ -x, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Ebazpena.

Funtzioa jarraitua izateko, bai zenbaki arrazionalen bidezko limiteak bai zenbaki irrazionalen bidezko limiteak berdinak izan behar dute. Kalkula ditzagun.

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{x\to a} x=a$ izango dugu.

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\notin\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{x\to a} -x=-a$ izango dugu.

Hortaz, limitea existituko da $a=-a$ denean, hots, $a=0$ denean. Horrek esan nahi du funtzioa jatorrian baino ezin dela jarraitua izan.

Ikus dezagun orain, definizioa erabiliz, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ dela:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\;/\;0<|x-0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-0|<\varepsilon.$$

$$|f(x)-0|=|f(x)|=\begin{cases} |x|<\delta, & x\in\mathbb{Q},\\ |-x|=|x|<\delta, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Hortaz, nahikoa da $\delta<\varepsilon$ aukeratzea $|f(x)-0|<\varepsilon$ izan dadin, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ondorioz, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ da.

Azkenik, $f(0)=0$ denez, funtzioa jarraitua da jatorrian.

27. Azter ezazu $f(x)$ funtzioaren jarraitutasuna:

$$f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2}x, & x\le 1,\\[2ex] x-a, & 1<x.\end{cases}$$

Ebazpena.

$x\neq 1$ puntuetan funtzioa jarraitua da, funtzio elementalen bidez definituta dagoelako.

$x=1$ puntuaren ezkerraldean eta eskuinaldean funtzio desberdinak daudenez, ezker- eta eskuin-limiteak erabiliko ditugu.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi}{2}x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ eta $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x-a=1-a$ dira;

beraz, limitea existi dadin, $0=1-a$ edo $a=1$ bete beharko da.

Bestalde, $f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ da; ondorioz, $a=1$ denean, funtzioa jarraitua da $x=1$ puntuan.

28. Azter ezazu funtzio honen jarraitutasuna:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x < 1, \\ \ln x, & 1 \leq x \leq e, \\ \dfrac{x}{e}, & e < x. \end{cases}$$

Ebazpena.

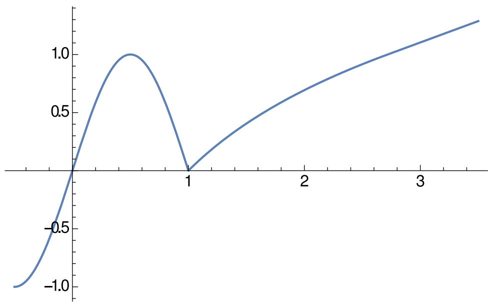
$\forall x \neq 1, e \quad f(x)$ funtzioa jarraitua da, $\sin \pi x$, $\ln x$ eta $\dfrac{x}{e}$ funtzio elementalak direlako.

$x = 1$ puntuan,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sin \pi x = \sin \pi = 0$ eta $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$ dira; beraz, $x = 1$ puntuan funtzioaren limitea existitu eta 0 da; hori denez funtzioak $x = 1$ puntuan hartzen duen balioa, $f(1) = 0$, funtzioa jarraitua da bertan.

$x = e$ puntuan,

$\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \ln x = \ln e = 1$ eta $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{x}{e} = 1$ dira; beraz, funtzioak $x = e$ puntuan hartzen duen balioa $f(e) = \ln e = 1$ denez, funtzioa jarraitua da bertan (ikus irudia).



29. Azter ezazu ondoko funtzioaren jarraitutasuna:

$$f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}.$$

Ebazpena.

Funtzioan agertzen diren bi balio absolutuek funtzioa $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan aldatzen dela esaten dute:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{e^{1-x}}, & x < 0, \\[2ex] \dfrac{x}{e^{1-x}}, & 0 \leq x < 1, \\[2ex] \dfrac{x}{e^{x-1}}, & 1 \leq x. \end{cases}$$

$\forall x \neq 0, 1$ funtzioa jarraitua da, funtzio elementalen arteko konposizioa delako.

$x = 0$ puntua:

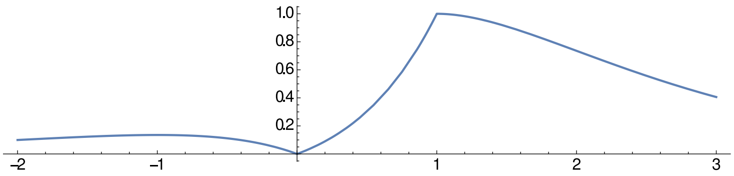
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{e^{1-x}} = 0$ eta $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{e^{1-x}} = 0$ dira; beraz, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ da.

Bestalde, $f(0) = 0$ da. Ondorioz, funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan.

$x=1$ puntua:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{e^{1-x}} = 1$ eta $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{e^{x-1}} = 1$ dira; beraz, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ da.

Bestalde, $f(1)=1$ da. Ondorioz, funtzioa jarraitua da $x=1$ puntuan (ikus irudia).



30. a-ren zer baliotarako da $f(x)$ funtzioa jarraitua puntu guztietan?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0, \\[2ex] a(x-1), & 0 \le x. \end{cases}$$

Ebazpena.

$\forall x \neq 0$ funtzioa jarraitua da, funtzio elementalez osatua delako. Beraz, $x=0$ puntua baizik ez dugu aztertu behar.

$x=0$ puntuaren ezkerraldean eta eskuinaldean funtzio desberdinak daudenez, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ eta $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} a(x-1) = -a$ dira;

beraz, limitea existi dadin, $a = -\dfrac{1}{2}$ bete beharko da.

Bestalde, $f(0) = a(0-1) = -a = \dfrac{1}{2}$ da; ondorioz, $a = -\dfrac{1}{2}$ denean, funtzioa jarraitua da $x=0$ puntuan.

31. a-ren eta b-ren zer baliotarako da $f(x)$ funtzioa jarraitua puntu guztietan?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 1 \le |x|, \\[2ex] ax^3 - x + b, & |x| < 1. \end{cases}$$

Ebazpena.

Lehendabizi, funtzioaren definizioan agertzen den balio absolutua deskonposatuko dugu:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le -1, \\[2ex] ax^3 - x + b, & -1 < x < 1, \\[2ex] x^2, & 1 \le x. \end{cases}$$

$\forall x \neq -1, 1$ funtzioa jarraitua da, funtzio elementalez osatua delako. Beraz, $x=-1$ eta $x=1$ puntuak baino ez ditugu aztertu behar.

Puntu horien ezkerraldean eta eskuinaldean funtzio desberdinak daudenez, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu.

$x=-1$ puntua:

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} x^2 = 1$ eta $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} (ax^3 - x + b) = -a+1+b$ dira;

bestalde, $f(-1)=1$ da.

Hortaz, limitea existi dadin eta funtzioa jarraitua izan dadin, $-a+1+b=1$, hots, $b-a=0$ bete beharko da.

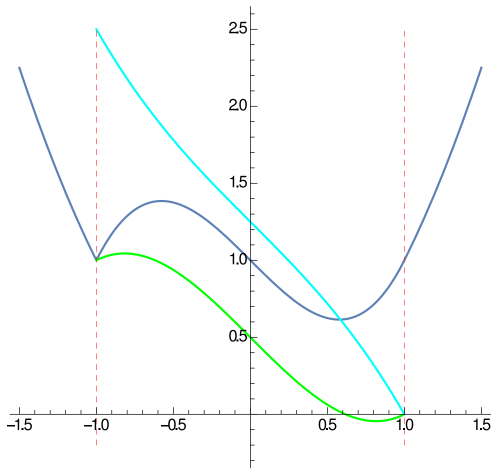
$x=1$ puntua:

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (ax^3 - x + b) = a-1+b$ eta $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2 = 1$ dira;

bestalde, $f(1)=1$ da.

Hortaz, limitea existi dadin eta funtzioa jarraitua izan dadin, $a-1+b=1$, hots, $b+a=2$ bete beharko da.

Ondorioz, bi puntu horietan funtzio jarraitua izan dadin $b-a=0$ eta $b+a=2$ bete beharko dira. Hortik, $a=1$ eta $b=1$ aterako ditugu.



Irudian ikus daitezke a-ren eta b-ren hiru kasu; batek baino ez du funtzioa jarraitua egiten.

32. 32.1. Azter ezazu $f(x)$ funtzioaren jarraitutasuna:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ (x+\sin x)^{1/x}, & 0<x. \end{cases}$$

32.2. $g(x)=x+1$ bada, kalkula itzazu $(g\circ f)(0)$ eta $(g\circ f)\left(\dfrac{-2}{\pi}\right)$.

Ebazpena.

32.1. $\forall x\neq 0$ funtzioa jarraitua da, funtzio elementalen konposizioz osatua delako. Beraz, $x=0$ puntua besterik ez dugu aztertu behar.

$x=0$ puntuaren ezkerraldean eta eskuinaldean funtzio desberdinak daudenez, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ da, sinu funtzioa bornatua delako;

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+\sin x)^{1/x} = 0 \quad \text{da;}$$

beraz, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ da; bestalde, $f(0) = 0$ da.

Ondorioz, funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan.

32.2. $g(x) = x+1$ bada,

$(g\circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0+1 = 1$ da.

$$(g\circ f)\left(\frac{-2}{\pi}\right) = g\left(f\left(\frac{-2}{\pi}\right)\right) = g\left(\frac{-2}{\pi}\sin\frac{-\pi}{2}\right) = g\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}+1 \quad \text{da.}$$

33. Azter ezazu $f(x)$ funtzioaren jarraitutasuna.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ebazpena.

$\forall x \neq 0$ funtzioa jarraitua da, funtzio elementalen konposizioa delako. Beraz, $x = 0$ puntua baizik ez dugu aztertu beharko.

Alde batetik, $\lim_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x} = 0$ da, sinu funtzioa bornatua delako eta $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ delako.

Beste aldetik, $f(0) = 0$ da.

Hortaz, funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan.

34. Froga ezazu $2\tan x = 1+\cos x$ ekuazioak baduela soluziorik $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ tartean.

Froga.

Ekuazio hori beste honen baliokidea da: $2\tan x - 1 - \cos x = 0$.

Frogatzea ekuazio horrek soluzioa duela $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ tartean frogatzea da $f(x) = 2\tan x - 1 - \cos x$ funtzioak zero bat duela bertan, hau da, tarteko punturen batean anulatu egiten dela.

Eta hori da Bolzanoren teoremaren ondorioa; hortaz, teoremaren hipotesiak egiaztatzea baino ez dugu egin behar.

Bolzanoren teoremaren bi hipotesiak dira jarraitua izatea eta tarteko muturretan zeinuz aurkako balioak hartzea. Ikus dezagun $f(x)$ funtzioak betetzen dituen.

$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ tartean bai $\tan x$ funtzioa bai $\cos x$ funtzioa jarraituak dira; hortaz, $f(x)$ funtzioa ere jarraitua da tarte horretan, funtzio jarraituen arteko eragiketa aritmetikoa delako.

Bestalde, $f(0) = 2\tan 0 - 1 - \cos 0 = 0 - 1 - 1 = -2 < 0$ da; eta

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\tan\frac{\pi}{4} - 1 - \cos\frac{\pi}{4} = 2 - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} > 0 \quad \text{da.}$$

Beraz, Bolzanoren teoremaren bi hipotesiak betetzen dira eta, orduan, ondorioa ere beteko da, hau da, $\exists c \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right) \ / \ f(c) = 0$.

Hortik, beraz, $\exists c \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right) \ / \ 2\tan c = 1+\cos c$.

35. Froga ezazu $x^4+2x^3-1=0$ ekuazioak baduela soluziorik $\mathbb{R}$ osoan. Bila ezazu soluzioren bat.

Froga.

Frogatzea ekuazio horrek soluziorik duela frogatzea da $f(x)=x^4+2x^3-1$ funtzioak gutxienez zero bat duela $\mathbb{R}$ multzoan.

Bolzanoren teorema aplikatu nahi badugu, teoremaren hipotesiak egiaztatu behar ditugu.

Lehen hipotesia, funtzio jarraitua izatearena, betetzen da $\mathbb{R}$ osoan, $f(x)$ funtzioa polinomio bat delako.

Bigarren hipotesia egiaztatzeko, tarte baten bi muturrak behar ditugu, non funtzioak zeinuz aurkako balioak hartzen dituen. Hori betetzen duten bi zenbaki erreal bilatuko ditugu, proba batzuk eginez.

Esaterako, $f(0)=-1<0$ da. Nahikoa dugu, beraz, funtzioaren balio positibo bat bilatzea. Adibidez, $f(1)=1+2-1=2>0$ da.

Hortaz, $[0,1]$ tartean Bolzanoren teoremaren bi hipotesiak betetzen dira eta, ondorioz, esan dezakegu ekuazioaren soluzio bat dagoela tarte horretan.

Badakigu, beraz, ekuazioaren c soluzioak $0<c<1$ betetzen duela. Soluzioaren balioa zehaztu nahi badugu, berriro erabil dezakegu Bolzanoren teorema, baina tarte horren erdi batekin.

Har dezagun $\frac{1}{2}\in(0,1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\left(\frac{1}{2}\right)^3-1=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1=\frac{-11}{16}<0$ da.

Hortaz, orain, Bolzanoren teoremaren bi hipotesiak $\left[\frac{1}{2},1\right]$ tartean betetzen dira. Hortik, ekuazioaren c soluzioak $0'5<c<1$ betetzen du.

Gehiago zehaztuko dugu soluzioaren balioa. Horretarako $\frac{3}{4}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ hartuko dugu eta funtzioak bertan hartzen duen balioa kalkulatu:

$f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^4+2\left(\frac{3}{4}\right)^3-1=\frac{81}{256}+\frac{27}{32}-1=\frac{41}{256}>0.$

Orain, Bolzanoren teoremaren bi hipotesiak $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ tartean betetzen dira. Hortik, beraz, ekuazioaren c soluzioak $0'5<c<0'75$ betetzen du.

Proba dezagun, orain, $0'7\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ balioarekin. Funtzioak puntu horretan hartzen duen balioa $f(0'7)=(0'7)^4+2(0'7)^3-1=0'2401+0'686-1=-0'0739<0$ da.

Hortaz, Bolzanoren teoremaren bi hipotesiak $[0'7,0'75]$ tartean betetzen dira eta ekuazioaren c soluzioak $0'7<c<0'75$ beteko du.

Horrela segi genezake soluzioaren nahi zehaztasuna lortu arte.

Kontuan izan behar da Bolzanoren teoremaren ondorioak dioela puntu bat existitzen dela eta horrek esan nahi du gutxienez bat dagoela; hau da, gerta daiteke tarte horietako bakoitzean puntu bat baino gehiago egotea eta, beraz, urrats bakoitzeko soluzioa ez izatea aurreko bera. Baina, urrats bakoitzeko soluzio guztiek ondorioa betetzen dute, eta zehaztasun bera dute.

5.8. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Funtzioak eta limiteak

1. Eman ezazu ondoko funtzioen definizio-eremua:

1) $f(x)=x^2-2;$ 2) $f(t)=\sqrt{t};$ 3) $y=e^{-x};$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x};$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(1/x)};$ 6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x-1};$

7) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2};$ 8) $y=2^{1/x};$ 9) $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(x+2)};$

10) $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-4}};$ 11) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x};$ 12) $y=\ln\dfrac{x^2-4x+3}{x+3}.$

2. Izan bitez $D=\{1,2,3,4,5,6\}$ multzoa eta $f,g:D\longrightarrow D$ funtzioak, ondoko taulen bidez definiturik daudenak:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	6	4	1
$g(x)$	2	4	6	1	3	5

Eman itzazu $f\circ g$, $g\circ f$, f^{-1}, g^{-1}, $(f\circ g)^{-1}$ eta $(g\circ f)^{-1}$ funtzioen taulak.

3. Froga itzazu ondoko emaitzak definizioa erabiliz:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=10;$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=4;$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}2x\neq 5;$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\neq 0.$

4. Froga ezazu ez direla existitzen hurrengo funtzioen limiteak aipatzen diren puntuetan:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x=0$ puntuan; 2) $g(t)=2^{1/t}$, $t=0$ puntuan;

3) $g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q},\\ x^2, & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$ $x\neq 0,1$ puntuetan; 4) $y=\dfrac{1}{x-1}$, $x=1$ puntuan.

5. Kalkula itzazu ondoko limiteak:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x};$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a};$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x};$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2};$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{e^x-1};$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a};$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{x^3}+2}-\frac{1}{x}\right),\ a\geq 0;$ 8) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1};$ 9) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3};$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1);$ 11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{a}-1\right);$ 12) $\displaystyle\lim_{x\to 1}e^{1/(1-x)};$

13) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 14) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}\sin\frac{1}{x}}$; 15) $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3^x-1}{x^3}$;

16) $\lim_{x\to 2\pi}\dfrac{x-2\pi}{\sqrt{1-\cos x}}$; 17) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$; 18) $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

19) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$; 20) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$; 21) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$;

22) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\sin 5x}{(x-x^3)^2}$; 23) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$; 24) $\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

25) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$; 26) $\lim_{x\to 3}\left(1+(x-3)^2\right)^{\frac{1}{x-3}}$; 27) $\lim_{x\to 3}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}$;

28) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$; 29) $\lim_{x\to 1/2}\dfrac{x}{\ln(6x-3)}$; 30) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$;

31) $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}$; 32) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; 33) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$;

34) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3(\cos x-1)^3}{\tan^2 x}$; 35) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2}{3x+1}\right)^{\frac{1+x^2}{x-5x^3}}$; 36) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$;

37) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; 38) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1+3x}{1+2x}-1\right)$; 39) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$;

40) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+x^2}{1+2x^4}\right)^{\ln x}$; 41) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$; 42) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^a}{\ln x}$;

43) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\frac{1}{x}}$; 44) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2+5x^2}{3+3x^2}\right)^{1-\ln x}$; 45) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x-1}{x-3}}$;

46) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3-x^2}{1-2x^2}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)}$; 47) $\lim_{x\to 3}\dfrac{3\cos x}{x}$; 48) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$.

2. Funtzioen jarraitutasuna

6. Azter ezazu hurrengo funtzioen jarraitutasuna:

1) $f(x)=\begin{cases} x, & x<1,\\ x^2, & 1\le x\le 4,\\ 2^x, & 4<x;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} Ax^2, & |x|<1,\\ e^x, & 1\le |x|;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in\mathbb{Q},\\ \cos x, & x\notin\mathbb{Q};\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in\mathbb{Q},\\ A, & x\notin\mathbb{Q};\end{cases}$

5) $f(x)=\ln|\sin x|$; 6) $f(x)=x^4+2x^2+3$;

7) $f(x)=x\sin x$; 8) $f(x)=\ln(x^2-4)$;

9) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$; 10) $f(x)=f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;

11) $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$; 12) $f(x)=f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$;

13) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$; 14) $f(x)=f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$;

15) $f(x)=\begin{cases} |x|, & x\in\mathbb{Q}, \\ x^2, & x\notin\mathbb{Q}; \end{cases}$ 16) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ A+x, & 0\le x. \end{cases}$

7. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren:

 7.1. $f(x)$ funtzio $x=a$ puntuan jarraitua bada, $|f(x)|$ ere jarraitua izango da $x=a$ puntuan.
 7.2. $|f(x)|$ funtzioa $x=a$ puntuan jarraitua bada, $f(x)$ ere jarraitua izango da $x=a$ puntuan.
 7.3. $f(x)+g(x)$ funtzioa $x=a$ puntuan jarraitua da baldin eta soilik baldin $f(x)$ eta $g(x)$ jarraituak badira $x=a$ puntuan.
 7.4. $f(x)+g(x)$ funtzioa funtzioa jarraitua izan daiteke $x=a$ puntuan, $f(x)$ $x=a$ puntuan jarraitua eta $g(x)$ $x=a$ puntuan etena izan arren.

8. $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ funtzioa emanik, defini itzazu $f(0)$ eta $f(1)$ balioak funtzioa jarraitua izan dadin [0,1] tarte itxian:
$$f(x)=\frac{x^2-x}{\sin\pi x}.$$

9. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ bi funtzio jarraitu [a,b] tartean, non $f(a)<g(a)$ eta $f(b)>g(b)$ betetzen baitute. Froga ezazu $c\in(a,b)$ existitzen dela, non $f(c)=g(c)$ betetzen den.

10. Froga ezazu hurrengo ekuazioek badutela soluziorik aipatu tarteetan:

 10.1. $x^2+1=4x$, $[0,1]$ tartean.
 10.2. $x^3-3x+1=0$, $[1,2]$ tartean.
 10.3. $x^5-3x=1$, $[1,2]$ tartean.
 10.4. $\cos x=x-1$, $\mathbb{R}$ osoan.
 10.5. $\tan x=x$, $\mathbb{R}$ osoan.

11. Lortuko al du $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-\sin\pi x+3$ funtzioak $\dfrac{3}{2}$ balioa $[-2,2]$ tartean?

12. Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraitua $[a,b]$ tartean. Froga ezazu $[a,b]$ tarteko $x=c$ punturen batean $f(c)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ beteko dela.

13. Kalkula itzazu hurrengo funtzioen maximo eta minimoak emandako tarteetan. Anulatzen al dira tarteko punturen batean?

 13.1. $f(x)=2x-1$, $[0,1]$ tartean.
 13.2. $f(x)=x^3-3$, $[0,2]$ tartean.
 13.3. $f(x)=\tan x-1$, $\left[\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ tartean.

6. Funtzioen deribagarritasuna

6.1. FUNTZIO DERIBAGARRIAK

6.1. Definizioa. $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzioa* $x = a \in A$ *puntuan* deribagarria *da limite hau existitzen bada:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \textit{edo} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Limiteari a puntuko deribatu *deritzogu, eta* $f'(a)$ *idatziko dugu.*

6.2. Adibidea. Izan bedi $f(x) = e^x$ funtzioa. Ikus dezagun deribagarria den ala ez $x = a$ puntuan.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to a} \frac{e^a(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} e^a = e^a.$$

(1) berdintzan, $e^{x-a} - 1 \sim x - a$ baliokidetza erabili dugu.

Hortaz, funtzioa deribagarria da $x = a$ puntuan, eta deribatua $f'(a) = e^a$ da.

6.3. Propietatea. $f(x)$ *funtzioa deribagarria bada* $x = a$ *puntuan, jarraitua ere izango da bertan.*

6.4. Definizioa. *Ezker-deribatua*
Limite honi $f(x)$ *funtzioaren a puntuko* ezker-deribatu *deritzogu:*

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

6.5. Definizioa. *Eskuin-deribatua*
Limite honi $f(x)$ *funtzioaren a puntuko* eskuin-deribatu *deritzogu:*

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

6.6. Definizioa. *Deribatu funtzioa*
Deribatua existitzen denean, $a \in A$ *puntuari bertako* $f'(a)$ *deribatua esleitzen dion funtzioari* deribatu funtzio *deritzogu, eta* $f'(x)$ *idatziko dugu.*

6.7. Adibidea. Azter dezagun balio absolutuaren deribagarritasuna, eta kalkula dezagun horren deribatu funtzioa:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & 0 \le x. \end{cases}$$

Aurreko gaiko 5.31. Adibidean ikusi genuen funtzioa jarraitua zela $\mathbb{R}$ osoan.
$f(x)$ funtzioa deribagarria da $\forall\, x \neq 0$, funtzio elementalez osatuta dagoelako.
$x = 0$ puntuan funtzioa aldatzen denez, ezker- eta eskuin-deribatuak kalkulatu behar ditugu:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Beraz, funtzioa ez da deribagarria $x=0$ puntuan, aldeetako deribatuak ez direlako berdinak.

Azkenik, deribatu funtzioa hau da:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 1, & 0<x. \end{cases}$$

$f(x)$ funtzioaren $f'(x)$ deribatu funtzioa ere deribagarria bada, horren deribatuari $f(x)$ funtzioaren bigarren ordenako deribatu deritzo, eta $f''(x)$ idatzi.

Era berean definitzen dira hirugarren, laugarren, ..., n ordenako deribatuak, eta $f'''(x)$, $f^{\mathrm{IV})}(x)$, ..., $f^{n)}(x)$ adieraziko ditugu.

6.2. DERIBATUAREN INTERPRETAZIO GEOMETRIKOA

Funtzio baten deribatuak hainbat interpretazio ditu arlo desberdinetan. Hemen, deribatuaren interpretazio geometrikoa azalduko dugu labur. Horretarako pentsatuko dugu $f(x)$ funtzioa jarraitua eta deribagarria izango dela D_f eremu batean; bertan, $x,a \in D_f$ puntuak hartuko ditugu, eta funtzioaren $x=a$ puntuko deribatua kalkulatuko dugu.

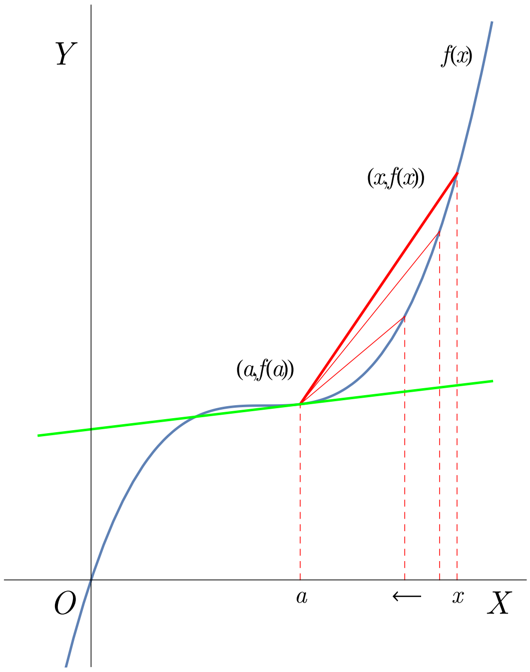
6.1. Definizioaren limitean agertzen den $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ frakzioak $y=f(x)$ kurbako $(a,f(a))$ eta $(x,f(x))$ puntuen arteko ebakitzailearen malda emango digu.

Orain, x aldagaia a puntura hurbiltzen dela pentsatuko dugu (ikus irudia). Horrela, ebakitzailea kurbaren $x=a$ puntuko ukitzaile bihurtuko da; hau da, ebakitzaileen malden limiteak ukitzailearen malda emango digu.

Beraz, $f(x)$ funtzioaren $x=a$ puntuko ukitzailearen ekuazioa honela eman dezakegu:

$$y = f(a)+f'(a)(x-a),$$

non $\quad f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad$ baita.



6.3. DERIBAZIO-ARAUAK

6.8. Propietatea. *Funtzio elementalak deribagarriak dira beren definizio-eremuetan.*

6.9. Propietateak. *$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak deribagarriak badira $x=a$ puntuan, $f\pm g$, $f\cdot g$ eta $f\div g$ $(g\neq 0)$ deribagarriak dira bertan, eta eragiketen deribatuak hauek dira:*

1. *Batuketa, kenketa:* $(f\pm g)'(a) = f'(a)\pm g'(a)$.
2. *Biderketa:* $(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.
3. *Zatiketa:* $(f\div g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, $\quad g(a)\neq 0\quad$ *izanik.*

6.10. Teorema. *Funtzio konposatuaren deribatua*

$f: A\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funtzioa deribagarria bada $x=a$ puntuan eta $g: B\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funtzioa deribagarria bada $y=b=f(a)$ puntuan, $f(A)\subset B$ izanik, $(g\circ f): A\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funtzio konposatua deribagarria izango da $x=a$ puntuan, eta horren deribatua hau izango da:

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a).$$

6.11. Teorema. *Alderantzizko funtzioaren deribatua*

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa hertsiki monotonoa bada A multzoan eta deribagarria bada $x = a$ puntuan, $f'(a) \neq 0$ izanik, $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alderantzizko funtzioa existitu eta hertsiki monotonoa izango da $f(A)$ multzoan, eta deribagarria izango da $y = b = f(a)$ puntuan, eta

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad b = f(a) \text{ izanik.}$$

6.12. Adibidea. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ ondoko taulak definitutako funtzioak:

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0
$f'(x)$	1	0	3	2
$g(x)$	1	3	0	2
$g'(x)$	0	1	2	3

$(g \circ f)'(2)$, $(f^{-1})'(2)$ eta $(f^{-1})'(3)$ kalkulatuko ditugu.

Funtzio konposatuaren deribatuaren teorema aplikatuko dugu:

$$(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(1) \cdot f'(2) = 1 \cdot 3 = 3.$$

$(f^{-1})'(2)$ kalkulatzeko, alderantzizko funtzioaren deribatuaren teorema aplikatu nahi badugu, $2 = f(1)$ dela kontuan izan behar dugu; baina, $f'(1) = 0$ denez, ezin dugu teorema aplikatu.

$(f^{-1})'(3)$ kalkulatzeko $3 = f(0)$ dela kontuan izango dugu; beraz, $f'(0) = 1$ denez, formula aplikatuz, $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(0)}$ izango dugu eta $(f^{-1})'(3) = 1$ lortuko dugu.

Emaitza teorikoak bi zerrendatan laburbilduta emango ditugu.

Eragiketen deribazioa

Batuketa/kenketa: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Biderketa: $(f \cdot g)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Zatiketa: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Funtzio konposatua: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Alderantzizko funtzioa: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{f'(x)}$, $y = f(x)$ izanik.

Funtzio elementalen deribatuak

1. Funtzio konstanteak

$f(x) = k$, $\qquad f'(x) = 0$.

2. Funtzio potentzialak

$f(x) = g(x)^a$, $\qquad f'(x) = ag(x)^{a-1}g'(x)$;

$f(x) = x^a$, $\qquad f'(x) = ax^{a-1}$;

$f(x) = x$, $\qquad f'(x) = 1$.

3. Funtzio irrazionalak

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}, \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}};$$

$$f(x) = \sqrt{g(x)}, \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}};$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}};$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Berreketa funtzioak eta funtzio esponentzialak

$$f(x) = h(x)^{g(x)}, \qquad f'(x) = h(x)^{g(x)} g'(x) \ln h(x) + g(x) h(x)^{g(x)-1} h'(x);$$

$$f(x) = a^{g(x)}, \qquad f'(x) = a^{g(x)} g'(x) \ln a;$$

$$f(x) = e^{g(x)}, \qquad f'(x) = e^{g(x)} g'(x);$$

$$f(x) = a^x, \qquad f'(x) = a^x \ln a;$$

$$f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x.$$

5. Funtzio logaritmikoak

$$f(x) = \log_a g(x), \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\ln a};$$

$$f(x) = \ln g(x), \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)};$$

$$f(x) = \log_a x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a};$$

$$f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

6. Funtzio trigonometrikoak

$$f(x) = \sin g(x), \qquad f'(x) = g'(x) \cos g(x);$$

$$f(x) = \sin x, \qquad f'(x) = \cos x;$$

$$f(x) = \cos g(x), \qquad f'(x) = -g'(x) \sin g(x);$$

$$f(x) = \cos x, \qquad f'(x) = -\sin x;$$

$$f(x) = \tan g(x), \qquad f'(x) = g'(x)(1 + \tan^2 g(x)) = \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)};$$

$$f(x) = \tan x, \qquad f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$f(x) = \cot g(x), \qquad f'(x) = -g'(x)(1+\cot^2 g(x)) = \frac{-g'(x)}{\sin^2 g(x)};$$

$$f(x) = \cot x, \qquad f'(x) = -(1+\cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x};$$

$$f(x) = \sec g(x), \qquad f'(x) = g'(x)\frac{\sin g(x)}{\cos^2 g(x)} = g'(x)\frac{\tan g(x)}{\cos g(x)};$$

$$f(x) = \sec x, \qquad f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x};$$

$$f(x) = \csc g(x), \qquad f'(x) = -g'(x)\frac{\cos g(x)}{\sin^2 g(x)} = -g'(x)\frac{\cot g(x)}{\sin g(x)};$$

$$f(x) = \csc x, \qquad f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cot x}{\sin x}.$$

7. Funtzio ziklometrikoak

$$f(x) = \arcsin g(x), \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}};$$

$$f(x) = \arcsin x, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f(x) = \arccos g(x), \qquad f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}};$$

$$f(x) = \arccos x, \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f(x) = \arctan g(x), \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)};$$

$$f(x) = \arctan x, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$f(x) = \text{arccot } g(x), \qquad f'(x) = \frac{-g'(x)}{1+g^2(x)};$$

$$f(x) = \text{arccot } x, \qquad f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

8. Funtzio hiperbolikoak

$$f(x) = \sinh g(x), \qquad f'(x) = g'(x)\cosh g(x);$$

$$f(x) = \sinh x, \qquad f'(x) = \cosh x;$$

$$f(x) = \cosh g(x), \qquad f'(x) = g'(x)\sinh g(x);$$

$$f(x) = \cosh x, \qquad f'(x) = \sinh x;$$

$$f(x) = \tanh g(x), \qquad f'(x) = g'(x)(1-\tanh^2 g(x)) = \frac{g'(x)}{\cosh^2 g(x)};$$

$$f(x) = \tanh x, \qquad f'(x) = 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x};$$

$$f(x) = \coth g(x), \qquad f'(x) = g'(x)(1-\coth^2 g(x)) = \frac{-g'(x)}{\sin^2 g(x)};$$

$$f(x) = \coth x, \qquad f'(x) = 1-\coth^2 x = \frac{-1}{\sinh^2 x}.$$

6.13. Adibideak.

1. Deriba dezagun $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ funtzioa.

$$f'(x) \overset{(1)}{=} \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{x(x-2)e^x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}.$$

(1) berdintzan, zatiketaren deribatuaren araua erabili dugu.

2. Deriba dezagun $f(x) = \ln \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ funtzioa.

$$f'(x) \overset{(1)}{=} \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \overset{(2)}{=} \frac{\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{-4x}{1-x^4}.$$

(1) berdintzan, logaritmo nepertarraren eta funtzio konposatuaren deribatuak erabili ditugu.

(2) berdintzan, zatiketaren deribatua erabili dugu.

3. Deriba dezagun $f(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$ funtzioa.

$$f'(x) \overset{(1)}{=} \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \overset{(2)}{=} \frac{\frac{(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}} = \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(1) berdintzan, arku tangentearen eta funtzio konposatuaren deribatuak erabili ditugu.

(2) berdintzan, zatiketaren deribatuaren araua erabili dugu.

4. Deriba dezagun $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ funtzioa.

$$f'(x) \overset{(1)}{=} \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

(1) berdintzan, zatiketaren deribatuaren araua erabili dugu.

5. Deriba dezagun $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$ funtzioa.

Funtzioa berreketa itxurarekin idatz dezakegu honela: $f(x) = \left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{1/3}$.

$$f'(x) \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{-2/3}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)' \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{-2/3}\left(\frac{(1+\tan^2 x)(1-\tan x)-(1+\tan x)(-(1+\tan^2 x))}{(1-\tan x)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{-2/3}\left(\frac{2(1+\tan^2 x)}{(1-\tan x)^2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{2/3}\frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(1-\tan x)^{2/3}}{(1+\tan x)^{2/3}}\frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2} = \frac{2}{3}\frac{(1-\tan x)^{2/3}}{(1-\tan x)^2}\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^{2/3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{(1-\tan x)^{4/3}}\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^{2/3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(1+\tan x)^{1/3}}{(1-\tan x)^{1/3}}\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x}\frac{1}{(1+\tan x)^{2/3}}\frac{1}{(1+\tan x)^{1/3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x}\frac{1}{1+\tan x} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}.$$

(1) berdintzan, berreketaren eta funtzio konposatuaren deribatuak erabili ditugu.

(2) berdintzan, zatiketaren deribatuaren araua erabili dugu.

6.4. FUNTZIO DERIBAGARRIEN PROPIETATEAK

6.14. Teorema. *Rolle-ren teorema*
$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta (a,b) tarte irekian deribagarria bada eta $f(a)=f(b)$ betetzen badu, $\exists c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$.

6.15. Adibidea. Ikus dezagun $e^x\sin x=1$ ekuazioaren bi soluzioren artean $e^x\cos x=-1$ ekuazioaren soluzio bat dagoela.

Lehenago, ekuaziotik funtzio bat sor dezagun:

$$e^x\sin x=1 \Longrightarrow \sin x=e^{-x} \Longrightarrow \sin x-e^{-x}=0;$$

hortik, $f(x)=\sin x-e^{-x}$ funtzioa hartuko dugu.

Ekuazioak soluzioa izango du funtzioa anulatzen denean. Hau da, x_1 eta x_2 badira ekuazioaren bi soluzio, $x_1<x_2$ izanik, $f(x_1)=f(x_2)=0$ beteko da. Bestalde, $f(x)$ funtzioa jarraitua eta deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan, funtzio elementalen arteko eragiketa delako. Hortaz, Rolleren teoremaren hipotesiak betetzen ditu $[x_1,x_2]$ tartean. Ondorioz, $\exists c\in(x_1,x_2)\ /\ f'(c)=0$.

Ikus dezagun zehazki zer gertatzen den deribatua $x=c$ puntuan anulatzen denean.
$f'(c)=0 \Longrightarrow f'(c)=\cos c+e^{-c}=0 \Longrightarrow \cos c=-e^{-c} \Longrightarrow e^c\cos c=-1,\ \ c\in(x_1,x_2)$ izanik.

Hortaz, $e^x\cos x=-1$ ekuazioak soluzio bat du (x_1,x_2) tartean; hau da, $e^x\sin x=1$ ekuazioaren bi soluzioren artean.

6.16. Teorema. *Batez besteko balioaren teorema edo Lagrange-ren teorema*
$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta (a,b) tarte irekian deribagarria bada, $\exists c\in(a,b)\ /$ $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

6.17. Ondorioak. *Monotoniaren baldintza nahikoa*
$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta (a,b) tarte irekian deribagarria bada,

1. *$\forall x\in(a,b)$ $f'(x)>0$ bada, $f(x)$ hertsiki gorakorra da (a,b) tartean.*
2. *$\forall x\in(a,b)$ $f'(x)<0$ bada, $f(x)$ hertsiki beherakorra da (a,b) tartean.*
3. *$\forall x\in(a,b)$ $f'(x)=0$ bada, $f(x)$ konstantea da (a,b) tartean.*
4. *$\forall x\in(a,b)$ $f'(x)=g'(x)$ bada, $f(x)=g(x)+k$ izango da (a,b) tartean.*

6.18. Adibidea. Ikus dezagun $x^2 = x\sin x + \cos x$ berdintza x-ren bi baliotarako baino ez dela betetzen.

Pasa gaitezen ekuaziotik funtzio batera: $f(x) = x\sin x + \cos x - x^2$. Orain, funtzioa bi puntutan baino ez dela anulatzen frogatu beharko dugu. Horretarako, Bolzanoren teorema erabiliko dugu.

$f(x)$ funtzio jarraitua da, funtzio elementalez osatuta dagoelako. Orain, funtzioaren balioak kalkulatuko ditugu puntu batzuetan:

$$f(0) = 1; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi - \pi^2}{4} < 0; \quad f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi - \pi^2}{4} < 0.$$

Beraz, $f(x)$ funtzioa $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ eta $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$ tarteetan anulatzen da (ikus irudia).

Ikus dezagun ez dela puntu gehiagotan anulatzen. Horretarako funtzioaren deribatua behar dugu:

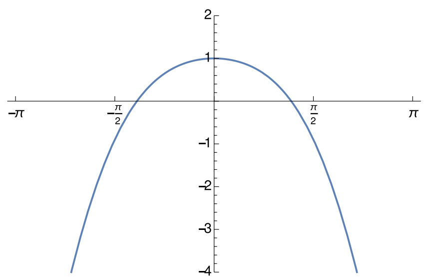
$$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x - 2x = x\cos x - 2x = x(\cos x - 2).$$

Parentesien artekoa beti da negatiboa, $\cos x < 2$ delako; beraz,

$x < 0$ denean, $f'(x) = x(\cos x - 2) > 0$ da; hortaz, $f(x)$ gorakorra da $(-\infty, 0)$ tartean;

$x > 0$ denean, $f'(x) = x(\cos x - 2) < 0$ da; hortaz, $f(x)$ beherakorra da $(0, \infty)$ tartean.

Ondorioz, $x < 0$ denean, behin baino ezin da anulatu $f(x)$ funtzioa, eta beste behin baino ez $x > 0$ denean.



6.19. Teorema. *L'Hôpital-en erregela*

$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioek baldintza hauek betetzen badituzte:

1.a) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim_{x\to a} g(x)$, *hau da, jarraituak badira $x = a$ puntuan, ($a = \pm\infty$ izan daiteke) edo*

1.b) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ *bada,*

2) $\exists \varepsilon > 0$, *non* $\forall x \in \mathcal{E}^*(a, \varepsilon)$ $f'(x)$, $g'(x)$ *existitzen diren eta* $g'(x) \neq 0$ *den*[1], *eta*

3) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *limitea existitzen bada,*

berdintza hau beteko da: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

6.20. Adibidea. Kalkula dezagun $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin x - \sin^3 x}{x^5}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin x - \sin^3 x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)\sin x}{x^5} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)}{x^4} \overset{(2)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2x - 2\sin x\cos x)}{4x^3} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2x - \sin 2x)}{4x^3} \overset{(4)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2 - 2\cos 2x)}{12x^2} \overset{(5)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2\sin 2x)}{12x} \overset{(6)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}.$$

(1) berdintzan, $x = 0$ puntuan, $\sin x \sim x$ baliokidetza erabili dugu.
(2) berdintzan, L'Hôpitalen erregela aplikatu dugu.
(3) berdintzan, $2\sin x\cos x = 2\sin 2x$ berdintza ordezkatu dugu.
(4) eta (5) berdintzetan, L'Hôpitalen erregela aplikatu dugu.
Eta (6) berdintzan, $x = 0$ puntuan, $\sin 2x \sim 2x$ baliokidetza erabili dugu.

1. $\mathcal{E}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{E}(a, \varepsilon) - \{a\}$ da.

6.5. TAYLOR-EN GARAPENA

Atal honen helburua funtzio bat polinomioen bidez hurbiltzea izango da. Hurbilpena bilatzean erroreren bat sortuko dugu; hori ere aztertuko dugu eta hurbilpenaren zehaztasuna polinomioaren mailaren mende egongo dela ikusiko dugu.

6.21. Teorema. *Taylorren teorema*

$x=a$ puntuaren $\mathcal{E}(a,\varepsilon)$ ingurune batean $f(x)$ funtzioa $n+1$ aldiz deribagarria bada, $\forall x \in \mathcal{E}^*(a,\varepsilon)$ $\exists c \in (x,a)$ (edo $c \in (a,x)$) (ikus irudia), *non*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

beteko den.

Hemen, berdintzaren bigarren atalari $f(x)$ funtzioaren *Taylorren garapen* deituko diogu; azken batugaia kenduta, geratzen den polinomioari *Taylorren polinomio* esango diogu, eta azken batugaiari *gai osagarri*. Gai osagarriak forma desberdinak izan ditzake; horko hori *Lagrangeren gai osagarria* da eta honela ere idatzi ohi da:

$$\frac{f^{n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \theta \in (0,1) \text{ izanik.}$$

Gai osagarria hurbilpenaren zehaztasuna neurtzeko erabiliko dugu. Ikus dezakegunez, gai osagarria hiru balioren mende dago: deribatuaren n ordena, x eta a puntuen arteko distantzia ($|x-a|$) eta $c \in (x,a)$ (edo $c \in (a,x)$) balioa.

Maclaurin-en garapena

$a=0$ denean, $\forall x \in \mathcal{E}^*(0,\varepsilon)$ $\exists c \in (x,0)$ (edo $c \in (0,x)$), non

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

beteko den.

6.22. Adibidea. Kalkula dezagun $f(x)=\ln(1+x)$ funtzioaren Taylorren garapena $x=0$ puntuan, eta laugarren ordenara arte.

$$f(x)=\ln(1+x), \qquad f(0)=\ln 1=0;$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}; \qquad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-(1+x)^{-2}, \qquad f''(0)=-1;$$

$$f'''(x)=2(1+x)^{-3}, \qquad f'''(0)=2;$$

$$f^{\mathrm{IV})}(x)=-6(1+x)^{-4}, \qquad f^{\mathrm{IV})}(0)=-6;$$

$$f^{\mathrm{V})}(x)=24(1+x)^{-5}, \qquad f^{\mathrm{V})}(c)=24(1+c)^{-5}.$$

$$f(x)=0+\frac{1}{1!}(x-0)-\frac{1}{2!}(x-0)^2+\frac{2}{3!}(x-0)^3-\frac{6}{4!}(x-0)^4+\frac{24}{5!(1+c)^5}(x-0)^5=$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5(1+c)^5}x^5, \quad c \in (0,x) \quad \text{edo} \quad c \in (x,0) \quad \text{izanik.}$$

Adierazpen horren $\left|\dfrac{1}{5(1+c)^5}x^5\right|$ gai osagarriak emango digu zehaztasunaren maila. Kontura gaitezen gai osagarria balio hauen mende dagoela: deribatuaren $n=5$ ordena, x eta $a=0$ puntuen arteko $|x-0|$ distantzia eta $c \in (0,x)$ (edo $c \in (x,0)$) balioa.

Kalkula dezagun $\ln 1,1$ logaritmoaren balio hurbildua, eta azter dezagun zer errore egiten dugun.
x-ren balio zehaztuko dugu: $\ln 1,1 = \ln(1+0,1) \Longrightarrow x = 0,1$ da.
Balio hori polinomioan ordezkatuz, logaritmoaren balio hurbildua kalkulatuko dugu:

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{3}(0,1)^3 - \frac{1}{4}(0,1)^4 = 0,0953083333...$$

Balio horren zehaztasuna, beraz, deribatuaren $n=5$ ordenaren, $x=0,1$ puntuaren eta $0<c<0,1$ balioaren mende dago.

Esan bezala, $\left|\dfrac{1}{5(1+c)^5}(0,1)^5\right|$ errorea dugu, $0<c<0,1$ izanik. Borna dezagun errorea:

$0<c<0,1 \Longrightarrow 1<1+c<1,1 \Longrightarrow 1<(1+c)^5<1,1^5 \Longrightarrow \dfrac{1}{1,1^5} < \dfrac{1}{(1+c)^5} < 1.$

Beraz, $\left|\dfrac{1}{5(1+c)^5}(0,1)^5\right| < \dfrac{1}{5}(0,1)^5 = 0,000002$ dugu.

Laburbilduz, logaritmoaren balio hurbildua $\ln 1,1 = 0,0953083333...$ da eta errorea $0,000002$ baino txikiagoa da.

6.6. ARIKETA EBATZIAK

1. Funtzio deribagarriak

1. Azter ezazu ondoko funtzioaren deribagarritasuna, eta deribatu funtzioa kalkulatu:

$$f(x)=\begin{cases} x^2e^x, & x\le 0,\\[2ex] \dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\[2ex] x^2, & 1\le x.\end{cases}$$

Ebazpena.

Aurreko gaiko 25. Ariketa ebatzian ikusi genuen funtzioa etena zela $x=0$ puntuan, eta jarraitua gainerakoetan.

$f(x)$ funtzioa deribagarria da $\forall x\neq 0,1,$ funtzio elementalez osatuta dagoelako.

$x=0$ puntuan funtzioa ez da deribagarria, ez delako jarraitua.

$x=1$ puntua aztertuko dugu:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x}=-1;$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2.$$

Beraz, funtzioa ez da deribagarria $x=1$ puntuan, ezker- eta eskuin-deribatuak ez direlako berdinak.

Azkenik, deribatu funtzioa hau da:

$$f'(x)=\begin{cases} (2x+x^2)e^x, & x<0,\\[2ex] \dfrac{-1}{x^2}, & 0<x<1,\\[2ex] 2x, & 1<x.\end{cases}$$

2. Azter ezazu $f(x)$ funtzioaren deribagarritasuna, eta deribatu funtzioa kalkulatu:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q},\\ -x, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Ebazpena.

Aurreko gaiko 26. Ariketa ebatzian ikusi genuen funtzioa $x=0$ puntuan baino ez zela jarraitua. Azter dezagun bertan deribagarria den, gainerako puntuetan ezin delako deribagarria izan.

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$ eta $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\notin\mathbb{Q}}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}-1=-1$ dira.

Beraz, funtzioa ez da deribagarria $x=0$ puntuan, zenbaki arrazionalen bidezko eta zenbaki irrazionalen bidezko deribatuak ez direlako berdinak.

Ondorioz, deribatu funtzioa ez da inongo puntutan existitzen.

3. Azter ezazu $f(x)$ funtzioaren deribagarritasuna, eta deribatu funtzioa kalkulatu:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2}x, & x \leq 1, \\[2ex] x-a, & 1 < x. \end{cases}$$

Ebazpena.

Aurreko gaiko 27. Ariketa ebatzian ikusi genuen funtzioa jarraitua zela puntu guztietan $a = 1$ zenean.

Orain, funtzioaren deribagarritasuna aztertuko dugu. Deribagarritasuna aztertzeko funtzioak jarraitua izan behar duenez, $a = 1$ kasua baizik ez dugu aztertuko.

$\forall x \neq 1$ funtzioa deribagarria da, funtzio elementalen bidez definituta dagoelako.

$x = 1$ puntuan, ezker- eta eskuin-deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x - 0}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{1} = -\frac{\pi}{2};$$

(1) berdintzan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu limitea kalkulatzeko.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1;$$

beraz, funtzioa ez da deribagarria $x = 1$ puntuan, ezker- eta eskuin-deribatuak ez direlako berdinak.

Laburbilduz, deribatu funtzioa honela geratuko da:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x, & x < 1, \\[2ex] 1, & 1 < x. \end{cases}$$

4. Kalkula itzazu a, b eta c parametroen balioak ondoko funtzioa jarraitua eta deribagarria izan dadin bere definizio-eremu osoan:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq -\pi, \\ ax^2+bx+c, & -\pi < x < \pi, \\ \sin x, & \pi \leq x. \end{cases}$$

Ebazpena.

$\forall x \neq -\pi, \pi$ funtzioa jarraitua eta deribagarria da, funtzio elementalez definituta dagoelako. Beraz, $x = -\pi$ eta $x = \pi$ puntuak aztertu behar dira.

$x = -\pi$ puntuan jarraitua izan dadin, $f(-\pi^-) = f(-\pi^+) = f(-\pi)$ bete behar da.

$\lim\limits_{x\to -\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^-} \sin x = 0$ eta $\lim\limits_{x\to -\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^+} (ax^2+bx+c) = a\pi^2 - b\pi + c$ dira;

bestalde, $f(-\pi) = 0$ da.

Beraz, $a\pi^2 - b\pi + c = 0$ bete beharko da.

$x = \pi$ puntuan jarraitua izan dadin, $f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi)$ bete behar da.

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} (ax^2+bx+c) = a\pi^2 + b\pi + c$ eta $\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^+} \sin x = 0$ dira;

bestalde, $f(\pi) = 0$ da.

Beraz, $a\pi^2 + b\pi + c = 0$ bete beharko da.

$a\pi^2 - b\pi + c = 0$ eta $a\pi^2 + b\pi + c = 0$ ekuazioetatik $b = 0$ eta $a\pi^2 + c = 0$ aterako ditugu.

Aurreko baldintzak betez gero, deribagarria izateko $f'(-\pi^-) = f'(-\pi^+)$ eta $f'(\pi^-) = f'(\pi^+)$ berdintzak bete behar dira.

$x = -\pi$ puntuan:

$$\lim_{x\to-\pi^-} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x - (-\pi)} = \lim_{x\to-\pi^-} \frac{\sin x - 0}{x + \pi} = \lim_{x\to-\pi^-} \frac{\sin x}{x + \pi} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to-\pi^-} \frac{\cos x}{1} = -1;$$

$$\lim_{x\to-\pi^+} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x - (-\pi)} = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{ax^2 + c - 0}{x + \pi} = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{ax^2 + c}{x + \pi} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to-\pi^+} \frac{2ax}{1} = -2a\pi;$$

(1) berdintzetan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu limitea kalkulatzeko.

$x = -\pi$ puntuan deribagarria izan dadin, $-1 = -2a\pi$ bete beharko da; hortik, $a = \dfrac{1}{2\pi}$ aterako dugu. Eta lehenengo ekuazioan ordezkatuz,

$\dfrac{1}{2\pi}\pi^2 + c = 0 \Longrightarrow \dfrac{\pi}{2} + c = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{-\pi}{2}$ lortuko dugu.

Orain, $x = \pi$ puntuan:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{ax^2 + c - 0}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{ax^2 + c}{x - \pi} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\pi^-} \frac{2ax}{1} = 2a\pi;$$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x - 0}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{x - \pi} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{1} = -1;$$

(1) berdintzetan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu limitea kalkulatzeko.

$x = \pi$ puntuan deribagarria izan dadin, $-1 = 2a\pi$ bete beharko da; hortik, $a = \dfrac{-1}{2\pi}$ aterako dugu. Eta lehenengo ekuazioan ordezkatuz,

$\dfrac{-1}{2\pi}\pi^2 + c = 0 \Longrightarrow \dfrac{-\pi}{2} + c = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{\pi}{2}$ lortuko dugu.

Ondorioz, funtzioa $\mathbb{R}$ osoan jarraitua izan dadin, nahikoa da $b = 0$ eta $a\pi^2 + c = 0$ betetzea. Aldiz, funtzioa ezin da aldi berean deribagarria izan $x = -\pi$ eta $x = \pi$ puntuetan, a-ren eta c-ren balio desberdinak ateratzen direlako bi puntuetan.

5. Azter itzazu ondoko funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Kalkula ezazu deribatu funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ebazpena.

Definizio-eremua $\mathbb{R}$ osoa da, eta funtzioa jarraitua eta deribagarria da $\forall x \neq 0$, funtzio elementalen konposizioa delako.

$f(x)$ funtzioak duen arazo bakarra $x = 0$ denean da, puntu horretan $\dfrac{1}{x}$ ez dagoelako definiturik. Hortaz, $x = 0$ puntua aztertzeko, limitea kalkulatuko dugu.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ da, sinu funtzioa bornatua delako. Hortaz, $f(0) = 0$ denez, funtzioa jarraitua da jatorrian.

Orain, funtzioaren deribagarritasuna aztertuko dugu jatorrian. Deribagarritasuna aztertzeko, deribatua limitearen bidez kalkulatuko dugu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

Limite hori ez da existitzen; beraz, funtzioa ez da deribagarria $x=0$ puntuan.

Deribatu funtzioa honela geratzen da:

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

6. Azter ezazu $f(x)$ funtzioaren deribagarritasuna eta kalkula ezazu $f'(x)$ deribatu funtzioa.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Ebazpena.

Aurreko gaiko 33. Ariketa ebatzian ikusi genuen funtzioa jarraitua zela puntu guztietan.

$\forall x\neq 0$ funtzioa deribagarria da, funtzio elementalen konposizioa delako.

$x=0$ puntuan deribagarritasuna aztertzeko, ondoko limitea kalkulatu behar dugu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

berriro ere, sinu funtzioa bornatua delako eta $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ delako.

Beraz, funtzioa deribagarria da $x=0$ puntuan eta $f'(0)=0$ da.

Ondorioz, deribatu funtzioa honela geratuko da:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

2. Funtzio deribagarrien propietateak

7. 7.1. Funtzio bat deribagarria bada, alderantzizkoa, existitzen bada, deribagarria al da?
   7.2. Froga ezazu $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ dela, $f(x_0)=y_0$ izanik.
   7.3. Kalkula ezazu, aurreko emaitza erabiliz, $g(x)=\arcsin x$ funtzioaren deribatua $x=0,5$ puntuan.
   7.4. Kalkula ezazu, aurreko emaitza erabiliz, $g(x)=\arccos x$ funtzioaren deribatu funtzioa.

Ebazpena.

7.1. Alderantziziko funtzioa deribagarria da jatorrizko funtzioak deribatu nulua ez duen puntuetan.

7.2. $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ denez, $\left(f^{-1}\circ f\right)'(x)=1$ izango da. Bestalde, katearen erregela erabiliz, $\left(f^{-1}\circ f\right)'(x)=\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)$ da; beraz, aurreko berdintza honela geratuko da: $\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1$. Eta $f'(x)\neq 0$ bada,
$\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$ izango da.
Azkenik, $f(x_0)=y_0$ bada, $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ izango da.

7.3. $g(x)=\arcsin x$ funtzioa $f(x)=\sin x$ funtzioaren alderantzizkoa da; beraz, $g'(0,5)$ eskatzen badigute, $\left(f^{-1}\right)'(0,5)$ eskatzen digute. Aurreko formula aplikatuz, hauxe dugu: $\left(f^{-1}\right)'(0,5)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$, $\sin\dfrac{\pi}{6}=0,5$ delako. Hortaz,

$$g'(0,5)=\left(f^{-1}\right)'(0,5)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

7.4. $g(y)=\arccos y$ funtzioa $f(x)=\cos x$ funtzioaren alderantzizkoa da; beraz, $g'(y)$ eskatzen badigute, $\left(f^{-1}\right)'(y)$ eskatzen digute. Aurreko formula aplikatuz, hauxe dugu: $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$, $\cos x=y$ izanik.

Hortaz, $g'(y)=\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{-\sin x}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ da, $\sin x\neq 0$ edo $y\neq\pm 1$ bada, eta $\sin x=\sqrt{1-y^2}$ izanik.

8. Kalkula ezazu $f(x)=\ln\sin\dfrac{1}{x}$ funtzio konposatuaren deribatua katearen erregela erabiliz.

Ebazpena.

$g_1(x)=\dfrac{1}{x}$, $g_2(x)=\sin x$ eta $g_3(x)=\ln x$ badira, $f(x)=g_3(g_2(g_1(x)))$ da.

Hortaz, horren deribatua hau da: $f'(x)=g_3'(g_2(g_1(x)))\cdot g_2'(g_1(x))\cdot g_1'(x)$.

Konposatzen diren hiru funtzioen deribatuak $g_1'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$, $g_2'(x)=\cos x$ eta $g_3'(x)=\dfrac{1}{x}$ dira. Deribatu bakoitza dagokion puntuan kalkulatuz gero, balio hauek lortuko ditugu:

$$g_1'(x)=\frac{-1}{x^2},\quad g_2'(g_1(x))=g_2'\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}\quad \text{eta}$$

$$g_3'(g_2(g_1(x)))=g_3'\left(g_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)=g_3'\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}.$$

Ondorioz, $f'(x)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}=\dfrac{-1}{x^2}\cot\dfrac{1}{x}$ da.

9. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ bi funtzio deribagarri eta alderantzikagarri, $f:X\longrightarrow Y$ eta $g:Y\longrightarrow Z$:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	6	5	4	3	2	1
$f'(x)$	-2	-1	-3	-4	-5	-6

y	1	2	3	4	5	6
$g(y)$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$g'(y)$	2	1	3	4	5	6

Kalkula itzazu:

9.1. f^{-1} funtzioaren deribatua $y=4$ puntuan;

9.2. g^{-1} funtzioaren deribatua $z=-3$ puntuan;

9.3. $(g\circ f)$ funtzioaren deribatua $x=4$ puntuan;

9.4. $(g\circ f)^{-1}$ funtzioaren deribatua $z=-3$ puntuan.

Ebazpena.

Alderantzizko funtzioaren deribatuaren formula eta funtzio konposatuaren deribatuaren formula erabiliko ditugu:

$(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$, $b=f(a)$ izanik; eta $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)$.

9.1. $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(3)} = \dfrac{1}{-3} = \dfrac{-1}{3}$ da, $4 = f(3)$ izanik.

9.2. $(g^{-1})'(-3) = \dfrac{1}{g'(4)} = \dfrac{1}{4}$ da, $-3 = g(4)$ izanik.

9.3. $(g \circ f)'(4) = g'(f(4)) \cdot f'(4) = g'(3) \cdot f'(4) = 3 \cdot (-4) = -12$ da, $f(4) = 3$ izanik.

9.4. $((g \circ f)^{-1})'(-3) = \dfrac{1}{(g \circ f)'(3)} = \dfrac{1}{g'(f(3)) \cdot f'(3)} = \dfrac{1}{g'(4) \cdot f'(3)} = \dfrac{1}{4 \cdot (-3)} = \dfrac{-1}{12}$ da,

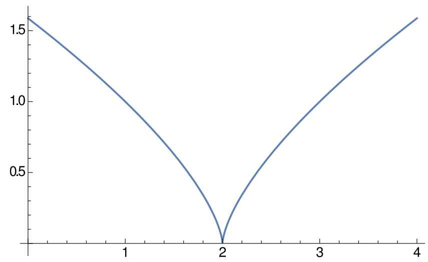
$-3 = g(4) = g(f(3)) = (g \circ f)(3)$ izanik.

10. Aplika dakioke $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ funtzioari Rolleren teorema $[0,4]$ tartean?

Ebazpena.

Hiru baldintza bete behar dira Rolleren teorema aplikatu ahal izateko: funtzioa tarte itxian jarraitua eta tarte irekian deribagarria izatea eta $f(0) = f(4)$ izatea.

Funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan, erro kubikoa beti existitzen delako (ikus irudia).



$f'(x) = \dfrac{2}{3}(x-2)^{-1/3} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ da; beraz, funtzioa ez da deribagarria $x = 2$ puntuan.

Ondorioz, ezin da Rolleren teorema aplikatu.

11. Aplika dakioke batez besteko balioaren teorema $f(x) = x^4 - x^2$ funtzioari $[-1,1]$ tartean? Hala bada, kalkula ezazu tarteko puntua.

Ebazpena.

$f(x) = x^4 - x^2$ funtzioa jarraitua eta deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan, polinomio bat delako; beraz, $[-1,1]$ tartean jarraitua da, eta $(-1,1)$ tartean deribagarria. Ondorioz, batez besteko balioaren teorema aplika dakioke.

Teoremak dio $\exists c \in (-1,1)$, non $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$ baita.

$f(-1) = (-1)^4 - (-1)^2 = 0$ eta $f(1) = 1^4 - 1^2 = 0$ dira; beraz, $f'(c) = 0$ betetzen duten $x = c$ puntuak bilatu behar ditugu.

$f'(x) = 4x^3 - 2x$ denez, $f'(c) = 4c^3 - 2c = 0$ da ekuazioa. Hortik, $c(2c^2 - 1) = 0$ lortzen dugu; soluzio bat, beraz, $c = 0$ da eta besteak $c^2 = \dfrac{1}{2}$ ekuaziotik aterako ditugu: $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ eta $c = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

Lortutako hiru balioak $(-1,1)$ tartean daudenez, onargarriak dira.

12. Kalkula itzazu $f(x)$ funtzioaren batez besteko bi balioak $[-2,0]$ tartean, teoremaren hipotesiak betetzen badira:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -2 \leq x < -1, \\ \dfrac{x^2-3}{2}, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Ebazpena.

Batez besteko balioaren teorema hau da: $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta (a,b) tarte irekian deribagarria bada, $\exists c \in (a,b)\ /\ f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Batez besteko balioak kalkulatu baino lehen, teoremaren hipotesiak betetzen diren edo ez aztertuko dugu.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioa jarraitua da $[-2,-1]$ tartean, $x=0$ puntuan baino ez duelako etenunea.

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{2}$ funtzioa jarraitua da $[-1,0]$ tartean, polinomioa delako.

$x=-1$ puntuan,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1 \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-3}{2} = -1 \quad \text{dira;}$$

beraz, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$ da. Bestalde, $f(-1) = -1$ da.

Ondorioz, funtzioa jarraitua da $x=-1$ puntuan.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioa deribagarria da $(-2,-1)$ tartean, deribatua duelako $x=0$ puntuan izan ezik; eta $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ da.

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{2}$ funtzioa deribagarria da $(-1,0)$ tartean, polinomioa delako; eta $f'(x) = x$ da.

$x=-1$ puntuan,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{-1+h}-(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{(-1+h)h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{-1+h} = -1;$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{(-1+h)^2-3}{2}-(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(-1+h)^2-1}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-2}{2} = -1;$$

beraz, $f'(-1) = -1$ da.

Ondorioz, $f(x)$ funtzioa deribagarria da $(-2,0)$ tarte osoan.

Batez besteko balioaren teoremaren hipotesiak betetzen direnez, $c \in (-2,0)$ punturen batean $f(0)-f(-2) = f'(c)(0-(-2))$ beteko da.

Hortik, $\exists c \in (-2,0)$, non $\dfrac{-3}{2} - \dfrac{-1}{2} = 2f'(c)$ edo, sinplifikatuz, $f'(c) = \dfrac{-1}{2}$ betetzen den.

Deribatu funtzio hau dugu:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2}, & -2 < x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

$(-2,-1]$ tartean, $f'(c) = \dfrac{-1}{c^2} \Longrightarrow \dfrac{-1}{c^2} = \dfrac{-1}{2} \Longrightarrow c^2 = 2 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{2};$

baina, $\sqrt{2}$ balioa ezin dugu kontuan izan, ez dagoelako tartean.

$(-1,0)$ tartean, $f'(c) = c \Longrightarrow c = \dfrac{-1}{2}$ dugu.

Hortaz, eskatzen dizkiguten batez besteko bi balioak hauek dira: $c_1 = -\sqrt{2}$ eta $c_2 = \dfrac{-1}{2}$.

13. Izan bedi $f(x)$ funtzioa jarraitua $I = [a,b]$ tartean eta deribagarria (a,b) tartean. Esan ezazu, laburki arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

13.1. $f(a) = f(b)$ bada, $f'(x) = 0$ izango da I tarte osoan.

13.2. $f(a) = f(b) = 0$ bada, $c \in (a,b)$ existituko da, non $f'(c) = 0$ baita.

13.3. $f(a) = f(b) = 0$ bada, $c \in (a,b)$ existituko da, non $f(c) > 0$ baita.

Erantzuna.

13.1. Faltsua da; adibidez, $[0,\pi]$ tartean $f(x) = \sin x$ funtzioa; $f'(x) = \cos x$ da, ez beti nulua I tartean.

13.2. Egiazkoa da; Rolleen teoremaren ondorioa da.

13.3. Faltsua da; $[\pi, 2\pi]$ tartean $f(x) = \sin x$ funtzioak $\sin\pi = \sin 2\pi = 0$ betetzen du eta $\sin x < 0$ da $\forall x \in (\pi, 2\pi)$.

14. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapena egiazkoa edo faltsua den:

$f(x)$ hertsiki gorakorra bada x_0 puntuan, $f'(x_0) > 0$ izango da.

Erantzuna.

Faltsua da; adibidez, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 3x-2, & x \in (1,2], \end{cases}$ hartuz,

$f(x)$ hertsiki gorakorra da $x = 1$ puntuan eta ez da $f'(1)$ existitzen.

15. Froga ezazu $xe^{\sin x} = \cos x$ ekuazioak soluzio bakarra duela $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tartean.

Ebazpena.

Har dezagun $f(x) = xe^{\sin x} - \cos x$ funtzioa. Ekuazioak soluzio bakarra izatea tarte horretan, funtzioak tarte horretan 0 balioa behin baino ez hartzea da.

$f(x)$ funtzio jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan eta, beraz, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tartean ere.

$f(0) = 0 \cdot e^{\sin 0} - \cos 0 = 0 - 1 = -1 < 0$ eta $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} e^{\sin\frac{\pi}{2}} - \cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} e^1 - 0 = \dfrac{\pi}{2} e > 0$ dira.

Bolzanoren teoremaren arabera, $\exists c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \; / \; f(c) = 0$ baita.

Frogatzen badugu funtzioa gorakorra dela tarte horretan; aurreko berdintza betetzen duen puntua bakarra izango da. Funtzioa deribagarria denez $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tartean, nahikoa dugu horren deribatuaren zeinua aztertzea.

Funtzioaren deribatua $f'(x) = e^{\sin x} + x\cos x e^{\sin x} + \sin x = (1 + x\cos x)e^{\sin x} + \sin x$ da.

Alde batetik, $\sin x > 0$ da $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Beste aldetik, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $e^{\sin x} > 0$, $\cos x > 0$ eta $x > 0$ dira.

Hortaz, $f'(x) > 0$ da $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, eta, 6.17.1. Ondorioaren arabera, $f(x)$ gorakorra da tartean.

Ondorioz, funtzioa behin baino ezin da anulatu tartean edo ekuazioak soluzio bakarra du tartean.

3. Limiteen kalkulua L'Hôpitalen erregela erabiliz

16. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x}$.

Ebazpena.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$ eta $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x = 0$ dira; beraz, ∞^0 indeterminazioa da. Limiteari l deituz eta logaritmo nepertarra hartuz, honela geratuko da:

$$\ln l = \lim_{x\to 0^+} \tan x \ln\cot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\cot x}{\cot x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1/\sin^2 x}{\cot x}}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cot x} = 0.$$

(1) berdintzan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu.

Hortaz, $\ln l = 0$ da eta limitea $l = e^0 = 1$ da.

17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\tan x}+1}{e^{\tan x}-1}$.

Ebazpena.

Kontuan izango ditugu bi emaitza hauek: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ eta $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{\tan x}+1}{e^{\tan x}-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(1+\tan^2 x)e^{\tan x}}{(1+\tan^2 x)e^{\tan x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} 1 = 1.$$

(1) berdintzan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\tan x}+1}{e^{\tan x}-1} = \frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = \frac{0+1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Ezker- eta eskuin-limiteak desberdinak direnez, limitea ez da existitzen.

18. Esan ezazu ea zuzena den ondoko garapena:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{-\sin x}{-1} = \lim_{x\to 1} \sin x = \sin 1.$$

Erantzuna.

$\lim\limits_{x\to 1} \cos x = \cos 1 \neq 0$ eta $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) = 0$ dira; beraz, zatiduraren limitean ez dago indeterminaziorik; beste hitzetan, ez da L'Hôpitalen teoremaren lehenengo hipotesia betetzen. Hortaz, ezin dugu L'Hôpitalen teoremaren ondorioa ziurtatu. Berez, aldeetako bi limite hauek ditugu:

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cos x}{1-x} = \dfrac{\cos 1}{0} = -\infty$, izendatzaileko gaiak negatiboak direlako, eta

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cos x}{1-x} = \dfrac{\cos 1}{0} = +\infty$, izendatzaileko gaiak positiboak direlako.

Ondorioz, limitea ez da existitzen.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

Ebazpena.

$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=1^{\infty}$ indeterminazioa da. Limiteari l deituz eta logaritmo nepertarra hartuz,

$$\ln l=\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)(1-x)=\lim_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{1-x}}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}}{\frac{1}{(1-x)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi}{2}\frac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\overset{(3)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi}{2}\frac{-2(1-x)}{-2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{\sin\pi x}\overset{(4)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

(1) berdintzan, $\ln(2-x)\sim 1-x$ baliokidetza erabili dugu.

(2) , (3) eta (4) berdintzetan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu.

Hortaz, $\ln l=\dfrac{2}{\pi}$ da; hortik $l=e^{\frac{2}{\pi}}$ dugu.

20. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\sin x)^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Ebazpena.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\sin x)=0$ eta $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}=0$ dira; beraz, 0^0 indeterminazioa da. Limiteari l deituz eta logaritmo nepertarra hartuz, honela geratuko da:

$\ln l=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x-\sin x)}{\ln(e^x-1)}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa da.

$e^x-1\sim x$ eta $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ baliokidetzak ((2) berdintzan) eta L'Hôpitalen erregela ((1), (3), (4) eta (5) berdintzetan) lau aldiz aplikatuko ditugu:

$$\ln l\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{x-\sin x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{e^x(x-\sin x)}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(x)(x^2/2)}{e^x(x-\sin x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{2e^x(x-\sin x)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2}{2e^x(x-\sin x+1-\cos x)}\overset{(4)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{6x}{2e^x(x+2-2\cos x)}\overset{(5)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{e^x(x+3+2\sin x-2\cos x)}=3.$$

Hortaz, $\ln l=3$, eta limitea $l=e^3$ da.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\cos x\sin x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}\overset{(3)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}\overset{(4)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x}\overset{(5)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot 2x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

(1) eta (5) berdintzetan, $\sin x\sim x$ baliokidetza erabili dugu.

(2) , (3) eta (4) berdintzetan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$.

Ebazpena.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 2\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{\sin x} + \frac{2\sin 2x}{\sin x}\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= -1 + \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 2x}{x} = -1+4 = 3.$$

(1) berdintzan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu.

(2) berdintzan, $\sin x \sim x$ baliokidetza erabili dugu.

23. Kalkula ezazu n ondoko berdintza bete dadin:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^n} = l, \quad l \neq 0 \ \text{ eta } \ l \neq \infty \ \text{ izanik.}$$

Ebazpena.

Hiru aldiz erabiliko dugu L'Hôpitalen erregela, indeterminazioa ez den limite bat lortu arte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^n} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (1+\tan^2 x)}{nx^{n-1}} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 2\tan x(1+\tan^2 x)}{n(n-1)x^{n-2}} \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 2(1+\tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x(1+\tan^2 x)}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}.$$

Azken limitea ez da indeterminazioa, zenbakitzaileko funtzioaren limitea

$\lim\limits_{x\to 0}[-\cos x - 2(1+\tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x(1+\tan^2 x)] = -3$ delako.

Hortaz, limite finitua izateko, izendatzaileko polinomioaren mailak 0 izan behar du, hots, $n=3$.
Kasu horretan, izendatzaileko funtzioaren limitea honela geratuko da:

$\lim\limits_{x\to 0} n(n-1)(n-2)x^{n-3} = \lim\limits_{x\to 0} 3\cdot 2\cdot 1 = 6.$

Eta, orduan, $l = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2} \neq 0, \infty.$

4. Taylorren garapena

24. Kalkula ezazu $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ funtzioaren Taylorren 4 mailako polinomioa $x=1$ puntuan.

Ebazpena.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad f(1) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \qquad f'(1) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}, \qquad f''(1) = -3;$$

$$f'''(x) = \frac{11-6\ln x}{x^4}, \qquad f'''(1) = 11;$$

$$f^{\mathrm{IV})}(x) = \frac{-50+24\ln x}{x^5}, \qquad f^{\mathrm{IV})}(1) = -50.$$

Hortaz, Taylorren polinomioa honela geratuko da:

$$f(x) \cong 0+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{-3}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{-50}{4!}(x-1)^4=$$
$$=(x-1)-\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{11}{6}(x-1)^3-\frac{25}{12}(x-1)^4.$$

25. Kalkula ezazu $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ funtzioaren Maclaurinen garapen orokorra.

Ebazpena.

Maclaurinen garapena lortzeko, funtzioaren deribatuak kalkulatu behar ditugu, eta $x=0$ puntuan balioztatu:

$$f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1=(1-x)^{-1}-1, \qquad f(0)=0;$$

$$f'(x)=(-1)(1-x)^{-2}(-1)=\frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=(-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1)^2=\frac{2!}{(1-x)^3}, \qquad f''(0)=2!=2;$$

$$f'''(x)=(-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4}(-1)^3=\frac{3!}{(1-x)^4}, \qquad f'''(0)=3!=6;$$

$$f^{\mathrm{IV})}(x)=(-1)(-2)(-3)(-4)(1-x)^{-5}(-1)^4=\frac{4!}{(1-x)^5}, \qquad f^{\mathrm{IV})}(0)=4!=24;$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{n)}(x)=n!(1-x)^{-(n+1)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \qquad f^{n)}(0)=n!;$$

$$f^{n+1)}(x)=(n+1)!(1-x)^{-(n+2)}=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}, \qquad f^{n+1)}(c)=\frac{(n+1)!}{(1-c)^{n+2}}.$$

Hortaz, funtzioaren garapena honela geratuko da:

$$f(x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{2!}{2!}x^2+\frac{3!}{3!}x^3+\frac{4!}{4!}x^4+\cdots+\frac{n!}{n!}x^n+\frac{(n+1)!}{(n+1)!(1-c)^{n+2}}x^{n+1}=$$
$$=x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\frac{1}{(1-c)^{n+2}}x^{n+1}, \quad c\in(0,x) \text{ edo } c\in(x,0) \text{ izanik.}$$

26. x-ren zer baliotarako ordezka daiteke $\sin x$ funtzioa $x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ adierazpenez, $0{,}0001$ baino errore txikiagoa eginez?

Ebazpena.

Erantzuna emateko, $\sin x$ funtzioaren Maclaurinen garapena erabiliko dugu.

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0;$$

$$f'(x)=\cos x, \qquad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-\sin x, \qquad f''(0)=0;$$

$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(0) = -1;$$

$$f^{\mathrm{IV})}(x) = \sin x, \qquad f^{\mathrm{IV})}(0) = 0;$$

$$f^{\mathrm{V})}(x) = \cos x, \qquad f^{\mathrm{V})}(0) = 1;$$

$$f^{\mathrm{VI})}(x) = -\sin x, \qquad f^{\mathrm{VI})}(c) = -\sin c.$$

Hortaz, Maclaurinen garapena honela geratuko da:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-\sin c}{6!}x^6 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\sin c}{720}x^6,$$

$c \in (0, x)$ edo $c \in (x, 0)$ izanik.

Errorea azken batugaiaren balio absolutuak emango digu, hau da: $\left|\frac{\sin c}{720}x^6\right|$.

$\left|\frac{\sin c}{720}x^6\right| < \left|\frac{x^6}{720}\right|$ denez, nahikoa da $\left|\frac{x^6}{720}\right| < 0,0001$ izatea; eta hortik, beraz, $|x^6| < 0,0720$ edo $|x| < 0,64499$ aterako dugu. Ondorioz, $(-0'6449, 0'6449)$ tarteko balioetarako egin daiteke ordezkapena.

27. 27.1. Gara ezazu $\cos x$ funtzioa Taylorren bidez $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$-ren berreturatan.

27.2. Aurreko garapenaren lehenengo hiru gaiak hartuz, x-ren zer baliotarako da errorea $0,00005$ baino txikiagoa?

Ebazpena.

27.1. Erantzuna emateko, $\cos x$ funtzioaren Taylorren garapena erabiliko dugu.

$$f(x) = \cos x, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$

$$f'(x) = -\sin x, \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f''(x) = -\cos x, \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$f'''(x) = \sin x, \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f^{\mathrm{IV})}(x) = \cos x, \qquad f^{\mathrm{IV})}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{2n-2)}(x) = -\cos x, \qquad f^{2n-2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$f^{2n-1)}(x) = \sin x, \qquad f^{2n-1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f^{2n)}(x) = \cos x, \qquad f^{2n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$

$$f^{2n+1)}(x) = -\sin x, \qquad f^{2n+1)}(c) = -\sin c.$$

Hortaz, Taylorren garapena honela geratuko da:

$$\cos x = \frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}/2}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{-1/2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}/2}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{1/2}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n} +$$

$$+\frac{-\sin c}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}, \quad c \in \left(x, \frac{\pi}{3}\right) \text{ edo } c \in \left(\frac{\pi}{3}, x\right) \text{ izanik.}$$

27.2. Lehenengo hiru gaiak hartzen baditugu, errorea hirugarren ordenako deribatuak emango digu; beraz, aurreko gai osagarrian $n = 1$ egin behar dugu eta hau lortuko dugu:

$$\left|\frac{-\sin c}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right| = \left|\frac{-\sin c}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right| = \left|\frac{\sin c}{6}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right|.$$

Bestalde, $\left|\frac{\sin c}{6}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right| \leq \left|\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right|$ denez, nahikoa izango da ondoko hau betetzea: $\left|\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right| < 0,00005$; eta hortik $\left|\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right| < 0,0003$ edo, erro kubikoak kalkulatuz, $\left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \sqrt[3]{0,0003} = 0,0669433$ aterako dugu.

Ondorioz, esan dezakegu $\left(\frac{\pi}{3} - 0,0669433, \frac{\pi}{3} + 0,0669433\right)$ edo $(0'980254, 1'11414)$ tarteko balioetarako dela errorea $0,00005$ baino txikiagoa.

28. Kalkula ezazu $\sqrt[4]{5}$ balioa 10^{-2} baino errore txikiagoa eginez.

Ebazpena.

$\sqrt[4]{5}$ kalkulatzeko, $f(x) = \sqrt[4]{x+4}$ funtzioa erabiliko dugu. Horrela, Maclaurinen garapenean $x = 1$ ordezkatuko ahal izango dugu, eta kalkuluak egin.

$$f(x) = \sqrt[4]{x+4} = (x+4)^{1/4}, \qquad f(0) = \sqrt[4]{4};$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x+4)^{-3/4}, \qquad f'(0) = \frac{1}{4}(4)^{-3/4};$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}(x+4)^{-7/4}, \qquad f''(0) = \frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}(4)^{-7/4};$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}\frac{(-7)}{4}(x+4)^{-11/4}, \qquad f'''(0) = \frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}\frac{(-7)}{4}(4)^{-11/4};$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)}{4^{n-1}}(x+4)^{-(4n-1)/4},$$

$$f^{n)}(0) = (-1)^{n-1}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)}{4^{n-1}}(4)^{-(4n-1)/4};$$

$$f^{n+1)}(x) = (-1)^{n}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{4^{n}}(x+4)^{-(4n+3)/4},$$

$$f^{n+1)}(c) = (-1)^{n}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{4^{n}}(c+4)^{-(4n+3)/4}.$$

Beraz, Maclaurinen garapena honela geratuko da:

$$f(x)=\sqrt[4]{4}+\frac{1}{4}(4)^{-3/4}\frac{x}{1!}-\frac{1}{4}\frac{3}{4}(4)^{-7/4}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7}{4^2}(4)^{-11/4}\frac{x^3}{3!}-\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)}{4^{n-1}}(4)^{-(4n-1)/4}\frac{x^n}{n!}+$$

$$+(-1)^{n}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{4^{n}}(c+4)^{-(4n+3)/4}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\quad c\in(0,x)\quad\text{edo}\quad c\in(x,0)\quad\text{izanik.}$$

$\sqrt[4]{5}$ kalkulatzeko, $x=1$ egin behar dugu aurreko garapenean; honela geratuko da:

$$f(1)=\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{4}+\frac{1}{4}(4)^{-3/4}\frac{1}{1!}-\frac{1}{4}\frac{3}{4}(4)^{-7/4}\frac{1}{2!}+\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7}{4^2}(4)^{-11/4}\frac{1}{3!}-\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)}{4^{n-1}}(4)^{-(4n-1)/4}\frac{1}{n!}+$$

$$+(-1)^{n}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{4^{n}}(c+4)^{-(4n+3)/4}\frac{1}{(n+1)!},\quad c\in(0,1)\quad\text{izanik.}$$

Garapenaren azken gaiaren balio absolutuak ematen digu errorea; $0<c<1$ denez, froga daiteke $(c+4)^{-(4n+3)/4}<(4)^{-(4n+3)/4}$ dela; beraz, erroreak bornapen hau onartuko du:

$$\mathrm{e}=\left|(-1)^{n}\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{4^{n}}(c+4)^{-(4n+3)/4}\frac{1}{(n+1)!}\right|<$$

$$<\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{4^{n}}(4)^{-(4n+3)/4}\frac{1}{(n+1)!}.$$

Eta errorea 10^{-2} baino txikiagoa izan dadin, nahikoa da

$\frac{1}{4}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{4^{n}}(4)^{-(4n+3)/4}\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{100}$ izatea. Hortik, beste baldintza hau atera daiteke:

$$3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)\cdot 100<4\cdot 4^n\cdot(4)^{(4n+3)/4}\cdot(n+1)!=4\cdot 4^{2n}\cdot 4^{3/4}\cdot(n+1)!.$$

Orain, n-ri balioak emango dizkiogu. $n=1$ aukeratzean baldintza betetzen da:

ezkerraldean, $3\cdot 100=300$ ateratzen da eta,

eskuinaldean, $4\cdot 4^2\cdot(4)^{3/4}\cdot 2!=64\cdot(4)^{3/4}\cdot 2=362,038672...$

Beraz, $\sqrt[4]{5}=f(1)\cong\sqrt[4]{4}+\frac{1}{4}(4)^{-3/4}\frac{1}{1!}=\sqrt[4]{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{4^3}}=1,50260191...$ da.

29. Kalkula ezazu $\sin\frac{\pi}{6}$ balioa Taylorren garapena erabiliz eta 10^{-2} baino errore txikiagoa eginez.

Ebazpena.

Erantzuna emateko, $\sin x$ funtzioaren Maclaurinen garapena erabiliko dugu, $\frac{\pi}{6}=0,523598$ balioa gertu dagoelako $x=0$ puntutik.

$f(x)=\sin x,\qquad f(0)=0;$

$f'(x)=\cos x,\qquad f'(0)=1;$

$$
\begin{array}{ll}
f''(x) = -\sin x, & f''(0) = 0; \\[2ex]
f'''(x) = -\cos x, & f'''(0) = -1; \\[2ex]
f^{\mathrm{IV})}(x) = \sin x, & f^{\mathrm{IV})}(0) = 0; \\[2ex]
f^{\mathrm{V})}(x) = \cos x, & f^{\mathrm{V})}(0) = 1; \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\[2ex]
f^{2n-2)}(x) = \sin x, & f^{2n-2)}(0) = 0; \\[2ex]
f^{2n-1)}(x) = \cos x, & f^{2n-1)}(0) = 1; \\[2ex]
f^{2n)}(x) = -\sin x, & f^{2n)}(0) = 0; \\[2ex]
f^{2n+1)}(x) = -\cos x, & f^{2n+1)}(c) = -\cos c.
\end{array}
$$

Hortaz, Maclaurinen garapena honela geratuko da:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{0}{(2n-2)!}x^{2n-2} + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} +$$
$$+\frac{0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{-\cos c}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad c \in (0,x) \quad \text{edo} \quad c \in (x,0) \quad \text{izanik.}$$

Eta sinplifikatuz,

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{-\cos c}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad c \in (0,x) \text{ edo } c \in (x,0) \text{ izanik.}$$

Errorea bornatzeko, azken batugaiaren balio absolutua erabiliko dugu: $\left|\dfrac{-\cos c}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|$.

errorea $= \left|\dfrac{-\cos c}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \le \dfrac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}$ da.

Orain, $\sin\dfrac{\pi}{6}$ balioa kalkulatu behar dugunez, $x = \dfrac{\pi}{6}$ egingo dugu aurreko formulan:

beraz, errorea $\le \dfrac{1}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{2n+1}$ da.

Egin nahi dugun errorea gehienez egiteko, nahikoa izango da ondoko hau betetzea:

$\dfrac{1}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{2n+1} < 0{,}01$; eta hortik $100\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{2n+1} < (2n+1)!$ aterako dugu.

n-ri balioak emanez gero, hau lortuko dugu:

$n=1$ denean, ezkerraldean $100\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^3 = 14{,}35$ dugu, eta eskuinaldean 6; ez da betetzen.

$n=2$ denean, ezkerraldean $100\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^5 = 3{,}93$ dugu, eta eskuinaldean 120; betetzen da.

Ondorioz, $n=2$ hartuz, $\sin x \cong x - \dfrac{x^3}{6}$ izango da eta errorea 10^{-2} baino txikiagoa izango da. Hortaz,

$$\sin\frac{\pi}{6} \cong \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^3}{6^4} = 0{,}4996741794...$$

30. Erabil ezazu Maclaurinen garapena e zenbakiaren balio hurbildua kalkulatzeko, 10^{-4} baino errore txikiagoa eginez.

Ebazpena.

$f(x)=e^x$ funtzioa erabiliko dugu eta garapena jatorriaren ingurune batean egingo dugu; ondoren, e balioa lortzeko, $x=1$ egingo dugu.

$$\begin{array}{ll}
f(x)=e^x, & f(0)=e^0=1; \\[2ex]
f'(x)=e^x, & f'(0)=1; \\[2ex]
f''(x)=e^x, & f''(0)=1; \\[2ex]
f'''(x)=e^x, & f'''(0)=1; \\[2ex]
f^{\mathrm{IV})}(x)=e^x, & f^{\mathrm{IV})}(0)=1; \\
\vdots & \vdots \\
f^{n)}(x)=e^x, & f^{n)}(0)=1; \\[2ex]
f^{n+1)}(x)=e^x, & f^{n+1)}(c)=e^c.
\end{array}$$

Hortik, funtzioaren Maclaurinen garapen hau lortuko dugu:

$$f(x)=1+\frac{1}{1!}(x-0)+\frac{1}{2!}(x-0)^2+\frac{1}{3!}(x-0)^3+\frac{1}{4!}(x-0)^4+\cdots+\frac{1}{n!}(x-0)^n+\frac{e^c}{(n+1)!}(x-0)^{n+1},$$

$c\in(0,x)$ edo $c\in(x,0)$ izanik.

Eta sinplifikatuz,

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},\quad c\in(0,x)\ \text{ edo }\ c\in(x,0)\ \text{ izanik.}$$

Errorea gai osagarriaren balio absolutuak emango digu: $\left|\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$.

Adierazpen horretan agertzen den c balio ezezaguna desagerrarazi behar dugu; bestalde $x=1$ ordezkatuko dugu eta balio guztiak positiboak direnez, balio absolutua kenduko dugu:

$c\in(0,1)\Longrightarrow 0<c<1\Longrightarrow 1<e^c<e<3.$

Hortaz, $\left|\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\dfrac{3}{(n+1)!}1^{n+1}=\dfrac{3}{(n+1)!}$ bornapena dugu.

Errorea 10^{-4} baino txikiagoa izateko, nahikoa da $\dfrac{3}{(n+1)!}<10^{-4}$ izatea, edo sinplifikatuz, $30.000<(n+1)!$ izatea.

Hori betetzen duen n-ren lehenengo balioa $n=7$ da. Ondorioz, e zenbakiaren balio hurbildua garapenaren lehenengo zortzi batugaiak batuz lortuko dugu:

$$e\cong 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=2,718253968...$$

6.7. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Funtzio deribagarriak

1. Kalkula itzazu hurrengo adierazpenen deribatuak:

1) $\dfrac{1}{x+1}$;	2) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;	3) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;
4) $\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$;	5) $a\sin^3\dfrac{x}{3}$;	6) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;
7) $a\sqrt{\cos 2x}$;	8) $(a+x)\sqrt{a-x}$;	9) $2\sin x+\cos 3x$;
10) $(2x-1)(3x+2)x$;	11) $\sin^2 x$;	12) x^x.

2. Eman ezazu puntu batean jarraitua baina deribagarria ez den funtzio bat.

3. Azter ezazu ondoko funtzioen deribagarritasuna. Kalkula ezazu deribatu funtzioa.

1) $f(x)=\dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$; 2) $f(x)=x^2e^{1/x}$;

3) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & 0\le x;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ x, & 0<x<1,\\ 3x^2+5x-7, & 1\le x;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{1/(1-x)}}, & x\ne 1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x-1}, & x\ne 1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q},\\ x^2, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$

4. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ ondoko taulek definitutako funtzioak:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	6	5	4	3	2	1
$f'(x)$	-2	-1	-3	-4	-5	-6

y	1	2	3	4	5	6
$g(y)$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$g'(y)$	2	1	3	4	5	6

$f: X\longrightarrow Y$ eta $g: Y\longrightarrow Z$ jarraituak, deribagarriak eta monotonoak $[0,6]$ tartean. Bila itzazu:

4.1. f^{-1} funtzioaren deribatua $y=3$ puntuan;

4.2. g^{-1} funtzioaren deribatua $z=-4$ puntuan;

4.3. $(g\circ f)$ funtzioaren deribatua $x=4$ puntuan;

4.4. $(g\circ f)^{-1}$ funtzioaren deribatua $z=-4$ puntuan.

5. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak faltsuak ala egiazkoak diren:

5.1. $f(x)+g(x)$ funtzioa $x=a$ puntuan deribagarria da baldin eta soilik baldin $f(x)$ eta $g(x)$ deribagarriak badira $x=a$ puntuan.

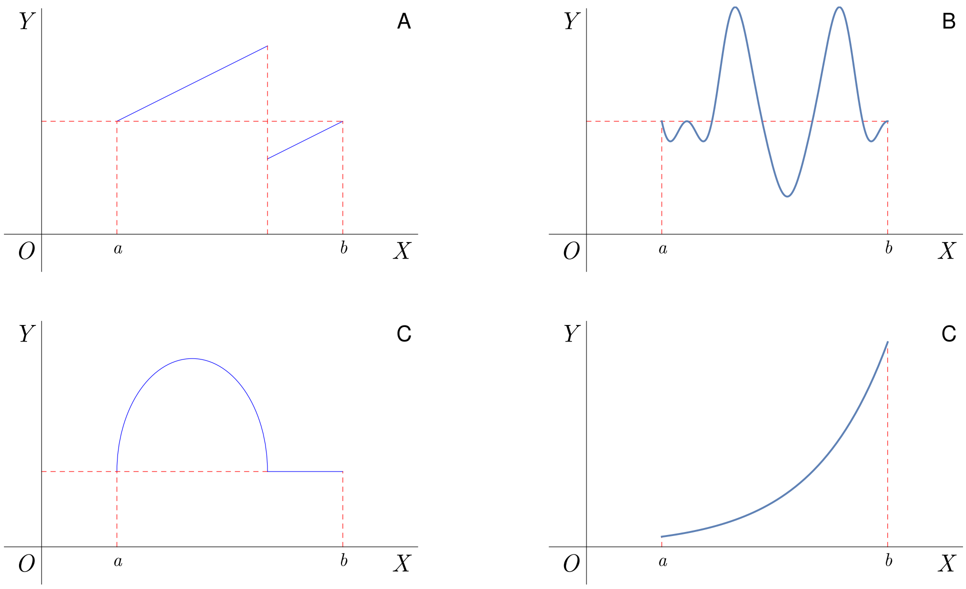
5.2. $f(x)\cdot g(x)$ eta $f(x)$ funtzioak deribagarria badira $x=a$ puntuan, $g(x)$ ere deribagarria izango da $x=a$ puntuan.

6. Izan bedi $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funtzio alderanzkarria eta deribagarria, $f(2)=1$ eta $f'(2)=-1$ betetzen dituena. Kalkula ezazu $g'(1)$ balioa,
$$g(x)=\frac{8}{f^{-1}(x)} \quad \text{izanik.}$$

7. Kalkula itzazu a eta b balioak $y=2x$ zuzena $y=x^2+ax+b$ kurbaren ukitzailea izan dadin $P(2,4)$ puntuan.

2. Funtzioen deribagarrien propietateak

8. Aplika dakieke Rolleren teorema ondoko funtzioei? Zergatik?



9. Froga ezazu $x^3-3x+b=0$ ekuazioak gehienez soluzio bat duela [-1,1] tartean.

10. $y=\ln x$ kurbako zer puntutan da ukitzailea $M(1,0)$ eta $M(e,1)$ puntuak lotzen dituen korda-rekiko paraleloa?

11. $y=x^n$ kurbako zer puntutan da ukitzailea $M(0,0)$ eta $M(a,a^n)$ puntuak lotzen dituen korda-rekiko paraleloa?

12. Froga ezazu $\sin x\le x$ dela $\forall x\ge 0$ eta $\sin x\ge x$ dela $\forall x\le 0$.

13. Froga ezazu $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ funtzioa hertsiki beherakorra dela $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tartean.

3. Limiteen kalkulua L'Hôpitalen erregela erabiliz

14. Kalkula itzazu, L'Hôpitalen erregela erabiliz, ondoko limiteak:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{12-x}}{2x-3\sqrt{19-5x}}$; 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^a\ln x$; 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$;

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)^x$; 5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$; 6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$; 11) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan 5x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(\tan x)$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{1/x}+1\right)^{e^{-1/x}}$; 18) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$; 23) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^2}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$;

25) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{5}{\ln x}\right)$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}xe^{1/x}$; 27) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$;

28) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$; 29) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(a^{1/x}-1)$; 30) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

4. Taylorren garapena

15. Kalkula itzazu funtzio hauen 4. ordenako Taylorren garapena emandako puntuetan:

1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $x=0$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x=1$;

3) $f(x)=\sin x$, $x=\pi/2$; 4) $f(x)=\tan x$, $x=0$;

5) $f(x)=e^{\sin x}$, $x=0$; 6) $f(x)=e^x\sin x$, $x=0$;

7) $f(x)=\ln x$, $x=1$; 8) $f(x)=e^x$, $x=1$;

9) $f(x)=\cos x$, $x=0$; 10) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x=0$.

16. Gara ezazu x^3+4x^2-5x+8 polinomioa $(x-2)$-ren berreturetan.

17. Idatz itzazu $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen Maclaurinen garapenak eta borna itzazu erroreak funtzioen baliotzat garapenetako lehenengo hiru gai ez-nuluen baturak hartzen direnean.

18. Zenbat gai hartu behar dira e^x funtzioaren Maclaurinen garapenean, e zenbakia 10^{-5} baino errore txikiagoz hurbiltzeko?

19. Bila itzazu balio hurbilduak Taylorren garapena erabiliz:

 19.1. e^{π}, milarena baino errore txikiagoa eginez.
 19.2. $\sin 20°$, milarena baino errore txikiagoa eginez.
 19.3. $\ln 0,8$, $0,0003$ baino errore txikiagoa eginez.
 19.4. $\cos 1$, milarena baino errore txikiagoa eginez.

20. x-ren zer baliotarako ordezkatzen du $1-\dfrac{x^2}{2}$ adierazpenak $\cos x$ funtzioa $0,001$ baino errore txikiagoa eginez?

7. Funtzioen estudio lokala

Gai honetan, funtzioen adierazpen grafikorako behar ditugun elementuak aztertuko ditugu. Horien artean, definizio-eremua, jarraitutasuna eta deribagarritasuna jadanik aztertu ditugu. Orain, gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, mutur erlatiboak, ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak eta inflexio-puntuak bilatzeko metodoak ikusiko ditugu. Bukatzeko, funtzioak hainbat kasutan duen joera ere aztertuko dugu asintoten bidez.

7.1. FUNTZIOEN MUTURRAK

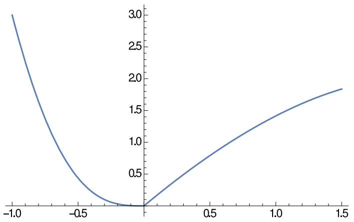
7.1. Teorema. *Mutur erlatiboa existitzeko baldintza beharrezkoa*
$f(x)$ funtzio deribagarriak $x=a$ puntuan mutur erlatiboa badu, $f'(a)=0$ *beteko da.*

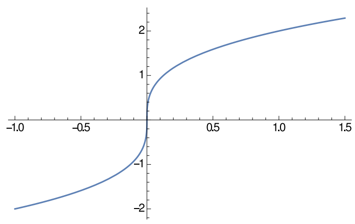
7.2. Teorema. *Mutur erlatiboa existitzeko baldintza nahikoa*
$f(x)$ funtzioa $x=a$ puntuan $n+1$ aldiz deribagarria bada eta $f'(a)=\cdots=f^{n)}(a)=0$ *eta* $f^{n+1)}(a)\neq 0$ *badira,*

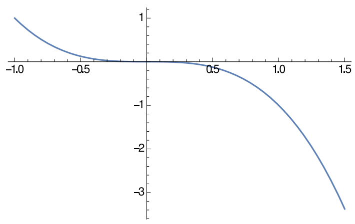
1. *n bakoitia bada eta*
   1.1. $f^{n+1)}(a)>0$ *bada, $f(x)$ funtzioak $x=a$ puntuan minimo erlatiboa izango du;*
   1.2. $f^{n+1)}(a)<0$ *bada, $f(x)$ funtzioak $x=a$ puntuan maximo erlatiboa izango du;*
2. *n bikoitia bada, $f(x)$ funtzioak $x=a$ puntuan inflexio-puntua izango du.*

7.3. Definizioa. *Inflexio-puntuak*
$f''(a)=0$ *bada edo $f''(a)$ ez bada existitzen eta $x=a$ puntuaren alboetan $f''(x)$ zeinuz desberdina bada, funtzioak $x=a$ puntuan* inflexio-puntua *du.*

Oharra.
Definizio hori eta 5.7. Definizioa ez dira zeharo berdinak; izan ere, 5.7. Definizioan ez da funtzioaren jarraitutasunaz hitz egiten, ez eta deribagarritasunaz ere. Guk beti pentsatuko dugu funtzio jarraitua dela inflexio-puntuan.







Irudiko hiru funtzioen kasuan, funtzioa ahurra izatetik ganbila izatera igarotzen da $x=0$ puntuan. Hortaz, 5.7. Definizioaren arabera hiru funtzioek inflexio-puntua dute $x=0$ puntuan.

Ezkerreko funtzioaren kasuan, funtzioa ez da deribagarria $x=0$ puntuan. Are gehiago, funtzioak minimo erlatibo bat du $x=0$ puntuan eta $x=0$ puntuko ukitzaileak ez du kurba zeharkatzen.

Erdiko funtzioaren kasuan, $f'(0)=f''(0)=\pm\infty$ da eta $x=0$ puntuko ukitzaileak kurba zeharkatzen du.

Ezkerreko kasua baztertuko dugu, hots, ez dugu inflexio-puntutzat hartuko.

7.4. Adibidea. Kalkula ditzagun $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ funtzioaren muturrak (ikusi irudia).

Lehendabizi definizio-eremua emango dugu: $D_f=\mathbb{R}$. Horrez gain, funtzioa jarraitua eta infinitu aldiz deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan. Beraz, aurreko bi teoremak erabili ahal izango ditugu $\mathbb{R}$ osoan. Ondorioz, funtzioaren deribatuen bidez mutur erlatibo guztiak lortuko ditugu.

Aurrera egin baino lehen, lehenengo hiru deribatuak kalkulatuko ditugu:

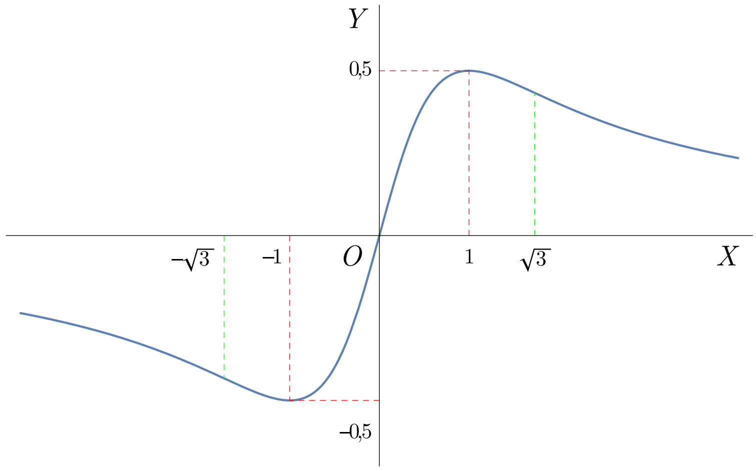
$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad f''(x)=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3},\quad f'''(x)=\frac{-12x^4+8x^3+30x^2+8x-6}{(1+x^2)^4}.$$

Mutur erlatiboa izateko baldintza beharrezkotik, hots, $f'(x)=0$ berdintzatik, $1-x^2=0$ aterako dugu; eta hortik $x=\pm 1$ bi puntuak. Horietan bakarrik egon daitezke funtzioaren mutur erlatiboak, $\mathbb{R}$ osoan funtzioaren lehen deribatua ez delako beste puntuetan anulatzen.

Muturra izateko baldintza nahikotik aterako dugu maximoa, minimoa edo inflexio-puntua dagoen.

$f''(1)=\dfrac{-1}{2}<0$; beraz, maximoa dago $x=1$ puntuan eta maximoa $f(1)=\dfrac{1}{2}$ da.

$f''(-1)=\dfrac{1}{2}>0$; beraz, minimoa dago $x=-1$ puntuan eta minimoa $f(-1)=\dfrac{-1}{2}$ da.



7.5. Teorema. *Ahurtasunaren eta ganbiltasunaren baldintza nahikoa*

$f(x)$ funtzioa bi aldiz deribagarria bada (a,b) tartean, $f''(x)>0$ bada, funtzioa ahurra da, eta $f''(x)<0$ bada, funtzioa ganbila da.

7.6. Adibidea. Aurreko adibideko $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ funtzioaren inflexio-puntuak eta ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak bilatuko ditugu.

7.5. Teoremaren lehenengo hipotesia betetzen da, hots, funtzioa bi aldiz deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan. Hortaz, inflexio-puntuak lortzeko, $f''(x)=0$ ekuazioa ebatziko dugu, ekuazio hori betetzen duten puntuek funtzioaren zati ahurra $(f''(x)>0)$ eta ganbila $(f''(x)<0)$ banatuko dituztelako.

$f''(x)=0 \Longrightarrow 2x^3-6x=0 \Longrightarrow$ $x=0$, $x=\sqrt{3}$ eta $x=-\sqrt{3}$ puntuak lortuko ditugu.

$x<-\sqrt{3}\Longrightarrow 3<x^2\Longrightarrow x^2-3>0\Longrightarrow 2x(x^2-3)<0\Longrightarrow f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}<0;$

beraz, $f(x)$ ganbila da $(-\infty,-\sqrt{3})$ tartean;

$-\sqrt{3}<x<0\Longrightarrow x^2<3\Longrightarrow x^2-3<0\Longrightarrow 2x(x^2-3)>0\Longrightarrow f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}>0;$

beraz, $f(x)$ ahurra da $(-\sqrt{3},0)$ tartean;

$0<x<\sqrt{3}\Longrightarrow x^2<3\Longrightarrow x^2-3<0\Longrightarrow 2x(x^2-3)<0\Longrightarrow f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}<0;$

beraz, $f(x)$ ganbila da $(0,\sqrt{3})$ tartean;

$x>\sqrt{3} \Longrightarrow 3<x^2 \Longrightarrow x^2-3>0 \Longrightarrow 2x(x^2-3)>0 \Longrightarrow f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}>0;$
beraz, $f(x)$ ahurra da $(\sqrt{3},\infty)$ tartean.

Hortaz, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ eta $x=\sqrt{3}$ puntuetan funtzioak inflexio-puntu bana dauka.

Bestalde, ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak aurkitu ditugu. Funtzioa ahurra da $(-\sqrt{3},0)$ eta $(\sqrt{3},\infty)$ tarteetan eta ganbila da $(-\infty,-\sqrt{3})$ eta $(0,\sqrt{3})$ tarteetan.

Goiko irudian ikus daitezke ezaugarri horiek.

7.2. ASINTOTAK

7.7. Definizioa. *Zuzen bat kurba baten* asintota *da kurba eta zuzenaren arteko distantzia zerorantz badoa, baina zuzenak kurba ukitu gabe.*

Hiru asintota-mota bereiziko ditugu, eta kalkulatzeko metodoak emango ditugu.

Asintota bertikalak:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ denean, $x=a$ zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota bertikala da.

Asintota horizontalak:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ denean, $y=l$ zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota horizontala da.

Asintota zeiharrak:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx-b)=0$ denean, $y=mx+b$ zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota zeiharra da. Kasu horretan, honela kalkulatuko ditugu zuzenaren koefizienteak:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\neq 0 \quad \text{eta} \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx).$$

7.8. Adibidea. Ikus dezagun $f(x)=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ funtzioak asintotarik duenetz.

Asintota bertikalak:

Funtzioa ez dago definiturik $\left(\dfrac{-1}{e},0\right)$ tartean. Hortaz, funtzioak asintota bertikala izan dezake tartearen bi muturretan. Kalkula ditzagun ezker-limitea $x=\dfrac{-1}{e}$ puntuan eta eskuin-limitea $x=0$ puntuan.

$$\lim_{x\to\frac{-1}{e}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{-1}{e}^-} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{e}\cdot(-\infty)=+\infty;$$

beraz, funtzioak asintota bertikal bat du $x=\dfrac{-1}{e}$ puntuan.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1/x^2}{e+\frac{1}{x}}}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=0.$$

(1) berdintzan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu limitea kalkulatzeko.
Hortaz, $x=0$ puntuan ez dago asintota bertikalik.

Asintota horizontalak:

Asintota horizontalak bilatzeko, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ limiteak kalkulatu behar ditugu.

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=+\infty\cdot 1=+\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to-\infty} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=-\infty\cdot 1=-\infty \quad \text{dira.}$$

Hortaz, funtzioak ez du asintota horizontalik (ikusi irudia).

Asintota zeiharrak:

Kalkula ditzagun, lehendabizi, $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \neq 0$ limiteak.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = 1$$ dira biak.

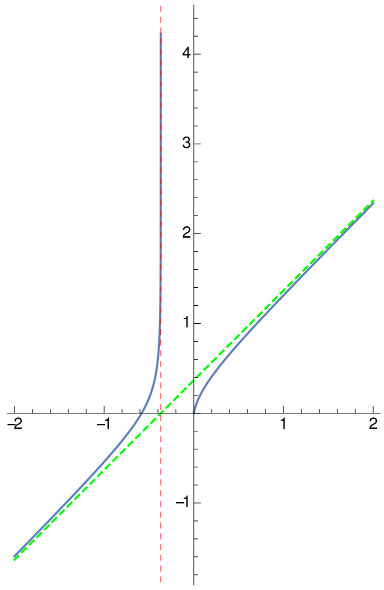
Orain, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx)$ limiteak kalkulatuko ditugu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-\ln e\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\ln\frac{e+\frac{1}{x}}{e} = \lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{ex}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\pm\infty} x\frac{1}{ex} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$ dira biak.

(1) berdintzan, $\ln\left(1+\dfrac{1}{ex}\right) \sim \dfrac{1}{ex}$ baliokidetza erabili dugu, $\dfrac{1}{ex} \longrightarrow 0$ doalako.

Hortaz, $y = x+\dfrac{1}{e}$ zuzena funtzioaren asintota zeiharra da.



7.9. Adibidea. Egin dezagun, orain, $f(x) = xe^x$ funtzioaren azterketa osoa (irudia bukaeran).

1. **Definizio-eremua**

   Lehendabizi, definizio-eremua zehaztuko dugu: $D_f = \mathbb{R}$ da, x eta e^x funtzio elementalak $\mathbb{R}$ osoan definiturik daudelako, eta biderketak ez duelako arazorik sortzen.

2. **Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna**

   $f(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan da jarraitua eta deribagarria, funtzio elementalen arteko biderketa delako, 6.8. eta 6.9. Propietateen arabera.

3. **Funtzioaren puntu kritikoak**

   $f(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan da jarraitua eta deribagarria; beraz, mutur erlatibo guztiak deribatuen bidez aurki ditzakegu.

   Mutur erlatiboa izateko baldintza beharrezkoa $f'(x) = 0$ izatea da, 7.1. Teorema erabiliz.

   $f'(x) = (1+x)e^x$ da; beraz, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -1$; hau da, izatekotan, mutur erlatibo bakarra $x = -1$ puntuan izango du, gainerakoetan deribatua ez delako anulatzen.

   Orain, 7.2. Teorema erabiliko dugu izaera zehazteko.

$f''(x) = (2+x)e^x$ da; hortik, $f''(-1) = 1/e > 0$ da; hortaz, minimo erlatiboa dago $x = -1$ puntuan, eta funtzioaren minimoa $f(-1) = -1/e$ da.

4. **Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna**

   Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna aztertzeko, lehen deribatuaren zeinua erabil dezakegu, funtzioa deribagarria delako $\mathbb{R}$ osoan. 6.17. Ondorioak erabiliko ditugu.

   $f'(x) > 0$ da $x > -1$ denean. Hortaz, $f(x)$ gorakorra da $(-1,\infty)$ tartean.

   $f'(x) < 0$ da $x < -1$ denean. Hortaz, $f(x)$ beherakorra da $(-\infty,-1)$ tartean.

   Ondorioz, esan dezakegu $f(-1) = -1/e$ funtzioaren minimo absolutua ere badela, $x = -1$ puntuaren ezkerrean beherakorra eta eskuinean gorakorra delako.

   Maximo absolutua ez da existitzen, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ delako.

5. **Funtzioaren inflexio-puntuak**

   Inflexio-puntuak bilatzeko, 7.5. Teorema erabiliko dugu. Funtzioa bi aldiz deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan; beraz, bigarren deribatua anulatzen duten puntuek banatuko dituzte funtzioaren zati ahurra eta zati ganbila; horietan aurki ditzakegu funtzioaren inflexio-puntuak, 5.7. Definizioaren arabera.

   $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = -2;$ hortaz, inflexio-puntu bakarra izan dezake $x = -2$ puntuan; eta hala da, $f'''(x) = (3+x)e^x$ izanik, $f'''(-2) = (3-2)e^{-2} \neq 0$ delako. Azkenik, $f(-2) = -2/e^2$ denez, funtzioaren inflexio-puntua $(-2,-2/e^2)$ da.

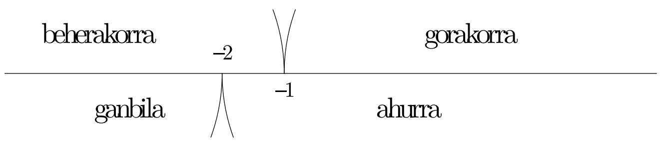
6. **Funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

   Horrez gain, 7.5. Teorema bera erabiliz,

   $f''(x) > 0$ da $x > -2$ denean. Hortaz, $f(x)$ ahurra da $(-2,\infty)$ tartean.

   $f''(x) < 0$ da $x < -2$ denean. Hortaz, $f(x)$ ganbila da $(-\infty,-2)$ tartean.

   Irudi honetan ikus dezakegu nola banatzen diren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak.



7. **Funtzioaren asintotak**

   Orain, funtzioaren asintotak bilatuko ditugu:

   $f(x) = xe^x$ funtzioa jarraitua denez $\mathbb{R}$ osoan, ez du asintota bertikalik.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty.$ Hortaz, ez dago asintota horizontalik $+\infty$ aldera.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0.$ Beraz, $y = 0$ zuzena asintota horizontala da $-\infty$ aldera.

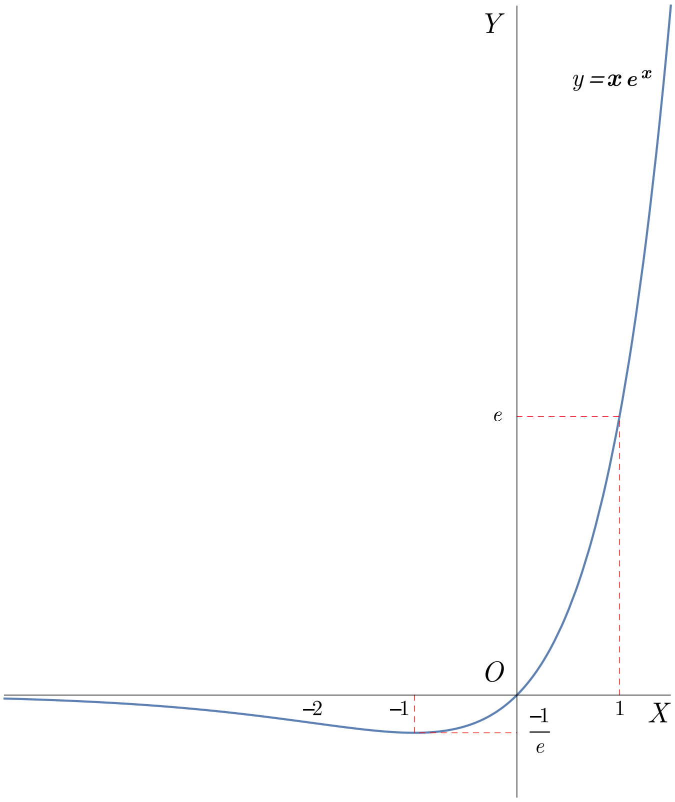
   Asintota zeiharrak aurkitzeko limite hauek kalkulatuko ditugu:

   $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

   $$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

   Hortaz, ez dago asintota zeiharrik ez $+\infty$ aldera ez $-\infty$ aldera.

   Ondorioz, asintota bakarra $y = 0$ zuzen horizontala da, $x \to -\infty$ doanean.



Y
$y = x\,e^{x}$
e
O
-2
-1
1
X
$\frac{-1}{e}$

7.3. ARIKETA EBATZIAK

1. Galdera teorikoak

1. Esan ezazu, erantzuna arrazoituz, ondoko baieztapena egiazkoa edo faltsua den:

   $x \in \mathbb{R}$ puntu guztietan deribagarria den funtzio orok mutur erlatiborik onartzen du.

   Erantzuna.

   Faltsua da; esaterako $f(x) = x$ funtzioa deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan; baina, ez du mutur erlatiborik; izan ere, $f'(x) = 1$ da beti, hau da, deribatua ez da inoiz anulatzen eta hori baldintza beharrezkoa da mutur erlatiboa izan dezan.

2. Izan bedi $f(x)$ funtzioa jarraitua $I = [a,b]$ tartean eta deribagarria (a,b) tartean. Esan ezazu, laburki arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

   2.1. $f'(c) = 0$ bada, $x = c$ puntuan funtzioak mutur erlatiboa dauka.

   2.2. $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ bada, funtzioak mutur erlatiboa dauka $x = c$ puntuan.

   2.3. $f(x)$ funtzioak x_0 puntuan maximoa badu, $f'(x_0) = 0$ izango da.

   2.4. $f(x)$ funtzioak x_0 puntuan maximo erlatiboa badu eta bertan deribagarria bada, $f''(x_0) < 0$ izango da.

   Erantzuna.

   2.1. Faltsua da; $f(x) = x^3$ funtzioa hartuz, deribatu funtzioa $f'(x) = 3x^2$ da. $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ da; baina, $f''(x) = 6x$ denez, $f''(0) = 0$ da; hortaz, funtzioak inflexio-puntua du $x = 0$ puntuan.

   2.2. Faltsua da; inflexio-puntua izan daiteke: $f(x) = (x-1)^5$ eta $I = [0,2]$ badira, funtzioak inflexio-puntua du $x = 1$ puntuan.

   2.3. Faltsua da; adibidez, $f(x) = \sqrt{x}$ funtzioa $[0,1]$ tartean; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \quad \forall x \in (0,1)$; beraz, $f(x)$ gorakorra da bertan; hortik, $f(x)$ funtzioak maximoa $x = 1$ puntuan lortuko du, $f(1) = 1$; aldiz, $f'(1) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ da.

   2.4. Faltsua da; $f(x) = x^3$ funtzioa $[0,1]$ tartean; $f'(x) = 3x^2 > 0, \quad \forall x \in (0,1)$; beraz, $f(x)$ gorakorra da bertan; hortik, $f(x)$ funtzioak maximoa $x = 1$ puntuan lortuko du, $f(1) = 1$; aldiz, $f''(x) = 6x$ denez, $f''(1) = 6 > 0$ da.

3. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

   3.1. $f(x)$ funtzioak badu maximo absolutua x_0 puntuan, baina ez da deribagarria bertan.

   3.2. $f(x)$ funtzioak maximo absolutua du, baina ez maximo erlatiboa.

   3.3. $f(x)$ funtzioak minimo erlatiboa du, baina ez minimo absolutua.

   3.4. $f(x)$ funtzioa ez bada jarraitua puntu batean, ezin du mutur erlatiborik izan bertan.

   Ebazpena.

   3.1. Bai, izan daiteke; esaterako, $f(x) = -|x|$ funtzioak maximo absolutua du $x = 0$ puntuan, baina ez da deribagarria bertan.

   3.2. Bai, izan daiteke; esaterako, $f(x) = 1$ funtzioak maximo absolutua du $[0,1]$ tartean, baina ez du maximo erlatiborik.

3.3. Bai, izan daiteke; esaterako, $f(x)=x^3-x^2+1$ funtzioak minimo erlatibo bat dauka $x=\dfrac{2}{3}$ puntuan, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{23}{27}$, baina ez du minimo absoluturik $\mathbb{R}$ osoan.

3.4. Ez, faltsua da; esaterako, $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 3-x, & 1\le x<2, \end{cases}$ funtzioak maximo erlatiboa du $x=1$ puntuan, $f(1)=2$, eta ez da jarraitua bertan.

2. Funtzioen muturrak eta inflexio-puntuak

4. Kalkula itzazu $f(x)=3x^5-5x^3+15$ funtzioaren muturrak eta inflexio-puntuak.

Ebazpena.

Funtzioa jarraitua eta deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan, polinomio bat delako. Berez, infinitu aldiz da deribagarria $\mathbb{R}$ osoan. Beraz, mutur eta inflexio-puntu guztiak bilatzeko deribatuak erabil ditzakegu, 7.1. eta 7.2. Teoremei esker.

$f'(x)=15x^4-15x^2$, $f''(x)=60x^3-30x$ eta $f'''(x)=180x^2-30$ dira.

Puntu kritikoak $f'(x)=0$ ekuaziotik lortuko ditugu:

$15x^4-15x^2=0 \Longrightarrow x^2(x^2-1)=0 \Longrightarrow x=0, x=\pm 1;$ hiru puntu kritiko atera ditugu.

Orain, puntu horien izaera jakiteko bigarren deribatua erabiliko dugu:

$f''(0)=0$; $f''(1)=30>0$ eta $f''(-1)=-30<0$ ditugu; beraz, $x=1$ puntuan funtzioak minimo erlatiboa du, $f(1)=13$; $x=-1$ puntuan, ordea, funtzioak maximo erlatiboa du, $f(-1)=17$; azkenik, $x=0$ puntuaren izaera determinatzeko, hirugarren deribatua beharko dugu.

$f'''(0)=-30\neq 0$ denez, $x=0$ puntuan funtzioak inflexio-puntu bat dauka, $f(0)=15$ izanik.

Bestalde, $f''(x)=0$ ekuaziotik inflexio-puntu gehiago lortu ditzakegu, puntu horiek funtzioaren zati ahurra eta ganbila banatzen dituztelako (7.5. Teorema eta 5.7. Definizioa):

$60x^3-30x=0 \Longrightarrow 30x(2x^2-1)=0 \Longrightarrow x=0, x=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}.$

$x=0$ puntua aztertuta dago; beste bi puntu horien izaera jakiteko bigarren deribatua nola aldatzen den ikusiko dugu:

$x<\dfrac{-1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}<x^2 \Longrightarrow 1<2x^2 \Longrightarrow 2x^2-1>0 \Longrightarrow 30x(2x^2-1)<0 \Longrightarrow f''(x)<0;$

beraz, $f(x)$ ganbila da $\left(-\infty,\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ tartean;

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<0 \Longrightarrow x^2<\dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2x^2-1<0 \Longrightarrow 30x(2x^2-1)>0 \Longrightarrow f''(x)>0;$

beraz, $f(x)$ ahurra da $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$ tartean;

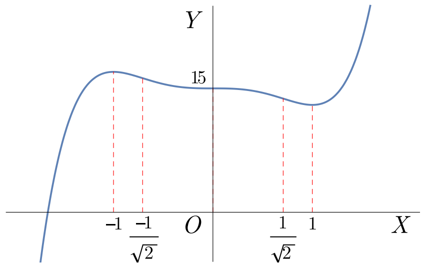
$0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x^2<\dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2x^2-1<0 \Longrightarrow 30x(2x^2-1)<0 \Longrightarrow f''(x)<0;$

beraz, $f(x)$ ganbila da $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ tartean;

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x \Longrightarrow \dfrac{1}{2}<x^2 \Longrightarrow 2x^2-1>0 \Longrightarrow 30x(2x^2-1)>0 \Longrightarrow f''(x)>0;$

beraz, $f(x)$ ahurra da $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$ tartean;

Hortaz, $x = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ puntuetan ere funtzioak inflexio-puntuak ditu (ikus irudia).



Bukatzeko, $\pm\infty$ aldera zer gertatzen den ikusiko dugu.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(3x^5 - 5x^3 + 15) = \infty;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5 - 5x^3 + 15) = -\infty.$

Hortaz, funtzioak ez du maximo ez minimo absoluturik.

5. Bila itzazu $f(x) = \dfrac{x}{x^4+1}$ funtzioaren mutur erlatiboak eta inflexio-puntuak:

Ebazpena.

Funtzioa definiturik dago $\mathbb{R}$ osoan, eta jarraitua eta (infinitu aldiz) deribagarria da. Hortaz, 7.1., 7.2. eta 7.5. Teoremak erabil ditzakegu.

$$f'(x) = \frac{1-3x^4}{(x^4+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x^3(3x^4-5)}{(x^4+1)^3} \quad \text{eta} \quad f'''(x) = -\frac{12x^2(5x^8-22x^4+5)}{(x^4+1)^4} \quad \text{dira.}$$

Puntu kritikoak bilatzeko $f'(x) = 0$ egingo dugu:

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - 3x^4 = 0 \Longrightarrow x^4 = \dfrac{1}{3};$ hortik, bi puntu kritiko erreal aterako ditugu: $x = \dfrac{\pm 1}{\sqrt[4]{3}}.$

Puntu kritikoen izaera determinatzeko funtzioaren bigarren deribatua erabiliko dugu:

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3\left(3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4 - 5\right)}{\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^3} = \frac{4\frac{\sqrt[4]{3}}{(\sqrt[4]{3})^4}\left(3\frac{1}{3}-5\right)}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^3} = \frac{\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}(-4)}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{-9}{4}\sqrt[4]{3} < 0 \quad \text{da;}$$

beraz, funtzioak maximo erlatibo bat dauka $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ puntuan, eta balio hau da:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}.$$

$$f''\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{4\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3\left(3\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4 - 5\right)}{\left(\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^3} = \frac{-4\frac{\sqrt[4]{3}}{(\sqrt[4]{3})^4}\left(3\frac{1}{3}-5\right)}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^3} = \frac{\frac{-4}{3}\sqrt[4]{3}(-4)}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{9}{4}\sqrt[4]{3} > 0 \quad \text{da;}$$

beraz, funtzioak minimo erlatibo bat dauka $x = \dfrac{-1}{\sqrt[4]{3}}$ puntuan, eta balio hau da:

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1} = \frac{-1}{\sqrt[4]{3}}\frac{1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{-3}{4\sqrt[4]{3}}.$$

Bestalde, inflexio-puntuak bilatzeko $f''(x) = 0$ egingo dugu:

$f''(x) = 0 \Longrightarrow 4x^3(3x^4-5) = 0 \Longrightarrow x = 0$ edo $x^4 = \dfrac{5}{3};$ hortik, hiru puntu kritiko erreal aterako ditugu: $x = 0,\quad x = \sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ eta $x = -\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}.$

Orain, funtzioaren hirugarren deribatua erabiliko dugu egiaztatzeko inflexio-puntuak direnetz:

$f'''(0) = 0$ denez, hurrengo deribatuak kalkulatu beharko ditugu:

$f^{IV}(x) = \dfrac{24x(15x^{12} - 135x^8 + 101x^4 - 5)}{(x^4+1)^5}$ eta $f^{IV}(0) = 0$ dira eta

$f^{V}(x) = -\dfrac{120(21x^{16} - 336x^{12} + 546x^8 - 120x^4 + 1)}{(x^4+1)^6}$ eta $f^{V}(0) = -120 \neq 0$ dira;

beraz, funtzioak inflexio-puntu bat dauka $x = 0$ puntuan, 7.2. Teoremaren arabera.

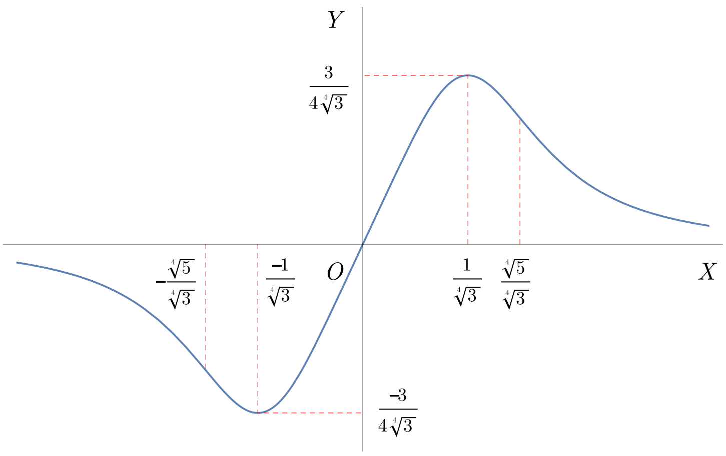
$$f'''\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right) = -\frac{12\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^2\left(5\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^8 - 22\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^4 + 5\right)}{\left(\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^4 + 1\right)^4} = -\frac{12\sqrt[2]{\frac{5}{3}}\left(5\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 22\frac{5}{3} + 5\right)}{\left(\frac{5}{3}+1\right)^4} =$$

$$= -\frac{12\sqrt[2]{\frac{5}{3}}\frac{-160}{9}}{\left(\frac{8}{3}\right)^4} = \frac{135}{32}\sqrt[2]{\frac{5}{3}} \neq 0;$$

$$f'''\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right) = -\frac{12\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^2\left(5\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^8 - 22\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^4 + 5\right)}{\left(\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^4 + 1\right)^4} = -\frac{12\sqrt[2]{\frac{5}{3}}\left(5\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 22\frac{5}{3} + 5\right)}{\left(\frac{5}{3}+1\right)^4} =$$

$$= -\frac{12\sqrt[2]{\frac{5}{3}}\frac{-160}{9}}{\left(\frac{8}{3}\right)^4} = \frac{135}{32}\sqrt[2]{\frac{5}{3}} \neq 0;$$

beraz, funtzioak inflexio-puntu bana dauka $x = \sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ eta $x = -\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ puntuetan, 7.2. Teoremaren arabera (ikus irudia).



6. Kalkula itzazu $f(x) = xe^{1/x}$ funtzioaren mutur absolutuak eta erlatiboak $[-2, 2]$ tartean.

Ebazpena.

$f(x)$ funtzioa ez dago definiturik $x = 0$ puntuan; beraz, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ da. Gainerako puntuetan funtzioa jarraitua da, eta $(-2,0) \cup (0,2)$ multzoan (infinitu aldiz) deribagarria da. Hortaz, 7.1., 7.2. eta 7.5. Teoremak erabil ditzakegu.

$f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{1/x}$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{1/x}$ eta $f'''(x) = -\dfrac{3x+1}{x^5}e^{1/x}$ dira.

$f'(x) = 0 \Longrightarrow \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{1/x} = 0 \Longrightarrow 1 - \dfrac{1}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1$, puntu kritiko bakarra.

$f''(1) = e > 0$ da. Hortaz, funtzioak minimo erlatibo bakar bat dauka $x = 1$ puntuan, eta $f(1) = e$ da minimo erlatiboa.

Beste muturrak, absolutuak edo erlatiboak, funtzioa deribagarria ez den puntuetan edo $[-2,2]$ tartearen muturretan egon daitezke.

$-2 < x < 0$ denean, $f'(x) > 0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da; horrek esan nahi du $[-2,0)$ tartean funtzioaren balio txikiena $x=-2$ puntuan hartuko duela, eta minimo hori hau da: $f(-2) = -2e^{1/-2} = -1,21$; eta maximorik ez du, $x=0$ puntuan ez delako existitzen. $x=0$ puntuan, funtzioaren ezker-limitea hau da:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0.$$

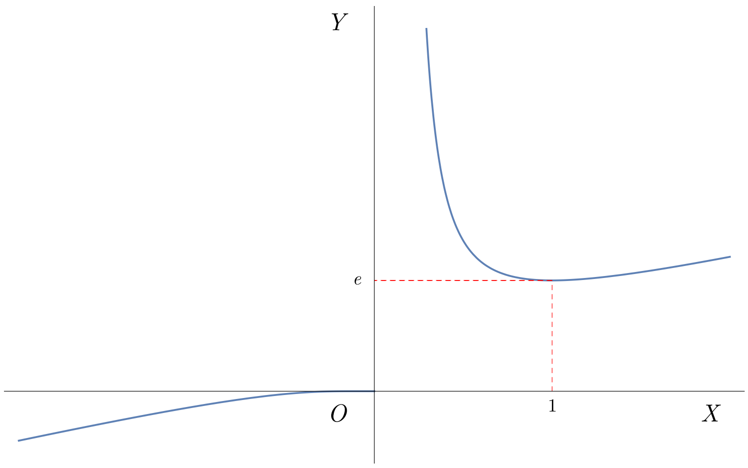
$0 < x < 1$ denean, $f'(x) < 0$ da; beraz, funtzioa beherakorra da; horrek esan nahi du $(0,1]$ tartean funtzioaren maximorik ez dagoela, $x=0$ puntuan ez delako existitzen; eta minimoa $x=1$ puntuan hartuko duela: $f(1)=e$. $x=0$ puntuan, funtzioaren eskuin-limitea hau da:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2 e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

Hortik ondorioztа dezakegu funtzioak ez duela maximo absoluturik izango $[-2,2]$ tartean.

$1 < x < 2$ denean, $f'(x) > 0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da; horrek esan nahi du $[1,2]$ tartean funtzioaren balio txikiena $x=1$ puntuan hartuko duela, $f(1)=e$; eta baliorik handiena $x=2$ puntuan hartuko du, $f(2) = 2e^{1/2} = 3,29$.

Laburbilduz, minimo absolutua $x=-2$ puntuan du eta $f(-2) = -1,21$ da; minimo erlatiboa $x=1$ puntuan du eta $f(1)=e$ da.



Ez dago maximo erlatiborik, ez absoluturik (ikus irudia).

7. Kalkula itzazu $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ funtzioaren maximoak, minimoak eta inflexio-puntuak.

Ebazpena.

$f(x) = \sin^2 x + \cos x$ funtzioa jarraitua eta (infinitu aldiz) deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan; beraz, mutur erlatibo guztiak eta inflexio-puntu guztiak bila ditzakegu funtzioaren deribatuak erabiliz.

$f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$,

$$f''(x) = \cos x(2\cos x - 1) + \sin x(-2\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x =$$
$$= 2(\cos^2 x - (1-\cos^2 x)) - \cos x = 4\cos^2 x - \cos x - 2 \quad \text{eta}$$

$f'''(x) = 8\cos x(-\sin x) + \sin x = \sin x(1 - 8\cos x)$ dira.

Puntu kritikoak bilatuko ditugu:

$f'(x) = 0$ izateko, bi aukera ditugu $\sin x = 0$ edo $2\cos x - 1 = 0$.

1) $\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ izanik;

2) $2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ edo $x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ izanik.

Puntu kritikoen azterketa egiteko, aukera desberdinak aztertuko ditugu. Kalkuluak errazteko asmoz, berdintza hau erabiliko dugu: $\cos k\pi = (-1)^k$.

1) $x = k\pi$ puntuak,

$f''(k\pi) = 4\cos^2 k\pi - \cos k\pi - 2 = 4((-1)^k)^2 - (-1)^k - 2 = 4 - (-1)^k - 2 = 2 - (-1)^k > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z};$

beraz, funtzioak minimo erlatiboa du $x = k\pi$ puntuetan, eta minimo erlatiboaren balioa k-ren arabera aldatuko da:

$f(k\pi) = \sin^2 k\pi + \cos k\pi = 0 + (-1)^k = (-1)^k$ da, $k \in \mathbb{Z}$ izanik.

2) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ puntuak,

$$f''\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) - 2 = 4\cos^2\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} - 2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 =$$

$$= 4\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = 1 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2} < 0 \text{ da;}$$

beraz, puntu horietan funtzioak maximo erlatiboak ditu:

$$f\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

$x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$ puntuak,

$$f''\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) = 4\cos^2\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) - 2 = 4\cos^2\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{3} - 2 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = 4\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = 1 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2} < 0 \text{ da;}$$

beraz, puntu horietan funtzioak maximo erlatiboak ditu:

$$f\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) = \sin^2\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) = \sin^2\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Inflexio-puntuak bilatzeko, bigarren deribatua zerorekin berdinduko dugu:

$f''(x) = 0 \Longrightarrow 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ denez, $\cos x = t$ aldaketa egingo dugu.

Hortaz, $4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Longrightarrow 4t^2 - t - 2 = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}.$

Hortik, bi aukera ditugu: $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{33}}{8} > 0$ edo $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{33}}{8} < 0.$

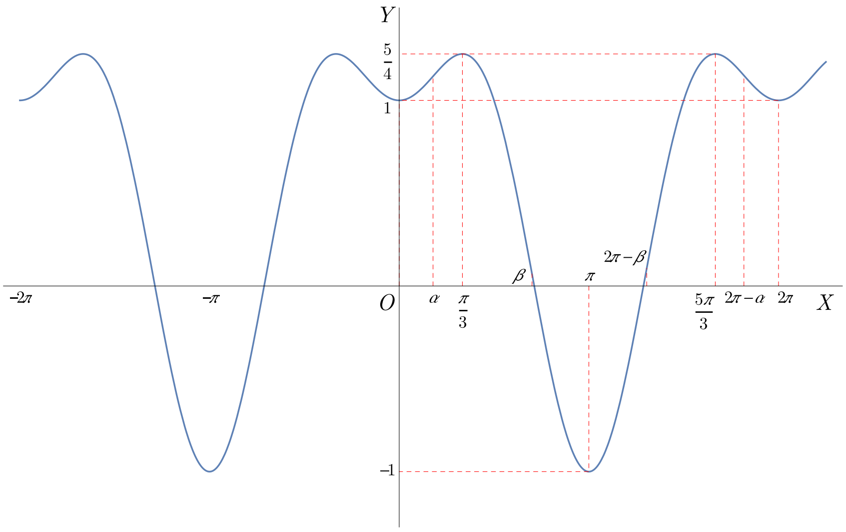
Lehenengo aukerak bi angelu emango dizkigu 0 eta 2π artean, α eta $2\pi - \alpha$ (1. eta 4. koadranteetan); bigarrenak beste bi emango dizkigu: β eta $2\pi - \beta$ (2. eta 3. koadranteetan) (ikus irudia). Lau puntu motak funtzioaren hirugarren deribatuan ordezkatuko ditugu. Kalkuluak sinplifikatzeko bi balio hauek erabiliko ditugu:

$$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha) = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \quad \text{eta} \quad \sin\alpha = \sin(2\pi - \alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{32}};$$

$$\cos\beta = \cos(2\pi - \beta) = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \quad \text{eta} \quad \sin\beta = \sin(2\pi - \beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{32}}.$$

$$f'''(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+2k\pi)(1-8\cos(\alpha+2k\pi))=\sin\alpha(1-8\cos\alpha)=$$
$$=\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{32}}\left(1-8\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)=-\sqrt{33}\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{32}}\neq 0.$$
$$f'''((2\pi-\alpha)+2k\pi)=\sin((2\pi-\alpha)+2k\pi)(1-8\cos((2\pi-\alpha)+2k\pi))=$$
$$=\sin(2\pi-\alpha)(1-8\cos(2\pi-\alpha))=\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{32}}\left(1-8\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)=-\sqrt{33}\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{32}}\neq 0.$$
$$f'''(\beta+2k\pi)=\sin(\beta+2k\pi)(1-8\cos(\beta+2k\pi))=\sin\beta(1-8\cos\beta)=$$
$$=\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{32}}\left(1-8\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)=\sqrt{33}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{32}}\neq 0.$$
$$f'''((2\pi-\beta)+2k\pi)=\sin((2\pi-\beta)+2k\pi)(1-8\cos((2\pi-\beta)+2k\pi))=$$
$$=\sin(2\pi-\beta)(1-8\cos(2\pi-\beta))=\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{32}}\left(1-8\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)=\sqrt{33}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{32}}\neq 0.$$

Hortaz, puntu horietan guztietan funtzioak inflexio-puntuak ditu.



3. Funtzioen adierazpen grafikoa

8. $f(x)=2|x|-x^2$ funtzioa emanik,

   8.1. azter itzazu jarraitutasuna eta deribagarritasuna horren definizio-eremuan.

   8.2. Kalkula itzazu, existitzen badira, mutur erlatiboak eta absolutuak.

   8.3. Irudika ezazu funtzioa $\left[-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right]$ tartean.

Ebazpena.

8.1. **Definizio-eremua**

Definizio-eremua $\mathbb{R}$ da, balio absolutua eta x^2 polinomioa $\mathbb{R}$ osoan existitzen direlako.

Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna

Balio absolutu funtzioa eta x^2 polinomioa jarraituak direnez $\mathbb{R}$ osoan, $f(x)$ funtzioa ere jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

Balio absolutua ez da deribagarria jatorrian, 6.7. Adibidean ikusi genuen bezala; beraz, deribagarritasuna jatorrian aztertu beharko dugu. Horretarako, funtzioa bi zatitan banatuko dugu, honela:

$$f(x)=\begin{cases} -2x-x^2, & x<0,\\ 2x-x^2, & 0\le x.\end{cases}$$

$x\neq 0$ puntuetan funtzioa deribagarria da, funtzio elementalen bidez definiturik dagoelako. $x=0$ puntuan ezker- eta eskuin-deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-2x-x^2)-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-2-x)=-2;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x-x^2)-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}(2-x)=2;$$

beraz, funtzioa ez da deribagarria $x=0$ puntuan. Hortaz, deribatu funtzioa hau da:

$$f'(x)=\begin{cases} -2-2x, & x<0,\\ 2-2x, & 0<x.\end{cases}$$

Deribatu funtzioa deribagarria da bere definizio-eremuan: $\mathbb{R}-\{0\}$.

8.2. **Funtzioaren puntu kritikoak**

Mutur erlatiboak existitzeko baldintza beharrezkoa $f'(x)=0$ izatea da, deribatua existitzen den puntuetan. Hortaz, bi ekuazio izango ditugu: $-2-2x=0$ eta $2-2x=0$. Lehenengoaren soluzio bakarra $x=-1$ da, eta bigarrenaren soluzio bakarra $x=1$ da. Hortaz, bi puntu kritiko ditugu.

Puntu kritikoen izaera determinatzeko, bigarren deribatua kalkulatuko dugu. Orain, zuzenean egingo dugu, ez dagoelako arazorik:

$$f''(x)=\begin{cases} -2, & x<0,\\ -2, & 0<x.\end{cases}$$

Hortik, $f''(-1)=-2<0$ eta $f''(1)=-2<0$ dira eta, 7.2. Teoremaren arabera, $x=-1$ eta $x=1$ puntuetan funtzioak maximo erlatiboak izango ditu: $f(-1)=1$ eta $f(1)=1$.

Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna

Aztertzeke dagoen puntu bakarra $x=0$ da, bertan funtzioa ez delako deribagarria.
$-1<x<0 \Longrightarrow 0<-2x<2 \Longrightarrow -2<-2-2x<0 \Longrightarrow f'(x)<0$ da;
beraz, funtzioa beherakorra da $(-1{,}0)$ tartean.
$0<x<1 \Longrightarrow -2<-2x<0 \Longrightarrow 0<2-2x<2 \Longrightarrow f'(x)>0$ da;
beraz, funtzioa gorakorra da $(0,1)$ tartean.
Hortik ondorioztatzen dugu $x=0$ puntuan funtzioak minimo erlatibo bat duela, $f(0)=0$.
$-\frac{5}{4}<x<-1 \Longrightarrow 2<-2x<\frac{5}{2} \Longrightarrow 0<-2-2x<\frac{1}{2} \Longrightarrow f'(x)>0$ da;
beraz, funtzioa gorakorra da $\left(-\frac{5}{4},-1\right)$ tartean.
$1<x<\frac{5}{4} \Longrightarrow -\frac{5}{2}<-2x<-2 \Longrightarrow -\frac{1}{2}<2-2x<0 \Longrightarrow f'(x)<0$ da;
beraz, funtzioa beherakorra da $\left(1,\frac{5}{4}\right)$ tartean.

Kontuan izango dugu $f\left(-\frac{5}{4}\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=2\cdot\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5}{2}-\frac{25}{16}=\frac{15}{16}<1$ direla.

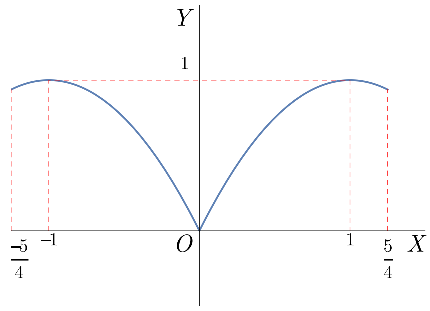
Bestalde, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-x^2)=-\infty$ eta $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(2x-x^2)=-\infty$ dira; beraz, funtzioak ez du minimo absoluturik.

Hortik ere ondorioztatzen dugu funtzioaren maximo absolutua $f(-1)=f(1)=1$ dela.

Laburbilduz, beraz, funtzioak maximo erlatiboa eta absolutua ditu $x=-1$ eta $x=1$ puntuetan eta maximoa $f(-1)=f(1)=1$ da. Bestalde, funtzioak minimo absolutua eta erlatiboa du $x=0$ puntuan eta minimoa $f(0)=0$ da (ikus irudia).

8.3. **Funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

$f''(x)<0$ da beti; beraz, funtzioa ganbila da $x=0$ puntuaren bi aldeetan, eta ez dauka inflexio-punturik.



9. 9.1. Azter itzazu $f(x)=|\sin(x+1)|$ funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

9.2. Ba al daude mutur absolutuak $[-2,2]$ tartean? Arrazoi ezazu erantzuna.

9.3. Baiezkoan, zeintzuk dira horien balioak? Kalkula itzazu funtzioaren mutur guztiak.

Ebazpena.

9.1. **Definizio-eremua**

$f(x)$ funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{R}$ osoa da, $x+1$ eta $\sin x$ funtzio elementalak eta $|x|$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan daudelako definiturik.

Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna

$x+1$ eta $\sin x$ funtzio elementalak eta $|x|$ funtzioak jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan, ikus 5.31. Adibidea; beraz, $f(x)$ ere jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

$x+1$ eta $\sin x$ funtzio elementalak deribagarriak dira $\mathbb{R}$ osoan; eta $|x|$ funtzioa deribagarria da $\forall x\neq 0$, ikus 6.7. Adibidea; beraz, $f(x)$ ere deribagarria da $\forall x \,/\, \sin(x+1)\neq 0$.
$\sin(x+1)=0 \Longrightarrow x+1=k\pi \Longrightarrow x=k\pi-1, \quad k\in\mathbb{Z}$. Sinu funtzioaren periodikotasuna kontuan hartuz, nahikoa da horietako puntu bat aztertzea, adibidez, $x=-1$ puntua.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{|\sin(x+1)|-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-\sin(x+1)}{x+1}=-1;$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{|\sin(x+1)|-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sin(x+1)}{x+1}=1;$$

desberdinak direnez, funtzioa ez da deribagarria puntu horietan guztietan.

9.2. Weierstrassen teoremak dio funtzio bat jarraitua bada tarte itxi batean, bertan maximoa eta minimoa hartzen dituela.

Gure funtzioa jarraitua da $[-2,2]$ tartean; beraz, maximoa eta minimoa lortuko ditu bertan.

9.3. **Funtzioaren puntu kritikoak**

Muturrak egon daitezke edo tartearen muturretan, edo funtzioa etena edo ez-deribagarria den puntuetan edo $f'(x)=0$ betetzen duten puntuetan.

Tartearen muturrak $x=-2$ eta $x=2$ dira; funtzioa jarraitua da tarte osoan; eta ez da deribagarria $x=-1$ puntuan.

$$f(x)=\begin{cases} -\sin(x+1), & -2\le x<-1, \\ \sin(x+1), & -1\le x\le 2, \end{cases} \quad \text{eta} \quad f'(x)=\begin{cases} -\cos(x+1), & -2<x<-1, \\ \cos(x+1), & -1<x<2, \end{cases} \quad \text{dira.}$$

$f'(x)=0$ izateko, edo $-\cos(x+1)=0$ edo $\cos(x+1)=0$ bete daiteke. Hortik, $x+1=\dfrac{\pi}{2}$ edo $x+1=\dfrac{-\pi}{2}$ aterako dira, hau da, $x=\dfrac{\pi}{2}-1$ edo $x=\dfrac{-\pi}{2}-1$; azken balioa ez dago tartean; beraz, baztertuko dugu.

Puntu kritikoaren izaera determinatzeko, funtzioaren bigarren deribatua erabiliko dugu:

$$f''(x)=\begin{cases} \sin(x+1) & -2<x<-1 \\ -\sin(x+1) & -1<x<2 \end{cases}.$$

$f''\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-1+1\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1<0$ da; beraz, funtzioak maximo erlatiboa izango du $x=\dfrac{\pi}{2}-1$ puntuan, $f\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-1+1\right)\right|=\left|\sin\dfrac{\pi}{2}\right|=1$.

Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna

$-2<x<-1 \Longrightarrow -1<x+1<0 \Longrightarrow -\cos(x+1)<0 \Longrightarrow f'(x)<0$ da;
beraz, funtzioa beherakorra da $(-2,-1)$ tartean.

$-1<x<\dfrac{\pi}{2}-1 \Longrightarrow 0<x+1<\dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos(x+1)>0 \Longrightarrow f'(x)>0$ da;
beraz, funtzioa gorakorra da $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}-1\right)$ tartean.

$\dfrac{\pi}{2}-1<x<2 \Longrightarrow \dfrac{\pi}{2}<x+1<3 \Longrightarrow \cos(x+1)<0 \Longrightarrow f'(x)<0$ da;
beraz, funtzioa beherakorra da $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,2\right)$ tartean.

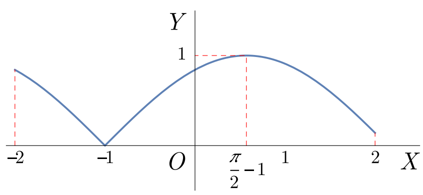
Hortik ondorioztatzen dugu funtzioak minimo erlatibo bat izango duela $x=-1$ puntuan, eta $f(-1)=\sin(-1+1)=\sin 0=0$ da; beraz, minimo absolutua ere bada, funtzioa ez delako inoiz negatiboa.

Kalkula ditzagun funtzioaren balioak $x=-2$ eta $x=2$ puntuetan:
$f(-2)=-\sin(-2+1)=-\sin(-1)=0,84147$; beraz, ez da mutur absolutua.
$f(2)=\sin(2+1)=\sin 3=0,14112$; beraz, ez da mutur absolutua.

Aurreko guztia laburbilduz (ikus irudia),

funtzioak minimo absolutua eta erlatiboa du $x=-1$ puntuan eta $f(-1)=0$ da.

Funtzioak maximo absolutua eta erlatiboa du $x=\dfrac{\pi}{2}-1$ puntuan eta $f\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=1$ da.



10. 10.1. Azter itzazu $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna eta kalkula ezazu $f'(x)$ deribatu funtzioa.

10.2. Kalkula itzazu $f(x)$ funtzioaren muturrak, absolutuak eta erlatiboak, $[-2,1]$ tartean.

10.3. Irudika ezazu funtzioa, $x\to\infty$ eta $x\to-\infty$ limiteak kalkulatuz.

Ebazpena.

10.1. **Definizio-eremua**

Definizio-eremua $\mathbb{R}$ osoa da, funtzio elementalen arteko eragiketa delako eta eragiketa horiek ez dutelako arazorik $\mathbb{R}$ osoan.

Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna

Funtzio jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan, funtzio elementalen arteko eragiketa delako.

Arrazoi beragatik esan genezake funtzioa deribagarria dela. Baina, horren deribatua kalkulatzen dugunean, $f'(x) = 2 + 3\dfrac{2}{3}x^{-1/3} = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$, ikus dezakegu deribatua ez dagoela definituta $x = 0$ puntuan.

Hortaz, $x = 0$ puntuko deribatua definizioaren bidez kalkulatuko dugu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+3\sqrt[3]{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = \pm\infty;$$

beraz, funtzioa ez da deribagarria $x = 0$ puntuan.

Deribatu funtzioa honela geratzen da: $f'(x) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$ izanik.

10.2. **Funtzioaren puntu kritikoak**

Funtzioa jarraitua denez $[-2,1]$ tartean, mutur absolutuak existitzen dira.

Funtzioa deribagarria da $(-2,0)$ eta $(0,1)$ tarteetan; tarte horietan mutur erlatiboak bilatzeko $f'(x) = 0$ ekuazioa ebatziko dugu.

$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = -1 \Longrightarrow \sqrt[3]{x} = -1 \Longrightarrow x = -1$, puntu kritiko bakarra da.

$f''(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^4}}$ da, $\forall x \neq 0$; $f''(-1) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{1}} = \dfrac{-2}{3} < 0$ denez, funtzioak maximo erlatibo bat dauka $x = -1$ puntuan, eta $f(-1) = -2+3 = 1$ da.

Mutur gehiago bilatu nahi baditugu, $x = -2, 0, 1$ puntuak aztertu beharko ditugu.

Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna

$x \in (-2,-1)$ denean, $f'(x) > 0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da. Hortaz, minimoa $x = -2$ puntuan dago eta $f(-2) = -4 + 3\sqrt[3]{4} = 0,7622$ da, eta maximoa $x = -1$ puntuan eta $f(-1) = -2+3 = 1$ da.

$x \in (-1,0)$ denean, $f'(x) < 0$ da; beraz, funtzioa beherakorra da. Hortaz, minimoa $x = 0$ puntuan dago eta $f(0) = 0$ da, eta maximoa $x = -1$ puntuan eta $f(-1) = 1$ da.

$x \in (0,1)$ denean, $f'(x) > 0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da. Hortaz, minimoa $x = 0$ puntuan dago eta $f(0) = 0$ da, eta maximoa $x = 1$ puntuan dago eta $f(1) = 2+3 = 5$ da.

Ondorioz, $[-2,1]$ tarteko maximo erlatibo bakarra $x = -1$ puntuan dago eta $f(-1) = 1$ da. Minimo erlatibo eta absolutu bakarra $x = 0$ puntuan dago eta $f(0) = 0$ da; eta maximo absolutua $x = 1$ puntuan dago eta $f(1) = 5$ da (ikus irudia).

10.3. **Funtzioaren inflexio-puntuak eta funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

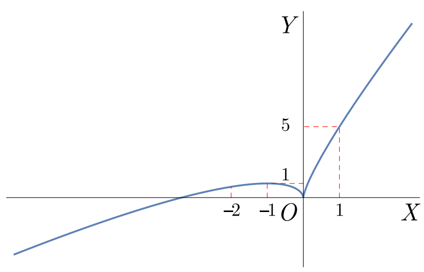
$f''(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^4}} < 0$ da, $\forall x \neq 0$; beraz, funtzioa ganbila da beti, eta ez du inflexio-punturik.

Bukatzeko,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x+3\sqrt[3]{x^2}) = +\infty \quad \text{da eta}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x+3\sqrt[3]{x^2}) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = -\infty \quad \text{da.}$$



11. Azter itzazu $f(x)$ funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Kalkula itzazu funtzioaren muturrak. Irudika ezazu funtzioa, horren ezaugarriak aipatuz.

$$f(x)=\begin{cases} -x^4-4x^3, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\sqrt{3-x}, & 0<x. \end{cases}$$

Ebazpena.

1. **Definizio-eremua**

   $f(x)$ funtzioaren definizio-eremua $(-\infty,3]$ da, $\sqrt{3-x}$ erroa 3 edo balio txikiagoetarako baino ez delako existitzen.

2. **Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna**

   $\forall x\neq 0,3$ funtzioa jarraitua da eta $x=3$ puntuan funtzioa ezker-jarraitua da eta $\forall x\neq 0,3$ deribagarria da, funtzio elementalez osatuta dagoelako.

   $x=0$ puntuaren ezkerraldean eta eskuinaldean funtzio desberdinak daudenez, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu.
   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^4-4x^3)=0$ eta $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{3-x}=0$ dira;

   $f(0^-)=f(0^+)=f(0)=0$ direnez, funtzioa jarraitua da $x=0$ puntuan.

   Orain, funtzioaren deribagarritasuna aztertuko dugu $x=0$ puntuan. Deribagarritasuna aztertzeko, ezker- eta eskuin-deribatuak kalkulatuko ditugu:
   $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^4-4x^3-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x^3-4x^2)=0;$$
   $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{3-x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{3-x}=\sqrt{3};$$
   beraz, funtzioa ez da deribagarria $x=0$ puntuan.

   Laburbilduz, deribatu funtzioa hau da: $f'(x)=\begin{cases} -4x^3-12x^2, & x<0,\\ \dfrac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}, & 0<x<3. \end{cases}$

3. **Funtzioaren puntu kritikoak**

   Mutur erlatiboak egon daitezke edo $x=0$ puntuan edo $f'(x)=0$ betetzen duten puntuetan.
   $f'(x)=0$ izateko, bi aukera daude:
   1) $-4x^3-12x^2=0 \Longrightarrow x=0$ edo $-4x-12=0 \Longrightarrow x=-3$; baina, $x=0$ puntua ezin dugu onartu, funtzioaren deribatua ez delako bertan existitzen.
   2) $\dfrac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}=0 \Longrightarrow 6-3x=0 \Longrightarrow x=2.$

   Hortaz, bi puntu kritiko daude: $x=-3$ eta $x=2$. Horien izaera determinatzeko, funtzioaren bigarren deribatua erabiliko dugu:
   $$f''(x)=\begin{cases} -12x^2-24x, & x<0,\\ \dfrac{3x-12}{4(3-x)\sqrt{3-x}}, & 0<x<3, \end{cases} \quad \text{da.}$$

   Beraz, $f''(-3)=-108+72=-36<0$ da; ondorioz, $x=-3$ puntuan funtzioak maximo erlatibo bat du, eta $f(-3)=-81+108=27$ da.

   Bestalde, $f''(2)=\dfrac{6-12}{4\cdot 1\cdot 1}=\dfrac{-6}{4}<0$ da; ondorioz, $x=2$ puntuan funtzioak maximo erlatibo bat du, eta $f(2)=2\sqrt{3-2}=2$ da.

4. **Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna**

   $x = 0$ puntua aztertzeko, deribatuaren zeinua aztertuko dugu puntuaren ezkerrean eta eskuinean.

   $-3 < x < 0 \Longrightarrow -4x^3 - 12x^2 = -4x^2(x+3) < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0;$

   beraz, $f(x)$ beherakorra da $(-3,0)$ tartean;

   $0 < x < 2 \Longrightarrow 6 - 3x = 3(2-x) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0;$

   beraz, $f(x)$ gorakorra da $(0,2)$ tartean;

   Ondorioz, $f(x)$ funtzioak minimo erlatibo bat du $x = 0$ puntuan, eta $f(0) = 0$ da.

   $x < -3 \Longrightarrow -4x^2(x+3) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0;$ beraz, $f(x)$ gorakorra da $(-\infty, -3)$ tartean;

   $2 < x < 3 \Longrightarrow 3(2-x) < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0;$ beraz, $f(x)$ beherakorra da $(2,3)$ tartean.

   Laburbilduz, funtzioa gorakorra da $(-\infty,-3)$ eta $(0,2)$ tarteetan, eta beherakorra $(-3,0)$ eta $(2,3)$ tarteetan.

5. **Funtzioaren inflexio-puntuak**

   Inflexio-puntuak egon daitezke edo $x = 0$ puntuan edo $f''(x) = 0$ betetzen duten puntuetan. $f''(x) = 0$ izateko, bi aukera daude:

   1) $-12x^2 - 24x = -12x(x+2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ edo $x+2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ da; baina, $x = 0$ puntua ezin dugu onartu, funtzioaren bigarren deribatua ez delako bertan existitzen.

   2) $\dfrac{3x-12}{4(3-x)\sqrt{3-x}} = 0 \Longrightarrow 3x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 4;$ baina balio hori definizio-eremutik kanpo dago.

   $x = 0$ puntua 7.1. ataleko oharrean baztertu dugun kasua da; beraz, ez dugu inflexio-puntutzat hartuko.

   Hortaz, $x = -2$ puntuan baino ezin du funtzioak inflexio-puntua izan. Hori ikusteko, bigarren deribatuaren zeinua aztertuko dugu.

6. **Funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

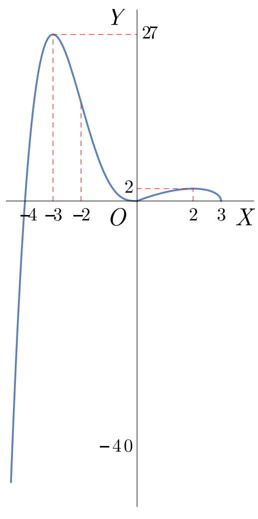
   $x < -2 \Longrightarrow -12x(x+2) < 0 \Longrightarrow f''(x) < 0;$ beraz, $f(x)$ ganbila da $(-\infty,-2)$ tartean;

   $-2 < x < 0 \Longrightarrow -12x(x+2) > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0;$ beraz, $f(x)$ ahurra da $(-2,0)$ tartean.

   $0 < x < 3 \Longrightarrow 3x - 12 < 0 \Longrightarrow f''(x) < 0;$ beraz, $f(x)$ ganbila da $(0,3)$ tartean.

   Hortaz, $x = -2$ puntuan funtzioak inflexio-puntu bat du, $f(-2) = -16 + 32 = 16$ izanik.

   Laburbilduz, funtzioa ganbila da $(-\infty,-2)$ eta $(0,3)$ tarteetan, eta ahurra $(-2,0)$ tartean (ikus irudia).



7. **Funtzioaren asintotak**

   Funtzioa jarraitua denez, ez du asintota bertikalik.

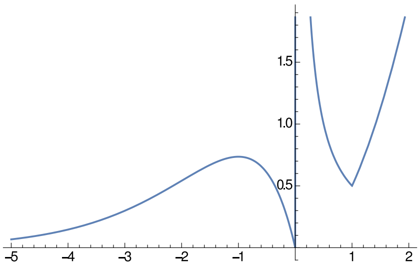
   $\lim_{x\to-\infty}(-x^4 - 4x^3) = -\infty$ eta

   $$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4-4x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty}(-x^3 - 4x^2) = +\infty$$

   direnez, funtzioak ez du asintota horizontalik, ez zeiharrik $-\infty$ aldera.

12. Izan bitez $f(x)$ funtzioa eta horren grafikoa:

$$f(x) = \begin{cases} -2xe^x, & x \leq 0, \\ \dfrac{1}{2x}, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{2}, & 1 \leq x. \end{cases}$$



Arrazoi ezazu funtzioaren grafikoa horren ezaugarriak aipatuz: ebaki-puntuak ardatzekin, jarraitutasuna eta deribagarritasuna, monotonia, mutur erlatiboak eta absolutuak, ahurtasuna eta ganbiltasuna, inflexio-puntuak, asintotak.

Ebazpena.

1. **Definizio-eremua**
   $f(x)$ funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{R}$ osoa da.
   Ebaki-puntuak bilatzeko, $f(0)$ eta $f(x) = 0$ aztertu behar ditugu.
   $f(0) = 0$ da.
   $f(x) = 0$ izateko, edo $-2xe^x = 0$, edo $\dfrac{1}{2x} = 0$, edo $\dfrac{x^2}{2} = 0$ aukerak ditugu.
   Lehenengotik, $x = 0$ ateratzen da; bigarrena ezinezkoa da; eta hirugarrena $x = 0$ denean betetzen da, baina $1 \leq x$ bete behar denez, baztertu behar dugu.
   Ondorioz, ardatzekiko ebaki-puntu bakarra jatorria da.

2. **Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna**
   Irudiak esaten digu funtzioa ez dela jarraitua jatorrian, eta $x = 1$ puntuan jarraitua dela. Gainerakoetan ez da arazorik ikusten jarraitua izateko.
   $x = 0$ puntuaren ezkerraldean eta eskuinaldean funtzio desberdinak daudenez, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu.
   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -2xe^x = 0 \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty \quad \text{dira;}$$
   $f(0^-) = f(0) = 0$ direnez, funtzioa ezker-jarraitua da $x = 0$ puntuan.
   $x = 1$ puntuan ere ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu.
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{dira;}$$
   $f(1^-) = f(1^+) = f(1) = \dfrac{1}{2}$ direnez, funtzioa jarraitua da $x = 1$ puntuan.
   Irudiak esaten digu funtzioa ez dela deribagarria $x = 0$ puntuan, ez delako jarraitua. Eta $x = 1$ puntuan funtzioak erpin bat duela erakusten digu. Gainerako puntuetan ez da arazorik ikusten deribagarria ez izateko.
   $x = 1$ puntua aztertzeko, ezker- eta eskuin-deribatuak kalkulatuko ditugu:
   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1 - x}{2(x - 1)} = \frac{-1}{2};$$
   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x + 1}{2} = 1;$$
   beraz, funtzioa ez da deribagarria $x = 1$ puntuan.
   Laburbilduz, deribatu funtzioa hau da: $f'(x) = \begin{cases} -2(1+x)e^x, & x < 0, \\ -\dfrac{1}{2x^2}, & 0 < x < 1, \\ x, & 1 \leq x. \end{cases}$

3. **Funtzioaren puntu kritikoak**

   Irudian ikus dezakegu funtzioak maximo erlatibo bat eta bi minimo erlatibo dituela, $x=-1$ eta $x=0$ eta $x=1$ puntuetan, hurrenez hurren. Puntu kritikoa izan daitekeen bakarra $x=-1$ puntua da, bertan deribatua existitzen delako.

   Funtzioaren bigarren deribatua hau da: $f''(x)=\begin{cases} -2(2+x)e^x, & x<0, \\ \dfrac{1}{x^3}, & 0<x<1, \\ 1, & 1\leq x. \end{cases}$

   $x=-1$ puntuan funtzioa deribagarria da eta $f'(-1)=0$ dela egiazta daiteke; horrez gain, $f''(-1)=-2(2-1)e^{-1}=\dfrac{-2}{e}<0$ da; irudiak erakusten duen bezala, funtzioak maximo erlatibo bat du $x=-1$ puntuan, eta $f(-1)=\dfrac{2}{e}$ da.

   $x=0$ puntuan funtzioa ez da deribagarria; baina, puntuaren ingurune batean funtzioak hartzen duen baliorik txikiena $f(0)=0$ da, ezkerrean eta eskuinean funtzioa positiboa delako, $x<0$ denean, $f(x)=-2xe^x>0$ eta, $0<x$ denean, $f(x)=\dfrac{1}{2x}>0$ direlako. Hortaz, funtzioak minimo erlatiboa du bertan.

   $x=1$ puntuan funtzioa ez da deribagarria; baina, puntuaren ezkerraldean funtzioa beherakorra da eta eskuinaldean gorakorra da, $f'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}<0$ eta $f'(x)=x>0$ direlako. Hortaz, funtzioak minimo erlatiboa du bertan eta $f(1)=\dfrac{1}{2}$ da.

4. **Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna**

   Irudiak erakusten digu funtzioa gorakorra dela $(-\infty,-1)$ eta $(1,\infty)$ tarteetan. Eta hala da, lehenengoan, $x<-1$ denean, $x+1<0$ eta $f'(x)=-2(1+x)e^x>0$ direlako eta bigarrenean, $1<x$ denean, $f'(x)=x>0$ delako.

   Bestalde, irudian ikusten denez, funtzioa beherakorra da $(-1,0)$ eta $(0,1)$ tarteetan. Hori ere egia da, lehenengoan, $-1<x<0$ denean, $x+1>0$ eta $f'(x)=-2(1+x)e^x<0$ direlako eta bigarrenean, $0<x$ denean, $f'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}<0$ delako.

5. **Funtzioaren inflexio-puntuak**

   Irudiak erakusten du $x=-1$ puntuaren ezkerraldean egon daitekeela inflexio-puntu bat. Bestalde, $x=0$ puntua funtzioaren lehen mailako etenunea da eta, beraz, ez da kontuan hartzen inflexio-puntua izateko aukera.

   $f''(x)=0$ egiten badugu, $-2(2+x)e^x=0$ da bete daitekeen aukera bakarra; esan bezala, $x=-1$ puntuaren ezkerraldean. Ekuazio horretatik $x=-2$ aterako dugu.

6. **Funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

   Badirudi funtzioa ahurra dela $-\infty$ aldera eta $(0,\infty)$ tartean; ordea, jatorriaren ezkerraldean funtzioa ganbila dela dirudi. Egiazta dezagun.

   $x<-2 \Longrightarrow x+2<0 \Longrightarrow -2(2+x)e^x>0 \Longrightarrow f''(x)>0$ da; beraz, $f(x)$ ahurra da $(-\infty,-2)$ tartean;

   $-2<x<0 \Longrightarrow 0<x+2 \Longrightarrow -2(2+x)e^x<0 \Longrightarrow f''(x)<0$ da; beraz, $f(x)$ ganbila da $(-2,0)$ tartean;

   $0<x<1 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^3}>0 \Longrightarrow f''(x)>0$ da; beraz, $f(x)$ ahurra da $(0,1)$ tartean;

   $1<x \Longrightarrow f''(x)=1>0$ da; beraz, $f(x)$ ahurra da $(1,\infty)$ tartean.

   Ondorioz, $f(x)$ funtzioak inflexio-puntu bat du $x=-2$ puntuan, eta $f(-2)=\dfrac{4}{e^2}$ da.

7. **Funtzioaren asintotak**

   Irudiak erakusten digu funtzioak asintota bertikal eta horizontal bana dituela, $x=0$ puntuan eta $-\infty$ aldean, hurrenez hurren.

   Funtzioa etena da $x=0$ puntuan; eta puntuaren eskuinaldean limite hau dugu:

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2x} = +\infty$; beraz, $x=0$ zuzena kurbaren asintota bertikala da.

   Bestalde, $\lim\limits_{x\to -\infty} -2xe^x = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0$ da;
   beraz, $y=0$ zuzena funtzioaren asintota horizontala da $-\infty$ aldean.

   Eta $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2} = \infty$ denez, funtzioak ez du asintota horizontalik $+\infty$ aldean.

   Bukatzeko,

   $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ denez, funtzioak ez du asintota zeiharrik.

13. Azter ezazu $f(x) = x^2 \ln x$ funtzioa: definizio-eremua, jarraitutasuna eta deribagarritasuna; $f'(x)$ deribatu funtzioa; $f(x)$ funtzioaren mutur erlatiboak eta absolutuak; gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak; ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak; inflexio-puntuak; asintotak; irudia.

Ebazpena.

1. **Definizio-eremua**

   $f(x)$ funtzioaren definizio-eremua $D_f = (0,\infty)$ da, logaritmo nepertarra zenbaki positiboetarako baino ez dagoelako definiturik.

2. **Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna**

   Definizio-eremuan jarraitua eta (infinitu aldiz) deribagarria da, funtzio elemental jarraituen eta (infinitu aldiz) deribagarrien arteko biderkadura delako.
   Lehenengo hiru deribatuak hauek dira:

   $f'(x) = x(2\ln x + 1)$, $f''(x) = 2\ln x + 3$ eta $f'''(x) = \dfrac{2}{x}$.

3. **Funtzioaren puntu kritikoak**

   Puntu kritikoak $f'(x) = x(2\ln x + 1) = 0$ ekuaziotik aterako ditugu: $x=0$ eta $x = e^{-1/2}$;
   $x=0$ baztertu behar da, ez dagoelako definizio-eremuan.

   $x = e^{-1/2}$ puntuan, $f''(x) = 2\ln e^{-1/2} + 3 = 2\dfrac{-1}{2} + 3 = 2 > 0$ denez, funtzioak minimo erlatibo bat izango du bertan, eta $f(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \ln e^{-1/2} = e^{-1}\dfrac{-1}{2} = \dfrac{-1}{2e}$ da.

   Ez dago mutur erlatibo gehiagorik, funtzioa jarraitua eta deribagarria delako definizio-eremu osoan.

4. **Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna**

   $x < e^{-1/2} \Longrightarrow \ln x < \ln e^{-1/2} = \dfrac{-1}{2} \Longrightarrow 2\ln x < -1 \Longrightarrow 2\ln x + 1 < 0 \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow f'(x) = x(2\ln x + 1) < 0$ da, eta funtzioa beherakorra da $(0, e^{-1/2})$ tartean.

   $x > e^{-1/2}$ denean, $f'(x)$ positiboa da, eta funtzioa gorakorra da $(e^{-1/2}, \infty)$ tartean.

5. **Funtzioaren inflexio-puntuak**

   Funtzioa definizio-eremuan infinitu aldiz deribagarria denez, inflexio-puntu bakarrak $f''(x) = 0$ ekuaziotik aterako dira.

   $f''(x) = 2\ln x + 3 = 0$ ekuaziotik $x = e^{-3/2}$ soluzio bakarra lortuko dugu.

6. **Funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

$x < e^{-3/2} \implies \ln x < \ln e^{-3/2} = \dfrac{-3}{2} \implies 2\ln x < -3 \implies f''(x) = 2\ln x + 3 < 0$ da eta funtzioa ganbila da $(0, e^{-3/2})$ tartean (ikus irudia).

$x > e^{-3/2}$ denean, $f''(x)$ positiboa da, eta funtzioa ahurra da $(e^{-3/2}, \infty)$ tartean.

Hortaz, funtzioak inflexio-puntu bat du $x = e^{-3/2}$ puntuan, eta $f(e^{-3/2}) = \dfrac{-3}{2e^3}$ da.

7. **Funtzioaren asintotak**

Etenunerik ez dagoenez, ez dago asintota bertikalik.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty$ denez, ez dago asintota horizontalik.

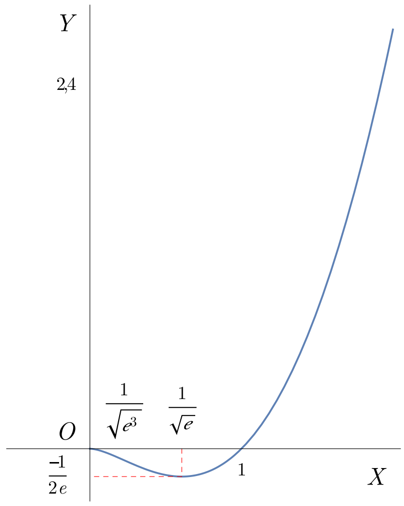
Bestalde,

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln x = \infty$ denez, funtzioak ez du asintota zeiharrik ∞ aldera.

Azkenik,

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-2/x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^3}{2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^2}{2} = 0$ da.



14. Azter itzazu $f(x)$ funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Kalkula itzazu funtzioaren muturrak. Irudika ezazu funtzioa, horren ezaugarriak aipatuz.

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 - 2x, & x \le -2, \\ x^2 + 1, & -2 < x \le 1, \\ 4 - 2e^{-x+1}, & 1 < x. \end{cases}$$

Ebazpena.

1. **Definizio-eremua**

$f(x)$ funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{R}$ osoa da, definizioaren eskuinaldeko baldintzek $\mathbb{R}$ osoa hartzen dutelako.

2. **Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna**

$\forall x \ne -2, 1$ funtzioa jarraitua eta deribagarria da, funtzio elementalez osatuta dagoelako.

$x = -2$ puntuaren ezkerraldean eta eskuinaldean funtzio desberdinak daudenez, ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 5 - x^2 - 2x = 5$ eta $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 + 1 = 5$ dira;

$f(-2^-) = f(-2^+) = f(-2) = 5$ direnez, funtzioa jarraitua da $x = -2$ puntuan.

$x = 1$ puntuan ere ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + 1 = 2$ eta $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4 - 2e^{-x+1} = 2$ dira;

$f(1^-) = f(1^+) = f(1) = 2$ direnez, funtzioa jarraitua da $x = 1$ puntuan.

Orain, funtzioaren deribagarritasuna aztertuko dugu. Deribagarritasuna aztertzeko, ezker- eta eskuin-deribatuak kalkulatuko ditugu.

$x=-2$ puntuan:

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2^-}\frac{5-x^2-2x-5}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{-x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}-x=2;$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+1-5}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}x-2=-4;$$

desberdinak direnez, funtzioa ez da deribagarria $x=-2$ puntuan.

$x=1$ puntuan:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}x+1=2;$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{4-2e^{-x+1}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(1-e^{-x+1})}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2e^{-x+1}}{1}=2;$$

berdinak direnez, funtzioa deribagarria da $x=1$ puntuan, eta $f'(1)=2$ da.

Laburbilduz, deribatu funtzioa honela geratuko da: $f'(x)=\begin{cases}-2x-2, & x<-2,\\ 2x, & -2<x\le 1,\\ 2e^{-x+1}, & 1<x.\end{cases}$

3. **Funtzioaren puntu kritikoak**

   Muturrak egon daitezke edo $f'(x)=0$ betetzen duten puntuetan edo $x=-2$ puntuan.

   $f'(x)=0$ izateko, hiru aukera daude:

   1) $-2x-2=0 \Longrightarrow x=1$; ez du balio, ez dagoelako tarte horretan.

   2) $2x=0 \Longrightarrow x=0$.

   3) $2e^{-x+1}=0$, ezinezkoa da.

   Hortaz, puntu kritiko bakarra dago: $x=0$.

   Funtzioaren bigarren deribatua hau da: $f''(x)=\begin{cases}-2, & x<-2,\\ 2, & -2<x<1,\\ -2e^{-x+1}, & 1<x.\end{cases}$

   Puntu kritikoa ordezkatuz, $f''(0)=2>0$ da; ondorioz, funtzioak $x=0$ puntuan minimo erlatibo bat du, eta $f(0)=1$ da.

4. **Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna**

   $x=-2$ puntua aztertzeko, funtzioaren joerak aztertuko ditugu ezkerretik eta eskuinetik.

   $x<-2 \Longrightarrow -2x>4 \Longrightarrow -2x-2>2>0 \Longrightarrow f'(x)>0$ da; beraz, $f(x)$ gorakorra da $(-\infty,-2)$ tartean;

   $-2<x<0 \Longrightarrow 2x<0 \Longrightarrow f'(x)<0$ da; beraz, $f(x)$ beherakorra da $(-2,0)$ tartean.
   Ondorioz, $f(x)$ funtzioak maximo erlatibo bat du $x=-2$ puntuan, eta $f(-2)=5$ da.

   $0<x\le 1 \Longrightarrow 2x>0 \Longrightarrow f'(x)>0$ da; beraz, $f(x)$ gorakorra da $(0,1)$ tartean;

   $1<x \Longrightarrow 2e^{-x+1}>0 \Longrightarrow f'(x)>0$ da; beraz, $f(x)$ gorakorra da $(1,\infty)$ tartean.

   Laburbilduz, funtzioa gorakorra da $(-\infty,-2)$ eta $(0,\infty)$ tarteetan eta beherakorra da $(-2,0)$ tartean.

5. **Funtzioaren inflexio-puntuak eta funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

   $f''(x)=0$ ekuazioak ez du soluziorik. Hortaz, inflexio-puntu izan daitezkeen puntu bakarrak $x=-2$ eta $x=1$ puntuak dira, bietan ez delako bigarren deribatua existitzen ($x=1$ puntuaren kasua egiaztatu gabe dago). Beraz, puntu horien azterketa berezia egin beharko dugu.

$x < -2 \Longrightarrow f''(x) = -2 < 0$ da; beraz, $f(x)$ ganbila da $(-\infty, -2)$ tartean;

$-2 < x < 1 \Longrightarrow f''(x) = 2 > 0$ da; beraz, $f(x)$ ahurra da $(-2, 1)$ tartean;

$1 < x \Longrightarrow -2e^{-x+1} < 0 \Longrightarrow f''(x) < 0$ da; beraz, $f(x)$ ganbila da $(1, \infty)$ tartean.

Laburbilduz, funtzioa ganbila da $(-\infty, -2)$ eta $(1, \infty)$ tarteetan eta ahurra da $(-2, 1)$ tartean.

$x = -2$ puntua 7.1. ataleko oharrean baztertu dugun kasua da; beraz, ez dugu inflexio-puntutzat hartuko.

Ondorioz, $f(x)$ funtzioak inflexio-puntu bat du $x = 1$ puntuan.

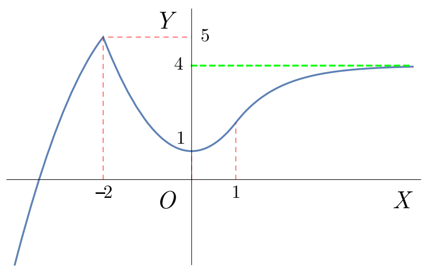
6. **Funtzioaren asintotak**

Funtzioa jarraitua denez $\mathbb{R}$ osoan, ez du asintota bertikalik (ikus irudia).

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x^2 - 2x) = -\infty$ da, eta ez du asintota horizontalik $-\infty$ aldean.

$\lim\limits_{x \to \infty} (4 - 2e^{-x+1}) = 4$ da; beraz, $y = 4$ zuzena funtzioaren asintota horizontala da $+\infty$ aldean.

Bestalde, $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - x^2 - 2x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x - 2}{1} = +\infty$ denez, funtzioak ez du asintota zeiharrik $-\infty$ aldera.



15. Azter ezazu $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ funtzioa.

Ebazpena.

1. **Definizio-eremua**

Funtzioa ez dago definiturik izendatzailea 0 denean edo errokizuna negatiboa denean:

1) $\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$.

2) $x^2 - 1 < 0 \Longrightarrow x^2 < 1 \Longrightarrow |x| < 1$.

Ondorioz, definizio-eremua $D_f = \mathbb{R} - [-1, 1]$ da.

Funtzioa simetrikoa da OY ardatzarekiko, $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(x)$ betetzen delako. Arrazoi hori erabil daiteke esateko OX ardatzerdi positiboan gertatzen dena simetriaz gertatzen dela OX ardatzerdi negatiboan.

2. **Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna**

Definizio-eremuan, funtzioa jarraitua eta (infinitu aldiz) deribagarria da, funtzio elementalen konposizioa delako eta izendatzailea ez delako bertan anulatzen.

Horren deribatu funtzioa hau da: $f'(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \dfrac{x(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^{3/2}}$.

3. **Funtzioaren puntu kritikoak**

   Mutur erlatiboak bilatzeko, puntu kritikoak bilatuko ditugu, definizio-eremuan ez dagoelako puntu berezirik. Horiek $f'(x)=0$ ekuaziotik aterako ditugu:

   $$\frac{x^3-2x}{(x^2-1)^{3/2}}=0 \Longrightarrow x^3-2x=0 \Longrightarrow x=0 \quad \text{edo} \quad x^2-2=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

   Baina, $x=0$ puntua baztertu behar dugu, ez dagoelako definizio-eremuan.

   Orain, funtzioaren bigarren deribatua erabiliko dugu: $f''(x)=\dfrac{x^2+2}{(x^2-1)^{5/2}}$.

   $f''(\sqrt{2})=\dfrac{2+2}{(2-1)^{5/2}}=4>0$ da; beraz, funtzioak minimo erlatibo bat du $x=\sqrt{2}$ puntuan, eta $f(\sqrt{2})=\dfrac{2}{\sqrt{2-1}}=2$ da.

   $f''(-\sqrt{2})=\dfrac{2+2}{(2-1)^{5/2}}=4>0$ da; beraz, funtzioak minimo erlatibo bat du $x=-\sqrt{2}$ puntuan, eta $f(-\sqrt{2})=\dfrac{2}{\sqrt{2-1}}=2$ da.

4. **Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna**

   $x<-\sqrt{2}$ denean, $x^2>2 \Longrightarrow x^2-2>0 \Longrightarrow x(x^2-2)<0 \Longrightarrow f'(x)<0$ da; beraz, funtzioa beherakorra da $(-\infty,-\sqrt{2})$ tartean.

   $-\sqrt{2}<x<-1$ denean, $x^2<2 \Longrightarrow x^2-2<0 \Longrightarrow x(x^2-2)>0 \Longrightarrow f'(x)>0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da $(-\sqrt{2},-1)$ tartean.

   $1<x<\sqrt{2}$ denean, $x^2<2 \Longrightarrow x^2-2<0 \Longrightarrow x(x^2-2)<0 \Longrightarrow f'(x)<0$ da; beraz, funtzioa beherakorra da $(1,\sqrt{2})$ tartean.

   $\sqrt{2}<x$ denean, $x^2>2 \Longrightarrow x^2-2>0 \Longrightarrow x(x^2-2)>0 \Longrightarrow f'(x)>0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da $(\sqrt{2},\infty)$ tartean.

5. **Funtzioaren inflexio-puntuak eta funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna**

   $f''(x)$ ez da inon anulatzen, eta kasu guztietan positiboa da; beraz, funtzioa ahurra da $(-\infty,-1)$ eta $(1,\infty)$ tarteetan.

   Ondorioz, ez dago inflexio-punturik (ikus irudia).

6. **Funtzioaren asintotak**

   $x=-1$ eta $x=1$ puntuetan ezker- eta eskuin-limiteak kalkulatuko ditugu, hurrenez hurren.

   $$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty \quad \text{dira;}$$

   beraz, $x=-1$ eta $x=1$ zuzenak funtzioaren asintota bertikalak dira.

   Bestalde, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$ eta $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$ dira; beraz, funtzioak ez du asintota horizontalik.

   Azkenik, asintota zeiharrak bilatuko ditugu:

   $$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1 \quad \text{da.}$$

   Eta $\displaystyle b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=0$ da.

   Bi limite horiek 5. gaiko 19. Ariketa ebatzian kalkulatu genituen.

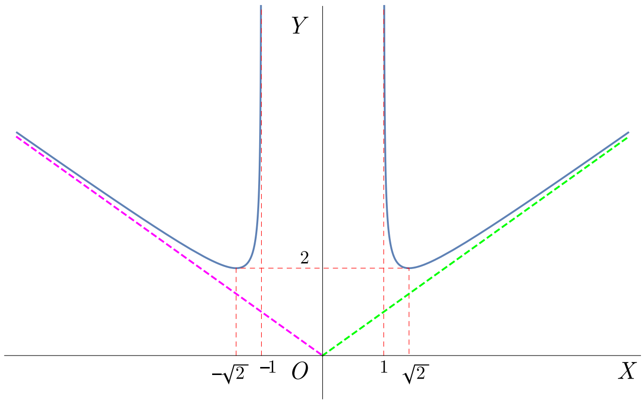
Hortaz, $y=x$ zuzena funtzioaren asintota zeiharra da $+\infty$ aldera.

Funtzioaren simetria erabil dezakegu ondoko limiteen balioak horiek direla arrazoitzeko:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=-1$ da.

Eta $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right)=0$ da.

Hortaz, $y=-x$ zuzena funtzioaren asintota zeiharra da $-\infty$ aldera.



16. $f(x)=\dfrac{8}{|x^2-4|}$ funtzioa emanik,

16.1. kalkula ezazu $f(0,1)$ balioa Maclaurinen 2. ordenako garapena erabiliz.

16.2. Kalkula itzazu horren maximo eta minimo erlatiboak eta absolutuak, existitzen badira.

16.3. Irudika ezazu funtzioa.

Ebazpena.

16.1. **Definizio-eremua**

Funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ da, izendatzailea $x=\pm2$ puntuetan anulatzen delako.

Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna

Definizio-eremuan, funtzioa jarraitua eta (infinitu aldiz) deribagarria da, polinomioen arteko zatidura delako eta izendatzailea ez delako bertan anulatzen.

$x=0$ puntuaren ingurune batean, $|x^2-4|=4-x^2$ da, $x^2<4$ izango delako; beraz, $f(x)=\dfrac{8}{4-x^2}$ funtzioa dugu Maclaurinen garapena kalkulatzeko.

$$f(x)=\frac{8}{4-x^2},\qquad f(0)=2;$$

$$f'(x)=\frac{16x}{(4-x^2)^2},\qquad f'(0)=0;$$

$$f''(x)=\frac{64+48x^2}{(4-x^2)^3},\qquad f''(0)=1;$$

$$f'''(x)=\frac{192x(4+x^2)}{(4-x^2)^4},\qquad f'''(c)=\frac{192c(4+c^2)}{(4-c^2)^4}.$$

Orain, Maclaurinen formula idatziko dugu:

$$f(x)=2+\frac{0}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{f'''(c)}{3!}x^3=2+\frac{x^2}{2}+\frac{f'''(c)}{6}x^3, \quad c\in(0,x) \quad \text{edo} \quad c\in(x,0) \quad \text{izanik.}$$

Eta $x=0,1$ eginez,

$$f(0,1)=2+\frac{0,1^2}{2}+\frac{f'''(c)}{6}0,1^3=2+\frac{0,01}{2}+\frac{f'''(c)}{6}0,1^3, \quad c\in(0,0'1) \quad \text{izanik.}$$

$f(0,1)\cong 2+\dfrac{0,01}{2}=2,005$ da eta egiten den errorea $\left|\dfrac{1}{6}\dfrac{192c(4+c^2)}{(4-c^2)^4}0,001\right|$ da.

$0<c<0,1$ dela jakinda, froga liteke $c(4+c^2)<\dfrac{401}{1000}$ eta $\dfrac{1}{(4-c^2)^4}<\left(\dfrac{100}{399}\right)^4$ betetzen direla. Hortik, beraz, errorearen bornapen hau atera genezake:

$$\left|\frac{1}{6}\frac{192c(4+c^2)}{(4-c^2)^4}0,001\right|<\frac{1.283.200}{399^4}=0,0000506294...$$

16.2. Funtzioaren puntu kritikoak

Funtzioa honela ere idatz dezakegu: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{x^2-4}, & x<-2,\\[2ex] \dfrac{8}{4-x^2}, & -2<x<2,\\[2ex] \dfrac{8}{x^2-4}, & 2<x.\end{cases}$

Eta horren deribatu funtzioa hau da: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-16x}{(x^2-4)^2}, & x<-2,\\[2ex] \dfrac{16x}{(4-x^2)^2}, & -2<x<2,\\[2ex] \dfrac{-16x}{(x^2-4)^2}, & 2<x.\end{cases}$

Mutur erlatiboak bilatzeko, puntu kritikoak bilatuko ditugu. Baldintza beharrezkoa lehenengo deribatua anulatzea da: $f'(x)=0 \Longrightarrow x=0$ puntuan baino ez da betetzen, hots, hori da funtzioaren puntu kritiko bakarra.

Maclaurinen garapenean jatorriaren inguruan kalkulatu dugun bigarren deribatuaz baliatuz, $f''(0)=1>0$ dela esan dezakegu; beraz, funtzioak $x=0$ puntuan minimo erlatibo bat dauka, eta $f(0)=2$ da.

Alde batetik, funtzioak ez du maximo absoluturik, $x=\pm 2$ puntuetan $+\infty$-ra hurbiltzen delako.

Beste aldetik, funtzioak ez du minimo absoluturik, beti positiboa delako eta inoiz ez delako 0 izango (ikus irudia).

16.3. Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna

$x<-2$ denean, $f'(x)>0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da $(-\infty,-2)$ tartean.

$-2<x<0$ denean, $f'(x)<0$ da; beraz, funtzioa beherakorra da $(-2,0)$ tartean.

$0<x<2$ denean, $f'(x)>0$ da; beraz, funtzioa gorakorra da $(0,2)$ tartean.

$2<x$ denean, $f'(x)<0$ da; beraz, funtzioa beherakorra da $(2,\infty)$ tartean.

Funtzioaren inflexio-puntuak eta funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna

Funtzioaren bigarren deribatu hau da: $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{64+48x^2}{(x^2-4)^3}, & x<-2,\\[2ex] \dfrac{64+48x^2}{(4-x^2)^3}, & -2<x<2,\\[2ex] \dfrac{64+48x^2}{(x^2-4)^3}, & 2<x.\end{cases}$

$f''(x)$ ez da inon anulatzen, eta kasu guztietan positiboa da; beraz, funtzioa ahurra da $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ eta $(2,\infty)$ tarteetan.

Funtzioaren asintotak

Bi etenune ditu, $x=-2$ eta $x=2$ puntuetan.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{8}{x^2-4}=\infty$ eta $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{8}{4-x^2}=\infty$ dira;

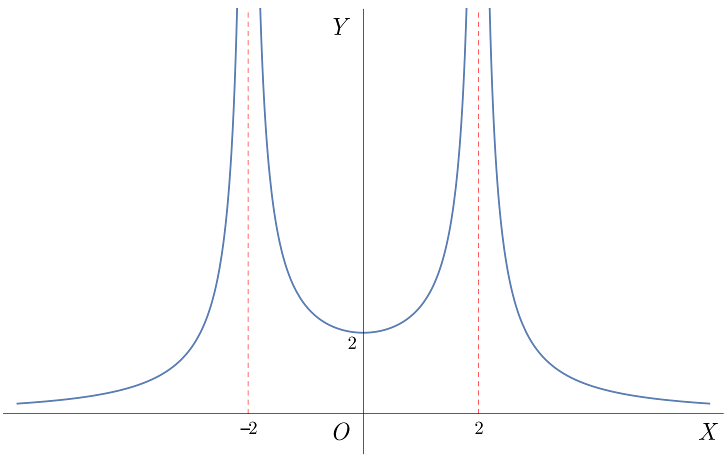
$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{8}{4-x^2}=\infty$ eta $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{8}{x^2-4}=\infty$ dira;

beraz, $x=-2$ eta $x=2$ zuzenak funtzioaren asintota bertikalak dira.

Bestalde, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x^2-4}=0$ eta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2-4}=0$ dira;

beraz, $y=0$ zuzena funtzioaren asintota horizontala da $-\infty$ eta ∞ aldera.

Horren ondorioz, ez dago asintota zeiharrik.



7.4. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren:
   1.1. $f(x)$ funtzioak $x=a$ puntuan minimo erlatiboa dauka eta ez da deribagarria.
   1.2. $f'(a)$ existitzen bada eta $x=a$ puntuan mutur erlatiboa badago, $f'(a)=0$ izango da.

2. Kalkula itzazu $f(x)=x^3-5x^2+3x+23$ funtzioaren muturrak $[0,5]$ tartean.

3. 3.1. Froga ezazu ondoko funtzioak badituela maximoa eta minimoa $[-1,1]$ tartean.
   3.2. Kalkula itzazu horren mutur erlatiboak eta absolutuak emandako tartean.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x\le 0,\\ |x\ln x|, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

4. Bila itzazu ondoko funtzioen mutur erlatiboak:
   1) $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1;$ 2) $y=x\ln x;$ 3) $y=x-\arctan x;$
   4) $y=2\sin 2x+\sin 4x;$ 5) $y=\sin^3 x-\cos^3 x;$ 6) $y=\dfrac{e^x}{x}.$

5. Izan bedi $f(x)=\begin{cases} \ln\dfrac{1}{1-x}, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 2x^2-7x+6, & 1\le x,\end{cases}$ funtzioa.
   5.1. Azter itzazu funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna.
   5.2. Ba al du mutur absoluturik $[1,3]$ tartean? Arrazoi ezazu erantzuna eta, egonez gero, saia zaitez kalkulatzen.
   5.3. Kalkula itzazu Taylorren 3 mailako polinomioak $x=-1$ eta $x=2$ puntuetan.

6. Kalkula itzazu $f(x)=x^2e^{1/x}$ funtzioaren mutur absolutu eta erlatiboak $[-1,2]$ tartean.

7. Bila itzazu $y=2\sin x+\cos 2x$ funtzioaren mutur erlatiboak $[0,2\pi]$ tartean.

8. Zenbat luze-zabal da zilindro bat horren azalera osoa minimoa izan dadin, horren bolumena B bada?

9. a aldeko latorrizko xafla karratu batekin bolumenik handiena duen tiradera irekia egin nahi da. Latorriaren angeluetan karratuak moztutakoan tolestu egiten da tiradera eratzeko. Zenbat luze izango da moztutako karratuen aldea?

10. Egin itzazu ondoko funtzioen adierazpen grafikoak:
    1) $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x};$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}};$ 3) $f(x)=x^2e^{1/x};$
    4) $f(x)=3^x+3^{-x};$ 5) $f(x)=x+\sin x;$ 6) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$
    7) $f(x)=e^{2x\ln x};$ 8) $f(x)=\ln(x^2+x-2);$ 9) $f(x)=x^2(x-3).$

Bibliografia

1. Lorenzo Abellanas, Alberto Galindo: *Métodos de Cálculo.* Mc Graw-Hill, Madril, 1989.
2. Joserra Aizpurua, Patxi Angulo: *Bektoreak eta zenbaki konplexuak.* Elhuyar, Usurbil, 1994.
3. Patxi Angulo: *Deribatuak eta integralak.* Elhuyar, Usurbil, 1994.
4. Patxi Angulo: *Funtzioen adierazpen grafikoa.* Elhuyar, Usurbil, 1994.
5. Tom M. Apostol: *Análisis Matemático.* Ed. Reverté, Bartzelona, 1977.
6. Frank Ayres Jr.: *Cálculo Diferencial e Integral.* Mc Graw-Hill, Mexiko, 1987.
7. Boris Demidovich: *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Paraninfo, Madril, 1976.
8. Félix Galindo, Javier Sanz, Luis A. Tristán: *Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable.* Thomson, Madril, 2003.
9. Fernando García, Andrés Gutiérrez: *Cálculo Infinitesimal I, 1 eta 2.* Pirámide, Madril, 1987.
10. Francisco Granero: *Cálculo.* Mc Graw-Hill, Madril, 1990.
11. Francisco Granero: *Cálculo infinitesimal.* Mc Graw-Hill, Madril, 1995.
12. José Martínez Salas: *Elementos de Matemáticas.* Valladolid, 1979.
13. Nikolai Piskunov: *Kalkulu Diferentziala eta Integrala.* 2. arg., UEU, Bilbo, 2009.
14. Maria Jose Zarate: *Matematika Orokorra I, 1. partea.* UEU, Bilbo, 1980.
15. Irudiak Wolfram *Mathematica* aplikazioarekin eginda daude.

Kontzeptuen Aurkibidea

N

O

P

R

S

T

U

Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Bioestatistika
Arantza Urkaregi
1991n argitaratua
ISBN: 84-86967-37-6

Kalkulu diferentziala eta integrala I
Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-47-3

Kalkulu diferentziala eta integrala II
Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-48-1

Ekuazio diferentzialak. Aplikazioak eta ariketak
Elena Agirre (euskaratzailea)
1994an argitaratua
ISBN: 84-86967-63-5

Optimizazioa. Programazio lineala
Victoria Fernandez eta Ana Zelaia
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-65-1

Estatistikarako Sarrera
Karmele Fernandez
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-70-8

Estatistikarako Sarrera. Ariketak
Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1997an argitaratua
ISBN: 84-86967-80-5

Estatistika I eta Estatistika II. Ariketak
Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-79-1

R Hasiberrientzat
Gorka Azkune eta Yosu Yurramendi (itzul.)
2005ean PDFn argitaratua
ISBN: 84-86967-077-7

Estatistikaren oinarriak. Ariketak
Elena Agirre Basurko
2006an argitaratua
ISBN: 84-86967-079-3

Kalkulu diferentziala eta integrala (2. argitalpena)
Patxi Angulo
2009an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-236-2

Erregresio lineala, bariantza-analisiak eta hipotesi-testak. Datu-analisirako lanabesak
Xabier Isasi Balanzategi
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-290-4

Estatistikaren Oinarriak. Ariketak (2. argitalpena)
Elena Agirre Basurko
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-288-1

Ekuazio diferentzial arruntak askatzeko zenbakizko metodoak
Elisabete Alberdi Celaya
2012an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-419-9

R Commander eta Datuen Analisia
Paula Elosua Oliden, Juan Etxeberria Murgiondo
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-443-4

Irakaslegaientzako matematika eta bere didaktika
Jesús García, Josu Gotzon Ruiz de Gauna, Joxemari Sarasua
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-445-8

Aljebra: teoria eta ariketak. Mathematica programaren aplikazioa
Elisabete Alberdi Celaya, Isabel Eguia Romero, Aitziber Unzueta Inchaurbe
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-466-3

Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz
Aitzol Lasa Oyarbide
2015ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-535-6