9. Gaia

Aldagai konplexuko funtzioak

9.1 Oinarrizko definizioak eta adibideak

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$. f aldagai konplexuko funtzio konplexua Ω multzoko puntu bakoitza zenbaki konplexu batekin erlazionatzen duen erregela da,

$$\begin{aligned} f\colon \Omega &\to \mathbb{C} \\ z &\rightsquigarrow w = f(z). \end{aligned}$$

$z \in \Omega$ zenbaki konplexua denez, forma binomikoan idatz dezakegu, $z = x + yi$. Era berean, $f(z) \in \mathbb{C}$ denez, bere forma binomikoa dugu, $f(z) = u + iv$. Normalean, honela idatziko dugu

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Beraz, f-rekin lotuta bi aldagaiko bi funtzio erreal ditugu edo, beste modu batean esanda, bektore-eremu bat $\mathbb{R}^2$ planoan,

$$\begin{aligned} (u,v)\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\rightsquigarrow (u(x,y), v(x,y)). \end{aligned}$$

Adibideak.

(i) $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

(ii) $f(z) = |z|$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x,y) = 0.$$

$f(z) = \arg z$ ere balio errealetako funtzioa da. $\arg z$ funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{C} - \{0\}$ da.

$$\tan u(x,y) = \frac{y}{x}, \quad v(x,y) = 0.$$

9.2 Limiteak eta jarraitutasuna

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$. $z \in \mathbb{C}$ Ω-ren metatze-puntua dela diogu baldin eta

$$\forall r > 0, \quad (B_r(z) - \{z\}) \cap \Omega \neq \emptyset$$

edo beste modu batean esanda, baldin eta

$$\forall r > 0 \quad \exists w \in \Omega, \ w \neq z \ : \ |w - z| < r.$$

Hau da, z-tik nahi dugun bezain hurbil, badago z-tik desberdina den Ω-ren punturen bat.

Definizioa. Izan bedi $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta izan bitez $z_0, l \in \mathbb{C}$, z_0 Ω-ren metatze-puntua izanik. f funtzioaren z_0 puntuko limitea l zenbakia dela diogu eta $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ idatzi, baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ 0 < |z - z_0| < \delta, z \in \Omega \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$ Ω-ren metatze-puntua. f funtzioaren z_0 puntuko limitea infinitua dela diogu eta $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ idatzi, baldin eta

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ 0 < |z - z_0| < \delta, z \in \Omega \Longrightarrow |f(z)| > M.$$

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$ non $\Omega \cap \{z \ : \ |z| > M\} \neq \emptyset$ M guztietarako. f funtzioaren ∞-ko limitea $l \in \mathbb{C}$ da eta $\lim_{z \to \infty} f(z) = l$ idazten dugu baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K > 0 \ : \ |z| > K, z \in \Omega \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

f funtzioaren ∞-ko limitea ∞ da eta $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ idazten dugu baldin eta

$$\forall M > 0 \quad \exists K > 0 \ : \ |z| > K, z \in \Omega \Longrightarrow |f(z)| > M.$$

Proposizioa 9.1. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ Ω-ren metatze-puntua, eta $l = l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$.*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \text{ eta } \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = l_2.$$

Froga. Bi inplikazioak frogatuko ditugu. Horretarako, gogora dezagun $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ eta $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x,y) - (x_0,y_0)\|$.

$\Longrightarrow$) Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ denez,

$$\exists \delta > 0 \ : \ 0 < |z - z_0| < \delta, z \in \Omega \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

$|u(x,y) - l_1| = |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} l| \leq |f(z) - l|$ eta $|v(x,y) - l_2| = |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} l| \leq |f(z) - l|$ direnez, $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| = |z - z_0| < \delta$ denean, $|u(x,y) - l_1| < \epsilon$ eta $|v(x,y) - l_2| < \epsilon$, hau da, $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = l_1$ eta $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = l_2$.

$\Longleftarrow$) Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = l_1$ eta $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = l_2$ direnez, existitzen dira $\delta_1 > 0$ eta $\delta_2 > 0$ non

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| = |z - z_0| < \delta_1 \Longrightarrow |u(x,y) - l_1| < \frac{\epsilon}{2},$$
$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| = |z - z_0| < \delta_2 \Longrightarrow |v(x,y) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Orduan, $0 < |z - z_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ bada,

$$|f(z) - l| \leq |u(x,y) - l_1| + |v(x,y) - l_2| < \epsilon,$$

hau da, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$. □

Proposizioa 9.2. *Izan bitez $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 Ω-ren metatze-puntua eta $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = m$.*

(i) $$\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) = \begin{cases} l+m, & l, m \in \mathbb{C}, \\ \infty & l = \infty, m \in \mathbb{C};\ \textit{edo}\ l \in \mathbb{C}, m = \infty; \\ \textit{ind.}, & l = m = \infty. \end{cases}$$

(ii) $$\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = \begin{cases} lm, & l, m \in \mathbb{C}, \\ \infty & l = \infty, m \neq 0,\ \textit{edo}\ m = \infty, l \neq 0,\ \textit{edo}\ l = m = \infty, \\ \textit{ind.}, & l = 0, m = \infty. \end{cases}$$

(iii) $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \dfrac{l}{m}, & l, m \in \mathbb{C}, m \neq 0, \\ \infty & l = \infty, m \in \mathbb{C},\ \textit{edo}\ m = 0, l \in \mathbb{C}, \\ 0, & l \in \mathbb{C}, m = \infty, \\ \textit{ind.}, & l = m = 0,\ \textit{edo}\ l = m = \infty. \end{cases}$$

(iv) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$, $\lim\limits_{z\to l} g(z) = m$ *badira* $\lim\limits_{z\to z_0} g(f(z)) = m$.

Adibideak.

- $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z-i} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{(z+i)(z-i)}{z-i} = \lim\limits_{z\to i}(z+i) = 2i.$

- $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^3+1}{z^4+5} = 0.$

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. f funtzioa z_0 puntuan jarraitua dela diogu baldin eta $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ bada.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$ Ω-ren metatze-puntua. f ez bada jarraitua z_0 puntuan orduan z_0 f-ren etengunea edo eten-puntua dela diogu.

z_0 f-ren etengunea bada baina $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ bada, orduan z_0 f-ren etengune gaindigarria dela diogu. $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ berdefinituz, f jarraitua da z_0-n.

Proposizioa 9.3. *Izan bitez* $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ *eta* $z_0 \in \Omega$, $z_0 = x_0 + iy_0$. f z_0 *puntuan jarraitua da baldin eta soilik baldin* u *eta* v *jarraituak badira* (x_0, y_0) *puntuan.*

Proposizioa 9.4. *Izan bitez* $z_0 \in \Omega$ *eta* $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ z_0 *puntuan jarraituak. Orduan,*

(i) $f + g$ *eta* fg *jarraituak dira* z_0*-n.*

(ii) $g(z_0) \neq 0$ *bada, orduan* $\dfrac{f}{g}$ *jarraitua da* z_0*-n.*

(iii) g *jarraitua bada* $f(z_0)$ *puntuan orduan* $g \circ f$ *jarraitua da* z_0*-n.*

Adibideak.

- $f(z) = \dfrac{1}{z}$ jarraitua da puntu guztietan $z_0 = 0$ puntuan izan ezik.
- $f(z) = \dfrac{z+1}{z^3+1}$ ez da jarraitua $\sqrt[3]{-1}$ puntuetan, baina

  gogoratu: $\sqrt[3]{-1} = (e^{\pi i})^{1/3} = \{-1, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{5\pi}{3}i}\}$

$$\lim_{z\to -1} \frac{z+1}{z^3+1} = \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{1}{3},$$

  beraz $z_0 = -1$ f-ren etengune gaindigarria da.

  $z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$ eta $z_2 = e^{\frac{5\pi}{3}i}$ puntuetan limitea ∞ da, hortaz, ez gaindigarria.

- $f(z) = \dfrac{x^3 - iy^3}{x^2+y^2}$ ez da jarraitua $z_0 = 0$ puntuan, definituta ez dagoelako puntu honetan, baina

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} - i \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0 + i0 = 0,$$

  Polarretan kalkulatu!

  beraz $z_0 = 0$ f-ren etengune gaindigarria da.

- $f(z) = |z|$ jarraitua da puntu guztietan.

  Aldiz, $f(z) = \arg z$, $\mathbb{C} - \{0\}$ multzoan definiturik, ez da jarraitua zenbaki erreal negatiboetan. Izan bedi $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}^-$,

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z = x_0+iy,\, y>0}} \arg z = \pi,$$

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z = x_0+iy,\, y<0}} \arg z = -\pi.$$

$\left[\text{L'Hopital-en erregelak balio du limiteak kalkulatzeko!}\right]$

Beraz, $\lim_{z\to z_0} \arg z$ ez da existitzen eta $\arg z$ ez da jarraitua z_0-n.

Gauza bera gertatzen da beste edozein argumentu kontsideratzen badugu. Adibidez, $f(z) = \theta$ bada, non $\theta \in \operatorname{Arg} z \cap [0, 2\pi)$, f ez da jarraitua zenbaki erreal positiboetan. Orokorrean, $\alpha \in \mathbb{R}$ finkoa bada, $f(z) = \theta$, non $\theta \in \operatorname{Arg} z \cap [\alpha, 2\pi + \alpha)$ den, ez da jarraitua $z_r = re^{i\alpha}$ moduko puntuetan, $\forall r > 0$.

9.3 Deribatu konplexua

Definizioa. Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. f z_0 puntuan deribagarria dela diogu baldin eta

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

zenbaki konplexua bada. Kasu honetan, limite hau $f'(z_0)$ adierazpenaren bidez idazten da eta f-ren z_0 puntuko deribatua dela esaten da.

Adibideak.

- $f(z) = z$.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1 \implies f'(z) = 1,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

- $f(z) = \overline{z}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

h zenbaki konplexua da. Bi limite norabidetu kalkulatuko ditugu, lehenengo eta behin h erreala hartuz,

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{h}}{h} = 1,$$

eta orain h irudikaria hartuz, hau da iy modukoa, y erreala izanik,

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h=iy, y\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{h}}{h} = -1.$$

Bi limite hauek desberdinak direnez, f ez da inon deribagarria.

- $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$.

$z_0 = 0$ bada,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0,$$

beraz $f'(0) = 0$. Baina $z_0 \neq 0$ bada,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)(\overline{z_0+h}) - z_0\overline{z_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{z_0\overline{h} + h\overline{z_0} + h\overline{h}}{h} = \overline{z_0} + \lim_{h\to 0}\Big(z_0\frac{\overline{h}}{h} + \overline{h}\Big)\end{aligned}$$

eta limite hau ez da existitzen.

Beraz, $f(z) = |z|^2$ deribagarria da soilik $z_0 = 0$ puntuan.

Proposizioa 9.5. *Izan bitez $z_0 \in \Omega$ eta $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ z_0 puntuan deribagarriak.*

(i) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(ii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

(iii) $g(z_0) \neq 0$ *bada,* $\Big(\dfrac{f}{g}\Big)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$.

(iv) $f\colon \Omega_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eta* $g\colon \Omega_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *badira,* $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ *izanik, f z_0 puntuan deribagarria eta g $f(z_0)$ puntuan deribagarria, orduan*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Proposizioa 9.6. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. f z_0-n deribagarria baldin bada, orduan jarraitua da z_0-n.*

Froga. Frogatu behar dugu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ dela, hau da $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z) - f(z_0)) = 0$ dela. f deribagarria denez, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$, beraz limiteen propietateak erabiliz,

$$\lim_{z\to z_0}(f(z) - f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Ikus dezagun orain zer erlazio dagoen $f = u + iv$ funtzioaren deribagarritasun eta u, v funtzioen diferentziagarritasunaren artean.

Definizioa. Izan bitez $u\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $(x_0, y_0) \in D$. u (x_0, y_0) puntuan diferentziagarria dela diogu baldin eta existitzen badira $A, B \in \mathbb{R}$ non

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

$A = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ eta $B = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ dira.

Oharra. Izan bitez $u\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, eta $(x_0, y_0) \in D$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$ jarraituak baldin badira (x_0, y_0)-n, hau da, u C^1 klasekoak badira (x_0, y_0) puntuan, orduan u diferentziagarria da (x_0, y_0)-n. Alderantzizkoa ez da egia, hau da, u_x eta u_y ez dira jarraituak izan behar u diferentziagarria izateko.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ eta $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. f z_0 puntuan diferentziagarria dela diogu baldin eta u eta v diferentziagarriak badira (x_0, y_0) puntuan.

Adibidea. $f(z) = \overline{z} = x - iy$ diferentziagarria da puntu guztietan zeren eta $u(x, y) = x$ eta $v(x, y) = -y$ diferentziagarriak baitira $\mathbb{R}^2$ planoko puntu guztietan.

Hala ere, ikusi dugu f ez dela deribagarria, beraz diferentziagarritasuna ez da nahikoa deribagarritasuna ziurtatzeko.

Teorema 9.7. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ eta $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. f z_0 puntuan deribagarria da baldin eta soilik baldin f diferentziagarria bada eta*

$$
\begin{aligned}
u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0), \\
u_y(x_0, y_0) &= -\, v_x(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Bi berdintza hauek Cauchy-Riemannen baldintzak dira.

Gainera, f deribagarria bada z_0 puntuan, orduan

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= (u_x + iv_x)(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\
&= (v_y - iu_y)(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Froga. $\Longrightarrow$) Lehenengo eta behin, suposa dezagun f deribagarria dela z_0 puntuan.

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.
\end{aligned}
$$

Egin dezagun limitea $x \to x_0$ doanean $y = y_0$ hartuta,

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{(x - x_0)} \\
&= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Orain, beste limite norabidetu bat egingo dugu, $x = x_0$ hartuz eta $y \to y_0$. Honela,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y)+iv(x_0,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{i(y-y_0)} \\ &= -\,i \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0} + \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{(y-y_0)} \\ &= -\,iu_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Bi limite norabidetuak berdinak direnez, parte errealak eta irudikariak berdinduz,

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0), \\ u_y(x_0,y_0) &= -\,v_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Gainera, u eta v diferentziagarriak direla frogatu nahi dugu. f deribagarria denez z_0 puntuan,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0$$

Parte errealak hartuz, eta Cauchy-Riemannen bigarren baldintza erabiliz,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(x-x_0)+v_x(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(x-x_0)-u_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}. \end{aligned}$$

Beraz, u diferentziagarria da (x_0, y_0) puntuan. Bestalde, parte irudikariak hartuz, eta Cauchy-Riemannen lehenengo baldintza erabiliz,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(y-y_0)-v_x(x_0,y_0)(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-v_x(x_0,y_0)(x-x_0)-v_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \end{aligned}$$

eta v ere diferentziagarria da (x_0, y_0) puntuan.

$\Longleftarrow$) Demagun orain u eta v diferentziagarriak direla (x_0, y_0) puntuan eta Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dituztela. Frogatuko dugu

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

dela.

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - u_x(x_0,y_0) - iv_x(x_0,y_0)\right| = \\
&\quad = \left|\frac{u(x.y)-u(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(x-x_0)+v_x(x_0,y_0)(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}\right. \\
&\qquad \left. + i\,\frac{(v(x,y)-v(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(y-y_0)-v_x(x_0,y_0)(x-x_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}\right| \\
&\quad \leq \frac{|u(x.y)-u(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(x-x_0)+v_x(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\
&\qquad + \frac{|v(x,y)-v(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(y-y_0)-v_x(x_0,y_0)(x-x_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.
\end{aligned}
$$

Cauchy-Riemannen baldintzak kontuan izanda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{|u(x.y)-u(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(x-x_0)+v_x(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\
&\quad = \frac{|u(x.y)-u(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(x-x_0)-u_y(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0
\end{aligned}
$$

u diferentziagarria delako. Modu berean, Cauchy-Riemannen lehenengo baldintza erabiliz,

$$
\begin{aligned}
&\frac{|v(x,y)-v(x_0,y_0)-u_x(x_0,y_0)(y-y_0)-v_x(x_0,y_0)(x-x_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\
&\quad = \frac{|v(x,y)-v(x_0,y_0)-v_y(x_0,y_0)(y-y_0)-v_x(x_0,y_0)(x-x_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0
\end{aligned}
$$

v ere diferentziagarria delako. Beraz $f'(z_0)$ existitzen da eta

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) =& u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) \\
=& v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0) = -i(u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0)) \\
=& u_x(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0) \\
=& v_y(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = i(v_x(x_0,y_0) - iv_y(x_0,y_0)).
\end{aligned}
$$

□

Korolarioa 9.8. *u eta v C^1 klasekoak badira eta Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen badituzte (x_0,y_0) puntuan orduan $f = u + iv$ deribagarria da $z_0 = x_0 + iy_0$ puntuan.*

Adibidea. Izan bedi $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

$u(x,y) = e^x \cos y$ eta $v(x,y) = e^x \sin y$ diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^2$ osoan. Gainera,

$$
\begin{aligned}
u_x &= e^x \cos y, \quad v_y = e^x \cos y \implies u_x = v_y, \ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2. \\
u_y &= -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y \implies u_y = -v_x, \ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen direnez, f deribagarria da puntu guztietan, eta

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

Adibidea. Ikusi dugu $f(z) = \overline{z}$ ez dela inon deribagarria. $u(x,y) = x$ eta $v(x,y) = -y$ diferentziagarriak dira puntu guztietan, baina Cauchy-Riemannen baldintzak ez dira betetzen, zeren eta

$$\begin{aligned} u_x &= 1, \quad v_x = 0 \\ u_y &= 0, \quad v_y = -1 \end{aligned}$$

beraz $u_x \neq v_y$ puntu guztietan.

Adibidea. Izan bedi

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{z})^2}{z}, & z \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & z = 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

f-k Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen ditu $z = 0$ puntuan, baina ez da deribagarria puntu horretan. Lehenengo eta behin, aurki ditzagun f-ren parte erreala, u, eta irudikaria, v. $z = x + iy$ bada,

$$\frac{(\overline{z})^2}{z} = \frac{(\overline{z})^3}{|z|^2} = \frac{(x-iy)^3}{x^2+y^2} = \frac{x^3 - 3x^2iy + 3x(iy)^2 - (iy)^3}{x^2+y^2},$$

beraz

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada;} \end{cases}$$

eta

$$v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$$

Deribatu partzialen definizioa erabiliz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1. \end{aligned}$$

Ikusten denez, $u_x(0,0) = v_y(0,0)$ eta $u_y(0,0) = -v_x(0,0)$, beraz f-k Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen ditu.

Ikus dezagun orain f ez dela deribagarria $z = 0$ puntuan.

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{(\overline{z})^2/z}{z} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2,$$

eta limite hau ez da existitzen: $z = x$ erreala bada, $\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 = 1$; eta $z = re^{\pi i/4}$ bada, $\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 = e^{-\pi i} = -1$.

9.4 Funtzio holomorfoak

Definizioa. Izan bedi $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω irekia izanik.

(i) f $z_0 \in \Omega$ puntuan holomorfoa dela diogu baldin eta deribagarria bada z_0 puntuaren ingurune batean, hau da, existitzen bada $r > 0$ non f deribagarria den $B_r(z_0)$ bolako puntu guztietan.

(ii) f Ω-n holomorfoa dela diogu baldin eta holomorfoa bada Ω-ko puntu guztietan.

(iii) f funtzioa osoa dela diogu baldin eta holomorfoa bada $\mathbb{C}$ plano konplexu osoan.

Adibideak.

- Polinomioak osoak dira.
- $\frac{P}{Q}$, P, Q polinomioak izanik, funtzio arrazionalak holomorfoak dira izendatzailea anulatzen ez den puntuetan.
- $f(z) = |z|^2$ deribagarria da soilik $z_0 = 0$ puntuan, beraz ez da inon holomorfoa.

Definizioa. Izan bedi $u\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(D)$. u D-n harmonikoa dela diogu baldin eta bere laplacearra nulua bada puntu guztietan, hots,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy} = 0, \ \forall (x, y) \in D.$$

Teorema 9.9. *Izan bedi $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfoa, $f = u + iv$, $u, v \in C^2$ izanik. Orduan u eta v harmonikoak dira Ω-n.*

Froga. f holomorfoa denez, Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen ditu. Orduan

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

hau da, $\Delta u = 0$. Era berean,

$$v_{xx} = (v_x)_x = (-u_y)_x = -(u_x)_y = -(v_y)_y = -v_{yy}. \qquad \square$$

Proposizioa 9.10. *Izan bedi f holomorfoa multzo ireki eta konexu batean.* $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ *edo* $|f|$ *konstantea bada,* f *ere konstantea da.*

Froga. f holomorfoa bada multzo ireki konexu batean, orduan Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen ditu multzo horretan, hau da, f-ren parte erreala u eta parte irudikaria v badira, $u_x = v_y$ eta $u_y = -v_x$.

(i) u konstantea bada, $u_x = u_y = 0$ dira multzoko puntu guztietan. Cauchy-Riemannen baldintzengatik, $v_x = v_y = 0$ multzoko puntu guztietan eta ondorioz, v konstantea da. u eta v konstanteak direnez, f bera konstantea da.

(ii) v konstantea bada, $v_x = v_y = 0$ dira multzoko puntu guztietan. Cauchy-Riemannen baldintzengatik, $u_x = u_y = 0$ multzoko puntu guztietan eta ondorioz, u konstantea da, beraz, f ere.

(iii) $|f|$ konstantea bada, orduan $|f|^2 = u^2 + v^2$ ere konstantea da. Bitan deribatuz x-rekiko alde batetik eta y-rekiko bestetik,

$$\begin{aligned} 2uu_x + 2vv_x = 0 &\iff 2\big((u_x)^2 + uu_{xx} + (v_x)^2 + vv_{xx}\big) = 0, \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 &\iff 2\big((u_y)^2 + uu_{yy} + (v_y)^2 + vv_{yy}\big) = 0. \end{aligned}$$

Azken bi adierazpenak batuz,

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 + (v_x)^2 + (v_y)^2 + u\Delta u + v\Delta v = 0.$$

f holomorfoa denez, u eta v harmonikoak dira, $\Delta u = \Delta v = 0$, alegia. Ondorioz, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ dira, beraz u eta v konstanteak eta f ere. □

Definizioa. Izan bitez $u, v \colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 klasekoak. u eta v funtzio harmoniko konjugatuak direla diogu baldin eta u eta v harmonikoak badira eta Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen badituzte Ω-n, hots, $f = u + iv$ holomorfoa bada Ω-n.

Oharra. Aurrerago ikusiko dugu f Ω-n holomorfoa denean f' ere holomorfoa dela Ω-n. Indukzioz f-k ordena guztietako deribatu holomorfoak ditu. Beraz, $f = u + iv$ holomorfoa bada, $u, v \in C^\infty$.

Teorema 9.11. *Izan bedi* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *eremu sinpleki konexua eta izan bedi* $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ *harmonikoa* Ω*-n. Orduan existitu egiten da* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *funtzio holomorfoa non* $\operatorname{Re} f = u$, *hau da, existitzen da* $v \in C^2(\Omega)$ u*-ren harmoniko konjugatua. Gainera,* f *(eta ondorioz* v*) bakarra da konstante batengatik izan ezik.*

Oharra. Ω ez bada sinpleki konexua, ezin da ziurtatu aurreko teoremak dioena egia denik.

Izan bedi $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$. Funtzio hau harmonikoa da $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ eremuan.

$$u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$u_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad u_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Beraz $u_{xx} + u_{yy} = 0, \ \forall\,(x,y) \neq (0,0)$.

Demagun orain existitu egiten dela u-ren harmoniko konjugatua, v, eta defini dezagun

$$g(t) = v(\cos t, \sin t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Deribatzen dugu eta kontuan hartzen ditugu Cauchy-Riemannen baldintzak:

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\sin t\, v_x(\cos t, \sin t) + \cos t\, v_y(\cos t, \sin t) \\ &= \sin t\, u_y(\cos t, \sin t) + \cos t\, u_x(\cos t, \sin t) \\ &= \sin t \frac{2\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \cos t \frac{2\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2. \end{aligned}$$

Beraz, $g(t) = 2t + k$, k konstante bat izanik. Gainera, $t = 0$ hartuz, $g(0) = k$, hau da, $g(t) = 2t + g(0)$. Izan bedi orain $t = 2\pi$.

$$\begin{aligned} g(2\pi) = 4\pi + g(0) &\Longrightarrow v(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = 4\pi + v(\cos 0, \sin 0) \\ &\Longrightarrow v(1,0) = 4\pi + v(1,0) \Longrightarrow 4\pi = 0!!! \end{aligned}$$

Kontraesan batera heldu gara eta arrazoia da $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ez dela eremu sinpleki konexua, beraz ezin dugu ziurtatu u-ren harmoniko konjugatua existitzen denik.

Adibidea. Izan bedi $u(x,y) = x^2 - y^2$. Lehenengo eta behin egiaztatuko dugu u harmonikoa dela, eta gero kalkulatuko dugu bere harmoniko konjugatua.

$$\begin{aligned} &u_x = 2x, \quad u_y = -2y \\ &u_{xx} = 2, \quad u_{yy} = -2 \Longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0, \ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

u harmonikoa da $\mathbb{R}^2$ osoan. Aurkitu nahi dugu orain v non (u,v) bikoteak Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dituen: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

$$\begin{aligned} &v_x = -u_y = -(-2y) = 2y \Longrightarrow v(x,y) = 2xy + h(y), \\ &v_y = u_x \Longrightarrow 2x + h'(y) = 2x \Longrightarrow h'(y) = 0. \end{aligned}$$

Orduan $v(x,y) = 2xy + k$, $k \in \mathbb{R}$ edozein izanik, u-ren harmoniko konjugatua da.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + i(2xy + k) = z^2 + ki$$

holomorfoa da.

Adibidea. $u(x,y) = e^x \cos y$ funtzio harmonikoa da $\mathbb{R}^2$ osoan, zeren eta

$$\begin{aligned} &u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y \\ &u_{xx} = e^x \cos y, \quad u_{yy} = -e^x \cos y \implies u_{xx} + u_{yy} = 0, \; \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Kalkula dezagun orain bere harmoniko konjugatua.

$$\begin{aligned} &v_x = -u_y = e^x \sin y \implies v(x,y) = e^x \sin y + h(y) \\ &v_y = u_x \implies e^x \cos y + h'(y) = e^x \cos y \implies h'(y) = 0. \end{aligned}$$

u-ren harmoniko konjugatua $v(x,y) = e^x \sin y + k$ da, k edozein konstante izanik, eta

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y + ki$$

holomorfoa da.

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

9. Gaia: ALDAGAI KONPLEXUKO FUNTZIOAK

Ariketak

1. Aurki itzazu ematen diren Ω multzoen f funtzioaren bidezko irudi-multzoak, adierazpen grafikoa eginez:

   (i) $f(z) = z^3$, $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \arg z < \pi/2,\ 0 < |z| < +\infty\}$

   (ii) $f(z) = 2iz$, $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2,\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$

   (iii) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$

2. Azter ezazu honako funtzio hauen jarraitutasuna. Kalkula ezazu, halaber, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

   (i) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-i}$ — *Em.:* i gaind., $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

   (ii) $f(z) = \dfrac{z^4+16}{z^4-16}$ — *Em.:* $\pm 2, \pm 2i$ ez gaind., $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$.

   X (iii) $f(z) = \dfrac{z^4-z^2}{z^8+z^5-z^4-z}$ — *Em.:* $0, 1$ gaind., $-1, \pm i, \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ez gaind., $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

   (iv) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$ — *Em.:* -1 gaind., $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ez gaind.; $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

3. Azter ezazu funtzio hauen deribagarritasuna:

   (i) $f(x+iy) = x^2 + xy - i(y+1)$ — *Em.:* Derib. $z = -i$ puntuan.

   (ii) $f(x+iy) = (x+1) + iy^2$ — *Em.:* Derib. $z = x + \dfrac{i}{2}$ puntuetan, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

   (iii) $f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 - 2xy)$ — *Em.:* Derib. $z = 0$ puntuan.

4. Izan bedi $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ non $z = r\,e^{i\theta}$ den. Froga ezazu Cauchy-Riemannen baldintzak koordenatu polarretan hurrengo moduan idazten direla:

$$ru_r = v_\theta, \qquad rv_r = -u_\theta.$$

   Cauchy-Riemannen baldintzak polarretan aplikatuz, azter ezazu honako funtzio hauen deribagarritasuna:

   (i) $f(z) = z^{27}$ — *Em.:* f deribagarria da puntu guztietan.

   (ii) $f(z) = |z|\,z^2$ — *Em.:* f deribagarria $z = 0$ puntuan soilik.

5. Azaldu ezazu zergatik funtzio hauek ez diren inon holomorfoak:

   (i) $f(x+iy) = xy + iy$

   (ii) $f(x+iy) = e^y(\cos x + i\sin x)$

6. Aurki itzazu $f(x+iy) = u(x) + iv(y)$ moduan adieraz daitezkeen funtzio holomorfo guztiak.

   Em.: $f(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{C}$.

7. Froga ezazu $f(z)$ $\mathbf{C}$-n holomorfoa bada, $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ ere holomorfoa dela. Zer esan dezakegu $h(z) = f(\overline{z})$ funtzioari buruz?

8. Zer baldintza bete behar dute $u(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ funtzioaren koefizienteek harmonikoa izan dadin? Baldintza betetzen bada, kalkulatu harmoniko konjugatua.

9. Izan bedi $u(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + x + 1$.

   (i) Froga ezazu u harmonikoa dela plano osoan.

   (ii) Aurki ezazu f funtzio holomorfoa, bere parte erreala u izanik.

   Em.: $f(z) = -iz^4 + z + 1 + \alpha i$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (iii) Aurki ezazu g funtzio holomorfoa, bere parte irudikaria u izanik.

   Em.: $g(z) = z^4 + iz + \beta + i$, $\beta \in \mathbf{R}$.

   (iv) Azaldu ezazu f eta g funtzioen arteko erlazioa.

10. v funtzioa u-ren harmoniko konjugatua bada, froga ezazu uv eta $e^u \cos v$ funtzio harmonikoak direla.

11. Aurki itzazu k-ren balioak, $u(x,y) = (e^{2y} + e^{ky}) \sin 2x$ funtzioa harmonikoa izan dadin. Kalkula ezazu bere harmoniko konjugatua posible den kasuetan.

    Em.: $k = 2$, $v(x,y) = 2e^{2y} \cos 2x + \alpha$; $k = -2$, $v(x,y) = (e^{2y} - e^{-2y}) \cos 2x + \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

12. Esan ezazu honako funtzio hauek harmonikoak diren (posible den tokietan) eta kalkula itzazu haien harmoniko konjugatuak:

    (i) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2$ — Em.: $\nexists$

    (ii) $u(x,y) = e^x \cos y$ — Em.: $v(x,y) = e^x \sin y + k$

    (iii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ — Em.: $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + k$

1. ARIKETA

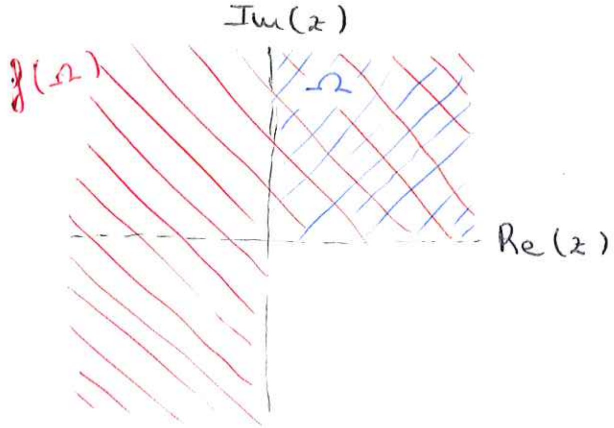
i) $f(z)=z^3$, $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: 0<\arg z<\pi/2,\ 0<|z|<+\infty\}$

$z=r\cdot e^{i\alpha}$ bada eta $z\in\Omega$, $r\in(0,\infty)$ eta $\alpha\in(0,\pi/2)$

$f(z)=f(r\cdot e^{i\alpha})=(r\cdot e^{i\alpha})^3=r^3\cdot e^{i3\alpha}=\rho\cdot e^{i\theta}$

non $\rho=r^3\in(0,\infty)$ eta $\theta=3\alpha\in(0,3\pi/2)$

Hortaz, $f(\Omega)=\{z\in\mathbb{C}: 0<\arg z<3\pi/2,\ 0<|z|<+\infty\}$



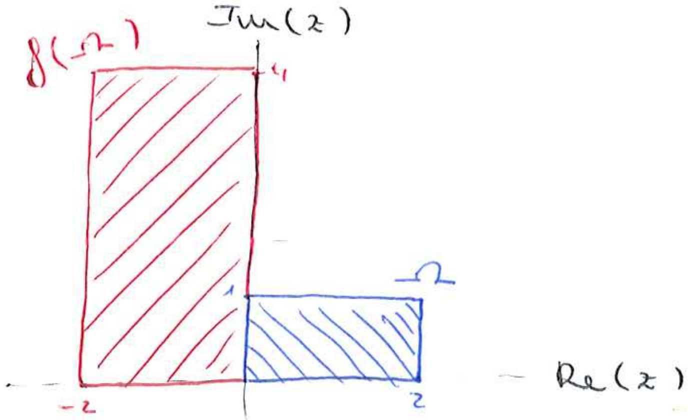
ii) $f(z)=2iz$, $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: 0\le \mathrm{Re}\,z\le 2,\ 0\le \mathrm{Im}\,z\le 1\}$

$z=x+iy$ bada $z\in\Omega$, $0\le x\le 2$ eta $0\le y\le 1$

$f(z)=f(x+iy)=2i\cdot(x+iy)=-2y+2xi$

non $\mathrm{Re}\,f(z)=-2y\in[-2,0]$ eta $\mathrm{Im}\,f(z)=2x\in[0,4]$

Hortaz, $f(\Omega)=\{z\in\mathbb{C}: -2\le \mathrm{Re}\,z\le 0,\ 0\le \mathrm{Im}\,z\le 4\}$



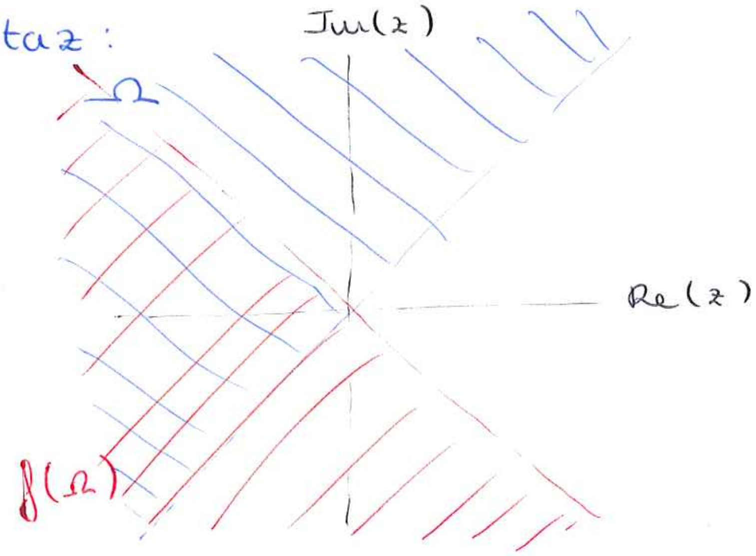
iii) $f(z)=\frac{1}{z}$, $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$

$z=re^{i\theta}$ bada eta $z\in\Omega$, $\arg z=\theta\in(\pi/4, 5\pi/4)$

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\rho e^{i\varphi}$$

non $\rho=\frac{1}{r}$ eta $\varphi=-\theta\in(-5\pi/4, -\pi/4)$

Hortaz:



$f(\Omega)=\{z\in\mathbb{C}: \arg z\in(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})\}$

2. ARIKETA

i) $f(z)=\frac{z^2+1}{z-i}$ Etengune puntuak: $z-i=0 \longrightarrow z=i$

$$\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{(z+i)(z-i)}{z-i}=\lim_{z\to i} z+i=2i\in\mathbb{C}$$

$z=i$ etendura gainditgarria da.

$$\boxed{\lim_{z\to\infty}\frac{z^2+1}{z-i}}=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2(1+1/z^2)}{z(1-i/z)}=\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1+\frac{1}{z^2}}{1-\frac{i}{z}}=\infty\cdot\frac{1+0}{1-0}=\boxed{\infty}.$$

iii) $f(z) = \dfrac{z^4+16}{z^4-16}$

Etendura puntuak: $z^4-16=0 \longrightarrow z^4=16 \longrightarrow z=\sqrt[4]{16}$

$z=\pm 2, \quad z=\pm 2i$

$$\lim_{z\to 2} \frac{z^4+16}{z^4-16} = \frac{2^4+16}{2^4-16} = \frac{32}{0} = \infty$$

$$\lim_{z\to -2} \frac{z^4+16}{z^4-16} = \frac{(-2)^4+16}{(-2)^4-16} = \frac{32}{0} = \infty$$

$$\lim_{z\to \pm 2i} \frac{z^4+16}{z^4-16} = \frac{(\pm 2i)^4+16}{(\pm 2i)^4-16} = \frac{32}{0} = \infty$$

$z=\pm 2$ eta $z=\pm 2i$ etendura gaindiezinak dira.

$$\boxed{\lim_{z\to \infty} \frac{z^4+16}{z^4-16} = \lim_{z\to\infty} \frac{1+{}^{16}/_{z^4}}{1-{}^{16}/_{z^4}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.}$$

iv) $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^3+1}$

Etendura puntuak: $z^3+1=0 \longrightarrow z^3=-1 \longrightarrow z=\sqrt[3]{-1}$

$z=-1, \quad z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\lim_{z\to -1} \frac{z^2-1}{z^3+1} = \lim_{z\to -1} \frac{(z-1)(z+1)}{(z+1)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-2}{\left(-1-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-1-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)} \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}} \frac{z^2-1}{z^3+1} = \frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^2-1}{0} = \infty$$

$z=-1$ etendura gaindigarria da baina $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ez.

$$\boxed{\lim_{z\to\infty}\frac{z^2-1}{z^3+1}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}\frac{(1-1/z^2)}{(1+1/z^3)}=\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1-0}{1+0}=0}$$

3. ARIKETA

i) $f(x+iy)=x^2+xy-i(y+1)$

$u(x,y)=x^2+xy\in C^1$

$v(x,y)=-(y+1)\in C^1$

$$\left.\begin{array}{l} u_x=v_y \longleftrightarrow 2x-y=1 \\ u_y=-v_x \longleftrightarrow x=0 \end{array}\right\}$$

Cauchy-Riemann-en baldintzak $x=0$, $y=-1$ puntuan beteko dira.

Hortaz f deribagarria da bakarrik $z=-i$ puntuan.

ii) $f(x+iy)=(x+1)+iy^2$

$u(x,y)=x+1\in C^1$

$v(x,y)=y^2\in C^1$

$u_x=v_y \longrightarrow 1=2y \longrightarrow y=1/2$

$u_y=-v_x \longleftrightarrow 0=0$

f deribagarria da $z=x+\frac{1}{2}i$ puntuetan, $\forall x\in\mathbb{R}$ izanik.

iii) $f(x+iy)=x^2-y^2-2xy+i(x^2-y^2-2xy)$

$u(x,y)=x^2-y^2-2xy\in C^1$

$v(x,y)=x^2-y^2-2xy\in C^1$

$u_x=v_y \longleftrightarrow 2x-2y=-2y-2x \longleftrightarrow x=0$

$u_y=-v_x \longleftrightarrow -2y-2x=-2x+2y \longleftrightarrow y=0$

f deribagarria da bakarrik $z=0$ puntuan.

4. ARIKETA

$f(z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$, non $z = re^{i\theta}$ den.

Idatzi Cauchy-Riemann-en baldintzak polarretan.

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) =$

$= u(r\cdot\cos\theta, r\sin\theta) + i\cdot v(r\cdot\cos\theta, r\sin\theta) =$

$= u(x(r,\theta), y(r,\theta)) + i\cdot v(x(r,\theta), y(r,\theta))$.

katearen erregelaz baliatuz:

$U_r = u_x\cdot\cos\theta + u_y\cdot\sin\theta$

$U_\theta = u_x\cdot(-r\sin\theta) + u_y\cdot r\cdot\cos\theta$

$V_r = V_x\cdot\cos\theta + V_y\sin\theta$

$V_\theta = V_x\cdot(-r\sin\theta) + V_y\cdot r\cdot\cos\theta$

Cauchy-Riemannen baldintzen arabera:

$V_r = -u_y\cdot\cos\theta + u_x\sin\theta = -\frac{1}{r}U_\theta$

$V_\theta = u_y r\sin\theta + u_x r\cos\theta = r\cdot U_r$

Laburbilduz, $f(r\cdot e^{i\theta}) = u(r,\theta) + i\cdot v(r,\theta)$ bada:

$$\boxed{r\cdot u_r = V_\theta \quad \text{eta} \quad r\cdot V_r = -u_\theta}$$

dira Cauchy-Riemann-en baldintzak.

i) $f(z) = z^{27}$

$f(r\cdot e^{i\theta}) = (r\cdot e^{i\theta})^{27} = r^{27}\cdot e^{i\cdot 27\theta} = r^{27}(\cos 27\theta + i\cdot\sin 27\theta)$

kasu honetan,

$u(r,\theta) = r^{27}\cdot\cos(27\theta)$

$v(r,\theta) = r^{27}\cdot\sin(27\theta)$

$r \cdot u_r = 27 \cdot r^{27} \cdot \cos(27\theta) = v_\theta$

$r \cdot v_r = 27 \cdot r^{27} \cdot \sin(27\theta) = -u_\theta$

Hortaz, f deribagarria da $\forall z \in \mathbb{C}$.

ii) $f(z) = |z| \cdot z^2$

$f(re^{i\theta}) = r \cdot (re^{i\theta})^2 = r^3 \cdot e^{i2\theta} = r^3(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$u(r,\theta) = r^3 \cos 2\theta$ eta $v(r,\theta) = r^3 \sin 2\theta$ izanik,

$r \cdot u_r = 3r^2 \cos 2\theta$ $\quad$ $u_\theta = -2r^3 \sin 2\theta$

$r \cdot v_r = 3r^2 \sin 2\theta$ $\quad$ $v_\theta = 2r^3 \cos 2\theta$

$r \cdot u_r = v_\theta \longleftrightarrow 3r^2 \cos 2\theta = -2r^3 \cos 2\theta \longleftrightarrow 3r^2 = -2r^3$

$r \cdot v_r = -u_\theta \longleftrightarrow 3r^2 \sin 2\theta = 2r^3 \sin 2\theta \longleftrightarrow 3r^2 = 2r^3$

$\rightarrow r = 0 \longrightarrow$ f deribagarria da soilik $z=0$ puntuan.

5. ARIKETA

i) $f(x+iy) = xy + iy$

$u(x,y) = xy$ eta $v(x,y) = y$ izanik,

$u_x = v_y \longleftrightarrow y = 1$

$u_y = -v_x \longleftrightarrow x = 0$

f deribagarria da soilik $z = i$ puntuan.

Hortaz, ez da existitzen $r>0$ baliorik non f deribagarria den $B_r(z_0)$ bolako puntu guztietan, z_0 edozein izanik.

ii) $f(x+iy) = e^y(\cos x + i \sin x)$

$u(x,y) = e^y \cos x$ eta $v(x,y) = e^y \sin x$ izanik.

$u_x = v_y \longleftrightarrow -e^y \sin x = e^y \sin x \longleftrightarrow x = k\pi, \ \forall k \in \mathbb{N}$

$u_y = -v_x \longleftrightarrow e^y \cos x = -e^y \cos x \longleftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

Hortaz, f deribagarria da $z = k \cdot \frac{\pi}{2} + iy$ puntuetan, non $k \in \mathbb{N}$ eta $y \in \mathbb{R}$ dugun.

Horrela, ezin da aurkitu $r > 0$ baliorik ez $z_0 \in \mathbb{C}$ punturik non $B_r(z_0)$ bolako puntu guztiak deribagarriak diren.

$\boxed{\text{6. ARIKETA}}$

Zeintzuk dira $f(x+iy) = u(x) + iv(y)$ formako funtzio holomorfoak?

f holomorfoa da $\longleftrightarrow$ u eta v harmonikoak dira.

Hasteko u eta v funtzioek Cauchy-Riemann-en baldintzak bete behar dituzte:

$u_x = u'(x) \qquad v_x = 0$

$u_y = 0 \qquad v_y = v'(y)$

f deribagarria $\longleftrightarrow u'(x) = v'(y)$

u harmonikoa da $\longleftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \longrightarrow u''(x) = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow u'(x) = \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow u(x) = \alpha x + \beta$

v harmonikoa da $\longleftrightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0 \longrightarrow v''(y) = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow v'(y) = u'(x) = \alpha \longrightarrow v(y) = \alpha y + \gamma$

Horrela, $f(z) = u(x) + iv(y) = \alpha x + \beta + i(\alpha y + \gamma) =$

$= \alpha(x+iy) + \beta + i\gamma$

Hortaz $\boxed{f(z) = \alpha z + \beta\ ,\quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{C}}$

8. ARIKETA

$u(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ harmonikoa izateko baldintza?
kalkulatu konjokatua.

Harmonikoa izateko, $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = 2ax + 2by\ , & u_{xx} = 2a \\ u_y = 2cy + 2bx\ , & u_{yy} = 2c \end{array}\right\} u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2c = 0$$

$$\boxed{a = -c}$$

v harmoniko konjokatua izateko, Cauchy-Riemann-en baldintzak bete behar ditu u-rekin, $u = a(x^2 - y^2) + 2bxy$ izanik.

$$u_x = v_y \longrightarrow v_y = 2ax + 2by \longrightarrow v(x,y) = 2axy + by^2 + g(x)$$

$$u_y = -v_x \longrightarrow v_x = 2ay - 2bx = 2ay + g'(x) \longrightarrow g'(x) = -2bx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow g(x) = -bx^2 + k.$$

Hortaz, $\boxed{v(x,y) = b(y^2 - x^2) + 2axy + k\ ,\quad a, b, k \in \mathbb{R}}$

9. ARIKETA

$u(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + x + 1$

a) Frogatu u harmonikoa dela plano osoan.

$u_x = 12x^2y - 4y^3 + 1\ ;\quad u_{xx} = 24xy$

$u_y = 4x^3 - 12xy^2$; $u_{yy} = -24xy$

$u_{xx} + u_{yy} = 24xy - 24xy = 0 \longleftrightarrow u$ harmonikoa da.

b) kalkulatu f holomorfoa, $\operatorname{Re} f = u(x,y)$ izateko.

$f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

f holomorfoa izateko, u eta v funtzioek Cauchy--Riemann-en baldintzak bete behar dituzte:

$u_x = v_y \longleftrightarrow v_y = 12x^2y - 4y^3 + 1 \to v = 6x^2y^2 - y^4 + y + h_1(x)$

$u_y = -v_x \longleftrightarrow v_x = 12xy^2 - 4x^3 = 12xy^2 + h_1'(x) \longrightarrow$

$\to h_1'(x) = -4x^3 \to h_1(x) = -x^4 + k_1$

$v(x,y) = 6x^2y^2 + y - y^4 - x^4 + k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$ izanik

$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ genuke.

c) kalkulatu g holomorfoa, $\operatorname{Im} g = u(x,y)$ izateko.

$g(x+iy) = w(x,y) + i \cdot u(x,y)$

Berriro ere u eta w funtzioek Cauchy-Riemann-en baldintzak bete behar dituzte.

$w_x = u_y \longleftrightarrow w_x = 4x^3 - 12xy^2 \longrightarrow w = x^4 - 6x^2y^2 + h_2(y)$

$w_y = -u_x \longleftrightarrow w_y = 4y^3 - 12x^2y - 1 = -12x^2y + h_2'(y) \longrightarrow$

$\to h_2'(y) = 4y^3 - 1 \to h_2(y) = y^4 - y + k_2$

$w(x,y) = x^4 - y^4 - y - 6x^2y^2 + k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$ izanik.

$f(x+iy) = w(x,y) + i \cdot u(x,y)$ genuke.

11. ARIKETA

$u(x,y) = (e^{2y} + e^{ky}) \cdot \sin 2x$ harmonikoa izateko k-ren balioak lortu. Lortu konjokatua.

$u_x = (e^{2y} + e^{ky}) \cdot 2\cos 2x$; $u_{xx} = -4(e^{2y} + e^{ky}) \sin 2x$

$u_y = (2e^{2y} + ke^{ky}) \sin 2x$; $u_{yy} = (4e^{2y} + k^2 e^{ky}) \sin 2x$

u harmonikoa da $\longleftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow (-4e^{2y} - 4e^{ky}) \sin 2x + (4e^{2y} + k^2 e^{ky}) \sin 2x = 0 \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow k^2 e^{ky} - 4e^{ky} = 0 \longrightarrow \boxed{k = \pm 2}$

V u-ren harmoniko konjokatua izateko, Cauchy-Riemann-en baldintzak bete behar dira, hots:

$u_x = V_y \longrightarrow V_y = 2(e^{2y} + e^{ky}) \cdot \cos 2x$

$u_y = -V_x \longrightarrow V_x = -\sin 2x (2e^{2y} + ke^{ky})$

$k = 2$ bada, $V_y = 4 e^{2y} \cdot \cos 2x \longrightarrow V = 2e^{2y} \cos 2x + g_1(x)$

$V_x = -4\sin 2x\, e^{2y} = -4 \sin 2x \cdot e^{2y} + g_1'(x) \longrightarrow g_1(x) = \alpha$

Hortaz, $k=2$ baliorako, $\boxed{v(x,y) = 2e^{2y} \cos 2x + \alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}}$

$k = -2$ bada, $V_y = 2(e^{2y} + e^{-2y}) \cos 2x \longrightarrow V = \cos 2x (e^{2y} - e^{-2y}) + g_2(x)$

$V_x = -2 \sin 2x (e^{2y} - e^{-2y}) = -2 \sin 2x (e^{2y} - e^{-2y}) + g_2'(x) \longrightarrow$

$\longrightarrow g_2(x) = \beta$

Hortaz, $k=-2$ bada, $\boxed{v(x,y) = (e^{2y} - e^{-2y}) \cos 2x + \beta \ , \ \beta \in \mathbb{R}}$

12. ARIKETA

i) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2$

$u_x = 4x^3 - 12xy^2$, $u_{xx} = 12x^2 - 12y^2$

$u_y = -12x^2y$, $u_{yy} = -12x^2$

$u_{xx} + u_{yy} = -12y^2 = 0 \longrightarrow$ u harmonikoa da $y=0$ denean.

v konjokatua izateko:

$u_x = v_y \longrightarrow v_y = 4x^3 - 12xy^2 \longrightarrow v = 4x^3y - 4xy^3 + g(x)$

$u_y = -v_x \longrightarrow v_x = 12x^2y = 12x^2y - 4y^3 + g'(x) \longrightarrow$

$\longrightarrow g'(x) = 4y^3 \longrightarrow g(x) = y^4$

$v(x,y) = \varnothing \quad (y=0)$

ii) $u(x,y) = e^x \cos y$

$u_x = e^x \cos y$, $u_{xx} = e^x \cos y$

$u_y = -e^x \sin y$, $u_{yy} = -e^x \cos y$

$u_{xx} + u_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \longrightarrow$ u harmonikoa da.

v konjokatua izateko:

$v_x = -u_y \longrightarrow v_x = e^x \sin y \longrightarrow v = e^x \sin y + g(y)$

$v_y = u_x \longrightarrow v_y = e^x \cos y = e^x \cos y + g'(y) \longrightarrow g(y) = \alpha$

$$\boxed{v(x,y) = e^x \sin y + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

iii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_{xx} = 6x$

$u_y = -6xy$, $u_{yy} = -6x$

$u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0 \longrightarrow$ u harmonikoa da.

v konjokatua izateko, Cauchy-Riemann-en baldintzak bete behar dira.

$u_x = v_y \longrightarrow v_y = 3x^2 - 3y^2 \longrightarrow v = 3x^2y - y^3 + g(x)$

$u_y = -v_x \longrightarrow v_x = 6xy = 6xy + g'(x) \longrightarrow g'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{v(x,y) = 3x^2y - y^3 + \alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$