10. Gaia

Aldagai konplexuko oinarrizko funtzioak

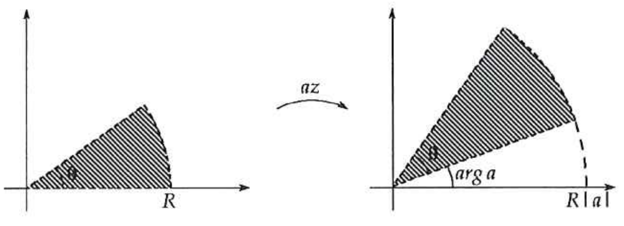
10.1 Polinomioak

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, polinomioak funtzio osoak dira. Ikus ditzagun kasu partikular batzuk eta nola transformatzen dituzten zenbait eremu.

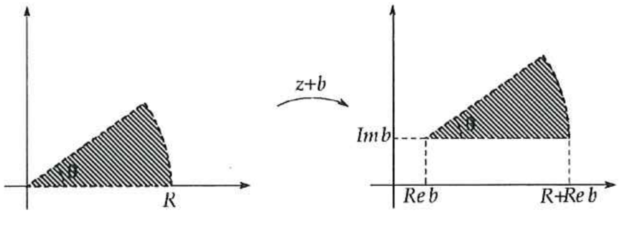
$P(z) = az + b$

$b = 0$ bada, $P(z) = az$, beraz $|P(z)| = |a||z|$ (dilatazioa) eta $\mathrm{Arg}(P(z)) = \arg a + \mathrm{Arg}\, z$ (biraketa).

Adibidez, jatorrian zentratutako eta r erradiodun sektore baten transformazioa honako hau da:



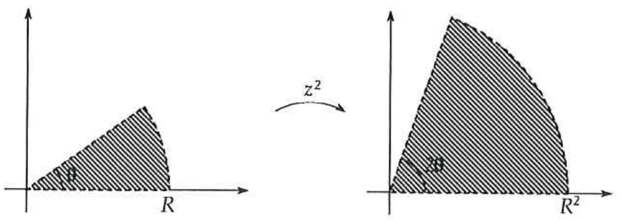
$a = 1$ bada, $P(z) = z + b$ transformazioaren bidez translazio bat gauzatzen da.



Beraz, $P(z) = az + b$ trasformazioak dilatazioa, biraketa eta translazioa burutzen ditu.

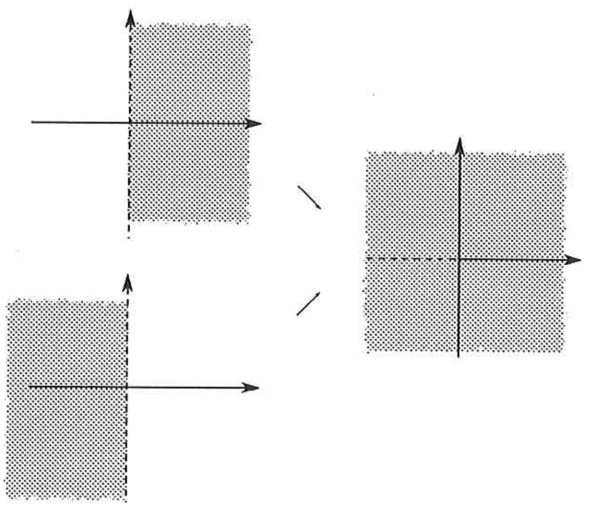
$P(z) = z^2$

$|z^2| = |z|^2$ eta $\operatorname{Arg}(z^2) = 2 \operatorname{Arg} z$, beraz, jatorrian zentratutako sektore zirkular bati aplikatzen diogunean angeluaren anplitudea bikoizten da eta erradioa handiagoa edo txikiagoa egiten da 1 baino handiagoa edo txikiagoa den arabera.

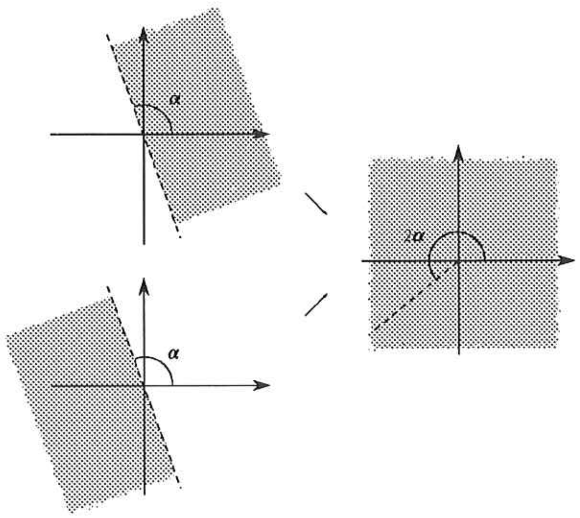


z^2 funtzioa ez da injektiboa. Eskuineko planoerdiaren irudia plano osoa da, ardatz erreal negatiboa kenduta. $z = r^{i\theta}$, $r \in (0, +\infty)$ eta $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ denez planoerdi horretan, $|z^2| \in (0, +\infty)$ eta $\arg(z^2) \in (-\pi, \pi)$.

Baina, ezkerreko planoerdiaren irudia ere $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ da. Kasu honetan, $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, beraz $2\theta \in (\pi, 3\pi)$.

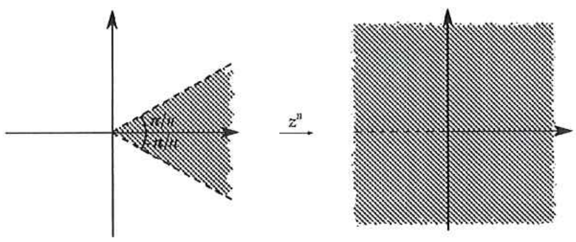


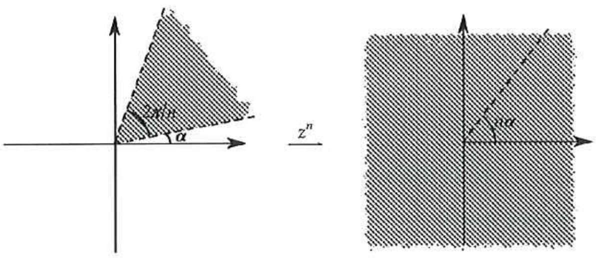
Orokorrean, jatorritik pasatzen den zuzen batek definitzen dituen bi planoerdien irudiak berdinak dira



$P(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}$

Funtzio honekin aurreko kasuan gertatu denaren antzeko zerbait gertatzen da. Jatorrian zentratutako eta $\dfrac{2\pi}{n}$ anplitudeko sektore baten irudia plano osoa da, kenduta jatorrian hasten den zuzenerdi bat.





10.2 Erroak

Esan dugun bezala, z^2 funtzioa ez da injektiboa: hartzen badugu $\Omega_1 = \{z = re^{i\theta} : -\pi/2 < \theta \leq \pi/2\} \cup \{0\}$, z^2-ren irudi-multzoa $\mathbb{C}$ osoa da eta berdin gertatzen da $\Omega_2 = \{z = re^{i\theta} : \pi/2 < \theta \leq 3\pi/2\} \cup \{0\}$ hartuz. Beraz, z^2-ren alderantzizkoa definitzerakoan bi aukera izango ditugu.

f funtzio holomorfoa bilatzen dugu, non

$$(f(z))^2 = z$$

den. $z = 0$ bada, $f(0) = 0$ da ekuazioaren soluzio bakarra. $z \neq 0$ bada, $z = re^{i\theta}$ eta $f(z) = \rho e^{i\varphi}$ baldin badira

$$(f(z))^2 = z \implies \rho^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta} \implies \rho = \sqrt{r},\ \varphi = \frac{\theta}{2}.$$

θ bakarra ez denez, $f(z)$ ere ez da bakarra izango. Kasu honetan, nahiz eta θ-k infinitu balio izan, bakarrik $f(z)$-ren bi balio desberdin lortzen dira:

$$\sqrt{|z|}e^{\frac{\arg z}{2}i}, \quad \text{eta} \ -\sqrt{|z|}e^{\frac{\arg z}{2}i}.$$

f holomorfoa izan dadin,

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta(z)}{2}},$$

non $\theta(z)$ angeluak neurtzen dituen funtzio jarraitua izango den.

Definizioa. Izan bedi $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Erro karratuaren adar nagusia Ω-n definitutako hurrengo funtzioa da:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}.$$

Honela definitutako $\sqrt{z}$ funtzioa holomorfoa da eta

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad \forall z \in \Omega.$$

Ω-n defini daitekeen beste adarra $\sqrt{z} = -\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}$ da. Hau ere holomorfoa da eta $(\sqrt{z})' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$, $z \in \Omega$ guztietarako.

Definizio-eremutzat $\mathbb{C} - (\{0\} \cup \{z\colon \alpha \in \operatorname{Arg} z\}$ hartuta ere, $\sqrt{z}$-ren bi adar defini daitezke, biak holomofoak eta deribatua $(\sqrt{z})' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ izanik.

$n \geq 3$ bada, $f(z) = z^n$ funtzioaren alderantzizkoarekin arazo berbera dugu. $\sqrt[n]{z}$ funtzio holomorfoa definitzeko aukera daiteke $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ definizio-eremutzat eta hor eman adar nagusia argumentu nagusia erabiliz,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\arg z}{n}i}.$$

Multzo berean, beste $n-1$ adar holomorfo defini daitezke. Kasu guztietan,

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{z^{n-1}}}.$$

Adibidea. $\sqrt[3]{z}$ funtzioak hiru adar holomorfo ditu $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$-n.

$$\begin{aligned}
(\sqrt[3]{z})_1 &= \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{3}}, \quad \text{adar nagusia,} \\
(\sqrt[3]{z})_2 &= \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2\pi}{3}}, \\
(\sqrt[3]{z})_3 &= \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 4\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

10.3 Funtzio arrazionalak

Funtzio arrazionalak $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ modukoak dira, non P eta Q polinomioak diren. f holomorfoa da puntu guztietan Q-ren zeroetan izan ezik.

Transformazio lineal frakzionarioak

$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$*, moduko funtzioak transformazio lineal frakzionarioak (TLF), Moebiusen transformazioak edo transformazio bilinealak izenez ezagutzen dira. f holomorfoa da $\mathbb{C} - \{-d/c\}$ multzoan.

Joukowskiren funtzioa

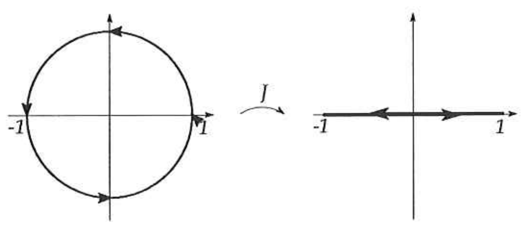
"Sobietar abiazioaren aita" Lenin.

$J(z) = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ Joukowskiren funtzioa da. J holomorfoa da $\mathbb{C} - \{0\}$ multzoan. Kalkula ditzagun multzo batzuen irudiak J-ren bidez.

- $|z| = 1$ zirkunferentzia: $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, beraz,

$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\Big) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta.$$

Balio errealak lortzen ditugu, $[-1, 1]$ tartea, hain zuzen ere. Gainera, balioak errepikatzen dira.



* $ad - bc = 0$ bada, $f(z) = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ izango genuke.

- $|z| = R$ zirkunferentzia, $R > 1$ izanik. Orain, $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, beraz

$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(Re^{i\theta} + \frac{1}{R}e^{-i\theta}\Big) = \frac{1}{2}\Big(R + \frac{1}{R}\Big)\cos\theta + i\frac{1}{2}\Big(R - \frac{1}{R}\Big)\sin\theta.$$

$J = u + iv$ idatziz,

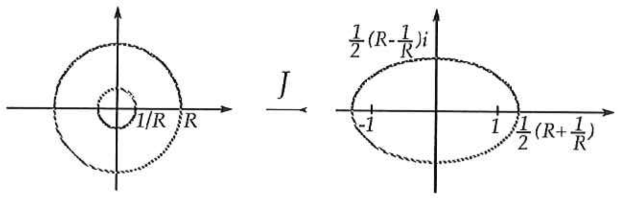
$$\frac{u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

hots, $|z| = R$ zirkunferentziaren irudia elipse bat da.

$|z| = \dfrac{1}{R}$ zirkunferentziaren irudia J-ren bidez, aurreko elipse berbera da, zeren eta, $z = \dfrac{1}{R}e^{i\theta}$ baldin bada,

$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R}e^{i\theta} + Re^{-i\theta}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R} + R\Big)\cos\theta + i\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R} - R\Big)\sin\theta.$$

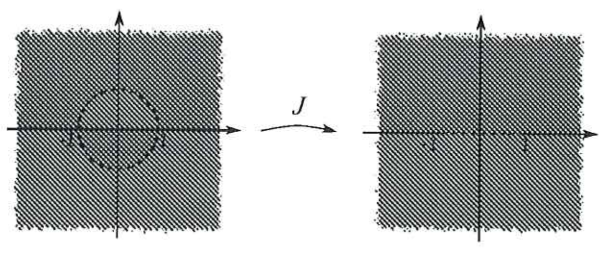
Hala ere, badago desberdintasun bat. $|z| = R$ zirkunferentzian orientazio positiboa hartuz, elipsean ere orientazio positiboa izango dugu. Aldiz, $|z| = \dfrac{1}{R}$ zirkunferentzian orientazio positiboa hartuz, bere irudia den elipsean orientazioa kontrakoa da.



- $[-1, 1]$ zuzenkiaren irudia $\mathbb{R} - (-1, 1)$ multzoa da eta $\mathbb{R} - (-1, 1)$ multzoarena ere, zeren eta $x \in \mathbb{R}$ bada, argi dago $J(x) \in \mathbb{R}$ dela eta

$$x < 0 \text{ bada,} \quad J(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) \le -1,$$
$$x > 0 \text{ bada,} \quad J(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) \ge 1.$$

Aurreko guztiaren arabera,



10.4 Funtzio esponentziala

Definizioa. Izan bedi $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ikusten denez, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ eta $\operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)$ dira. $z = x \in \mathbb{R}$ bada, esponentzial erreala berreskuratzen da. $z = iy$ bada, $y \in \mathbb{R}$ izanik, aldiz, Eulerren formula.

Proposizioa 10.1. *e^z funtzio osoa da eta $(e^z)' = e^z$.*

Froga. e^z-ren parte erreala $u(x,y) = e^x \cos y$ eta parte irudikaria $v(x,y) = e^x \sin y$ dira. Funtzio hauek diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^2$ osoan eta $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ guztietarako

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y = v_y, \\ u_y &= -e^x \sin y = -v_x, \end{aligned}$$

hau da, Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dira $\mathbb{R}^2$ osoan ere. Beraz, e^z deribagarria da puntu guztietan, eta ondorioz funtzio osoa da. Gainera,

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \qquad \square$$

Proposizioa 10.2 (Esponentzialaren propietateak). *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$

(ii) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

(iii) Esponentziala periodikoa da, periodoa $2\pi i$ izanik, hau da

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Froga. Izan bitez $z = x + iy$ eta $w = u + iv$.

(i) Esponentzial errealaren propietateak eta berdintza trigonometrikoak erabiliz,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x(\cos y + i \sin y) e^u(\cos v + i \sin v) \\ &= e^x e^u\big((\cos y \cos v - \sin y \sin v) + i(\cos y \sin v + \sin y \cos v)\big) \\ &= e^{x+u}(\cos(y+v) + i \sin(y+v)) \\ &= e^{z+w}. \end{aligned}$$

(ii) $-z = -x - iy$ da, beraz

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x}(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{-x}(\cos y - i \sin y) = \\ &= \frac{1}{e^x} \frac{(\cos y - i \sin y)(\cos y + i \sin y)}{\cos y + i \sin y} = \\ &= \frac{1}{e^x(\cos y + i \sin y)} = \frac{1}{e^z}. \end{aligned}$$

(iii) $z + 2\pi i = x + (y + 2\pi)i$ denez

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y + 2\pi) + i\sin(y + 2\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \qquad \square$$

Ikus dezagun orain nola transformatzen dituen funtzio esponentzialak zenbait multzo.

- x_0 puntutik pasatzen den zuzen bertikalaren irudia jatorrian zentratutako zirkunferentzia bat da. $z = x_0 + iy$ moduko puntuak dira zuzen horretakoak, $y \in \mathbb{R}$ delarik. beraz

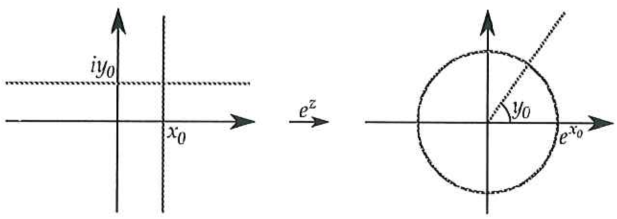
$$e^z = e^{x_0}e^{iy}, \ |e^z| = e^{x_0} \text{ finkoa.}$$

  $y \in \mathbb{R}$ denez, zirkunferentzia infinitu aldiz errepikatzen da.

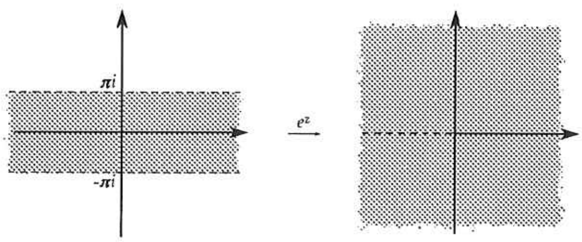
- y_0 puntutik pasatzen den zuzen horizontalaren irudia, jatorrian hasten den zuzenerdi bat da. kasu honetan, $z = x + iy_0$, $x \in \mathbb{R}$ izanik, beraz,

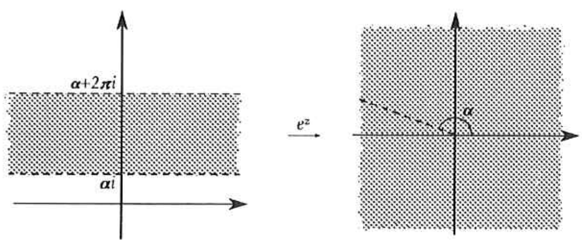
$$e^z = e^x e^{iy_0}.$$

  Orain argumentua finkoa da eta $|e^z| \in (0, \infty)$, hau da, jatorria ez da agertzen irudian.



Aurrekoa kontuan hartuz,





10.5 Esponentzialaren alderantzizkoa: logaritmoa

Ikusi dugu e^z esponentzial konplexua periodikoa dela, beraz ez da injektiboa eremutzat $\mathbb{C}$ osoa hartzen bada. Orduan, alderantzizkoa definitzean infinitu balioren artean aukeratu beharko dugu.

Aurkitu nahi dugu f funtzio holomorfoa non

$$e^{f(z)} = z.$$

$f(z) = w$ idazten badugu, $e^w = z$ ekuazioa ebatzi behar dugu.

$z = 0$ baldin bada, ekuazioak ez dauka soluziorik.

$z \neq 0$ bada, $z = |z|e^{i\theta}$ eta $w = \alpha + i\beta$ idatziz,

$$e^w = z \implies e^{\alpha}e^{i\beta} = |z|e^{i\theta} \implies \alpha = \ln|z|,\ \beta = \theta.$$

θ bakarra ez denez, w ere ez da bakarra. $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ bada, z-ren infinitu logaritmo existitzen dira

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z &= \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \\ &= \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Argumentu nagusia hartuz, logaritmo nagusia definitzen da

$$\log z = \ln|z| + i \arg z.$$

eta irudiak $\{w \in \mathbb{C} :\ -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi\}$ multzoan daude.

Adibideak. $\log 1 = 0$ eta $\operatorname{Log} 1 = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.
$\log(-1) = \pi i$ eta $\operatorname{Log}(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C} - \{0\}$. Existitzen bada $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfoa Ω-n, non

$$e^{f(z)} = z,\ \forall z \in \Omega,$$

orduan esaten da f adar logaritmikoa delaΩ-n.

$\Omega \subset \mathbb{C} - \{0\}$ bada, aurreko kalkuluen arabera, f adar logaritmiko bat bada, orduan

$$f(z) = \ln|z| + i\theta(z),$$

non $\theta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ argumentuak neurtzen dituen funtzio jarraitua den.

Ikusi genuen $\arg z$ ez dela jarraitua zenbaki erreal negatiboetan, beraz $\log z$ ere ez da jarraitua izango puntu horietan.

Proposizioa 10.3. *Izan bedi* $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Ω*-n definitutako*

$$\log z = \ln|z| + i \arg z$$

funtzio holomorfoa da, bere deribatua

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

izanik. $\log z$ *logaritmoaren adar nagusia dela esaten da.*

Logaritmo nagusia logaritmo errealaren berdina da z zenbaki erreal positiboa bada eta, nahiz eta zenbaki erreal negatiboetan definituta egon, ez da holomorfoa puntu horietan.

$\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ eremuan defini daitezkeen beste adar logaritmikoak adar nagusiaren translazioak dira:

$$\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ω-n definitutako adar logaritmiko guztiek etenguneak dituzte ardatz erreal negatiboko puntuetan eta deribatua beste puntu guztietan $1/z$ da.

$\alpha \in \mathbb{R}$ bada, balioen multzoa $\{w : \alpha < \operatorname{Im} w \leq \alpha + 2\pi\}$ bandan hartuz gero, logaritmoaren beste adar bat definitzen da. Funtzio holomorfoa izan dadin $\Omega_\alpha = \mathbb{C} - (\{0\} \cup \{z : \alpha \in \operatorname{Arg} z\})$ hartu behar dugu definizio-eremutzat. Horrela definituriko logaritmoaren deribatua $1/z$ izango da ere.

Logaritmoaren adar holomorfo bat definitzeko, jatorritik infinitura doan kurba injektibo bat kendu behar zaio plano konplexuari. Aurreko kasuetan, kurba horiek zuzenerdiak izan dira. Kentzen den kurba ebakia dela esaten da.

Oharra. $e^{\operatorname{Log} z} = z$ da $\operatorname{Log} z$ logaritmoaren edozein adar izanik, baina $\operatorname{Log} e^z = z + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Orokorrean, $\log e^z \neq z$. Adibidez, $z = 4\pi i$ bada, $e^z = e^{4\pi i} = 1$ eta ondorioz $\log(e^z) = \log 1 = 0 \neq 4\pi i$.

Oharra. $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$ formula betetzen da logaritmoaren balio guztiak kontsideratzen badira, hau da, $\operatorname{Log} z$-ren balio guztiak eta $\operatorname{Log} w$-ren balio guztiak batuz gero, $\operatorname{Log}(zw)$-ren balio guztiak lortzen dira. Formula bera ez da beti betetzen logaritmoaren adar bat finkatzen bada.

$z = w = e^{\frac{3\pi}{4} i}$ badira, logaritmo nagusiak hartuz

$$\log(zw) = \log e^{\frac{3\pi}{2} i} = -\frac{\pi}{2} i,$$
$$\log z + \log w = \frac{3\pi}{4} i + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} i.$$

Riemannen gainazalak. Izan bedi $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ eremu sinpleki konexua. Ω-n infinitu adar logaritmiko ditugu definiturik. $\log z$ adar nagusia baldin bada, orduan $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\log z + 2k\pi i$ ere adar logaritmikoa da.

Adar bakoitzaren irudi-multzoa 2π anplitudeko banda horizontal bat da. $\operatorname{Log} z$ funtzio multiformea uniforme bihurtzeko, adar bat finkatu beharrean, jarraian definituko dugun Riemannen gainazala erabili dezakegu.

Kontsidera ditzagun Ω-ren infinitu kopia eta lotu ditzagun plano hauek, plano baten ebakiaren goiko zatia hurrengo planoaren ebakiaren beheko zatiarekin. Egitura hau logaritmorako Riemannen gainazala da. k-garren planoan logaritmoaren k-garren adarra definituta dagoela suposatzen badugu, $\operatorname{Log} z$ funtzioaren definizio-eremua Riemannen gainazala izango da. $\operatorname{Log} z$ funtzio holomorfoa da (ardatz erreal negatiboko etenguneak desagertzen dira) eta irudi-multzoa plano konplexu osoa da.

10.6 Berretura konplexuak

Definizioa. Izan bedi $c \in \mathbb{C}$. $z \neq 0$ denean

$$z^c = e^{c \operatorname{Log} z}.$$

Oro har, z^c-k infinitu balio ditu, logaritmoaren adar bakoitzak z^c-ren adar bat ematen du. Logaritmo nagusiak ematen duena z^c-ren adar nagusia da.

z^c-ren definizio-eremutzat hartzen badugu eremu bat non logaritmoa holomorfoa den, hor z^c ere holomorfoa izango da eta

$$(z^c)' = cz^{c-1},$$

aukeratutako adar logaritmikoa mantenduz z^{c-1} kalkulatzean.

Adibidea. z^i funtzioak infinitu adar holomorfo ditu $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$-n,

$$\begin{aligned} z^i &= e^{i \log z} = e^{-\arg z} e^{i \ln |z|}, \quad \text{adar nagusia,} \\ (z^i)_k &= e^{i(\log z + 2k\pi i)} = e^{-\arg z} e^{-2k\pi} e^{i \ln |z|}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$c = n \in \mathbb{Z}$ bada,

$$z^n = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{n(\log z + 2k\pi i)} = e^{n \log z}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

beraz z^n-k balio bakarra du.

$z^{1/n}$-ren kasuan, lortu beharko genuke lehen aztertu dugun $\sqrt[n]{z}$ funtzioa.

$$z^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log} z} = e^{\frac{1}{n}(\log z + 2k\pi i)} = e^{\frac{\log z}{n} + \frac{2k\pi}{n} i}$$

eta n balio desberdin lortzen dira, $k = 0, \ldots, n-1$ balioei dagozkienak, lehen ikusi dugun bezala. Beraz, erroak definitu daitezke ere logaritmoa erabiliz.

Definizioa. Izan bedi $c \in \mathbb{C} - \{0\}$.

$$c^z = e^{z \operatorname{Log} c}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

c^z holomorfoa da $\operatorname{Log} c$-ren balio bat finkatzen denean eta

$$(c^z)' = c^z \operatorname{Log} c.$$

Oharra. 1^z-ren balio nagusia 1 da, baina ez da bakarra 1 zenbakiak infinitu logaritmo konplexu dituelako, $\operatorname{Log} 1 = 2\pi i$, beraz, $1^z = e^{2\pi z i}$.

Era berean, e^z-rako infinitu balio lortzen dira. Hala ere, notazioa ez nahasteko e^z idazten denean balio nagusia hartzen dela onartzen da.

10.7 Funtzio trigonometrikoak

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{eta} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$z = x \in \mathbb{R}$ bada, aldagai errealeko funtzio trigonometrikoen balioak berreskuratzen dira. Gainera, ohiko formula trigonometrikoak betetzen dituzte. Adibidez,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \ \forall z \in \mathbb{C},$$
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z, \ \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Proposizioa 10.4 (Funtzio trigonometrikoen propietateak). *Hona hemen funtzio trigonometrikoen propietate batzuk.*

(i) $\sin z$ *eta* $\cos z$ *funtzio osoak dira eta*

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

$z \in \mathbb{C}$ *guztietarako.*

(ii) Sinu eta kosinuaren zeroak errealak dira, hau da

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi, \ k \in \mathbb{Z};$$
$$\cos z = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Funtzio periodikoak dira, periodoa 2π *izanik, hau da*

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \textit{eta} \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Froga. Funtzio trigonometrikoen propietateak ondorioztatzen dira haien definizioetatik, esponentzialen menpe.

(i) Kontuan izanda esponentzialaren deribatua esponentziala bera dela, eta katearen erregela aplikatuz,

$$(\sin z)' = \Big(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\Big)' = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

eta modu berean,

$$(\cos z)' = \Big(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\Big)' = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i=-}\sin z.$$

(ii) $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ denez,

$$\sin z = 0 \iff e^{iz}-e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i},\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff 2iz = 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z} \iff z = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Antzera,

$$\cos z = 0 \iff e^{iz}+e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz}$$
$$\iff e^{2iz} = -1 = e^{(2k+1)\pi i},\ k\in\mathbb{Z} \iff 2iz = (2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff z = \frac{2k+1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

(iii) Gogoratuz $e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$ dela,

$$\sin(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}e2\pi i - e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2i} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

Modu berean,

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}e2\pi i + e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

$\square$

Oharra. $x\in\mathbb{R}$ bada, $|\sin x|\le 1$ eta $|\cos x|\le 1$. Aldiz, $z\in\mathbb{C}$ bada, $\sin z$ eta $\cos z$ edozein zenbaki konplexu izan daitezke.

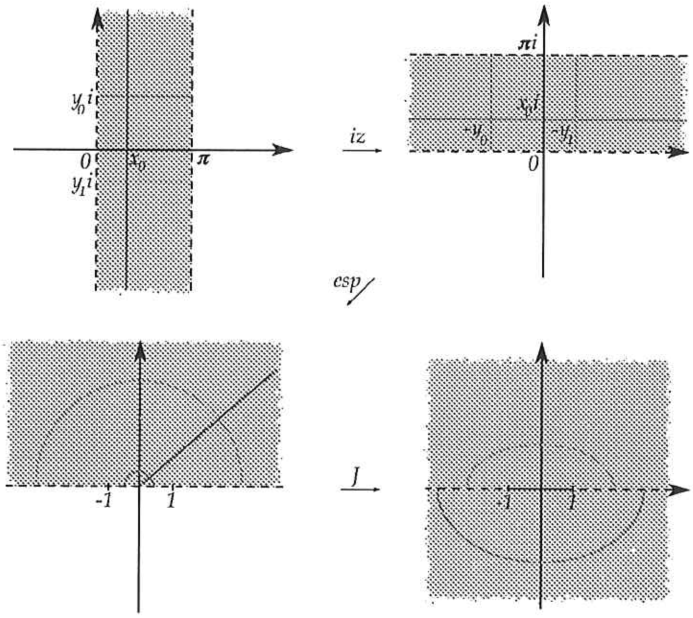
Azter dezagun $\cos z$ funtzioa. $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = J(e^{iz})$ denez, konposizio baten modura ikus daiteke.

- $z = x+iy_0$, $y_0>0$ finkoa eta $x\in(0,\pi)$, y_0 puntutik pasatzen den zuzenki horizontalaren irudia elipserdi bat da, zeren eta

  $$iz = -y_0+ix \implies e^{iz} = e^{-y_0}e^{ix},\ (e^{-y_0}<1) \implies J(e^{iz}) \text{ beheko elipserdi bat.}$$

- Antzera, $z = x + iy_1$, $y_1 < 0$ finkoa eta $x \in (0,\pi)$, y_1 puntutik pasatzen den zuzenki horizontalaren irudia elipserdi bat da,

$$iz = -y_1 + ix \implies e^{iz} = e^{-y_1}e^{ix}, \ (e^{-y_1} > 1) \implies J(e^{iz}) \text{ goiko elipseerdi bat.}$$



Antzeko era batean,

$$\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = J(e^{i(z-\frac{\pi}{2})}) = J(-ie^{iz}),$$

hau da, antzeko konposizio bat lortzen da.

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \\
\sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}, \\
\operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}.
\end{aligned}$$

10.8 Funtzio trigonometrikoen alderantzizkoak

Kontsidera dezagun $\cos z$ funtzioa. Aurkitu nahi dugu f funtzio holomorfoa non

$$\cos(f(z)) = z.$$

Gogora dezagun $\cos w = J(e^{iw})$ dela, beraz, $f(z) = w$ izendatuz, $J(e^{iw}) = z$ izatea nahi dugu, hau da, $e^{iw} = J^{-1}(z)$. Kalkula dezagun, beraz, Joukowskiren funtzioaren alderantzizkoa. $J^{-1}(z) = \xi$ eginez, $J(\xi) = z$ bete behar da,

$$J(\xi) = \frac{1}{2}\Big(\xi + \frac{1}{\xi}\Big) = z \implies \xi^2 - 2\xi z + 1 = 0 \implies \xi = \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

ξ ez da bakarra, $\sqrt{z^2 - 1}$ balioa bikoitza delako.

$J'(z) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{z^2}\Big) = 0 \iff z = \pm 1$, beraz J^{-1} ez da holomorfoa 1 eta -1 puntuetan. J^{-1} funtzioaren definizio-eremua sinpleki konexua izan dadin, -1 eta 1 puntuak lotzen dituen kurba bat kendu behar dugu, ∞-tik pasatzen dena.

$\Omega = \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ hartzen badugu, orduan $\sqrt{}$ ikurraren bidez erro karratuaren adar nagusia $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ multzoan adierazten badugu,

$$\begin{aligned} J^{-1}(z) &= z + \sqrt{z^2 - 1} = z + i\sqrt{1 - z^2}, \text{ adar nagusia da,} \\ (J^{-1}(z))_2 &= z - i\sqrt{1 - z^2}, \text{ beste adarra.} \end{aligned}$$

Oharra. $\sqrt{z^2 - 1}$ idatzi beharrean $i\sqrt{1 - z^2}$ idazten dugu $\sqrt{1 - z^2}$ aldagai konplexuko funtzioa $\sqrt{1 - x^2}$ aldagai errealeko funtzioaren hedapen holomorfoa delako Ω-n.

Orduan $\cos(f(z)) = z$ ebazteko, $f(z) = w$ eginez,

$$e^{iw} = J^{-1}(z) = z + i\sqrt{1 - z^2} \implies iw = \mathrm{Log}(z + i\sqrt{1 - z^2}).$$

Beraz, kosinu funtzioaren alderantzizkoa funtzio multiformea da,

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Log}(z + i\sqrt{1 - z^2}).$$

Logaritmoaren eta J^{-1} funtzioaren adar holomorfoak finkatuz, arccos funtzioaren adar holomorfo desberdinak lortzen dira.

$\mathrm{Arccos}\, z$ funtzioaren adar nagusia lortzen da $\Omega = \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ multzoan logaritmoaren eta J^{-1} funtzioaren adar nagusiak hartuz, dagozkien eremuetan.

$$(\arccos z)' = \frac{1}{\cos'(\arccos z)} = \frac{1}{-\sin(\arccos z)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos z)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Antzeko era batean kalkula daiteke $\sin z$ funtzioaren alderantzizkoa.

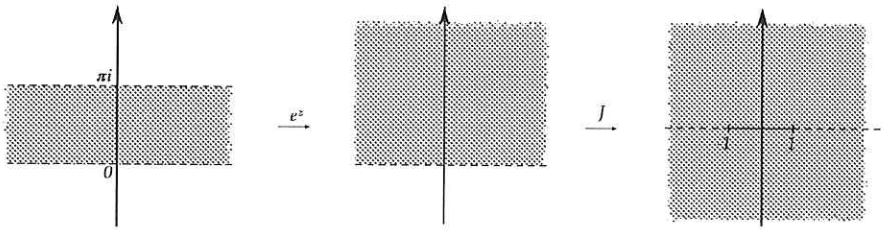
10.9 Funtzio hiperbolikoak

Definizioa. $\forall\, z \in \mathbb{C}$, sinu eta kosinu hiperbolikoak honela definitzen dira:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Funtzio hiperboliko hauek osoak dira eta $(\sinh z)' = \cosh z$, $(\cosh z)' = \sinh z$.

$\cosh z = J(e^z)$, beraz, $\mathbb{R} \times (0, \pi)$ π anplitudeko banda horizontal irekia hartzen badugu, irudia plano konplexu osoa da, $\mathbb{R} - [-1, 1]$ ardatz errealaren zatia kenduta.



$$\boxed{\begin{aligned} \sin(i \cdot z) &= i \cdot \sinh(z) \\ \cos(i \cdot z) &= \cosh(z) \end{aligned}}$$

$x, y \in \mathbb{R} \rightarrow \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Identitate hiperbolikoak

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$\cosh(-x) = \cosh x$

$\sinh(-x) = -\sinh x$

Ariketa praktikoak egiuda

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

10. Gaia: ALDAGAI KONPLEXUKO OINARRIZKO FUNTZIOAK

Ariketak

1. (i) Noiz da $\log(z^2) = 2\log z$?

   (ii) Noiz da $\log z^{1/2} = (\log z)/2$?

2. z^i funtzioaren adar nagusia kontsideratuz, aurki itzazu $u(r,\theta)$ eta $v(r,\theta)$ funtzio harmoniko konjugatuak, $z^i = u + iv$ izanik.

   Em.: $u(r,\theta) = e^{-\theta}\cos(\ln r)$, $v(r,\theta) = e^{-\theta}\sin(\ln r)$.

3. Izan bedi $z \neq 0$ eta $c \in \mathbf{C}$. Eman $|z^c|$ eta $\arg(z^c)$.

4. (i) Funtzio trigonometrikoen definizioak kontuan harturik, froga itzazu hurrengo berdintzak:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \sin(z+w) = \sin z\cos w + \sin w\cos z$$
$$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} \qquad \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$$

   (ii) Noiz da $\sin z = \sin w$?

   (iii) Aurkitu z-ren zer baliotarako den $\sin z$ erreala. Gauza bera $\cos z$-rako.

   (iv) Aurkitu z-ren zer baliotarako den $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$.

5. (i) Erlaziona itzazu $\sin z$ eta $\cos z$ funtzioak $\sinh z$ eta $\cosh z$ funtzioekin.

   (ii) Aurkitu $\sinh(z+w)$ eta $\cosh(z+w)$-rako formulak.

   (iii) Non anulatzen da $\sinh z$ funtzioa?

6. Aurki ezazu $\sin z$ zenbakiaren modulua $z = \pi + i\log(2 + 5^{1/2})$ denean. *Em.:* $|\sin z| = 2$.

7. Froga ezazu $\sin z$ funtzioaren alderantzizkoa multiformea dela eta aurki ezazu $\arcsin x$ aldagai errealeko funtzioa hedatzen duen adar holomorfoa. Kalkula ezazu bere deribatua.

8. Eman itzazu zenbaki konplexu hauek forma binomikoan:

   (i) $\operatorname{Log} e$ — *Em.:* $1 + 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (ii) $\operatorname{Log}(3-2i)$ — *Em.:* $\frac{1}{2}\ln 13 - i(\arctan\frac{2}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (iii) 1^i — *Em.:* $e^{-2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (iv) $(1-i)^i$ — *Em.:* $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2}))$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (v) $(-1)^{1/\pi}$ — *Em.:* $\cos(2k+1) + i\sin(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (vi) i^i — *Em.:* $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (vii) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$ — *Em.:* $e^{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (viii) $(\log i)^i$ — *Em.:* $e^{-\pi/2}e^{2k\pi}(\cos(\ln\frac{\pi}{2}) + i\sin(\ln\frac{\pi}{2}))$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (ix) i^{3+4i} — *Em.:* $-e^{-2\pi}e^{8k\pi}i$, $k \in \mathbf{Z}$.

   (x) $(1+i)^{1+i}$ — *Em.:* $e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}(\cos(\ln\sqrt{2}) - \sin(\ln\sqrt{2}) + i(\cos\ln\sqrt{2} + \sin(\ln\sqrt{2})))$, $k \in \mathbf{Z}$.

9. Idatzi honako zenbaki hauek forma binomikoan:

(i) $\sin(2+3i)$ *Em.:* $\sin 2 \cosh 3 + i \cos 2 \sinh 3$.

(ii) $\cos\Big(\dfrac{\pi}{2} + i \ln 2\Big)$ *Em.:* $-3i/4$.

(iii) $\cosh^2(i\pi)$ *Em.:* 1.

(iv) $\sinh\Big(1 + i\dfrac{\pi}{2}\Big)$ *Em.:* $\dfrac{e^2+1}{2e} i$.

(v) $\mathrm{cotan}(i\pi)$ *Em.:* $\dfrac{1+e^{2\pi}}{1-e^{2\pi}} i$.

(vi) $(\cos i)^i$ *Em.:* $e^{2k\pi}\big(\cos(\ln \frac{1+e^2}{2e}) + i \sin(\ln \frac{1+e^2}{2e})\big)$, $k \in \mathbf{Z}$.

(vii) $i^{\sin i}$ *Em.:* $e^{\frac{1-e^2}{2e}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, $k \in \mathbf{Z}$.

10. Idatzi funtzio hauen parte erreala eta parte irudikaria:

(i) e^{-z^2}. *Em.:* $u(x,y) = e^{y^2-x^2}\cos(2xy)$, $v(x,y) = -e^{y^2-x^2}\sin(2xy)$.

(ii) $\cos z$ *Em.:* $u(x,y) = \cos x \cosh y$, $v(x,y) = -\sin x \sinh y$.

(iii) $\tan z$ *Em.:* $u(x,y) = \frac{\sin(2x)}{\cosh(2y)+\cos(2x)}$, $v(x,y) = \frac{\sinh(2y)}{\cosh(2y)+\cos(2x)}$.

11. Aurkitu funtzio hauen balio guztiak:

(i) $\mathrm{Arcsin}\Big(i\dfrac{\pi}{3}\Big)$ *Em.:* $2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{\pi^2+9}-\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$; $(2m+1)\pi - i \ln \frac{\sqrt{\pi^2+9}+\pi}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$.

(ii) $\mathrm{Arccos}\, i$ *Em.:* $\pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\pm 1 + \sqrt{2})$, $k \in \mathbf{Z}$,

(iii) $\mathrm{Arctan}(1+2i)$. *Em.:* $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + k\pi - i\frac{\ln 5}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$,

12. Aurki itzazu honako ekuazio hauen soluzio guztiak:

(i) $e^{iz} = 1+i$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi - \dfrac{i}{2}\log 2$, $k \in \mathbf{Z}$.

(ii) $e^{iz} + e^{-iz} = 2$ *Em.:* $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(iii) $e^{iz} - e^{-iz} = 2i$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(iv) $e^z = -3$ *Em.:* $\ln 3 + (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.

(v) $\log z = i\dfrac{\pi}{2}$ *Em.:* i.

(vi) $\cos z = 0$ *Em.:* $\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

(vii) $\sin z = 3$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$, $k \in \mathbf{Z}$.

(viii) $\sin z + \cos z = 2$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

(ix) $\sin z - \cos z = i$ *Em.:* $-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbf{Z}$.

(x) $\sinh z + 2\cosh z = i$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $-\ln 3 - (\frac{\pi}{2} + 2m\pi)i$, $m \in \mathbf{Z}$.

13. Lau aukera ditugu $f(z) = z^{1/4}$ funtzio holomorfoa definitzeko $\mathbf{C} - (-\infty, 0]$ multzoan. Hartu $f(1) = -i$ egiten duena. Eman $f(e^{2\pi i/3})$ eta $f'(e^{2\pi i/3})$.

Em.: $f(e^{2\pi i/3}) = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $f'(e^{2\pi i/3}) = \cancel{\dfrac{i}{4}}$. $\dfrac{-1}{4}$

8. ARIKETA

Ariketa osoan zehar, $k \in \mathbb{Z}$

i) $\operatorname{Log} e$

$$z = |z| \cdot e^{i(\arg z + 2\pi k)} = e^{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Hortaz, $\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$

$|e| = e \quad ; \quad \arg(e) = 0$ izanik:

$$\operatorname{Log}(e) = \ln e + i(0 + 2\pi k) \longrightarrow \boxed{\operatorname{Log}(e) = 1 + 2\pi k i}$$

ii) $\operatorname{Log}(3-2i)$

$|3-2i| = \sqrt{13} \quad ; \quad \arg(3-2i) = -\arctan\frac{2}{3}$

$$\operatorname{Log}(3-2i) = \ln\sqrt{13} + i\left(-\arctan\frac{2}{3} + 2\pi k\right)$$

$$\boxed{\operatorname{Log}(3-2i) = \frac{1}{2}\ln 13 - i\left(\arctan\frac{2}{3} + 2\pi k\right)}$$

iii) 1^i

$$z^c = e^{c \cdot \operatorname{Log} z}$$

$|1| = 1 \quad ; \quad \arg(1) = 0$

$$\operatorname{Log} 1 = \ln 1 + i(0 + 2\pi k) = 2\pi k i$$

$$1^i = e^{i \cdot \operatorname{Log} 1} = e^{i \cdot 2\pi k i} \longrightarrow \boxed{1^i = e^{-2\pi k}}$$

iv) $(1-i)^i$

$|1-i| = \sqrt{2} \quad ; \quad \arg(1-i) = -\pi/4$

$$\mathrm{Log}(1-i) = \ln\sqrt{2} + i(-\pi/4 + 2\pi k)$$

$$(1-i)^i = e^{i\cdot \mathrm{Log}(1-i)} = e^{i[\ln\sqrt{2} + i(-\pi/4 + 2\pi k)]} =$$

$$= e^{i\cdot\ln\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k}$$

$$\boxed{(1-i)^i = e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k} \cdot [\cos(\ln\sqrt{2}) + i\cdot\sin(\ln\sqrt{2})]}$$

v) $(-1)^{1/\pi}$

$$\mathrm{Log}(-1) = \ln(1) + i(\pi + 2\pi k) = i\cdot 2\pi(k + 1/2)$$

$$(-1)^{1/\pi} = e^{\frac{1}{\pi}\mathrm{Log}(-1)} = e^{i2(k+1/2)}$$

$$\boxed{(-1)^{1/\pi} = \cos(2k+1) + i\cdot\sin(2k+1)}$$

vi) i^i

$$\mathrm{Log}\, i = \ln|1| + i(\pi/2 + 2\pi k) = i\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$$

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Log}\, i} = e^{i\cdot i\pi(\frac{1}{2}+2k)} \longrightarrow \boxed{i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}}$$

vii) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{3/4 + 1/4}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + 2\pi k\right) =$$

$$= \ln 1 + i(\arctan 1/\sqrt{3} + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i} = e^{(1+i)\mathrm{Log}(\sqrt{3}/2 + i/2)} = e^{i\cdot\frac{\pi}{6} + 2\pi k i + i\cdot i(\frac{\pi}{6} + 2\pi k)} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)\right]$$

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1+i} = e^{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

viii) $(\log i)^i$

$$\log i = \ln|i| + i\cdot\arg i = \ln(1) + i\cdot\arctan(1) = i\frac{\pi}{2}$$

$$\left(i\frac{\pi}{2}\right)^i = e^{i\cdot \mathrm{Log}(i\frac{\pi}{2})} = e^{i[\ln|i\frac{\pi}{2}| + i(\arg(i\frac{\pi}{2})+2\pi k)]} =$$

$$= e^{i(\ln\frac{\pi}{2} + i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))} = e^{i\cdot\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 2\pi k}$$

$$\boxed{(\log i)^i = e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}\cdot\left[\cos\left(\ln\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\ln\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

ix) i^{3+4i}

$$\mathrm{Log}\, i = i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

$$i^{3+4i} = e^{(3+4i)\cdot\mathrm{Log}\, i} = e^{(3+4i)\cdot i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} =$$

$$= e^{3i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}\cdot e^{-2\pi-8\pi k} =$$

$$= e^{-2\pi+8\pi k}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{i^{3+4i} = -e^{-2\pi+8\pi k}\cdot i}$$

x) $(1+i)^{1+i}$

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\left(\arg(1+i) + 2\pi k\right) =$$

$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\cdot \operatorname{Log}(1+i)} = e^{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)} \cdot e^{i\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2\pi k} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)} \cdot e^{i\ln\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] \cdot \left[\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right] =$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right] =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k} \cdot (1+i)\left[\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right]$$

$$\boxed{(1+i)^{1+i} = e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\cos(\ln\sqrt{2}) - \sin(\ln\sqrt{2}) + i\cdot\left(\cos(\ln\sqrt{2}) + \sin(\ln\sqrt{2})\right)\right]}$$

9. ARIKETA

i) $\sin(2+3i) = \sin 2 \cdot \cos 3i + \sin 3i \cdot \cos 2 =$

$$= \sin 2 \cdot \cosh 3 + i \cdot \sinh 3 \cdot \cos 2$$

$$\boxed{\sin(2+3i) = \sin 2 \cdot \cosh 3 + i \cdot \cos 2 \sinh 3}$$

ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos i\ln 2 - \sin\frac{\pi}{2}\sin i\ln 2 =$

$= -\sin(i\ln 2) = -\dfrac{e^{i\cdot i\cdot\ln 2} + e^{-i\cdot i\ln 2}}{2i} = \frac{i}{2}\left(e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}\right) =$

$= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{i}{2}\cdot\frac{-3}{2}$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right) = -\frac{3}{4}i}$$

iii) $\cosh^2(i\pi) = \left(\dfrac{e^{i\pi}+e^{-i\pi}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}\left[\cos\pi + i\sin\pi + \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right]^2 =$

$= \frac{1}{4}(1+1)^2 \longrightarrow \boxed{\cosh^2(i\pi) = 1}$

iv) $\sinh\left(1+i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{1+i\frac{\pi}{2}} - e^{-1-i\frac{\pi}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left[e\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{e}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left(e\cdot i + \frac{1}{e}i\right) = \frac{1}{2e}\left(e^2 i + i\right)$

$$\boxed{\sinh\left(1+i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^2+1}{2e}\,i}$$

v) $\cotan(i\pi) = \dfrac{\cos(i\pi)}{\sin(i\pi)} = \dfrac{\cosh(\pi)}{i\sinh(\pi)} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+e^{-\pi}\right)}{\frac{i}{2}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)} =$

$= \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\frac{1}{e^{\pi}}\left(e^{2\pi}+1\right)}{\frac{1}{e^{\pi}}\left(e^{2\pi}-1\right)} = -i\,\dfrac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$

$$\boxed{\cotan(i\pi) = \frac{1+e^{2\pi}}{1-e^{2\pi}}\,i}$$

vi) $(\cos i)^i = (\cosh 1)^i = \left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)^i = \left(\frac{e^2+1}{2e}\right)^i =$

$= \frac{e^2+1}{2e} \cdot e^{2\pi k i} = e^{2\pi k} \cdot e^{i \cdot \ln \frac{e^2+1}{2e}}$

$$\boxed{(\cos i)^i = e^{2\pi k}\left[\cos\left(\ln \frac{1+e^2}{2e}\right) + i \sin\left(\ln \frac{1+e^2}{2e}\right)\right],\ k \in \mathbb{Z}}$$

vii) $i^{\sin i}$

$\sin i = i \cdot \sinh 1 = i \cdot \frac{e^2-1}{2e}$

$\operatorname{Log} i = \ln|i| + i(\arg z + 2\pi k) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) =$

$= i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$i^{\sin i} = e^{\sin i \cdot \operatorname{Log} i} = e^{i \cdot \frac{e^2-1}{2e} \cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$

$$\boxed{i^{\sin i} = e^{\frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},\ k \in \mathbb{Z}}$$

10. ARIKETA

i) $e^{-z^2} = u(x,y) + i v(x,y)$

$z = x + iy$ bada, $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$e^{-z^2} = e^{y^2-x^2-2xyi} = e^{y^2-x^2} \cdot e^{-2xyi} =$

$= e^{y^2-x^2} \cdot [\cos(-2xy) + i \sin(-2xy)] =$

$= e^{y^2-x^2} \cos(2xy) - i e^{y^2-x^2} \sin(2xy)$

$$\boxed{u(x,y) = e^{y^2-x^2} \cdot \cos(2xy),\quad v(x,y) = -e^{y^2-x^2} \sin(2xy)}$$

ii) $\cos z = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy) =$$

$$= \cos x \cdot \cosh y - \sin x \cdot i \cdot \sinh y$$

$$\boxed{u(x,y) = \cos x \cdot \cosh y \quad ; \quad v(x,y) = -\sin x \sinh y}$$

iii) $\tan z = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

$$\tan z = \tan(x+iy) = \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos iy + \sin iy \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cosh y + i \sinh y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cosh y - i \sin x \sinh y} =$$

$$= \frac{(\sin x \cdot \cosh y + i \cdot \sinh y \cdot \cos x)(\cos x \cdot \cosh y + i \sin x \cdot \sinh y)}{(\cos x \cdot \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x \cosh^2 y - \sin x \cos x \sinh^2 y + i(\cos^2 x \cosh y \sinh y + \sin^2 x \sinh y \cosh y)}{(\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x + i \cdot \sinh y \cdot \cosh y}{\frac{1+\cos 2x}{2} \cosh^2 y + \frac{1-\cos 2x}{2} \sinh^2 y} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin(2x) + i \cdot \frac{1}{2} \sinh(2x)}{\frac{1}{2} \underbrace{(\cosh^2 y - \sinh^2 y)}_{\cosh(2y)} + \frac{1}{2} \cos 2x \underbrace{(\cosh^2 y - \sinh^2 y)}_{1}} =$$

$$= \frac{\sin(2x) + i \sinh(2x)}{\cosh(2y) + \cos(2x)}$$

$$u(x,y) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+\cosh(2y)} \;;\; v(x,y) = \frac{\sinh(2y)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}$$

11. ARIKETA

i) $\text{Arcsin}\left(i\frac{\pi}{3}\right)$

Topatu behar ditugu $z \in \mathbb{C}$ non $\sin(z) = i\frac{\pi}{3}$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i\frac{\pi}{3} \longrightarrow e^{iz}-e^{-iz} = i\frac{2\pi}{3}$$

$e^{iz} = \omega$ eginez: $\omega - \frac{1}{\omega} = i\frac{2\pi}{3} \longrightarrow \omega^2 - i\frac{2\pi}{3}\omega - 1 = 0$

$$\omega = \frac{i\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)^2+4}}{2} = \frac{\frac{2\pi}{3}i \pm \sqrt{-\frac{4\pi^2}{9}+4}}{2} = \frac{\pi}{3}i \pm \sqrt{1-\frac{\pi^2}{9}} =$$

$$= \frac{\pi}{3}i \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{9}-1}\, i = \left(\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{9}-1}\right) i = \left(\pi \pm \sqrt{\pi^2-9}\right)\frac{i}{3}$$

Beraz,

$\omega_1 = \left(\pi+\sqrt{\pi^2-9}\right)^{i}/_{3}$ bada, $e^{iz} = \left(\pi+\sqrt{\pi^2-9}\right)\frac{i}{3}$

ebatzi behar da:

$$iz = \text{Log}\left[\left(\pi+\sqrt{\pi^2-9}\right)^{i}/_{3}\right] =$$

$$= \ln\left|\left(\pi+\sqrt{\pi^2-9}\right)\frac{i}{3}\right| + i\left(\arg\left[\left(\pi+\sqrt{\pi^2-9}\right)^{i}/_{3}\right]+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

$$= \ln\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-9}}{3} + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{z = (2k+1)\pi - \ln\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-9}}{3}\, i,\ k\in\mathbb{Z}}$$

Aldiz,

$w_2 = (\pi - \sqrt{\pi^2 - 9})\frac{i}{3}$ bada, $e^{iz} = (\pi - \sqrt{\pi^2-9})^{i/3}$

ebatzi behar da:

$$iz = \mathrm{Log}\left[(\pi - \sqrt{\pi^2-9})^{i/3}\right] =$$

$$= \ln \frac{\pi - \sqrt{\pi^2-9}}{3} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right), \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{z = (2m+1)\pi - \ln \frac{\pi - \sqrt{\pi^2-9}}{3}\, i, \quad m \in \mathbb{Z}}$$

ii) Arccos i

Topatu behar dugu $z \in \mathbb{C}$ non $\cos(z) = i$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i$, $\quad w = e^{iz}$ eginez:

$$w + \frac{1}{w} = 2i \longrightarrow w^2 + 2iw + 1 = 0$$

$$w = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} = i \pm \sqrt{-2} = i(1 \pm \sqrt{2})$$

$w_1 = i(1+\sqrt{2})$ bada, $e^{iz} = i(1+\sqrt{2})$

$$iz = \mathrm{Log}[i(1+\sqrt{2})] =$$

$$= \ln|i(1+\sqrt{2})| + i\left[\arg[i(1+\sqrt{2})] + 2\pi k\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \cdot \ln(1+\sqrt{2})$$

$w_2 = i(1-\sqrt{2})$ bada, $e^{iz} = i(1-\sqrt{2})$

$$iz = \mathrm{Log}[i(1-\sqrt{2})] =$$

$$= \ln(-1+\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln(\sqrt{2} - 1)$

Beraz, $\boxed{z = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2} - i \cdot \ln(\sqrt{2} \pm 1),\ k \in \mathbb{Z}}$

12. ARIKETA

i) $e^{iz} = 1 + i$

$iz = \text{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i[\arg(1+i) + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$

$= \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$

Beraz, $\boxed{z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - \frac{i}{2}\ln 2,\ k \in \mathbb{Z}}$

ii) $e^{iz} + e^{-iz} = 2$

$e^{iz} = \omega$ eginez:

$\omega + \frac{1}{\omega} = 2 \longrightarrow \omega^2 - 2\omega + 1 = 0 \longrightarrow (\omega - 1)^2 = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow \omega = 1$

Hortaz, $e^{iz} = 1 \longrightarrow iz = \text{Log}(1) =$

$= \ln|1| + i\arg 1 + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{z = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$

iii) $e^{iz} - e^{-iz} = 2i$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 1 \longrightarrow \sin(z) = 1 \longrightarrow \boxed{z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}}$$

iv) $e^{z} = -3$

$$z = \mathrm{Log}(-3) = \ln|-3| + i[\arg(-3) + 2\pi k] =$$

$$= \ln 3 + i(\pi + 2\pi k)$$

$$\boxed{z = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}}$$

v) $\log z = i\pi/2$

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} \longrightarrow \boxed{z = i}$$

vi) $\cos z = 0$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \qquad e^{iz} = \omega \text{ eginez: } \omega + \frac{1}{\omega} = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \omega^2 + 1 = 0 \longrightarrow \omega = \pm i$$

Hortaz, $e^{iz} = \pm i$

$$iz = \log(\pm i) = \ln|\pm i| + i[\arg(\pm i) + 2\pi k] =$$

$$= \ln(1) + i\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\boxed{z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}}$$

vii) $\sin z = 3$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 3 \;;\quad e^{iz}=\omega \text{ eginez: } \omega - \frac{1}{\omega} = 6i$$

$$\omega^2 - 6i\omega - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{6i \pm \sqrt{(-6i)^2+4}}{2} = \frac{6i \pm \sqrt{-32}}{2} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = (3\pm 2\sqrt{2})i$$

Hortaz, $e^{iz} = (3\pm 2\sqrt{2})i$ izanik,

$$iz = \mathrm{Log}[(3\pm 2\sqrt{2})i] =$$

$$= \ln|(3\pm 2\sqrt{2})i| + i\arg[(3\pm 2\sqrt{2})i] + 2\pi k i =$$

$$= \ln(3\pm 2\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

$$\boxed{z = (2k+1)\frac{\pi}{2} - i\cdot\ln(3\pm 2\sqrt{2}),\ k\in\mathbb{Z}}$$

viii) $\sin z + \cos z = 2$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2 \longrightarrow (e^{iz}-e^{-iz}) + i(e^{iz}+e^{-iz}) = 4i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow e^{iz}(1+i) + e^{-iz}(-1+i) = 4i$$

$\omega = e^{iz}$ egiten badugu:

$$\omega(1+i) + \frac{1}{\omega}(i-1) = 4i$$

$$(1+i)\omega^2 - 4i\omega + (i-1) = 0$$

$$\omega = \frac{4i \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4(1+i)(i-1)}}{2(1+i)} = \frac{4i \pm \sqrt{-16-8}}{2(1+i)} =$$

$$= \frac{4i \pm 2\sqrt{2}i}{2(1+i)} = \frac{(2\pm\sqrt{2})i}{1+i}$$

$\omega = \dfrac{(2+\sqrt{2})i}{1+i}$ bada,

$$e^{iz} = \frac{(2+\sqrt{2})i}{1+i} = \frac{(2+\sqrt{2})i\cdot(1-i)}{2} = \frac{(2+\sqrt{2})i+2+\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i$$

$$iz = Log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= \ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i\right| + i\left[\arg\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i\right) + 2\pi k\right]$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}+1)$$

Era berean, $\omega = \dfrac{(2-\sqrt{2})i}{1+i}$ badugu, zera lortzen dugu:

$$z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}-1)$$

Hortaz,

$$\boxed{z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}\pm 1),\ k\in\mathbb{Z}}$$

ix) $\sin z - \cos z = i$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = i$$

$$(e^{iz}-e^{-iz}) - i(e^{iz}+e^{-iz}) = -2$$

$$e^{iz}(1-i) - e^{-iz}(1+i) = -2$$

$\omega = e^{iz}$ eginez:

$$\omega(1-i) - \frac{1}{\omega}(1+i) = -2$$

$$\omega^2(1-i)+2\omega-(1+i)=0$$

$$\omega=\frac{-2\pm\sqrt{4+(1-i)(1+i)4}}{2(1-i)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2(1-i)}=\frac{(-2\pm\sqrt{12})(1+i)}{4}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}+\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}i$$

Hortaz, $e^{iz}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}+\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}i$

$$iz=\mathrm{Log}\left(\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}+\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}i\right)=$$

$$=\ln\left|\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}+\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}i\right|+i\left[\arg\left(\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}+\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}i\right)+2\pi k\right]=$$

$$=\ln\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2\pm\sqrt{12}}{2^2}\right)+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)+i\left(2\pi k-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{z=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k-i\ln\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),\ k\in\mathbb{Z}}$$

x) $\sinh z+2\cosh z=i$

$$\frac{e^z-e^{-z}}{2}+e^z+e^{-z}=i$$

$$\frac{3}{2}e^z+\frac{1}{2}e^{-z}=i$$

$$3e^z+e^{-z}=2i$$

$e^z=\omega$ eginez:

$$3\omega+\frac{1}{\omega}=2i$$

$$3\omega^2-2i\omega+1=0$$

$$\omega = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 12}}{6} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{6} = \frac{2i \pm 4i}{6}$$

"+" zeinua hautatuz:

$$\omega_+ = i$$

$$e^{iz_+} = i \longrightarrow iz_+ = \mathrm{Log}\, i = \ln|i| + i\arg(i) + 2\pi k i =$$

$$= \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i$$

$$\boxed{z_+ = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}}$$

"−" zeinua hautatuz:

$$\omega_- = -\frac{1}{3} i$$

$$e^{iz_-} = -\frac{1}{3} i \longrightarrow iz_- = \mathrm{Log}\left(-\frac{1}{3} i\right) =$$

$$= \ln\left|-\frac{1}{3} i\right| + i\left[\arg\left(-\frac{1}{3} i\right) + 2\pi k\right] = \ln(-1/3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\boxed{z_- = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(-1/3), \ k \in \mathbb{Z}}$$

13. ARIKETA

$\mathbb{C} - (-\infty, 0]$. $f(z) = z^{1/4}$, non $f(1) = -i$.

Eman $f(e^{\frac{2\pi}{3} i})$ eta $f'(e^{\frac{2\pi}{3} i})$

$$z^{1/4} = |z|^{1/4} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$f(1) = -i$ izateko:

$$1^{1/4} = |1|^{1/4} \cdot e^{i\frac{\arg 1 + 2\pi k}{4}} = e^{i \cdot \frac{\pi}{2} k} = -i$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} k\right) = -i$$

k = 3 izan behar da.

Hortaz, $f(z) = |z|^{1/4} e^{i\cdot\frac{\arg z}{4} + \frac{3\pi}{2}i}$

Orain,

$$\boxed{f(e^{\frac{2\pi}{3}i})} = |e^{\frac{2\pi}{3}i}|^{1/4} \cdot e^{i\cdot\frac{\arg(e^{\frac{2\pi}{3}i})}{4} + \frac{3\pi}{2}i} =$$

$$= 1\cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{3\pi}{2}i} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2})} = e^{i\frac{5\pi}{3}} =$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}$$

Bestetik,

$$f'(z) = \frac{1}{4} z^{\frac{1}{4}-1} =$$

$$= \frac{1}{4} f(z)\frac{1}{z}$$

Argi ibili eta ez erabili

$f'(z) = \frac{1}{4} e^{-3/4}$ (badaezpada)

Beraz,

$$\boxed{f'(e^{\frac{2\pi}{3}i})} = \frac{1}{4} f(e^{\frac{2\pi}{3}i})\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \frac{1}{4} e^{i\frac{5\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \frac{1}{4} e^{i\pi} =$$

$$= \boxed{-1/4}$$

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

2018ko otsailaren 27ko MINTEGIA. S1 TALDEA

1. Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $u(x,y) = y^3 + ayx^2 + bxy + 2$, eta
$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$
Baldin f holomorfoa bada eta $f(0) = 2 - i$ eta $f'(1) = 7i$ badira, aurkitu f. Idatzi f z-ren menpe, $z = x + iy$ izanik.

2. Izan bitez $\Omega = \left[\ln 2, \ln 3\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ eta $f(z) = e^z$. Marraztu Ω eta $f(\Omega)$.

3. Izan bedi f funtzioa $\Omega = \mathbb{C} - [0, \infty)$ multzoan holomorfoa den $\sqrt[4]{z}$ funtzio multiformearen adarra, $f(-1) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ izanik. Kalkulatu $f(-i)$.

4. Eman $(1-2i)\sinh z - (1+2i)\cosh z - 2 - i = 0$ ekuazioaren soluzio konplexu posible guztiak forma binomikoan.

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

2018ko martxoaren 2ko MINTEGIA. S2 TALDEA

1. Izan bitez $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 2\}$ eta $f(z) = iz + 1$. Marraztu Ω eta $f(\Omega)$.

2. Aurkitu $(z-1)^4 = \dfrac{16+16i}{\sqrt{2}}$ ekuazioaren soluzio konplexu guztiak.

3. Izan bitez $a > 0$ eta $f(z) = \dfrac{z^{a-1}}{z+1}$, non z^{a-1} funtzioa definitzeko $\mathbb{C} - [0, \infty)$ multzoan holomorfoa den $\log z = \ln|z| + i\theta(z)$, $\theta(z) \in (0, 2\pi)$ logaritmoaren adarra kontsideratzen den. Eman itzazu
$$\frac{f(-1+i) + f(-1-i)}{e^{(a-1)2\pi i}}$$
adierazpenaren parte erreala eta irudikaria.

4. Izan bedi
$$u(x,y) = ax^3 - 6xy^2 + 2xy.$$
Aurkitu $f = u + iv$ plano konplexu osoan holomorfoa eta $f(1) + f'(1) = 8$ betetzen duena. Idatzi f-ren adierazpena z-ren menpe, $z = x + iy$ izanik.

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

2018ko martxoaren 2ko MINTEGIA. S3 TALDEA

1. Izan bitez $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, \ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$ eta $f(z) = \frac{1}{z^3}$. Marraztu Ω eta $f(\Omega)$.

2. Eman $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$ ekuazioaren soluzio konplexu posible guztiak forma binomikoan.

3. Izan bedi f funtzioa $\Omega = \mathbb{C} - \{-iy : y \geq 0\}$ multzoan holomorfoa den $\sqrt{z}$ funtzioaren adarra, $f(1) = -1$ izanik. Kalkulatu $f(-1)$ eta $f(2i)$.

4. Izan bedi $f(z) = e^{ax}\cos(3y) - 4xy + iv(x,y)$. Aurki itzazu $a > 0$ eta $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f funtzio osoa izan dadin, $f(0) + f'(0) = 4 + i$ betetzen. Idatzi f z-ren menpe, $z = x + iy$ izanik.