12. Gaia

Taylor eta Laurenten serieak. Puntu singularrak

12.1 Funtzio-segidak eta funtzio-serieak

Definizioa. $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, izan bedi $f_n \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funtzioa, eta izan bedi $D \subset \Omega$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida D multzoan puntuz puntu konbergentea dela diogu baldin eta $z \in D$ bakoitzerako existitzen bada $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \in \mathbb{C}$, hau da

$$\forall z \in D,\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon, z) \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

$f \colon D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ funtzioa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limite puntuala da D multzoan eta $f_n \xrightarrow{p} f$ D-n idazten da.

Definizioa. Izan bitez $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida eta f bere limite puntuala D multzoan. $\{f_n\}$ D-n uniformeki konbergentea dela diogu baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in D.$$

$f_n \xrightarrow{u} f$ D-n idatziko dugu.

Oharra. Definizioetatik, argi dago $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformeki konbergentea bada, orduan puntuz puntu konbergentea ere badela. Alderantzizkoa orokorrean ez da betetzen. Badaude puntuz puntu konbergenteak diren funtzio-segidak, uniformeki konbergenteak ez direnak.

Definizioa. Izan bitez $f_n \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $D \subset \Omega$. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea D multzoan puntuz puntu (uniformeki) konbergentea dela diogu baldin eta batura partzialen segida, $\{S_n = f_1 + \cdots + f_n\}$, D multzoan puntuz puntu (uniformeki) konbergentea bada. $\{S_n\}$ segidaren limite puntuala S funtzioa baldin bada, S seriearen batura dela diogu eta $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ idatzi.

Definizioa. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea absolutuki puntuz puntu (uniformeki) konbergentea dela diogu baldin eta $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ puntuz puntu (uniformeki) konbergentea bada.

Teorema 12.1 (Weierstrassen M-testa). *Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida eta demagun existitzen dela $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealezko segida non $|f_n(z)| \leq M_n$, $z \in D$ guztietarako. $\sum M_n$ seriea konbergentea bada, orduan $\sum f_n$ absolutuki uniformeki konbergentea da D-n.*

Teorema 12.2. *Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Ω-n definitutako funtzio-segida, f_n jarraitua izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.*

(i) $f_n \xrightarrow{u} f$ *Ω-n bada, orduan f jarraitua da Ω-n.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *uniformeki konbergentea bada Ω-n, orduan* $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jarraitua da Ω-n.*

12.2 Berretura-serieak

Definizioa. Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ guztietarako. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ moduko funtzio-seriea z_0 puntuan zentratutako berretura-seriea dela diogu.

Aztertuko dugu berretura-serieen izaera. Horretarako, gogora dezagun gai positiboko serieetarako Cauchyren irizpidea.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealezko segida bornatua. Orduan

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\big(\inf_{k\geq n} a_k\big) = \sup\big(\inf_{k\geq n} a_k\big)$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren behe-limitea da eta

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\big(\sup_{k\geq n} a_k\big) = \inf\big(\sup_{k\geq n} a_k\big)$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren goi-limitea dela esaten da.

Proposizioa 12.3. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealezko segida.*

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konbergentea bada,* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segidaren goi-limitea (behe-limitea) bere azpisegida konbergenteen limiteen artean handiena (txikiena) da.*

Teorema 12.4 (Cauchyren irizpidea edo erroaren irizpidea). *Izan bitez $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.*

(i) Baldin eta $l < 1$ bada, orduan $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Baldin eta $l > 1$ bada, orduan $\sum a_n$ dibergentea da.

Teorema 12.5 (Cauchy-Hadamard). *Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako eta $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Orduan*

(i) $0 < \Lambda < \infty$ baldin bada, $R = \dfrac{1}{\Lambda}$ izendatuz, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolutuki konbergentea da $|z-z_0| < R$ diskoan, uniformeki konbergentea da $|z-z_0| \leq \rho$ diskoan, $\rho < R$ guztietarako, eta dibergentea da $|z-z_0| > R$ denean.

(ii) $\Lambda = +\infty$ bada, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dibergentea da $z \neq z_0$ guztietarako.

(iii) $\Lambda = 0$ baldin bada, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolutuki konbergentea da $\mathbb{C}$ osoan eta uniformeki konbergentea $|z-z_0| \leq \rho$ diskoan, $\rho > 0$ edozein izanik.

!!

Froga. Kontsidera dezagun $\sum |a_n(z-z_0)^n|$ gai positiboko seriea eta erabili dezagun Cauchyren irizpidea.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \Lambda |z-z_0|.$$

(i) $|z-z_0| < R = \dfrac{1}{\Lambda}$ bada, $\Lambda|z-z_0| < 1$ eta Cauchyren irizpidearen arabera $\sum |a_n(z-z_0)^n|$ konbergentea da, hau da, $\sum a_n(z-z_0)^n$ (absolutuki) konbergentea da.

$|z-z_0| > R$ bada, orduan $\Lambda|z-z_0| = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > 1$ denez, infinitu n-tarako $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > 1$, beraz $|a_n(z-z_0)^n| > 1$ infinitu n-tarako. Ondorioz, $\lim_{n\to\infty} a_n(z-z_0)^n \neq 0$ eta seriea dibergentea da.

Azkenik, $|z-z_0| \leq \rho < R$ bada, $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n|\rho^n$ eta $\sum |a_n|\rho^n$ konbergentea da $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\rho^n} = \Lambda\rho < 1$ delako, beraz, Weierstrassen M-testaren arabera, $\sum a_n(z-z_0)^n$ (absolutuki) uniformeki konbergentea da.

(ii) $\Lambda = +\infty$ bada, $z \neq z_0$ denean $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = +\infty$ eta beraz $\lim_{n\to\infty} a_n(z-z_0)^n \neq 0$. Ondorioz, $\sum a_n(z-z_0)^n$ dibergentea da.

(iii) $\Lambda = 0$ bada, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n} = 0 < 1$ da $z \in \mathbb{C}$ guztietarako eta Cauchyren irizpideak ziurtatzen digu $\sum a_n(z-z_0)^n$ (absolutuki) konbergentea dela $\mathbb{C}$ osoan.

Gainera, $\rho > 0$ bada, $|z-z_0| \le \rho$ denean, $|a_n(z-z_0)^n| \le |a_n|\rho^n$ eta $\sum |a_n|\rho^n$ konbergentea denez, berriro Weierstrassen M-testaren bidez ziurta dezakegu $\sum a_n(z-z_0)^n$ (absolutuki) uniformeki konbergentea dela $|z-z_0| \le \rho$ zirkuluan.

□

Definizioa. Izan bitez $\sum a_n(z-z_0)^n$ berretura-seriea eta $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Izan bedi $R = \dfrac{1}{\Lambda}$, $0 < \Lambda < +\infty$ bada; $R = 0$, $\Lambda = +\infty$ bada; eta $R = +\infty$, $\Lambda = 0$ bada. R zenbakia $\sum a_n(z-z_0)^n$ berretura-seriearen konbergentzia-erradioa dela esaten da eta $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ seriearen konbergentzia-diskoa edo konbergentzia-zirkulua.

Oharra. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existitzen bada, orduan $\boxed{\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Baina gerta daiteke ezkerraldeko limitea ez existitzea. Eskuinekoa, aldiz, beti existitzen da, finitua edo infinitua. Adibidez, $a_n = 2$ bada, n bikoitia denean eta $a_n = 1$ bada n bakoitia denean, orduan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1/2, & n \text{ bikoitia denean,} \\ 2, & n \text{ bakoitia denean.} \end{cases}$$

Beraz $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ez da existitzen, baina $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Adibideak.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ seriea konbergentea da $|z| < 1$ zirkuluan zeren eta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = 1$$

beraz konbergentzia-erradioa $R = 1$ da. Gainera, kasu honetan, kalkula daiteke batura konbergentzia-zirkuluan.

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n$$
$$zS_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + z^{n+1}$$

Bi adierazpen hauen kendura eginez

$$S_n - zS_n = 1 - z^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

eta $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ denez $|z| < 1$ bada,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \text{ denean.}}$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ seriea konbergentea da $|z| < 1$ zirkuluan zeren eta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konbergentea da plano konplexu osoan, zeren eta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$. Kasu honetan $a_m = 2^n$, $m = n!$ denean eta $a_m = 0$ bestela.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{(n-1)!}} = 1,$$

beraz konbergentzia-erradioa $R = 1$ da.

Berretura-serie baten batugaiak polinomioak direnez, argi dago funtzio jarraituak direla, beraz berretura-serie baten batura jarraitua da konbergentzia-zirkuluan, lehenago enuntziatu dugun teoremaren arabera. Ikus dezagun zer gertatzen den deribagarritasunarekin.

Teorema 12.6. *Izan bitez $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ berretura-seriea, R bere konbergentzia-erradioa eta f funtzioa bere batura konbergentzia-zirkuluan. Orduan*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ berretura-seriearen konbergentzia-erradioa R da.

(ii) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, $|z-z_0| < R$ denean.

Are gehiago, arrazonamendu berbera aplikatuz behin eta berriro, $k \in \mathbb{N}$ guztietarako

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}, : |z-z_0| < R \text{ denean.}$$

Teorema 12.7. *Izan bitez $R > 0$ eta $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $|z-z_0| < R$ zirkuluan. Orduan*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Ondorioz, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ bada $|z-z_0| < R$ zirkuluan, orduan $a_n = b_n$, n guztietarako.

12.3 Taylorren serieak

Teorema 12.8 (Taylorren teorema). *Izan bedi f holomorfoa $|z-z_0| < R$ diskoan. Orduan,*

Taylor-ren seriea!

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R \text{ denean.}}$$

Froga. Izan bedi z non $|z-z_0| < R$ den. Har dezagun $r < R$ non $|z-z_0| < r$ den. Cauchyren formula integralaren arabera,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} \, dw.$$

Lehenago ikusi dugun bezala, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$ denean, beraz

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Serie hori uniformeki konbergentea da $|w-z_0| = r$ zirkunferentzian eta goiko formulan sartuta, batukaria integraletik atera daiteke,

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \, dw \\ =& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \\ =& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

□

Definizioa. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ berretura-seriea f funtzioaren z_0 puntuko Taylorren seriea dela esaten da.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. f z_0-n analitikoa dela diogu baldin eta existitzen bada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ berretura-seriea, $|z-z_0| < r$ moduko zirkulu batean konbergentea, $r > 0$ izanik, eta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < r \text{ denean.}$$

Taylorren teoremaren arabera, f holomorfoa bada z_0-n, analitikoa da ere. Baina alderantzizkoa ere egia da, hau da, funtzio analitikoak holomorfoak dira berretura-serieen baturen propietateengatik. Beraz, hemendik aurrera, funtzio analitikoei buruz hitz egingo dugu.

Adibideak.

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$

$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}$

Korolarioa 12.9. *Izan bitez Ω ireki konexua eta $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitikoa Ω-n. Existitzen bada $z_0 \in \Omega$ non $f^{(k)}(z_0) = 0$ den $k = 0, 1, \ldots$ guztietarako, orduan $f(z) = 0$, $z \in \Omega$ guztietarako.*

Oharra. Aurreko korolarioak dioena ez da egia $\mathbb{R}$-n. Adibidez,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

bada, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ guztietarako, baina f ez da funtzio nulua, hots, $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Teorema 12.10. *Izan bedi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ berretura-seriea, R bere konbergentzia-erradioa, $0 < R < \infty$, eta f bere batura konbergentzia-zirkuluan.*

(i) $|z-z_0| = R$ zirkunferentzian gutxienez dago puntu bat non f ez den analitikoa.

(ii) $R = \inf\{|z-z_0| : f \text{ ez da analitikoa } z\text{-n}\}$.

Teorema 12.11. *Izan bitez f analitikoa z_0-n eta $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki konplexuzko segida, $z_n \neq z_0$ izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Baldin $f(z_n) = 0$ bada, $n \geq 1$ guztietarako, orduan $f \equiv 0$ da z_0-ren ingurune batean.*

Froga. Frogatuko dugu $f^{(n)}(z_0) = 0$ dela $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Horretarako, indukzio matematikoaren printzipioa erabiliko dugu.

f jarraitua denez z_0-n, $f(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Orain, demagun $f^{(j)}(z_0) = 0$ dela $j < n$ guztietarako. Orduan

$$f(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m = (z - z_0)^n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^{m-n},$$

beraz,

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^{m-n}.$$

Bereziki, $z = z_k$ hartuz,

$$0 = \frac{f(z_k)}{(z_k - z_0)^n} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z_k - z_0)^{m-n}.$$

k ∞-rantz eramanez, seriearen gai guztiak 0-ra doaz, lehenengoa izan ezik, beraz $f^{(n)}(z_0) = 0$. □

Oharra. Aurreko teoremaren ondorioz, hurrengoak ere betetzen dira:

(i) Izan bedi f analitikoa D ireki konexuan. D-ko puntu baterantz konbergitzen duen segida baten puntuetan f anulatzen bada, segidaren gaiak limitearen desberdinak izanik, $f \equiv 0$ da D-n.

(ii) Izan bitez f eta g analitikoak D ireki konexuan. $f(z_n) = g(z_n)$ bada $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida ez-konstanteko puntuetan eta $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in D$ bada, f eta g berdinak dira D-ko puntu guztietan.

(iii) Izan bitez f eta g analitikoak D ireki konexuan. f eta g berdinak badira $A \subset D$ multzoan eta A-k metatze-puntu bat badu D-n, f eta g berdinak dira D-ko puntu guztietan.

Korolarioa 12.12. *Izan bedi f osoa eta ez-nulua.*

(i) Multzo trinko batean f-ren zero kopurua finitua da (beraz, multzo bornatuetan ere bai);

(ii) f-ren zeroen multzoa finitua edo kontagarria da.

12.4 Laurenten serieak

Teorema 12.13. *Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $0 < r < R$. f analitikoa bada $r < |z-z_0| < R$ eraztunean, orduan*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad r < |z-z_0| < R \text{ denean,}$$

non

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

den $n \in \mathbb{Z}$ guztietarako, $\rho \in (r, R)$ edozein izanda.

Gainera, seriea absolutuki konbergentea da $r < |z-z_0| < R$ eraztunean, eta $r < r_1 < R_1 < R$ badira, seriea uniformeki konbergentea da $r_1 \leq |z-z_0| \leq R_1$ eraztunean.

Froga. Hartu $r < r' < |z-z_0| < R' < R$ eta aplikatu Cauchyren formula integrala:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Lehenengo integralean, Taylorren teoremaren frogan egin dugun bezala,

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Bigarrenean, aldatuko dugu serie geometrikoa (uniformeki) konbergentea izan dadin $|w-z_0| = r'$ zirkunferentzian, honela

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{(z-z_0)\left(1 - \dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Honek Laurenten seriea ematen digu eta, bide batez, koefizienteetarako formula. Hauek zirkunferentzietan integratuz lortzen dira. Eraztunaren barruan dagoen edozein zirkunferentziak balio du integratzeko, Cauchyren teoremaren arabera. □

Definizioa. f analitikoa bada $r < |z-z_0| < R$ eraztunean, f-ren z_0 puntuko Laurenten seriea eraztun horretan honako hau da:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

non

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\rho \in (r, R) \text{ edozein!}}$

$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ Laurenten seriearen zati nagusia dela diogu, eta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ Laurenten seriearen zati erregularra edo analitikoa da.

Oharra. Funtzio baten Laurenten seriezko garapena eraztun batean bakarra da, baina gerta daiteke funtzioa analitikoa izatea puntu berean zentratutako eraztun desberdinetan eta ondorioz garapenak desberdinak izango dira eraztun desberdinetan.

Adibideak.

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = 0$.

f ez da analitikoa 0 eta 1 puntuetan, beraz analitikoa da $z_0 = 0$ puntuan zentraturiko bi eraztunetan: $0 < |z| < 1$ eta $1 < |z|$.

- $0 < |z| < 1$ eraztunean,

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n.$$

- $|z| > 1$ eraztunean,

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$
$$= -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.$$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$.

f analitikoa da jatorrian zentraturiko hiru eraztunetan: $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ eta $2 < |z|$.

- $|z| < 1$ diskoan: f analitikoa da $z_0 = 0$ puntuan, beraz Laurenten seriea Taylorren seriea da kasu honetan.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) z^n.$$

- $1 < |z| < 2$ eraztunean,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$n \to -n$

- $|z| > 2$ denean,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{z}\Big)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1}z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(2^{-(n+1)}-1)z^n.\end{aligned}$$

$z_0 = 1$ puntuan zentratutako eraztunak ere kontsidera daitezke.

- $0 < |z-1| < 1$ eraztunean,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-1}\frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n.\end{aligned}$$

- $|z-1| > 1$ denean,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-1}\frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)^n = \sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^n.\end{aligned}$$

(iii) $f(z) = e^{1/z^2}$, $z_0 = 0$

Kasu honetan eraztun bakarra dugu, $|z| > 0$, hain zuzen ere.

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{z^2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^{2n}.$$

(iv) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$,

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n+2)!}, \quad \forall z \neq 0.$$

12.5 Puntu singularrak. Sailkapena

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$. f analitikoa baldin bada z_0-n, orduan z_0 f-ren puntu erregularra dela diogu eta f ez bada analitikoa z_0-n, baina z_0-ren edozein ingurunetan baldin badaude puntuak non f analitikoa den, orduan z_0 f-ren puntu singularra, edo singularitatea, dela esango dugu.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$ f-ren puntu singularra. z_0 f-ren puntu singular isolatua dela diogu baldin eta existitzen bada $r > 0$ non f analitikoa den $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean.

Adibideak.

(i) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$. f-ren puntu singularrak 0 eta $\dfrac{1}{k\pi}$ moduko puntuak dira, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ izanik.

$z_0 = 0$ ez da f-ren puntu singular isolatua, 0-n zentratutako edozein zirkulutan $\dfrac{1}{k\pi}$ moduko zenbakiak daudelako. Aldiz, $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ f-ren puntu singular isolatua da $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$ guztietarako. $r = \min\{|z_k - z_{k+1}|, |z_k - z_{k-1}|\}$ bada, f analitikoa da $|z - z_k| < r$ eraztunean.

(ii) $f(z) = \log z$ logaritmoaren adar nagusia bada $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ multzoan, bere puntu singularrak zenbaki erreal ez-positiboak dira, eta ez dira isolatuak: $x \in \mathbb{R}^-$ bada, x-n zentratutako zirkulu guztietan infinitu zenbaki negatibo daude.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ f-ren puntu singular isolatua eta $r > 0$ non f analitikoa den $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean, bere Laurenten seriezko garapena hurrengoa izanik:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r \text{ denean.}$$

(i) z_0 f-ren puntu singular gaindigarria dela esaten da baldin eta $a_n = 0$ bada, $n < 0$ guztietarako, hau da, Laurenten seriearen zati singularra nulua bada.

(ii) z_0 f-ren m ordenako poloa dela esaten da baldin eta $a_{-m} \neq 0$ bada eta $a_n = 0$, $n < -m$ guztietarako, hau da, Laurenten seriearen zati singularrean batugai kopuru finitu bat badago. $m = 1$ bada, z_0 f-ren polo sinplea dela diogu.

(iii) z_0 f-ren puntu singular esentziala dela diogu baldin eta $m \in \mathbb{N}$ guztietarako, existitzen bada $n < -m$ non $a_n \neq 0$ den, hau da, Laurenten seriearen zati nagusian infinitu batugai baldin badaude.

Nahiz eta ∞ zenbaki konplexua ez izan, batzuetan interesatuko zaigu osatzea plano konplexua infinituko puntuaren bidez eta kontsideratzea aldagai konplexuko funtzioak plano konplexu hedatuan. ∞ puntu singularra izango da funtzio guztietarako.

Definizioa. Izan bitez $R > 0$ eta f $|z| > R$ multzoan analitikoa. Orduan ∞ f-ren puntu singular isolatua dela diogu.

∞ puntuko singularitatea gaindigarria, poloa edo esentziala izango da baldin eta z_0 $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ funtzioaren puntu singular gaindigarria, poloa edo esentziala bada, hurrenez hurren.

$f(z)$ funtziorako, $|z|>R$ multzoan singularitateak badaude ∞ ez da puntu isolatua!
(16. ariketa, (vi) eta (vii) atalak)

Adibideak.

(i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. $z_0 = 0$ f-ren puntu singular gaindigarria da, zeren eta isolatua baita eta gainera

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, \quad |z| > 0 \text{ denean.}$$

∞ ere puntu singular isolatua da. Gainera,

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big) = z\sin\frac{1}{z} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}},$$

Laurenten seriearen zati singularrean infinitu batugai agertzen dira, beraz, ∞ f-renpuntu singular esentziala da.

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. $z_k = k\pi$ puntu singular isolatua da $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako. ∞, aldiz, ez da isolatua.

Azter dezagun $z_0 = 0$ puntua.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \Big(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} - \dots\Big)}\\ &= \frac{1}{z}\Big(1 + \Big(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\Big) + \Big(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\Big)^2 + \dots\Big)\\ &= \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \dots,\end{aligned}$$

beraz $z_0 = 0$ f-ren 1. ordenako poloa edo polo sinplea da.

(iii) $f(z) = e^{1/z}$. f-ren puntu singular bakarra $z_0 = 0$ da eta ondorioz, isolatua.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n \implies z_0 = 0 \text{ puntu singular esentziala.}$$

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \implies z_0 = \infty \text{ puntu singular gaindigarria.}$$

Teorema 12.14 (Puntu singular gaindigarrien karakterizazioa). *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular isolatua. Baliokideak dira:*

(i) z_0 f-ren puntu singular gaindigarria da.

(ii) $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

(iii) f bornatua da $0 < |z - z_0| < r_1$ eraztunean, $r_1 < r$ izanik.

f analitikoa den eraztunaren erradioa

Froga. z_0 f-ren puntu singular isolatua denez, existitzen da $r > 0$ non f analitikoa den $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean. Izan bedi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ f-ren Laurenten seriea $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean.

Lehenengo eta behin, demagun z_0 f-ren puntu singular gaindigarria dela, hau da, f-ren Laurenten seriearen parte singularra nulua dela,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Orduan,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0 \in \mathbb{C}.$$

Demagun, orain $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ dela. Defini dezagun

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & 0 < |z - z_0| < r \text{ denean}, \\ \lim_{z \to z_0} f(z), & z = z_0 \text{ denean}. \end{cases}$$

g jarraitua da z_0 puntuan eta analitikoa $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean, bereziki jarraitua da $|z - z_0| \leq r_1$ diskoan, $r_1 < r$ bada. g jarraitua denez eta $|z - z_0| \leq r_1$ trinkoa, g bornatua da eta ondorioz f ere bornatua da $0 < |z - z_0| < r_1$ eraztunean.

Azkenik, demagun f bornatua dela $0 < |z - z_0| < r_1$ eraztunean, hau da, existitzen dela $M > 0$ non $|f(z)| \leq M$ den $0 < |z - z_0| < r_1$ denean. Dakigunez, f-ren Laurenten seriea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ bada $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

$\rho \in (0, r)$ edozein izanik. Orduan,

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

$n < 0$ denean, $\lim_{\rho \to 0} \frac{M}{\rho^n} = \lim_{\rho \to 0} M\rho^{-n} = 0$ denez, $a_n = 0$ da $n < 0$ guztietarako, hots, z_0 puntu singular gaindigarria da. □

Definizioa. $z_0 \in \mathbb{C}$ g funtzio analitikoaren zeroa da $g(z_0) = 0$ bada. z_0 g-ren m ordenako zeroa da $g^{(k)}(z_0) = 0$ bada $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ eta $g^{(m)}(z_0) \neq 0$. Kasu honetan, g-ren Taylorren seriearen lehen gai ez-nulua $(z - z_0)^m$-ri dagokiona da. Gainera, $g(z) = (z - z_0)^m \tilde{g}(z)$ idatz daiteke, non $\tilde{g}$ analitikoa den eta $\tilde{g}(z_0) \neq 0$.

Teorema 12.15 (Poloen karakterizazioa). *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular isolatua. Baliokideak dira:*

(*i*) *z_0 f-ren m ordenako poloa da.*

(*ii*) $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) \in \mathbb{C}-\{0\}$.

(*iii*) *$1/f$ funtzioak m ordenako zeroa dauka z_0 puntuan (singularitatea gainditu eta gero).*

Froga. z_0 f-ren puntu singular isolatua denez, existitzen da $r>0$ non f analitikoa den $0<|z-z_0|<r$ eraztunean. Izan bedi $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ f-ren Laurenten seriea $0<|z-z_0|<r$ eraztunean.

Lehenengo eta behin, demagun z_0 f-ren m ordenako poloa dela. Orduan

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots,\qquad 0<|z-z_0|<r,$$

$a_{-m}\neq 0$ izanik. Beraz,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to z_0}\big(a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\dots\big)=a_{-m}\in\mathbb{C}-\{0\}.$$

Demagun orain $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)\in\mathbb{C}-\{0\}$ dela.

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m}{1/f(z)}.$$

Limite hau finitua denez, derrigorrez $1/f$ anulatu behar da z_0-n. Gainera, L'Hopitalen erregela aplikatuz

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m}{1/f(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^{m-1}}{(1/f)'(z)},$$

eta berriro limite hau finitua izan dadin $(1/f)'(z_0)=0$ izan behar du. Honela jarraituz, $1/f$ funtzioaren lehen $m-1$ deribatuek nuluak izan behar dute eta m-garrenak ez-nulua. Hau da, z_0 $1/f$-ren m ordenako zeroa da.

Azkenik, demagun z_0 $1/f$ funtzioaren m ordenako zeroa dela. Honek esan nahi du $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m h(z)$ dela, non h analitikoa den z_0-ren ingurune batean eta $h(z_0)\neq 0$. Orduan, $1/h$ analitikoa da z_0-ren ingurune batean, hau da,

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,\qquad |z-z_0|<\rho,$$

$b_0\neq 0$ izanik. Ondorioz,

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{h(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n=\frac{b_0}{(z-z_0)^m}+\frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots$$

eta z_0 f-ren m ordenako poloa da. □

Teorema 12.16 (Puntu singular esentzialen karakterizazioa). *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular isolatua. z_0 f-ren puntu singular esentziala da baldin eta soilik baldin $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ez bada existitzen (ez da zenbaki konplexua, ez eta ∞ ere).*

Adibideak.

(i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Funtzio honen puntu singular finitu bakarra $z_0 = 0$ da eta gaindigarria da zeren eta

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = 1.$$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Ikusi dugu f-ren puntu singular isolatuak $z_k = k\pi$ modukoak direla, $k \in \mathbb{Z}$ izanik. $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \sin z$ kontsideratuz,

$$g(z_k) = 0, \quad g'(z_k) = \cos z_k = (-1)^k \neq 0$$

$k \in \mathbb{Z}$ guztietarako beraz, $z_k = k\pi$ polo sinplea da $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako.

(iii) $f(z) = e^{1/z}$ funtzioaren puntu singular finitu bakarra $z_0 = 0$ da. $\lim_{z \to 0} e^{1/z}$ ez denez existitzen, $z_0 = 0$ puntu singular esentziala da.

Definizioa. Izan bedi $f \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. f-ren singularitate ez gaindigarriak poloak baldin badira, f meromorfoa dela esaten da. Hau da, f meromorfoa da puntu singular guztiak isolatuak badira eta puntu singular esentzialik ez badago.

Adibidez, funtzio arrazionalak meromorfoak dira.

Teorema 12.17 (Sojotski-Weierstrass-Cassoratiren teorema). *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular esentziala. f analitikoa bada $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean, orduan $\delta \in (0, r)$ guztietarako, $f(\{z \colon 0 < |z - z_0| < \delta\})$ dentsoa da $\mathbb{C}$-n, hau da, $A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ guztietarako existitzen da $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zenbaki konplexuzko segida ez-konstantea, $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ izanik, non $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A$ den.*

Teorema 12.18 (Picarden teorema). *Izan bitez $f \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta z_0 f-ren puntu singular esentziala. Orduan $A \in \mathbb{C}$ guztietarako, gehienez puntu baterako (salbuespen-puntua izenaz ezagutzen dena) izan ezik, existitzen da $\{z_n\}$ segida ez-konstantea, $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ izanik, non $f(z_n) = A$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.*

Beste modu batean esanda, $f(\{z \colon 0 < |z - z_0| < \epsilon\})$ multzoa edo $\mathbb{C}$ osoa da edo puntu bakar falta zaio $\mathbb{C}$ osoa izateko.

Adibidea. $f(z) = e^{-1/z^2}$ funtzioak puntu singularra du $z_0 = 0$ puntuan eta $z_0 = 0$ puntu singular esentziala da, bere Laurenten seriezko garapena $\mathbb{C} - \{0\}$ multzoan honako hau izanik.

$$e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}}, \quad |z| > 0 \text{ denean.}$$

Izan bedi $A \in \mathbb{C}$.

$A = 0$ baldin bada, ez da existitzen $z \in \mathbb{C}$ non $f(z) = A$ den, beraz $A = 0$ salbuespen-puntua da.

$A \neq 0$ bada,

$$e^{-1/z^2} = A \iff -\frac{1}{z^2} = \operatorname{Log} A \iff z^2 = -\frac{1}{\operatorname{Log} A}.$$

$z_n = \dfrac{i}{\sqrt{\log|A| + i(\arg A + 2\pi n)}}$ definituz, $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ eta $e^{-1/z_n^2} = A$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

12. Gaia: TAYLOR ETA LAURENTEN SERIEAK. PUNTU SINGULARRAK

Ariketak

1. Aurki ezazu hurrengo serieen konbergentzia-erradioa:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\cos in)\, z^n$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^{n(-1)^n} z^n$ (vi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^2 z^n$

(vii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\, z^k}{k^k}$ (viii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [2+(-1)^n]^n z^n$

Em.: (i) 0, (ii) 1, (iii) $1/e$, (iv) 4, (v) $1/4$, (vi) 1, (vii) e, (viii) $1/3$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ seriearen konbergentzi-erradioa R bada, $0 < R < \infty$ izanik, aurki itzazu jarraian agertzen diren serieen konbergentzi-erradioak.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^l a_n z^n$ *Em.:* R.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} a_n z^n$ *Em.:* ∞.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l z^n$ *Em.:* R^l.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n z^{n^2}$ *Em.:* R.

3. Kalkula ezazu $\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\cdot z + \sin\frac{6\pi}{3}\cdot z^2 + \dots$ seriearen batura.

Em.: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{1+z+z^2}$, $|z|<1$ denean.

4. Kalkula itzazu $\sinh z$ eta $\cosh z$ funtzioen $z=0$ puntuan zentratutako berretura-serieak.

Em.: $\sinh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

5. Erabaki ezazu zer eremutan den egia $\dfrac{1}{z^2} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ berdintza.

Em. $|z+1| < 1$.

6. Garatu honako funtzio hauek $z = 0$ puntuan zentratutako berretura-serieetan:

(i) $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3}$ *Em.:* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n$, $|z| < 1$.

(ii) $f(z) = \log(1+z)$ *Em.:* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

(iii) $f(z) = \arctan z$ *Em.:* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$.

(iv) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$ *Em.:* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\dfrac{2}{3\cdot 5^{n+1}} - \dfrac{1}{3}\right)z^n$, $|z| < 1$.

7. Garatu jarraian ematen diren funtzioak $z = z_0$ puntuan zentratutako Taylorren serieetan eta esan ezazu zein den zirkulurik handiena non seriearen bidezko adierazpena baliozkoa den:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = -1$ *Em.:* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$, $|z+1| < 2$.

(ii) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$ *Em.:* $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{(z-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} - \dfrac{(z-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$, $z \in \mathbf{C}$.

(iii) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1/2$ *Em.:* $f(z) = \sqrt{e}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1/2)^n}{n!}$, $z \in \mathbf{C}$.

8. Idatzi $\log(2-z)$ funtzioaren Taylorren seriea jatorrian, deribatuarena erabiliz, eta eman konbergentzia-erradioa. *Em.:* $\log(2-z) = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n2^n}$, $R = 2$.

9. Erabili berretura-serieak hurrengo limiteak kalkulatzeko:

(i) $\lim_{z\to 1}\dfrac{\log z}{z-1}$ *Em.* 1

(ii) $\lim_{z\to 0}\dfrac{e^{\alpha z}-1}{z}$, $\alpha \in \mathbf{C}$ *Em.* α

10. Izan bedi α erreal positiboa. Defini dezagun

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \quad n = 1, 2\ldots \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

lol

Frogatu $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$ berretura-seriearen konbergentzia-erradioa 1 dela. Izan bedi $f(z)$ seriearen batura konbergentzia-zirkuluan. Frogatu

$$(1+z)f'(z) = \alpha f(z)$$

betetzen dela eta aurkitu $f(z)$.

Em. $f(z) = (1+z)^\alpha$

11. Idatzi z^4-ren koefizientea $f(z) = (1+\sin^2 z)^{1/3}$ funtzioaren Taylorren serierako $z_0 = 0$ puntuan, aurreko ariketako emaitza erabiliz.

Em. $-2/9$

12. Garatu $f(z) = (z^3 - z)^{-1}$ funtzioa Laurenten seriean ondorengo eraztunetan:

(i) $0 < |z| < 1$ *Em.:* $-\sum_{n=-1}^{\infty} z^{2n+1}$.

(ii) $1 < |z|$ *Em.:* $\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{2n-1}$.

(iii) $0 < |z-1| < 1$ *Em.:* $\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - 1\right)(z-1)^n$.

(iv) $1 < |z-1| < 2$ *Em.:* $\sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^n (z-1)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$.

13. Garatu honako funtzio hauek $z_0 = 0$ puntuan zentratutako Laurenten serieetan:

(i) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ *Em.:* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$.

(ii) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}$ *Em.:* $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$. ?

(iii) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ *Em.:* $\sum_{n=-\infty}^{1} \frac{z^n}{(1-n)!}$.

(iv) $f(z) = \sin z + \sin \frac{1}{z}$ *Em.:* $\sum_{n=-\infty}^{0} (-1)^{-n} \frac{z^{2n-1}}{(1-2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

14. Idatzi honako funtzio hauen Laurenten serieen parte nagusia $z = 0$ puntuan:

(i) $\frac{\log(1+z^2)}{\sin z - z + z^3/6}$ *Em.:* $\frac{120}{z^3} - \frac{400}{7z}$

(ii) $\frac{1}{z^5} \log \frac{\sin z}{z}$ WL *Em.:* $-\frac{1}{6z^3} - \frac{1}{180z}$

15. Aztertu zein motatako puntu singularra den $z = 0$ funtzio hauetan:

(i) $\frac{\log(1+z) - z}{z^m}$, $m \geq 1$ *Em.:* $m = 1, 2$: gaindigarria; $m \geq 3$: $m - 2$ ordenako poloa

(ii) $z^2 \sin \frac{1}{z}$ *Em.:* esentziala

(iii) $\frac{1}{e^z - 1}$ *Em.:* polo sinplea

(iv) $\frac{1}{\log(1+z^2) - z^2}$. *Em.:* 4 ordenako poloa

16. Sailka itzazu jarraian emandako funtzioen puntu singular isolatuak:

(i) $f(z) = \frac{z}{z^3 + z}$. *Em.:* 0 gaindigarria, $\pm i$ polo sinpleak; ∞ gaindigarria.

(ii) $f(z) = \frac{e^z}{1 + z^2}$ *Em.:* $\pm i$ polo sinpleak, ∞ esentziala.

(iii) $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$ *Em.:* 0 esentziala; ∞ esentziala.

(iv) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sin\dfrac{1}{z}$ *Em.:* 0 esentziala; ∞ gaindigarria.

(v) $f(z) = e^{\tan 1/z}$ *Em.:* $\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ esentziala, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$; ∞ gaindigarria. $\boxed{0??}$

(vi) $f(z) = \dfrac{e^{1/z} - 1}{e^z - 1}$ *Em.:* 0 esentziala, $2k\pi i$ polo sinplea, $\forall\, k \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

(vii) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$ *Em.:* 0 gaindigarria, $2k\pi i$ polo sinplea $\forall\, k \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

(viii) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2(z-1)}$ *Em.:* $0, 1$ polo sinpleak, ∞ esentziala.

(ix) $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$ *Em.:* $(2k+1)\pi i$ polo sinplea, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$.

(x) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\sin(1/z)}\right)$ *Em.:* $\dfrac{1}{k\pi}$ esentziala $\forall\, k \in \mathbf{Z} - \{0\}$; ∞ esentziala. $\boxed{0??}$

(xi) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \sin z}$ *Em.:* $\pi/2 + 2k\pi$ 2 ordenako poloa, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$.

(xii) $\dfrac{z^5}{(z^3+8)^2}$ *Em.:* $-2, (\sqrt{3} \pm i)$ 2 ordenako poloak; ∞ gaindigarria.

(xiii) $\dfrac{z(z-\pi)^2}{(\sin z)^2}$ *Em.:* 0 polo sinplea, π gaind., $k\pi$ 2 ordenako poloa, $k \in \mathbf{Z} - \{0, 1\}$.

(xiv) $\dfrac{1}{z^3(2 - \cos z)}$ *Em.:* 0 3 ordenako poloa, $2k\pi - i\ln((2 \pm \sqrt{3}$ polo sinplea, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

(xv) $\dfrac{1}{z^3(1 - \cos z)}$ *Em.:* 0 5 ordenako poloa, $2k\pi$ 2 ordenako poloa.
$\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

1. ARIKETA

i) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$

$$1/R = \Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty$$

Hortaz, $\boxed{R = 0}$, gure seriea dibergentea da $\mathbb{C}$ osoan.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

Kasu honetan, $a_m = 1$, $m = n!$ denean eta $a_m = 0$ bestela.

Beraz,

$$\frac{1}{R} = \Lambda = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{1} = 1.$$

Hortaz, $\boxed{R = 1}$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) \cdot z^n$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} (\cos in)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} (\cosh n)^{1/n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{e^n(1+e^{-2n})}{2}\right]^{1/n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} e \cdot \left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)^{1/n} = e.$$ Hortaz, $\boxed{R = 1/e}$

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = 1/4$$

Hortaz, $\boxed{R = 4}$

v) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{n\cdot(-1)^n} \cdot z^n$

$$1/R = \Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =$$

$$a_n = \begin{cases} 4^n, & n \text{ bikoitia} \\ 1/4^n, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} = \lim_{n\to\infty} 4 = 4$$

Hortaz, $\boxed{R = 1/4}$

vi) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^2 z^n$

$$\frac{1}{R} = \Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\log n)^2} = \limsup_{n\to\infty} \left[e^{\log(\log n)}\right]^{2/n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\log(\log n)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\log(\log n)} = e^0 = 1$$

Hortaz, $\boxed{R = 1}$

vii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\, z^k}{k^k}$

$$\frac{1}{R} = \Lambda = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\, k^k}{k!\,(k+1)^{k+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (k+1)\cdot\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)^{k+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = 1/e$$

Hortaz, $\boxed{R = e}$

viii) $\sum_{n=0}^{\infty} [2+(-1)^n]^n z^n$

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ bakoitia bada} \\ 3^n, & n \text{ bikoitia bada} \end{cases}$$

$$\frac{1}{R} = \Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

Hortaz, $\boxed{R = 1/3}$

2. ARIKETA

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$, non $R \in (0, \infty)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ seriearen konbergentzia-erradioa den.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} n^l \cdot a_n \cdot z^n$

ρ konbergentzia-erradioa: $\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot n^l} =$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{n^l} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot 1 = \frac{1}{R}$$

Hortaz, $\boxed{\rho = R}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} a_n \cdot z^n$

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n^{-n}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \limsup_{n\to\infty} n^{-1} = \frac{1}{R} \cdot 0 = 0$$

Hortaz, $\boxed{\rho = \infty}$, gure seriea konbergentea da $\mathbb{C}$ osoan.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l z^n$

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^l|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^l = \left[\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right]^l =$$

$$= \left(\frac{1}{R}\right)^l = 1/R^l$$

Hortaz, $\boxed{\rho = R^l}$

iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n \cdot z^{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m, \text{ non } b_m = \begin{cases} a_n^n, & m = n^2 \\ 0, & m \neq n^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^n|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|b_m|} = \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{m\geq k} \sqrt[m]{|b_m|}\right) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{|a_n|^n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{n/n^2} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$$

Hortaz, $\boxed{\rho = R}$

3. ARIKETA

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot z + \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)\cdot z^2 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2n+2}{3}\pi i} - e^{-\frac{2n+2}{3}\pi i}\right) z^n =$$

$$= \frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{2}{3}\pi i n} z^n - \frac{e^{-\frac{2}{3}\pi i}}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}\pi i n} z^n =$$

$$= \frac{\sqrt{3}i - 1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\frac{2}{3}\pi i} z\right)^n - \frac{-\sqrt{3}i - 1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{2}{3}\pi i} z\right)^n =$$

$$= \frac{i+\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot z} - \frac{i-\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot z} =, \quad \left| e^{\pm\frac{2}{3}\pi i} \cdot z \right| = |z| < 1$$

duenean.

$$= \frac{(i+\sqrt{3})\left(1+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z\right) - (i-\sqrt{3})\left(1-\frac{\sqrt{3}i-1}{2}z\right)}{4\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}z\right)\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}z\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{i}+\sqrt{3}+\frac{i-\sqrt{3}}{2}z+\frac{\sqrt{3}+3i}{2}z-\cancel{i}+\sqrt{3}+\frac{-\sqrt{3}-i}{2}z-\frac{3i-\sqrt{3}}{2}z}{4\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}z-e^{-\frac{2\pi i}{3}}z+z^2\right)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+\cancel{\frac{i}{2}z}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}z}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}z}+\cancel{\frac{3i}{2}z}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}z}-\cancel{\frac{i}{2}z}-\cancel{\frac{3i}{2}z}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}z}}{4(z^2-z+1)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-z+z^2}$$

Beraz, $\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)z+\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)z^2+\ldots = \frac{\sqrt{3}/2}{1-z+z^2}}$

5. ARIKETA

Non da egia ondorengo berdintza?

$$\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$$

Berretura-seriea konbergentea den eremuan:

$|z+1| < R$ guneean, non R konbergentzia-erradioa

den:

$$\frac{1}{R} = \Lambda = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$$

Beraz, berdintza zuzena da $|z+1|<1$ denean.

6. ARIKETA

i) $$f(z)=\frac{2}{(1-z)^3}$$

Badakigunez,

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1$$

deribatuz,

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}\cdot n, \quad |z|<1$$

bigarren aldiz,

$$\frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2}\cdot n\cdot(n-1), \quad |z|<1$$

$$\frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\cdot n\cdot z^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n z^{n-2}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)(m+2)z^{m}$$

Hau da,

$$\boxed{\frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n, \quad |z|<1}$$

ii) $$f(z)=\log(1+z)$$

$$\log(1+z)=\int\frac{1}{1+z}\,dz=\int\frac{1}{1-(-z)}\,dz=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\,dz=$$

$|-z|=|z|<1$ denean

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-z)^{n+1}}{n+1}+C=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\cdot\frac{(-1)^{n+1}\cdot z^{n+1}}{n+1}+C=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{z^m}{m}+C$$

C lortzeko, azter dezagun $z=0$ puntua:

$$f(0)=\log(1)=0=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{0^n}{n}+C=C \longrightarrow C=0$$

Hau da,
$$\boxed{\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^n}{n}\ ,\quad |z|<1}$$

iii) $f(z)=\arctan z$

$$\arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+z^2}\,dz=\int_0^z\frac{1}{1-(-z^2)}\,dz\underset{\uparrow}{=}\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n\,dz=$$

$|-z^2|<1 \longrightarrow |z|<1$

$$=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{2n}\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

Hau da,
$$\boxed{\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\ ,\quad |z|<1}$$

iv) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$

$$\frac{z+1}{z^2+4z-5}=\frac{z+1}{(z-1)(z+5)}=\frac{2/6}{z-1}+\frac{4/6}{z+5}=\frac{-1/3}{1-z}+\frac{2/3}{5(1+\frac{z}{5})}=$$

$$=\frac{-1/3}{1-z}+\frac{2/15}{1-(-z/5)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{2}{15}\sum_{n=0}^{\infty}(-z/5)^n=\circledast$$

$|z|<1$ eta $|-z/5|<1$ denean, hots $|z|<1$

$$=\circledast=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{3}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{15}\cdot(-1/5)^n\cdot z^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{15}\cdot\frac{(-1)^n}{5^n}-\frac{1}{3}\right]z^n$$

Hau da, $\boxed{\dfrac{z+1}{z^2+4z-5} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(-1)^n}{5^{n+1}} - \dfrac{1}{3}\right] z^n \quad , \quad |z|<1}$

7. ARIKETA

i) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = -1$

Taylor-en $z_0=-1$ puntuan zentratutako seriea:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(z+1)^n \qquad f(z) = (1-z)^{-1}$$

$$f(-1) = 1/2$$

$$f'(-1) = 1(1-z)^{-2}\Big|_{z=-1} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f''(-1) = 1\cdot 2(1-z)^{-3}\Big|_{z=-1} = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(-1) = 1\cdot 2\cdot 3(1-z)^{-4}\Big|_{z=-1} = \frac{3!}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(-1) = n!(1-z)^{-(n+1)}\Big|_{z=-1} = \frac{n!}{2^{n+1}}$$

Hortaz, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{2^{n+1}}\dfrac{(z+1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$

konbergentzia-erradioa ondorengoa da:

$$\frac{1}{R} = \Lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$R = 2$$

Laburbilduz,

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}\quad, |z+1|<2}$$

ii) $f(z)=\cos z$, $z_0=\frac{\pi}{4}$

$f(\pi/4)=\sqrt{2}/2 \quad (n=0)$

$f'(\pi/4)=(-\sin z)|_{\pi/4=z}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n=1)$

$f''(\pi/4)=(-\cos z)|_{z=\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n=2)$

$f'''(\pi/4)=\sin z|_{z=\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n=3)$

$f^{IV}(\pi/4)=\cos z|_{z=\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n=4)$

n bikoitia bada, $n=2m$: $f^{(2m)}(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-1)^m$

n bakoitia bada, $n=2m+1$: $f^{(2m+1)}(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-1)^{m+1}$

Hortaz,

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{(2m)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2m}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{(2m+1)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2m+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[\frac{(z-\pi/4)^{2m}}{(2m)!}-\frac{(z-\pi/4)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]$$

Serie honen konbergentzia-erradioa ∞ da, hots $\mathbb{C}$ osoan da konbergentea.

Laburbilduz,

$$\boxed{f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^m \left[\frac{(z-\pi/4)^{2m}}{(2m)!} - \frac{(z-\pi/4)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right], \quad z \in \mathbb{C}}$$

iii) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1/2$

Dakigunez, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Hortaz, $e^{z-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1/2)^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Azkenik, $\boxed{e^z = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1/2)^n}{n!}, \ \forall z \in \mathbb{C}}$

8. ARIKETA

$\log(2-z)$, $z_0 = 0$.

Taylor-en seriea: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

$f(z) = \log(2-z) \longrightarrow f(0) = \log 2$

$f'(z) = \frac{-1}{2-z} \longrightarrow f'(0) = -1/2$

$f''(z) = \frac{-1}{(2-z)^2} = -1(2-z)^{-2} \longrightarrow f''(0) = \frac{-1}{2^2}$

$f'''(z) = \frac{-2}{(2-z)^3} = -2(2-z)^{-3} \longrightarrow f'''(0) = \frac{-2}{2^3}$

$f^{iv}(z) = \frac{-6}{(2-z)^4} = -6(2-z)^{-4} \longrightarrow f^{iv}(0) = \frac{-6}{2^4}$

$\vdots$

$$f^{(n)}(z) = -(n-1)!\,(2-z)^{-n} \longrightarrow f^{(n)}(0) = -\frac{(n-1)!}{2^n}\,, \quad \forall n \geq 1$$

Beraz, $\log(2-z) = \log 2 + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(n-1)!}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\,z^n$

$$\boxed{\log(2-z) = \log 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n \cdot n}}$$

Konbergentzia-erradioa:

$$\frac{1}{R} = \Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n \cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{R = 2}$$

9. ARIKETA

i) $\lim_{z\to 1} \frac{\log z}{z-1}$

$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n\,, \quad |z|<1$ denez,

$\log(z) = \log(1+(z-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n\,, \quad |z-1|<1$

Hortaz,

$$\lim_{z\to 1} \frac{\log z}{z-1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n =$$

$$= \lim_{z\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^{n-1} = \lim_{z\to 1} (z-1)^0 = \lim_{z\to 1} 1 = 1$$

ii) $\lim_{z\to 0} \frac{e^{\alpha z}-1}{z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$ izanik,

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{\alpha z}-1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha z)^n}{n!}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha z)^n}{n!} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}z^n =$$

$$= \lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}z^{n-1} = \lim_{z\to 0}\left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!}z + \frac{\alpha^3}{3!}z^2 + \dots\right) = \alpha$$

12. ARIKETA

$f(z) = (z^3 - z)^{-1}$

Laurent-en seriea $r < |z - z_0| < R$ eraztunean:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{non} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

$\rho \in (r, R)$ izanik, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z} = \frac{1}{z(z+1)(z-1)} = \frac{1}{z}\left[\frac{-1/2}{z+1} + \frac{1/2}{z-1}\right] =$$

$$= \frac{-1/2}{z}\cdot\frac{1}{1-(-z)} + \frac{-1/2}{z}\,\frac{1}{1-z} =$$

$$= \frac{-1/2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{-1/2}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$$

$n = 2m+1, \quad \forall m \in \mathbb{N}$ bada, $f(z) = 0$

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{2m} z^{2m-1} - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} z^{2m-1} =$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} z^{2m-1}$$

$$\boxed{f(z) = -\sum_{m=-1}^{\infty} z^{2m+1}}$$

ii) $1 < |z|$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}\right] = \frac{1}{2z}\left[\frac{-1}{1-z} + \frac{-1}{1-(-z)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2z}\left[\frac{-1/z}{\frac{1}{z}-1} + \frac{-1/z}{\frac{1}{z}+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2z^2}\left[\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{1-(-1/z)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]\left(\frac{1}{z}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2z^2}\sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(2n+3)}$$

z-ren berretzaileak: $-3, -5, -7, -9, \ldots$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{2n-1}}$$

iii) $0 < |z-1| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{z} + \frac{-1}{z+1}\right] = \frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{1+z-1} + \frac{-1}{2+z-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{1-[-(z-1)]} + \frac{-1/2}{1-\left[-\frac{z-1}{2}\right]}\right] =$$

$|-(z-1)| < 1$ eta $\left|-\frac{z-1}{2}\right| < 1$ direnean, $|z-1| < 1$.

$$= \frac{1}{z-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{m=-1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(1-\frac{1}{2^{m+2}}\right)(z-1)^m$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-1\right)(z-1)^n}$$

iv) $1 < |z-1| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right]$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{1-[-(z-1)]} = \frac{\frac{1}{z-1}}{\frac{1}{z-1}+1} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1}{z-1}} =$$

$$= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-1}\right)^n, \quad \left|\frac{-1}{z-1}\right| = \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1, \ |z-1| > 1 \text{ direnean}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-(n+1)}, \quad |z-1| > 1 \text{ direnean.}$$

Bestetik,

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+z-1} = \frac{1/2}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n, \quad \left|-\frac{z-1}{2}\right|<1 \rightarrow$$

$\rightarrow |z-1|<2$ denean.

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

Hortaz,

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}\right], \quad 1<|z-1|<2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-(n+2)} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad 1<|z-1|<2.$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(z-1)^n + \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}}$$

13. ARIKETA

i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}}$$

ii) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$

$$\frac{\sin^2 z}{z} = \frac{1}{2z}(1-\cos 2z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\cos 2z =$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{2z}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right] = \frac{-1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$\boxed{\frac{\sin^2 z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n-1}}$$

iii) $f(z) = z e^{1/z}$

$$z \cdot e^{1/z} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = z\sum_{z=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!} z^n = \sum_{z=-\infty}^{0}\frac{z^{n+1}}{(-n)!}$$

$$\boxed{z e^{1/z} = \sum_{z=-\infty}^{1}\frac{z^n}{(1-n)!}}$$

iv) $f(z) = \sin z + \sin\frac{1}{z}$

$$\sin z + \sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$$

$$\boxed{\sin z + \sin\frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{-n}\cdot\frac{z^{2n-1}}{(1-2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

14. ARIKETA

i)

$$\frac{\log(1+z^2)}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{n}}{-z+\frac{z^3}{6}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

$$= \frac{z^2-\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{3}-\frac{z^8}{4}+\frac{z^{10}}{5}+\dots}{-z+\frac{z^3}{6}+z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots} = \frac{z^2-\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{3}-\frac{z^8}{4}+\frac{z^{10}}{5}+\dots}{\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+\dots}$$

$$= \frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{3}-\frac{z^6}{4}+\frac{z^8}{5}+\dots}{z^3\left(\frac{1}{5!}-\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}-\frac{z^6}{11!}+\dots\right)}$$

Ikusten denez, $z=0$ 3 ordenako poloa da, $\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = 5! \in \mathbb{C}-\{0\}$ delako. Hortaz, Laurent-en seriearen zati nagusiak gehienez 3 batugai ez-nulu ditu:

$$\frac{z^2-\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{3}-\frac{z^8}{4}+\frac{z^{10}}{5}+\dots}{\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+\dots} = \frac{a_{-3}}{z^3}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1 z+\dots$$

$$z^2-\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{3}-\frac{z^8}{4}+\frac{z^{10}}{5}+\dots = \left(\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+\dots\right)\left(\frac{a_{-3}}{z^3}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+\dots\right)$$

Hemendik, koefizienteak berdinduz:

$$1 = \frac{a_{-3}}{5!} \longrightarrow a_{-3} = 5! = 120$$

$$0 = \frac{a_{-2}}{5!} \longrightarrow a_{-2} = 0$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{a_{-1}}{5!} - \frac{a_{-3}}{7!} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a_{-1} = \left(\frac{a_{-3}}{7!}-\frac{1}{2}\right)5! = -\frac{400}{7}$$

Hortaz, Laurenten seriearen zati nagusia: $\boxed{\frac{120}{z^3}-\frac{400}{7z}}$

ii) $\frac{1}{z^5} \log\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \frac{1}{z^5} \log\left(\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$

$= \frac{1}{z^5} \log\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\right) \; \vdots \; \boxed{LOL!}$

15. ARIKETA

i) $\dfrac{\log(1+z) - z}{z^m}$, $m \geq 1$

Gure funtzioa seriean garatuz:

$f(z) = \dfrac{\log(1+z)-z}{z^m} = \dfrac{1}{z^m}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n} - z\right] =$

$= \dfrac{1}{z^m}\left(z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \dots - z = -\dfrac{z^{2-m}}{2} + \dfrac{z^{3-m}}{3} - \dfrac{z^{4-m}}{4} + \dots\right.$

Beraz, $2-m \geq 0$ bada, seriea Taylor-ena dugu; hau da, $m=1$, $m=2$ balioetarako, puntu gaindigarria da.

$2-m<0$ bada, poloa izango da, Laurent-en seriearen zati nagusiko batugaiaren indize txikiena $2-m$ izanik. Hortaz, $m \geq 3$ balioetarako, $2-m$ ordenako poloa da

ii) $z^2 \sin\frac{1}{z}$

$\lim_{z\to 0} z^2 \sin\frac{1}{z} = \lim_{z\to 0} z^2 \cdot \lim_{z\to 0} \sin\frac{1}{z}$

$\lim_{z\to 0} \sin\frac{1}{z}$ ez denez existitzen, $z=0$ puntu esentziala da.

iii) $\dfrac{1}{e^z - 1}$

Azter dezagun $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = e^z - 1$ funtzioa $z=0$ puntuan.

$g(0) = 0$; $g'(0) = e^z\big|_0 = 1 \neq 0$.

$g(z)$-k zero sinplea duenez $z=0$ puntuan, poloen karakterizazioagatik, gure funtzioan $z=0$ polo sinplea da.

iv) $\dfrac{1}{\log(1+z^2) - z^2}$

$$f(z) = \left[\log(1+z^2) - z^2\right]^{-1} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z^2)^n}{n} - z^2\right]^{-1} =$$

$$= \left(z^2 - \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} - \frac{z^8}{4} + \ldots - z^2\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-\frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} - \frac{z^8}{4} + \ldots} = \frac{1}{z^4\left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\right)}$$

Beraz, $\lim\limits_{z\to 0} z^4 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{4}\right)^{-1} = -2 \in \mathbb{C} - \{0\}$

denez, $z=0$ 4 ordenako poloa da.

16. ARIKETA

i) $f(z) = \dfrac{z}{z^3 + z}$

singularitatea isolatuak: (isolatuak kopuru finitua dugulako)

$$z^3 + z = 0 \longleftrightarrow z(z^2+1) = 0 \longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = \pm i \end{cases}$$

eta ∞ puntua.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z^3+z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2+1} = 1 \in \mathbb{C} \to z=0 \text{ gaindigarria.}$$

$$\lim_{z\to \pm i} f(z) = \lim_{z\to \pm i} \frac{1}{z^2+1} = \infty \notin \mathbb{C} \to z=\pm i \text{ ez dira puntu gaindigarriak.}$$

Baina:

$$\lim_{z\to \pm i} (z\mp i) f(z) = \lim_{z\to \pm i} \frac{z(z\mp i)}{z(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to \pm i} \frac{1}{z\pm i} =$$

$$= \frac{1}{\pm i \pm i} = \pm\frac{1}{2i} \in \mathbb{C}-\{0\} \to z=\pm i \text{ polo sinpleak.}$$

$$\lim_{z\to \infty} f(z) = \lim_{z\to \infty} \frac{z}{z^3+z} = \lim_{z\to \infty} \frac{1}{z^2+1} = 0 \in \mathbb{C} \to \infty \text{ gaindigarria.}$$

Laburbilduz,

0 eta ∞ singularitate gaindigarriak dira;

$\pm i$ puntuak polo sinpleak dira.

ii) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$

Singularitateak : $1+z^2=0 \longleftrightarrow z=\pm i$

∞

· kopuru finitua dugunez, puntu singular guztiak finituak ditugu.

$z=\pm i$ puntuak:

$$\lim_{z\to \pm i} \frac{e^z}{1+z^2} = \infty \notin \mathbb{C} \to \text{Ez dira gaindigarriak.}$$

Baina,

$$\lim_{z\to \pm i} (z\mp i) f(z) = \lim_{z\to \pm i} (z\mp i)\frac{e^z}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to \pm i} \frac{e^z}{z\pm i} =$$

$= \dfrac{e^{\pm i}}{\pm i \pm i} = \dfrac{e^{\pm i}}{\pm 2i} \in \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow$ Polo sinpleak dira.

$\underline{\infty \text{ puntua}}$

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{e^z}{1+z^2} = \dfrac{\infty}{\infty} \longrightarrow$ Indeterminazioa.

Azter dezagun $g(z) = f(1/z)$ funtzioa $z=0$ puntuan.

$\lim\limits_{z \to 0} g(z) = \lim\limits_{z \to 0} f(1/z) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^{1/z}}{1+(1/z)^2} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^2 e^{1/z}}{z^2+1}$

$\lim\limits_{z \to 0} e^{1/z}$ ez denez existitzen, 0 g-ren puntu esentziala da; hortaz ∞ f-ren puntu esentziala.

Laburbilduz,
$\pm i$ puntuak polo sinpleak dira; ∞, aldiz, singularitate esentziala.

iii) $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$

singularitate bakarrak 0 eta ∞ direnez, isolatuak dira.

$\underline{z=0 \text{ puntua}}$

$\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} e^{z-\frac{1}{z}} = \lim\limits_{z \to 0} e^z \cdot \lim\limits_{z \to 0} e^{-\frac{1}{z}} = 1 \cdot \lim\limits_{z \to 0} e^{-1/z} =$

$= \nexists \notin \mathbb{C} \cup \{0\} \longrightarrow$ Puntu esentziala.

$\underline{\infty \text{ puntua}}$

$\lim\limits_{z \to 0} f(1/z) = \lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z} - z} = \lim\limits_{z \to 0} e^{1/z} \cdot \lim\limits_{z \to 0} e^{-z} = \nexists \notin \mathbb{C} \cup \{0\}$

$\longrightarrow$ Puntu esentziala.

Beraz, bai $z=0$, bai ∞, singularitate esentzialak dira.

iv) $f(z) = \frac{1}{z^2} + \sin\frac{1}{z}$

Puntu singular bakarrak (eta audorioz isolatuak), 0 eta ∞ dira.

$z=0$ puntua

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2} + \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{0} + \sin\frac{1}{0} = \infty + \nexists \notin \mathbb{C}-\{0\}$$

$\longrightarrow$ Puntu esentziala.

∞ puntua

$$\lim_{z\to \infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f(1/z) = \lim_{z\to 0} z^2 + \sin z = 0 \in \mathbb{C} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ Gaindigarria.

Laburbilduz, $z=0$ puntua esentziala da, ∞, berriz singularitate gaindigarria.

v) $f(z) = e^{\tan\frac{1}{z}}$

Puntu singularrak

- $z=0$
- $\frac{1}{z} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $|z| > \frac{2}{\pi}$ eremuan f analitikoa denez, ∞ singularitate isolatua da.

$z=0$ puntua

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} e^{\tan\frac{1}{z}} = e^{\tan(\infty)} = \nexists \notin \mathbb{C} \longrightarrow \text{Esentziala}.$$

$z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ puntuak

$$\lim_{z \to \frac{2}{(2k+1)\pi}} f(z) = \lim_{z \to \frac{2}{(2k+1)\pi}} e^{\tan \frac{1}{z}} = e^{\tan (2k+1)\frac{\pi}{2}} = e^{\infty} = \nexists \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ Esentziala.

∞ puntua

$$\lim_{z \to 0} f(1/z) = \lim_{z \to 0} e^{\tan z} = e^{\tan 0} = e^{0} = 1 \in \mathbb{C} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ Erregularra.

Hortaz, $z=0$ eta $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ puntuak $(k \in \mathbb{Z})$ singularitate esentzialak dira eta ∞ erregularra.

vi) $f(z) = \dfrac{e^{1/z} - 1}{e^{z} - 1}$

Singularitateak:

- $z = 0$
- $e^{z} - 1 = 0 \longrightarrow z = 2\pi k i, \ k \in \mathbb{Z}$
- ∞, baina $\forall R > 0 \ \ |z| > R$ multzoan singularitateak daudenez, EZ DA ISOLATUA.

$z = 0$ puntua

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^{1/z} - 1}{e^{z} - 1} = \nexists \notin \mathbb{C} \longrightarrow \text{Esentziala.}$$

$z = 2\pi k i$ puntuak $(k \neq 0)$

$$\lim_{z \to 2\pi k i} f(z) = \lim_{z \to 2\pi k i} \frac{e^{1/z} - 1}{e^{z} - 1} = \frac{e^{\frac{-i}{2\pi k}} - 1}{0} = \infty \notin \mathbb{C} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ Poloak.

Poloen karakterizazioaz baliatuz, azter dezagun

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{e^z - 1}{e^{1/z} - 1} \quad \text{funtzioa.}$$

$$g(2\pi k i) = 0$$

$$g'(2\pi k i) = \left. \frac{e^z(e^{1/z}-1) + \frac{1}{z^2}(e^z-1)e^{1/z}}{(e^{1/z}-1)^2} \right|_{z=2\pi k i} =$$

$$= \frac{e^{2\pi k i}}{e^{\frac{1}{2\pi k i}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2\pi k i}} - 1} \neq 0 \longrightarrow \text{Polo sinpleak}$$

Beraz, $z=0$ puntua singularitate esentziala da baina $z = 2\pi k i$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$) puntuak polo sinpleak.

vii) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$

singularitate isolatuak $z=0$ eta $z = 2\pi k i$ dira (∞ ez, ikus aurreko atala).

<u>$z=0$ puntua</u>

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{z - e^z + 1}{z(e^z-1)} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-e^z}{e^z - 1 + z e^z} = \lim_{z\to 0} \frac{-e^z}{e^z + e^z + z e^z} = \frac{-1}{1+1+0} = -1/2 \in \mathbb{C} \rightarrow$$

$\rightarrow$ Gaindigarria.

<u>$z = 2\pi k i$ puntuak ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$)</u>

$$\lim_{z\to 2\pi k i} f(z) = \lim_{z\to 2\pi k i}\left(\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}\right) = \infty \notin \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to 2\pi k i} (z - 2\pi k i) f(z) = \lim_{z\to 2\pi k i}\left(\frac{z-2\pi k i}{e^z - 1} - \frac{z - 2\pi k i}{z}\right) \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{z \to 2\pi k i} \frac{1}{e^z} \cdot \frac{2\pi k i - 2\pi k i}{2\pi k i} = \frac{1}{e^{2\pi k i}} - 0 = 1 \in \mathbb{C} \rightarrow \text{Polo simplea.}$$

Hortaz, $z = 2\pi k i$ $(k \in \mathbb{Z})$ motako puntuak polo simpleak dira. $k=0$ kasuan ezik $z=0$ puntu singular gaindigarria baita.

viii) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2(z-1)}$

Singularitate isolatuak: $z=0$, $z=1$, ∞.

$z=0$ puntua

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z^2(z-1)} \underset{L'H}{=} \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{3z^2 - 2z} = \infty \notin \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z(e^z - 1)}{z^2(z-1)} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 + ze^z}{3z^2 - 2z} \underset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{e^z + e^z + ze^z}{6z - 2} = -1 \in \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \text{Polo simplea.}$$

$z=1$ puntua

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{e^z - 1}{z^2(z-1)} = \infty \notin \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{e^z - 1}{z^2} = e - 1 \in \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ Polo simplea.

∞ puntua

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} f(1/z) = \lim_{z \to 0} \frac{(e^{1/z} - 1) z^2}{\frac{1}{z} - 1}$$

$\nexists \lim_{z \to 0} e^{1/z} \longrightarrow$ Puntu esentziala.

Beraz, $z=0$, $z=1$ polo sinpleak; ∞ esentziala

ix) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{1+e^z}$

Puntu singularrak: $1+e^z=0 \longleftrightarrow e^z=-1 \longleftrightarrow z=(2k+1)\pi i$
$\forall k \in \mathbb{Z}$

∞ ez da isolatua. $\nexists R>0$: f analitikoa den $|z|>R$ multzoan.

$$\lim_{z\to(2k+1)\pi i} \frac{1-e^z}{1+e^z} = \infty \rightarrow \text{Ez dira gainditugarriak.}$$

Azter dezagun $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{1+e^z}{1-e^z}$ funtzioa.

$$g((2k+1)\pi i) = 0.$$

$$g'(z) = \frac{e^z(1-e^z)+e^z(1+e^z)}{(1-e^z)^2} = \frac{2e^z}{(1-e^z)^2}$$

$$g'((2k+1)\pi i) = \frac{2\cdot(-1)}{(1+1)^2} = -1/2 \neq 0$$

$z=(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ moduko puntuak polo sinpleak dira

x) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\sin(1/z)}\right)$

Singularitateak: $\begin{cases} z=0 \\ \sin(1/z)=0 \longleftrightarrow z=\dfrac{1}{\pi k},\ k\in\mathbb{Z}-\{0\} \\ \infty \end{cases}$

$z=0$ puntua

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right) = \sin\left(\frac{1}{\sin(\infty)}\right) = \nexists \notin \mathbb{C} \rightarrow$$

$\rightarrow$ Esentziala.

$z = \frac{1}{\pi k}$ puntuak

$$\lim_{z \to \frac{1}{\pi k}} f(z) = \lim_{z \to \frac{1}{\pi k}} \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right) = \sin\left(\frac{1}{\sin(\pi k)}\right) = \sin(\infty) =$$

$$= \nexists \notin \mathbb{C} \longrightarrow \text{Esentzialak}$$

∞ puntua

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} f(1/z) = \lim_{z \to 0} \sin\left(\frac{1}{\sin z}\right) = \sin\left(\frac{1}{0}\right) =$$

$$= \sin(\infty) = \nexists \notin \mathbb{C} \longrightarrow \text{Esentziala}$$

$z = 0$, $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ izanik) eta ∞ singularitate esentzialak dira

xi) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \sin z}$

Singularitateak: $1 - \sin z = 0 \longleftrightarrow \sin z = 1 \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2} + 2\pi k} f(z) = \lim_{z \to \frac{\pi}{2} + 2\pi k} \frac{1}{1 - \sin z} = \infty \notin \mathbb{C} \longrightarrow \text{Ez dira gaindigarriak.}$$

$g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = 1 - \sin z$ aztertuz:

$$g\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -\cos z \Big|_{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} = 0$$

$$g''\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin z \Big|_{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} = 1 \neq 0$$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ motako puntuak 2 ordenako poloak dira.

xii) $f(z) = \dfrac{z^5}{(z^3+8)^2}$

Singularitate isolatuak: $\left\{ \begin{array}{l} z^3+8=0 \to z^3=-8 \to \\ \to \left\{ \begin{array}{l} z=-2 \\ z=\sqrt{3}\pm i \end{array} \right. \\ \infty \end{array} \right.$

z_0 2 edo $\sqrt{3}\pm i$ bada,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{z^5}{[(z+2)(z-\sqrt{3}+i)(z-\sqrt{3}-i)]^2} = \infty \notin \mathbb{C}$$

dugu, beraz, ez dira gainditgarriak.

Baina,

$\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^2 f(z)$ kalkulatuko dugu:

$\underline{z_0=-2}$ puntuan:

$$\lim_{z\to -2} \frac{z^5(z+2)^2}{(z+2)^2(z-\sqrt{3}+i)^2(z-\sqrt{3}-i)^2} = \lim_{z\to -2} \frac{z^5}{(z-\sqrt{3}+i)^2(z-\sqrt{3}-i)^2} \in$$

$\in \mathbb{C}-\{0\}$ dugu, eta antzera beste puntuetan;

beraz, 2 ordenako poloak dira.

$\underline{\infty \text{ puntuan}}$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f(1/z) = \lim_{z\to 0} \frac{(1/z)^5}{[(1/z)^3+8]^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(1/z)^5}{(1/z)^6+16(1/z)^3+64} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1/z+16z^2+64z^5} = \frac{1}{\infty} =$$

$= 0 \in \mathbb{C} \longrightarrow$ Gainditgarria.

$\boxed{\begin{array}{l} -2,\ \sqrt{3}+i \text{ eta } \sqrt{3}-i \text{ puntuak 2 ordenako poloak dira.} \\ \infty, \text{ aldiz, puntu singular gainditgarria.} \end{array}}$

xiii) $f(z) = \dfrac{z(z-\pi)^2}{(\sin z)^2}$

Singularitate isolatuak: $\sin z = 0 \longleftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$z=0$ puntua

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z(z-\pi)^2}{(\sin z)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \sin z \sim z}}{\sim} \lim_{z\to 0} \frac{z(z-\pi)^2}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{(z-\pi)^2}{z} =$$

$= \infty \notin \mathbb{C} \to$ Ez da gaindigarria.

$$\lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2(z-\pi)^2}{(\sin z)^2} \sim \lim_{z\to 0} \frac{z^2(z-\pi)^2}{z^2} = \lim_{z\to 0}(z-\pi)^2 =$$

$= \pi^2 \in \mathbb{C} - \{0\} \to$ Polo simplea.

$z=\pi$ puntua

$$\lim_{z\to \pi} f(z) = \lim_{z\to \pi} \frac{z\cdot(z-\pi)^2}{(\sin z)^2} \overset{L'H}{=} \lim_{z\to\pi} \frac{(z-\pi)^2 + 2z(z-\pi)}{2\sin z \cos z} =$$

$$= \lim_{z\to\pi} \frac{(z-\pi)(3z-\pi)}{\sin 2z} \underset{\substack{\uparrow \\ L'H}}{=} \lim_{z\to\pi} \frac{z(3z-\pi)+3(z-\pi)}{2\cos 2z} =$$

$$= \frac{\pi\cdot 2\pi + 3\cdot 0}{2\cdot\cos 2\pi} = \frac{2\pi^2}{2} = \pi^2 \in \mathbb{C} \to \text{Gaindigarria.}$$

$z=k\pi$ puntuak ($k \in \mathbb{Z}-\{0,1\}$ izanik)

$$\lim_{z\to k\pi} f(z) = \lim_{z\to k\pi} \frac{z(z-\pi)^2}{(\sin z)^2} = \infty \notin \mathbb{C} \to \text{Ez gaindigarria.}$$

$$\lim_{z\to k\pi} (z-k\pi)^2 f(z) = \lim_{z\to k\pi} \frac{(z-k\pi)^2\, z(z-\pi)^2}{(\sin z)^2} =$$

$$= \lim_{z\to k\pi} \frac{(z-k\pi)^2\cdot(z^3-2\pi z^2+\pi^2 z)}{(\sin z)^2} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{z\to k\pi} \frac{2(z-k\pi)(z^3-2\pi z^2+\pi^2 z)+(z-k\pi)^2(3z^2-4\pi z+\pi^2)}{\sin(2z)} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{z\to\pi k} \frac{\dots 2 \cdot (\dots)}{2\cos(2t)} = \frac{c}{2} \in \mathbb{C}-\{0\} \quad \text{non} \quad c = 2\cdot[(k\pi)^3 - 2\pi(k\pi)^2 + \pi k\pi]$$

→ 2 ordenako poloak (sinpleak ez direla egiazta daiteke).

Hortaz, 0 polo sinplea da, π singularitate gaindigarria eta $k\pi$ motakoak, non $k\in\mathbb{Z}-\{0,1\}$, 2 ordenako poloak.

xiv) $f(z) = \dfrac{1}{z^3\cdot(2-\cos z)}$

Singularitate isolatuak: $\begin{cases} z=0 \\ 2-\cos z = 0 \longleftrightarrow z = 2\pi k - i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3}) \end{cases}$

$\cos z = 2 \longrightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 4 \longrightarrow (e^{iz})^2 - 4e^{iz}+1 = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow e^{iz} = \dfrac{4+\sqrt{16-4}}{2} = 2\pm\sqrt{3} \longrightarrow iz = \text{Log}(2\pm\sqrt{3}) =$

$= \ln|2\pm\sqrt{3}| + i(\arg(2\pm\sqrt{3})+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$

$z = 2\pi k - i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z}$

<u>$z=0$ puntua</u>

$\lim_{z\to0} f(z) = \lim_{z\to0}\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)} = \infty \notin \mathbb{C} \to$ Ez-gaindigarria.

$\lim_{z\to0} z\cdot f(z) = \lim_{z\to0} z^2 f(z) = \infty \notin \mathbb{C}$

$\lim_{z\to0} z^3 f(z) = \lim_{z\to0}\dfrac{z^3}{z^3(2-\cos z)} = \lim_{z\to0}\dfrac{1}{2-\cos z} = 1 \in \mathbb{C}-\{0\} \to$

→ 3 ordenako poloa

$z = z_k = 2\pi k - i\ln(2\pm\sqrt{3})$ puntuak

$$\lim_{z\to z_k} f(z) : \lim_{z\to z_k} \frac{1}{z^3(2-\cos z)} = \infty \notin \mathbb{C} \longrightarrow \text{Ez-gaindigarria.}$$

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = z^3(2-\cos z) \quad \text{aztertuz:}$$

$$g(z_k) = 0$$

$$g'(z_k) = 3z^2(2-\cos z) + z^3 \cdot \sin z \Big|_{z=z_k} = z_k^3 \cdot \sin z_k \neq 0 \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ Polo sinpleak.

$\boxed{\text{Beraz, } z=0 \text{ 3. ordenako poloa da eta } 2\pi k - i\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z} \text{ erakoak polo sinpleak.}}$

XV) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-\cos z)}$

Singularitate isolatuak: $\begin{cases} z=0 \\ 1-\cos z = 0 \longleftrightarrow z = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$z=0$ puntua

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \infty \notin \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{z^3(1-\cos z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1-\cos z} = \infty \notin \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to 0} z^4 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{z^3(1-\cos z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{1-\cos z} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{\sin z} = \infty \notin \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to 0} z^5 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^5}{z^3(1-\cos z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1-\cos z} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2z}{\sin z} \underset{\underset{L'H}{\uparrow}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2}{\cos z} = 2 \in \mathbb{C} \rightarrow 5 \text{ ordenako poloa.}$$

<u>$z_k = 2\pi k$ puntuak</u>

$$\lim_{z\to z_k} f(z) = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{z^3(1-\cos z)} = \infty \notin \mathbb{C}$$

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = z^3(1-\cos z) \text{ azter dezagun.}$$

$$g(z_k) = 0$$

$$g'(z_k) = 3z^2(1-\cos z) + z^3 \sin z \Big|_{z=z_k} = 0$$

$$g''(z_k) = 6z(1-\cos z) + 6z^2 \sin z + z^3 \cos z \Big|_{z=z_k} =$$

$$= z_k^3 \cdot \cos(z_k) = (2\pi k)^3 \neq 0 \longrightarrow 2 \text{ ordenako poloak.}$$

$\boxed{\text{0 puntua 5 ordenako poloa da, } 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ itxurakoak, aldiz, 2 ordenakoak.}}$

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

2018ko apirilaren 10eko MINTEGIA. S1 TALDEA

1. Aurki ezazu hurrengo seriearen konbergentzia-erradioa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2n} z^n.$$

2. Aurkitu $\frac{\sinh(z/2)}{1+2z}$ funtzioaren $z_0 = 0$ puntuko Taylorren seriearen lehenengo 4 batugaiak, agertzen diren funtzioen berretura-serieen biderkadura eginez.

3. Izan bedi $f(z) = \frac{1}{z\sin(\pi z^2)}$.

   - Aurkitu eta sailkatu $f-ren$ puntu singular isolatu guztiak. *Oharra: Gogoratu poloen karakterizarioaren (ii) atala $z=0$ aztertzeko eta (iii) atala beste singularitateak aztertzeko.*
   - Eman $0 < |z| < R$ moduko eraztun batean konbergentea den Laurenten seriearen parte nagusia, $R > 0$ izanik.

4. Kalkula ezazu berretura-serie honen batura-funtzioa:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i-3n}{4^n n!} z^n.$$

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

2018ko apirilaren 13ko MINTEGIA. S2 TALDEA

1. Aurki ezazu hurrengo seriearen konbergentzia-erradioa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n.$$

2. Aurkitu $\frac{\cosh(2z)}{1-z/2}$ funtzioaren $z_0 = 0$ puntuko Taylorren seriearen lehenengo 4 batugaiak, agertzen diren funtzioen berretura-serieen biderkadura eginez.

3. Izan bedi $f(z) = \frac{1}{z^3 \sin(\pi z^2)}$.

   - Aurkitu eta sailkatu $f-ren$ puntu singular isolatu guztiak. *Oharra: Gogoratu poloen karakterizarioaren (ii) atala $z = 0$ aztertzeko eta (iii) atala beste singularitateak aztertzeko.*
   - Eman $0 < |z| < R$ moduko eraztun batean konbergentea den Laurenten seriearen parte nagusia, $R > 0$ izanik.

4. Kalkula ezazu berretura-serie honen batura-funtzioa:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i2^n - 3}{n!} z^n.$$

ANALISI BEKTORIALA ETA KONPLEXUA

2018ko apirilaren 13ko MINTEGIA. S3 TALDEA

1. Aurki ezazu hurrengo seriearen konbergentzia-erradioa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1-2n} \right)^n z^n.$$

2. Aurkitu $\frac{\sinh(3z)}{3+z}$ funtzioaren $z_0 = 0$ puntuko Taylorren seriearen lehenengo 4 batugaiak, agertzen diren funtzioen berretura-serieen biderkadura eginez.

3. Izan bedi $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(\pi z^2)}$.

   - Aurkitu eta sailkatu $f - ren$ puntu singular isolatu guztiak. *Oharra: Gogoratu poloen karakterizarioaren (ii) atala $z = 0$ aztertzeko eta (iii) atala beste singularitateak aztertzeko.*
   - Eman $0 < |z| < R$ moduko eraztun batean konbergentea den Laurenten seriearen parte nagusia, $R > 0$ izanik.

4. Kalkula ezazu berretura-serie honen batura-funtzioa:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2^n - 3^n) i^n}{n!} z^n.$$