

Aljebra

3. eta 4. gaiak

Eskema laburra

Anonim.

2017.eko apirilaren 8

Gaien Aurkibidea

1	3. Gaia	1
1.1	Taldeak eta Gorputzak	1
2	4. Gaia	3
2.1	Azpiespazioak	3
2.2	Menpekotasuna	4
2.3	Sistema Sortzaileak	5
2.4	Bektore-espazioen dimentsioak eta Oinarriak	5
2.5	Laburpena:	6

1. Gaia

3. Gaia

1.1 Taldeak eta Gorputzak

Erditaldea izango da baldin:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Talde abeldarra izango da baldin:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Trukakorra da : $a + b = b + a$.
4. Elementu neutroa existitzen da: $a + z = z + a = a$.
5. Elementu simetrikoa existitzen da: $a - a = -a + a = z$

$(A, +, \cdot)$ **eraztuna** baldin:

1. eragiketa:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Trukakorra da : $a + b = b + a$.
4. Elementu neutroa existitzen da: $a + z = z + a = a$.
5. Elementu simetrikoa existitzen da: $a - a = -a + a = z$

2. eragiketa:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Banakorra 1. eragiketarekiko: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ eta $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Hala ere, trukakorra ere bada 2. eragiketa, eraztuna trukakorra izango da. Eta, baita ere, elementu neutroa badu, eraztun unitateduna izango da.

$(K, \cdot, +)$ **gorputz** bat da baldin:

1. Barne-eragiketa bada
2. Talde abeldarra da $(K, +)$.
3. Talde abeldarra da $(K - \{0\}, \cdot)$.
4. 1. eragiketa banakorra da 2. eragiketarekiko.

Batuketa eta biderketa \mathbb{Z}_n zatidura multzoan

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{eta} \quad [x] \cdot [y] = [x \cdot y]$$

- Batuketa: $x(\text{ mod } n) + y(\text{ mod } n) = (x + y)(\text{ mod } n)$
- Biderketa: $x(\text{ mod } n) \cdot y(\text{ mod } n) = (x \cdot y)(\text{ mod } n)$

*Multzo mota honekin lan egiteko Cayley-ren taula eta horren propietateak erabil daitezke ariketak ebazteko.

Potentzia multzoa:

U multzoaren potentzia multzoa, $P(U)$ deituko diogu. Honek U -ren azpimultzoen konbinazio posible guztien bilduma izango du U bera eta $\bar{0}$ barne.

Adibidez $U = \{0, 1, 2\}$ izanik, bere Potentzia multzoa hau da:
 $P(U) = \{\bar{0}, U, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

2. Gaia

4. Gaia

2.1 Azpiespazioak

Izan bedi \mathbb{K} -ren gaineko $(V, \ominus, \star_{\mathbb{K}})$ bektore-espazioa. $\bar{0} \neq U \subseteq V$ azpimultzo ez hutsa V -ren azpiespazioa ($U \leq V$) dela esango dugu baldin,

$$\forall \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow k_1 \star_{\mathbb{K}} \bar{u}_1 \ominus k_2 \star_{\mathbb{K}} \bar{u}_2 \in U$$

Hau da, U multzoan dauden edozein bi elementuren konbinazio lineala U multzoan dago.

- Bi bektoreen arteko batura zuzena (\oplus) izango da baldin bien arteko ebakidurak (\cap) $\bar{0}$ ematen bada (ez dutela ezer harremanean) eta batura existitzen bada \rightarrow bektore horiek betegarriak izango dira.
- Maximala: Ia bektore guztiak dituen bektore-azpiespazioa. $U \leq V$ izanik, V espazioak izango du bektore bat U -k ez duena, hau da, $\exists \bar{v} \in V (\bar{v} \neq \bar{0})$ eta $\bar{v} \notin U$.

2.2 Menpekotasuna

- Bektoreak linealki independente \Leftrightarrow konbinazio lineala = 0 eta koefiziente guztiak = 0.
- Bektoreak linealki menpekoak \Leftrightarrow konbinazio lineala = 0. Eta koefizienteren bat $\neq 0$.

Hau da, Independente: Bateragarri Determinatua.

Menpekoak: Bateragarri Indeterminatua.

A matrizearen espazio nulua definituko da $A\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogenoaren soluzioen multzoa bezala.

$$N(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^n : A\bar{x} = \bar{0}\}$$

A matrizearen espazio ezker-nulua definituko da $A^T\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogenoaren soluzioen multzoa bezala.

$$N(A^T) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^m : A^T\bar{x} = \bar{0}\}$$

2.3 Sistema Sortzaileak

$V = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle$ moduko sistemak sortzaileak dira. Bektore arteko konbinazio linealekin V -ko edozein bektore **sortzen** da.

A matrizearen zutabe-espazioa A matrizearen zutabeen konbinazio lineal guztien multzoa da. Hau da, $R(A)$ A sortzeko (sortzailea baita) behar diren zutabe-bektoreen multzoa da.

Nola lortu? $A \rightarrow U$ eta U -ren piboteei dagozkien A matrizearen zutabe-bektoreak izango dira $R(A)$ -ren barne.

A matrizearen errenkada-espazioa A matrizearen errenkaden konbinazio lineal guztien multzoa da. Hau da, $R(A^T)$ A sortzeko (sortzailea baita) behar diren errenkada-bektoreen multzoa da. (KONTUZ! Matrize irauliaren zutabeak, hau da, matrize ez-irauliaren errenkadak landuko dira).

Nola lortu? $A \rightarrow U$ eta U -ren piboteei dagozkien A matrizearen errenkada-bektoreak izango dira $R(A^T)$ -an barne.

Sistema batek espazio bat (\mathbb{R}^n) sortzen duela frogatzeko, sistema horren bektoreekin matrize bat osatu behar da eta Gauss-Jordanen ezabapena erabilita bateragarria dela ondorioztatzen bada ($r(A) = n$ (errenkada kopurua)), sortuko duela ondorioztatuko da. Baita ere uler daiteke, sistema horretan n bektore independente badaude, \mathbb{R}^n espazioa sortuko dutela, hots, bektore hauen konbinazio lineala $= 0$ izanik, konbinazio horren koefiziente guztiak 0 direla.

2.4 Bektore-espazioen dimentsioak eta Oinarriak

Bektore sistema bat oinarria izango da baldin:

- Bektoreak **linealki independenteak** badira.
- Bektoreek V espazioa **sortzen** badute. (Sortzailea)

Oinarri kanonikoa:

$$B_{\mathbb{R}^n} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bektore-sistema bat oinarria den jakiteko, linealki independenteak diren bektoreak dituen eta sortzailea den ($r(A) = n$ (Bektoreenluzera)) egiaztatu behar da.

Dimentsioak:

$\dim V = V$ -ren oinarrien bektore kopurua. *Oharra:* $\dim\{\bar{0}\} = 0$

Gainera, $\dim R(A) = \dim R(A^t)$. Hau da, heina.

$$\dim R(A) = \dim R(A^t) = \text{he}(A) = \text{rank}(A) = r(A)$$

2.5 Laburpena:

Izan bedi $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ matrizea, errenkada eta zutabe espazioak horrela banatu dira:

- **A**-ren zutabe-espazioa: **A**-ren zutabeen konbinazio lineal guztien multzoa.

$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m$$

- **A**-ren espazio nulua: $A\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogenoaren soluzioen multzoa da.

$$N(\mathbf{A}) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^n : \mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{K}^n$$

- **A**-ren errenkada-espazioa $R(\mathbf{A}^T)$: **A**-ren errenkadek sortzen duten espazioa da, errenkadak \mathbb{K}^m espazioko bektore moduan hartuta.

$$R(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{A}^T\bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{K}^m\} \subset \mathbb{K}^n$$

- **A**-ren espazio ezker-nulua:

$$N(\mathbf{A}^T) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^m : \mathbf{A}^T\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{K}^m$$