eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Automatika eta Kontrola

5.Gaia
Sistema Berrelikatuak

Sistemen Ingeniaritza eta Automatika Saila

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Gai zerrenda

- Irakasgaiaren edukiak
  - Aurkezpena
  - Sarrera
  - Sistema dinamikoen ereduak
  - Sistema dinamikoen Kanpo adierazpidea
  - Denboraren eremuko adierazpidea
  - **Sistema berrelikatuak**
  - Kontrolagailuen diseinua
  - Maiztasunaren eremuko adierazpidea

Sistema Berrelikatuak

- Helburuak
  - Irabazpen proportzionalaren bidez berrelikatutako kontrol-sistemen egonkortasuna azertzen ikastea, sistema egonkorra izan dadin irabazpenaren mugako balioak kalkulatuz. Irabazpenak duen eragina aztertzea, poloen kokapenean eta egoera iraunkorreko errorean.
- Norbereganatu beharreko gaitasunak:
  - Sistema berrelikatu baten egonkortasuna aztertzeko gai izatea.
  - Berrelikadura-irabazpen hori handitzean, begizta itxiko poloak zelan mugitzen diren marrazten jakitea (era hurbilduan).
  - Sistema berrelikatuen portaera egonkorra ezagutzea (egoera iraunkorra

Sistema Berrelikatuak

Aurkibidea:

- Sistema berrelikatuak
- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
- Egoera iraunkorra
- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

Sistema Berrelikatuak

Aurkibidea :

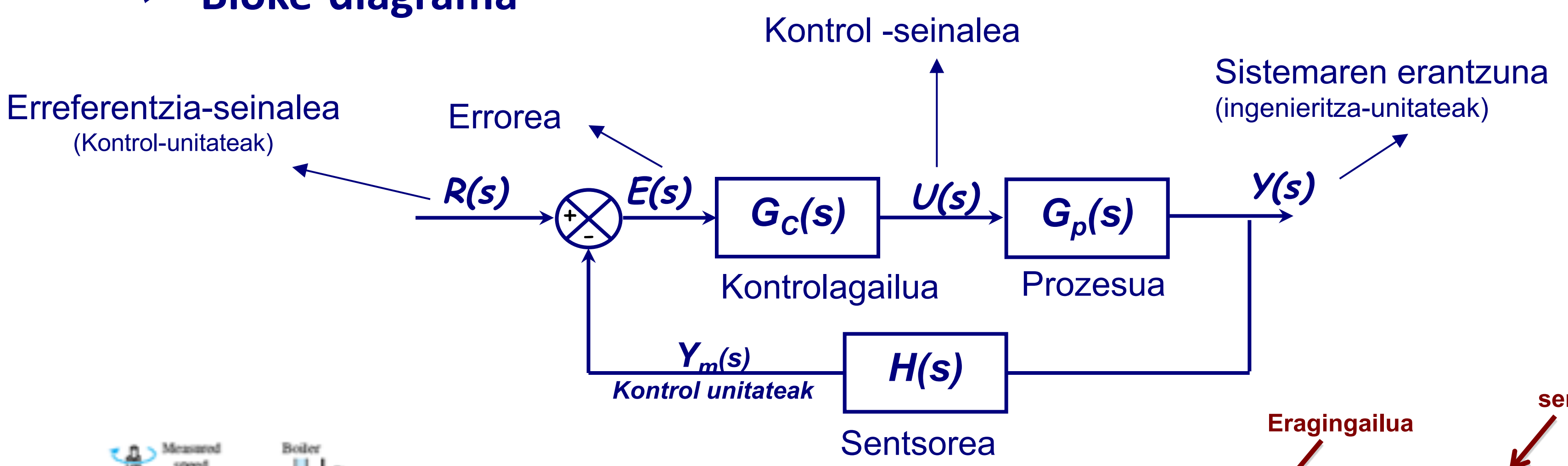
- Sistema berrelikatuak
  - ✓ **Bloke-diagramak**
  - ✓ **Berrelikaduraren abantailak**

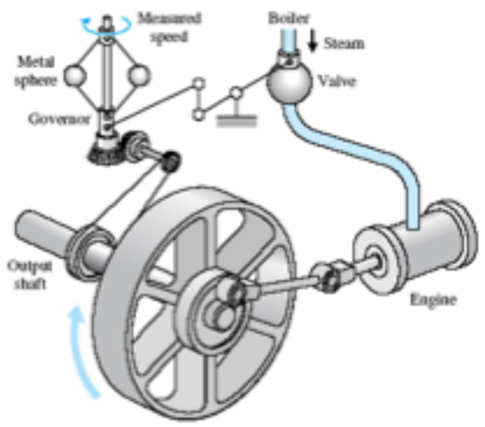
- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
- Sistema berrelikatuen egoera iraunkorra

Sistema Berrelikatuak

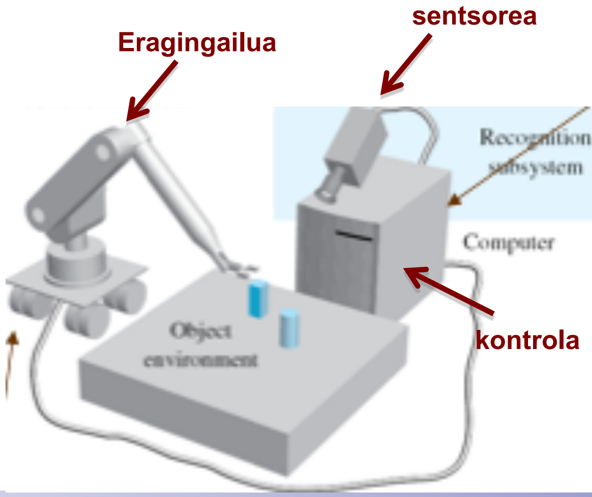
■ Sistema berrelikatuak

✓ Bloke-diagrama



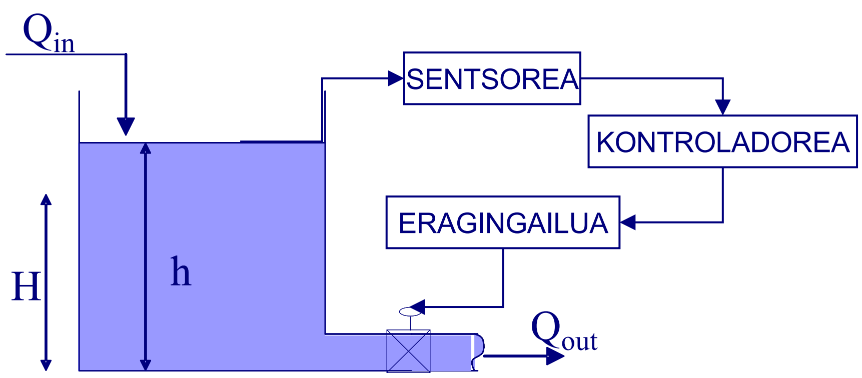


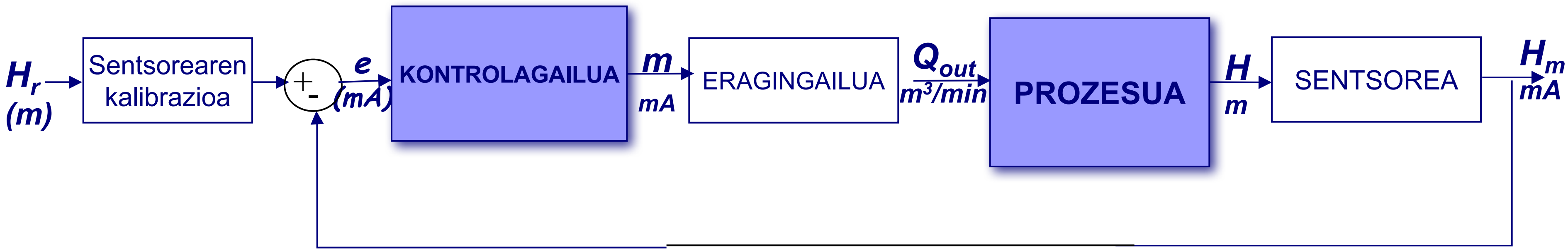
Kontrolatutako aldagaia neurtu eta erreferentziarekin alderatuko da. Bien arteko errorea erabiltzen da kontrol-seinalea sortzeko.



Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuak
  - **Bloke-diagrama**
    - **1. Adibidea**: sistema berrelikatua





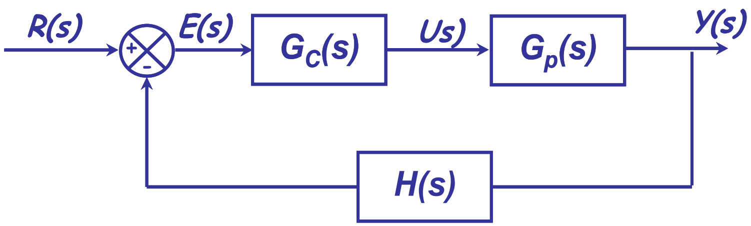
Nagore Iriondo, Asier Zubizarreta, Marga Marcos, Itziar Cabanes

Sistema Berrelikatuak

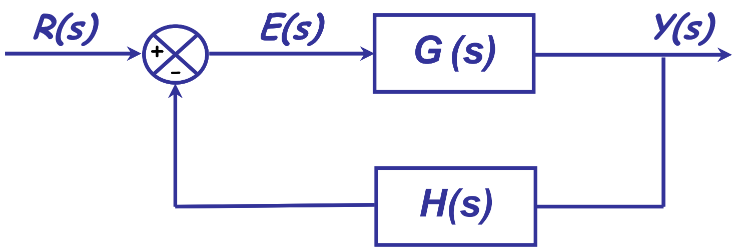
Sistema berrelikatuak

✓ Bloke-diagrama

$$G(s) = G_C(s).G_p(s)$$



SIMPLIFIKATUA



- Errore-seinalea bloke-diagraman oinarrituta kalkulatzen da:

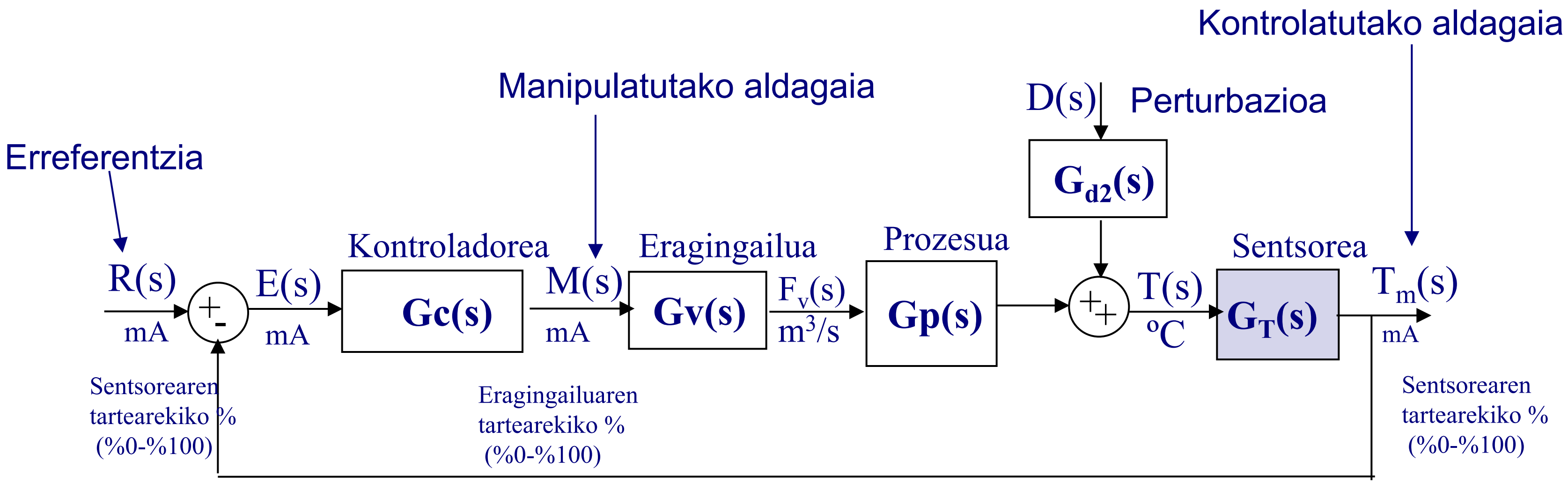
$$E(s) = R(s) - Y(s)H(s); \qquad H(s) = 1 \Rightarrow E(s) = R(s) - Y(s)$$

- Begizta irekiko TF: $G_{BA}(s) = G_c(s)G_p(s)H(s)$
- Begizta itxiko TF: $G_{BC}(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}$
- Ekuazio Karakteristikoa: $1+G_c(s)G_p(s)H(s) = 0$ ⟶ Begizta itxiko Poloak

Sistema berrelikatuak

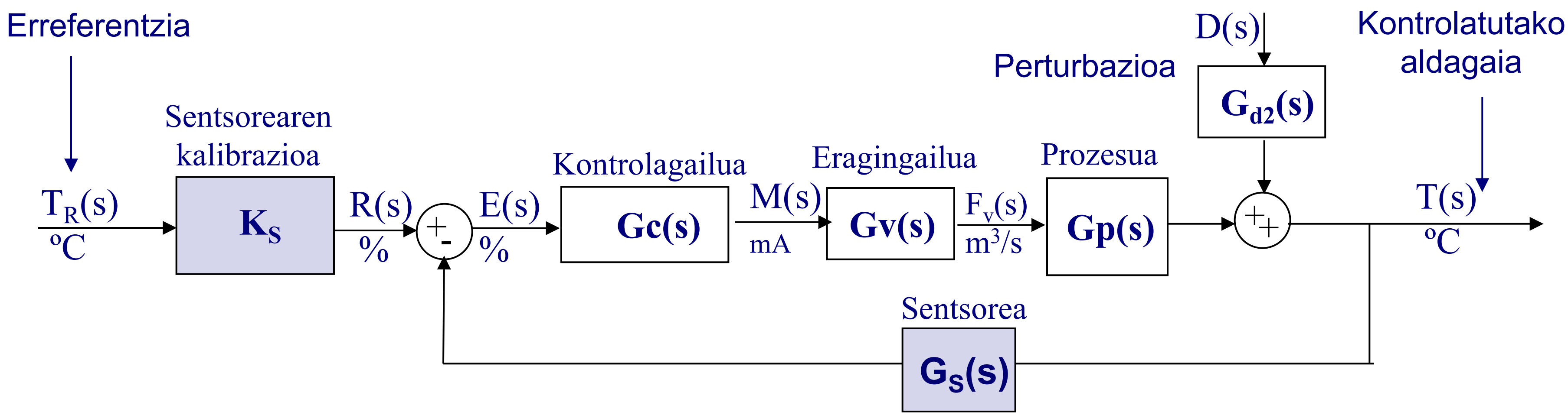
- ✓ Bloke-diagrama
  - Tentsioa (voltioak)
  - Intentsitatea : 4-20 mA (tarte estandarra). Erabiliena.

- ✓ **2. Adibidea:** Tenperaturaren erregulazio-sistema: (Bloke-diagrama **kontrol-unitateetan**)



Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuak
  - ✓ **Bloke-diagrama**
    - ✓ **2. Adibidea:** Tenperaturaren erregulazio-sistema: Bloke-diagrama (Ingenieritza-unitateetan)



Adibidea: 100 -500 ºC tartean neur dezakeen tenperatura-sentsorea

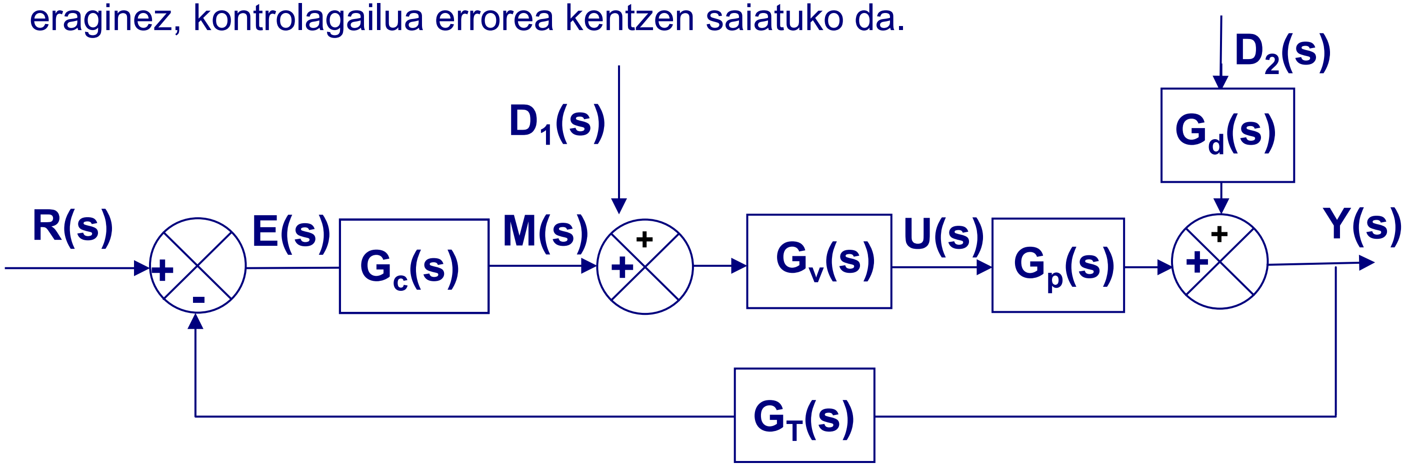
Tenperatura → Sentsorea → **Neurtutako Tenperatura**

ºC — **Sentsorearen tartearen %**

$$K_s = \frac{\%100 - \%0}{(500-100)^\circ C} = 0{,}25 \frac{\%}{^\circ C}$$

- Sistema berrelikatuak
  - ✓ **Berrelikaduraren abantailak**
    - ❑ Perturbazioen eragina murrizten du

$d_1(t)$ edo $d_2(t)$ aldatzekotan, $y(t)$ aldatzen da→ Errorea sortuko da eta, berrelikaduraren eraginez, kontrolagailua errorea kentzen saiatuko da.



$$Y(s)=\frac{G_cG_pG_v(s)}{1+G_cG_vG_pG_T(s)}R(s)+\frac{G_pG_v(s)}{1+G_cG_vG_pG_T(s)}D_1(s)+\frac{G_d(s)}{1+G_cG_vG_pG_T(s)}D_2(s)$$

  - ✓ Berrelikaduraren desabantailak
    - ❑ Kontrolagailuak eragiteko, errorea egon behar da (atzerapena)

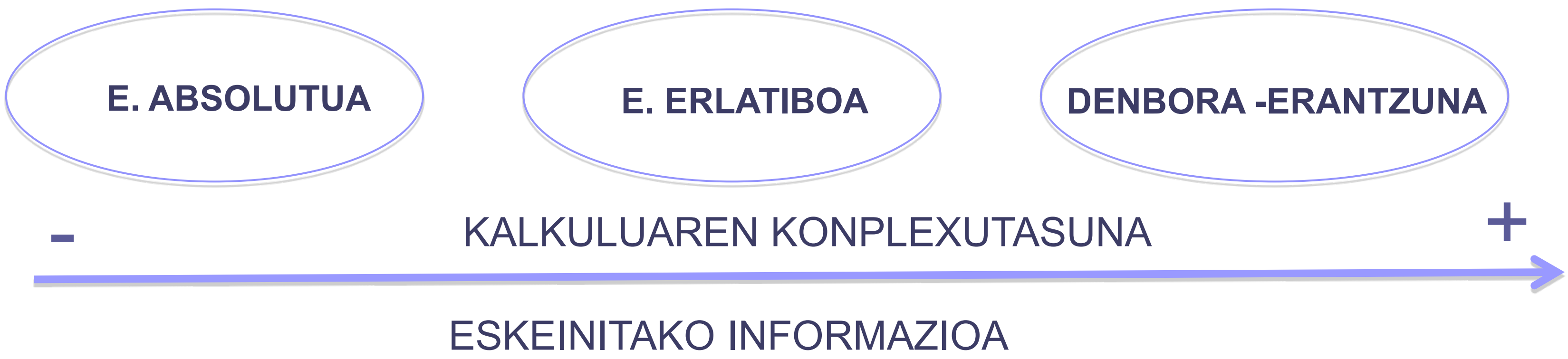
Sistema Berrelikatuak

Aurkibidea :

- Sistema berrelikatuak
- **Sistema berrelikatuen egonkortasuna**
  - ✓ **Definizioa**
  - ✓ **Routh Hurwitz-en Irizpidea**
  - ✓ **Sistema berrelikatuen egorkortasun azterketari aplikazioa: RH egonkortasun-irizpidea**
  - ✓ **Kasu bereziak**
- Sistema berrelikatuen egoera iraunkorra
- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

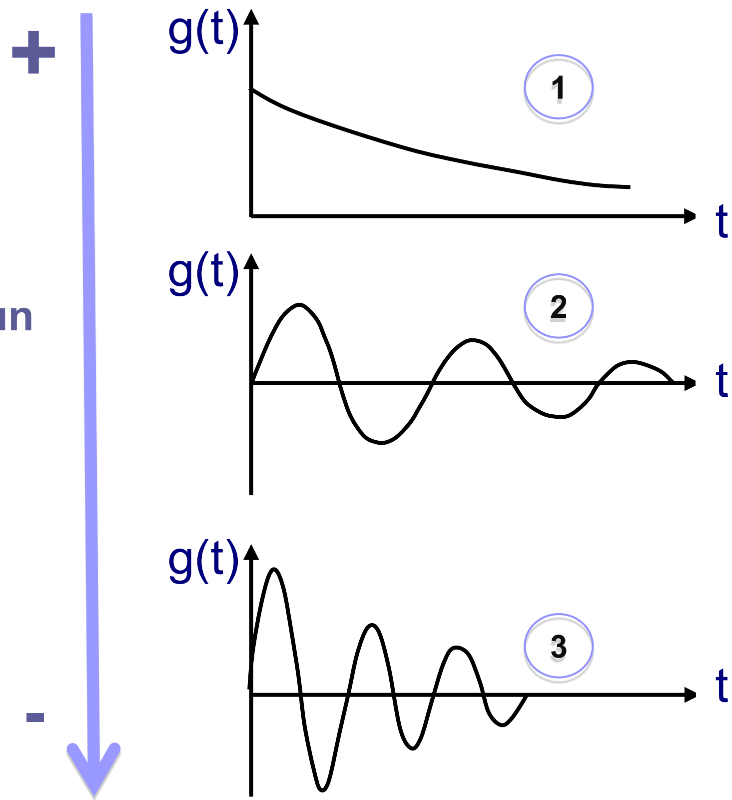
Sistema berrelikatuen egonkortasuna

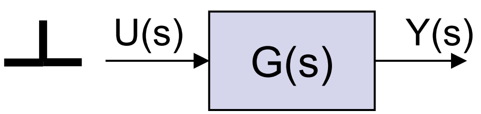
- ✓ **Definizioa**
  - ✓ Egonkortasuna aztertzeko erak:
    - ❑ ABSOLUTUA: egonkorra den edo ez aztertzen du
    - ❑ ERLATIBOA: egonkortasun-graduaren berri ematen du



- Sistema berrelikatuen bgonkortasuna
  - ✓ **Definizioa**
    - ✓ Egonkortasun erlatiboa

Egonkortasun erlatiboa





Inpultsu-erantzuna

SISTEMA GUZTIAK EGONKORRAK DIRA

1. sistema 2.a baino egonkorragoa da. Hau, ordea, 3.a baino egonkorragoa.

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna

  ✓ **Egonkortasunaren definizioak:**

  - **1. Definizioa. BIBO-Egonkortasuna (Bounded Input Bounded Output).** Sistema lineal egonkor baten irteera mugatua dago bere sarrera mugatua egotekotan.

  - **2. Definizioa. Egonkortasun asintotikoa.** Sistema lineal bat engokorra da, honen inpultsu-erantzuna g(t) integra ahal badaiteke tarte infinituan.

$$\int_0^\infty g(t)dt = kte$$

  - **3. Definizioa.** Sistema lineal bat egonkorra da bere begizta itxiko polo guztiek zati erreal negatiboa badute.

2 eta 3 definizioak baliokideak dira

Sistema Berrelikatuak

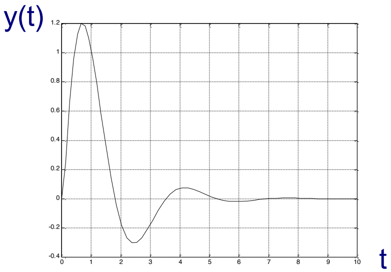
- Sistema berrelikatuen egonkortasuna

  ✓ **BIBO-Egonkortasuna eta engonkortasun asintotikoa**

Inpultsu-erantzuna

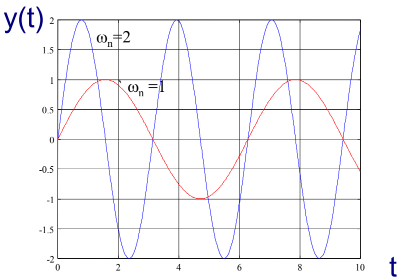
❑ Sistema asintotikoki egonkorra

Sistema aurreko oreka-egoerara itzultzen da

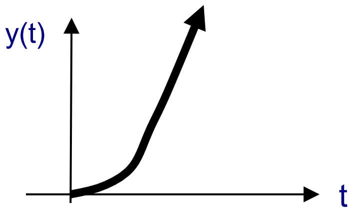


❑ Sistema kritikoki egonkorra **(BIBO-Egonkorra)**

Sistemak oreka-egoera berri bat lortzen du.



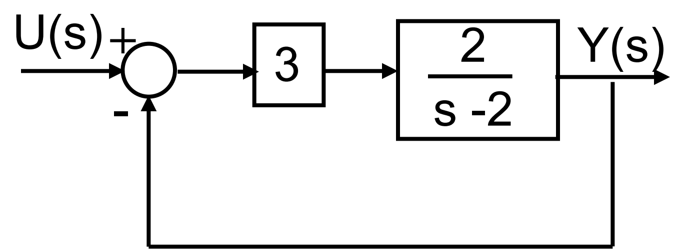
❑ Sistema ez-egonkorra



Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ **3. Adibidea**: Berrelikadurak sistema bat egonkortu dezake?

Prozesu ez-egonkorra: $G(s) = \frac{2}{(s-2)}$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s+4}$$ Sistema egonkorra begizta itxian

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ Routh Hurwitz-en irizpidea

1. HURWITZ-Polinomioaren definizioa

- Polinomio bat HURWITZ dela esaten da, bere erro guztiek zati erreal negatiboa badute.

$$\boxed{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \cdots + a_n s^0 = 0}$$

✓ BEHARREZKO BALDINTZA DA koefiziente guztiak izan behar ditu, eta zeinu berekoak izan behar dute:

$$a_i \neq 0 \;\; y \;\; \forall i, a_i > 0 \;\; ó \;\; a_i < 0$$

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en irizpidea :

2. Baldintza nahikoa

Routh Hurwitz-en irizpideak, polinomio bat Hurwitz den edo ez identifikatzea errazten du, erroak kalkulatu gabe.

Polinomio baten erro guztien zati erreala negatiboa izateko, **ROUTH-en taulako lehenengo zutabeko koefiziente guztiak positiboak izan behar dute**.

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en irizpidea :

3. ROUTH-en taula kalkulatzeko prozedura

$$\boxed{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \cdots + a_n s^0 = 0}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots \\
\hline\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & \ldots & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^{n-n} & k_1 & & &
\end{array}$$

Todos +

Lehenengo bi lerroak polinomioaren koefizienteekin kalkulatzen dira.

Hurrengoak honako formulen bitartez:

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1}$$

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en irizpidea :

4. Routh Hurwitz-en irizpidea :

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\hline\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^{n-n} & k_1 & & &
\end{array}
$$

Denak+

- ❑ Lehenengo zutabeko elementu guztiak positiboak badira, polinomioa HURWITZ da, eta bere erro guztiak zati erreal negatiboa dute.
- ❑ Positiboak ez izatekotan, zeinu-aldaketa kopuruak adierazten du zenbat errok duten zati erreal positiboa.

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Aplikazioa**

Transferentzi funtzio bat emanda:

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s + a_0}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

- RH-en irizpidea erabili ahal da bere egonkortasuna kalkulatzeko
- G(s) transferentzi funtzioak adierazten duen sistema egonkorra da bere polinomio izendatzailea HURWITZ bada.

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Aplikazioa**

1. Ariketa: Hurrengo sistema berrelikatuen egonkortasun asintotikoa komenta ezazu:

a) $D(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 - 2s^2 + s^1 + 8$

b) $D(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 8$

c) $D(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 - 2s^2 + s^1$

d) $D(s) = -s^5 - 5s^4 - 3s^3 - 2s^2 - s^1 - 8$

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **4.Adibidea**

$$G(s)=\frac{1}{s^4+2s^3+6s^2+4s^1+1} \longrightarrow D(s)=s^4+2s^3+6s^2+4s^1+1$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 6 & 1 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
\hline
s^2 & 4 & 1 & 0 \\
s^1 & 3{,}5 & 0 & 0 \\
s^0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\boxed{\frac{2\cdot 6-1\cdot 4}{2}=4} \qquad \boxed{\frac{2\cdot 1-1\cdot 0}{2}=1}$$

$$\boxed{\frac{4\cdot 4-2\cdot 1}{4}=3{,}5} \qquad \boxed{\frac{3{,}5\cdot 1-4\cdot 0}{3{,}5}=1}$$

Zeinu-aldaketarik ez→ Sistema Egonkorra

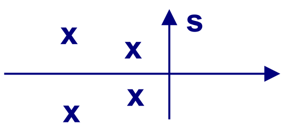
Beharrezko baldintza betetzen du (koefiziente guztiak daude eta positiboak dira).

Baldintza nahikoa betetzen du (Routh-taularen lehenengo zutabeko elementu guztiak positiboak dira)

EGONKORRA

Beste era bat sistemaren poloak kalkulatzea da. Operatzen bada: $p_{1,2}=-0{,}613\pm 2{,}11j \quad p_{3,4}=-0{,}386\pm 0{,}238j$

Polo guztiak zati erreal negatiboa dute, hortaz, egonkorra da.



Sistema Berrelikatuak

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **5. Adibidea**

$$G(s) = \frac{1}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s^1 + 10} \longrightarrow D(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s^1 + 10$$

s^4	2	3	10
s^3	1	5	0
s^2	−7	10	0
s^1	6,3	0	0
s^0	10	0	0

$$\frac{1\cdot 3 - 2\cdot 5}{1} = -7 \qquad \frac{1\cdot 10 - 2\cdot 0}{1} = 10$$

$$\frac{(-7)\cdot 5 - 1\cdot 10}{-7} = 6{,}3 \qquad \frac{6{,}3\cdot 10 - (-7)\cdot 0}{6{,}3} = 10$$

Bi zeinu-aldaketa→ **sistema ez-egonkorra**

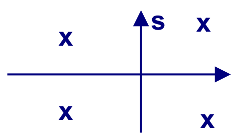
Beharrezko baldintza betetzen du (koefiziente guztiak daude eta positiboak dira).

Baldintza nahikoa ez du betetzen (Routh-taularen lehenengo zutabeko elementu guztiak ez dira positiboak)

EZ-EGONKORRA

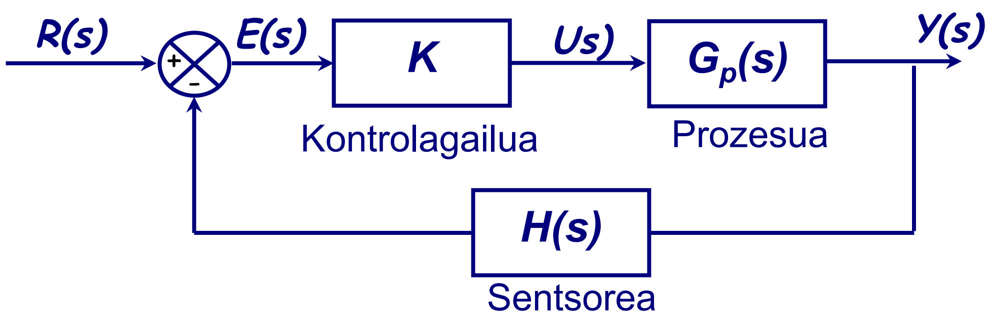
Sistema honetan poloak kalkulatzen baditugu: $p_{1,2} = 0{,}75 \pm 1.4j \quad p_{3,4} = -1 \pm 0{,}93j$

Bi polok zati erreal positibo dute, eta hortaz, sistema ez-egonkorra da
Bi zeinu-aldaketa daudenez Routh-en taulan➔Bi polo ez-egonkor.



Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **K aldakorra duten sistema berrelikatuak**



$$G_{BC}(s) = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s)H(s)}$$

K-ren zein baliotarako da sistema egonkorra?

K irabazpenak beti du muga:
- Egonkortasuna
- Eragingailuaren asetasuna

Bietatik zeinetara iristen den lehenengo, horixe izango da K irabazpenaren muga.

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Sistema berrelikatuei aplikatuta**
    - Begizta itxiko TF: $$G_{BC}(s) = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s)H(s)}$$
    - Ekuazio karakteristikoa:

$$\boxed{1 + KG_p(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \cdots + a_n s^0 = 0}$$

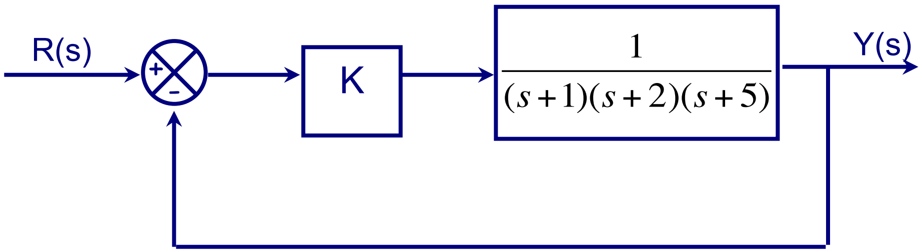
    - Sistema berrelikatuaren egonkortasuna aztertzeko, begizta itxiko transferentzi funtzioaren ekuazio karakteristikoa aztertu behar dugu:

$$\boxed{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \cdots + a_n s^0 = 0}$$

Kalkulatu behar dugu, K-ren zein balioentzak den HURWITZ ekuazio karakteristikoaren polinomioa.

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea:
    - **2. Ariketa:** Kalkulatu K-ren balioa ondorengo sistema egonkorra izateko.



Soluzioa: 0 < K < 126

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Kasu bereziak**

1. Lehenengo zutabeko elementuren bat zero da. Hurrengo lerroko elementuak infinitura jotzen dute.

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
s^{n-3} & 0 & c_2 & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^{n-n} & k_1 & & &
\end{array}
$$

Kasu honetan:

- sistema kritikoki egonkorra da (2 polo irudikari)
- Sistema ez-egonkorra da (zati erreal positiboa)

Soluzioa:

- ❑ Zeroa ε koefiziente batez ordezkatzen dugu, non $\varepsilon \to 0$

edo

- ❑ Polinomioa **(s+a) koefizienteaz biderkatu**, non *a>0*, eta taula berriro kalkulatu

Sistema Berrelikatuak

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Kasu bereziak**

❑ **6. Adibidea:** $D(s) \equiv s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s^1 + 3$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	ε	3	0
s^1	$\frac{-3}{\varepsilon}$	0	0
s^0	3	0	0

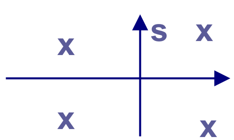
$$\left.\frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon \to 0} \approx \frac{-3}{\varepsilon}$$

Kasu honetan, beharrezko baldintza betetzen da, baina taula sortzean 0-a agertzen da. Zero hau ε koefiziente batez ordezkatu eta taula kalkulatzen jarraituko da.

Taula bukatzean, koefizienteen zeinua aztertuko da, ε → 0+ denean

RH ordez poloak kalkulatzen baditugu:

$p_{1,2} = 0{,}4 \pm 1.29j \quad p_{3,4} = -0.9 \pm 0{,}9j$



Bi zeinu-aldaketa

Polinomioak 2 erro ditu zati erreal positiboarekin

Beste metodo bat:

$$D(s)(s+1) \equiv (s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s^1 + 3)(s+1) =$$
$$= s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s^1 + 3$$

Taula berria sortu da polinomio honekin

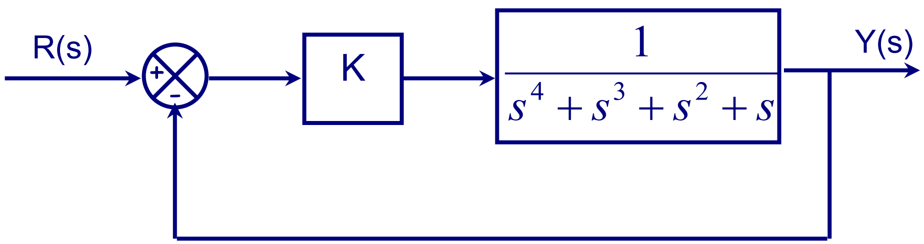
s^5	1	3	5
s^4	2	4	3
s^3	1	3,5	0
s^2	-3	3	
s^1	4,5	0	
s^0	3		

Bi zeinu-aldaketa

Polinomioak bi erro ditu zati erreal positiboarekin

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Kasu bereziak**
    - ❑ **7. Adibidea:** Kalkula ezazu K-ren balioa sistema egonkorra izateko



$$G_{BC}(s) = \frac{K}{s^4+s^3+s^2+s+K}$$

Ekuazio karakteristikoa: $1 + KG(s) \equiv s^4+s^3+s^2+s+K$

s^4	1	1	K
s^3	1	1	0
s^2	ε	K	0
s^1	$\frac{\varepsilon - K}{\varepsilon}$	0	0
s^0	K	0	0

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varepsilon - K}{\varepsilon} = -\frac{K}{\varepsilon}$$

Taulan ikusten den bezala, **K>0** izatekotan, sistema ez da egonkorra. **K<0**, bada, ordea, azken lerroko elementua negatiboa izango litzateke. Hortaz, ez da posible K-ren bidez sistema egonkortzea.

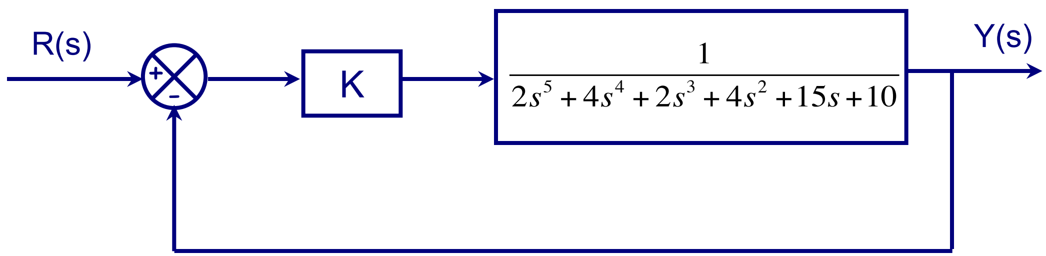
Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Kasu bereziak**

❑**3. Ariketa:** Ondorengo sistemen egonkortasuna aztertu:

a) $D(s)=s^5+s^4+5s^3+5s^2+s^1+10$ ekuazio karakteristikoa duen sistema

b) Hurrengo irudiko sisteman, ba al dago sistema egonkortuko duen K>0 baliorik?

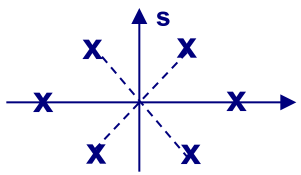


Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Kasu bereziak**

2. RH taula kalkulatzerakoan, lerro bateko elementu guztiak zero dira. Erroak jatorritik simetrikoki kokatuta daudenean ematen da.

- **s= ±σ** (Errealak dira) → **Ezegonkortasuna**
- **s= ± jβ** (Irudikariak dira) → **Egonkortasun kritikoa**
- **s= σ ± jβ** y **s=-σ ± jβ** (Konplexu konjokatuak) → **Ezegonkortasuna**



Soluzioa:

Polinomio laguntzailea erabiltzen da zeroz osatutako lerroa ordezkatzeko. Polinomio laguntzaile hau, aurreko lerroko koefizienteek osatzen duten polinomioa deribatuz lortzen da.

$$\begin{array}{lllll}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^{n-n} & k_1 & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(b_1 s^{n-2} + b_2 s^{n-4} + b_3 s^{n-6} + \ldots\right) = \underbrace{(n-2)b_1}s^{n-3} + \underbrace{(n-4)b_2}s^{n-5} + \ldots$$

Sistema Berrelikatuak

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

- ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Kasu bereziak**

  - ❑ **8. Adibidea:** $D(s) \equiv s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 10s^1 + 10$

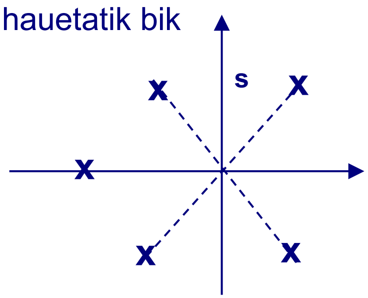
$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 5 & 10 \\
s^4 & 1 & 5 & 10 \\
\hline
s^3 & 0 & 0 & 0 \\
s^3 & 4 & 10 & 0 \\
s^2 & 5/2 & 10 & \\
s^1 & -6 & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow D(s) \equiv s^4 + 5s^2 + 10 \Rightarrow \frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 10s$$

Bi zeinu aldaketa daude, hortaz, sistemak **bi erro ditu zati erreal positiboarekin → Sistema Ezegonkorra**

Adibide honetan poloak kalkulatzen baditugu, 4 poloak simetrikoak direla ikus dezakegu, eta hauetatik bik zati erreal positiboa dutela (hortaz, sistema ezegonkorra da)

$$D(s) \equiv s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 10s^1 + 10 = 0 \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_{2,3} = -0,5754 \pm 1,6826j \\ p_{4,5} = 0,5754 \pm 1,6826j \end{cases}$$



Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
  - ✓ Routh Hurwitz-en egonkortasunerako irizpidea: **Kasu bereziak**

✓ **9. Adibidea**: $P(s)= s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18$

s^4	***1***	***11***	***18***
s^3	***2***	***18***	***0***
s^2	*2*	*18*	*0*
s^1	*0*	*0*	*0*
	4	***0***	***0***
s^0	*18*	*0*	*0*

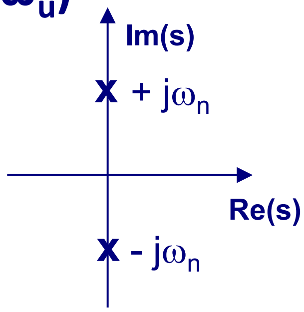
Polinomio laguntzailea

$P(s) = 2s^2+18$
$P'(s) = 4s+0$

Zeinu-aldaketarik ez dagoenez, ez dago zati erreal positiboa duen errorik. Hortaz, erroak ardatz irudikarian daude.
Sistema Kritikoki Egonkorra da

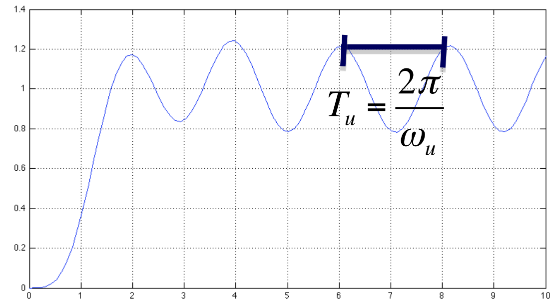
Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ Sistema kritikoki engokorra: oszilazio-maiztasunaren kalkulua (ω_u)



Sistemak 2 polo irudikari dituenean, s= $\pm j\omega_n$, bere erantzunak ω_u maiztasunarekin oszilatuko du egoera iraunkorrean.

Oszilazio-maiztasuna bi eratan kalkula dezakegu:



1. Ekuazio laguntzailea kalkulatuz:

$$P(s) = 2s^2+18 \longrightarrow s_{1,2} = \pm 3j \longrightarrow \boxed{\omega_u = 3 \text{ rad/s}}$$

2. Polo irudikariak ekuazio karakteristikoa betetzen du:

   s= $\pm j\omega_n$ sistemaren poloak direnez, ekuazio karakteristikoaren soluzio dira.

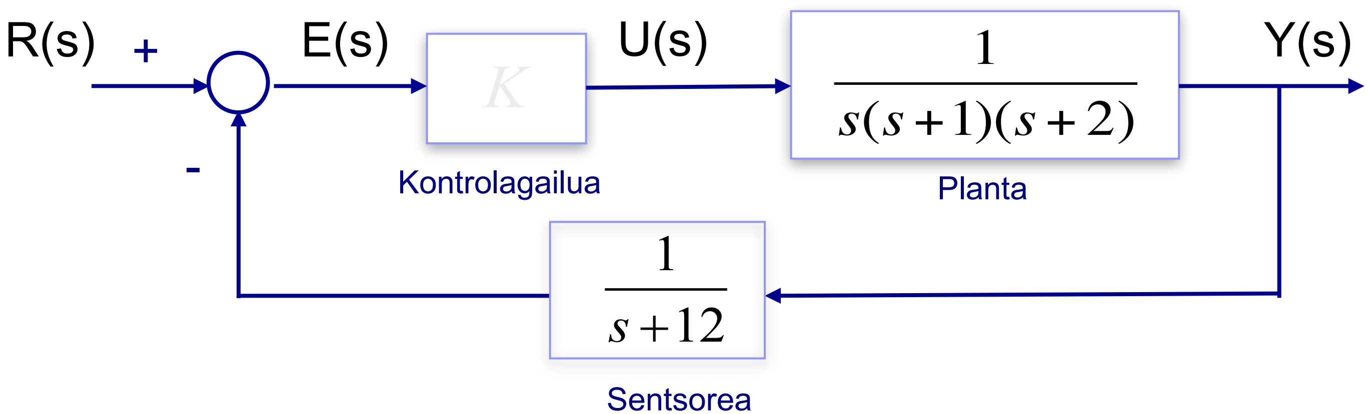
   Sistemak ondorengo periodoaz oszilatuko du:

$$\boxed{T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}}$$

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna

  ✓ **4. Ariketa**: Kalkulatu K-ren zein balioentzat den egonkorra ondorengo sistema. Kalkulatu ere sistema kritikoki engokorra egiten duen K_u, baita egoera honetan edukiko duen oszilazio-periodoa (T_u).



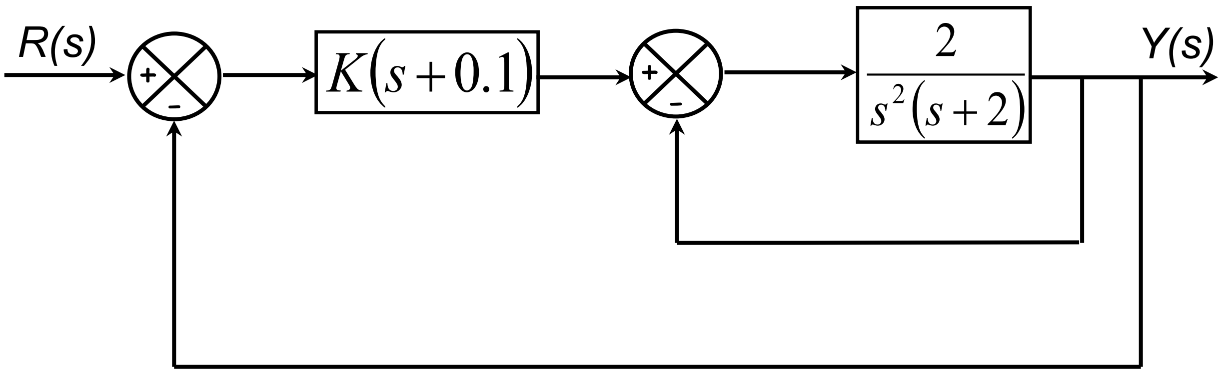
EMAITZA:

Sistema egonkorra da K-ren honako balioentzat : ***0 < K < 58,24***
Egonkortasun kritikoa: K=58,24 → **K_u= 58,24 eta T_u=5**

Sistema Berrelikatuak

- Sistema berrelikatuen egonkortasuna

  ✓ **5. Ariketa**: Kalkulatu zein den K-ren balioa sistema kritikoki egonkorra izateko. Kalkulatu ere egoera honetan duen oszilazio-periodoa (T_u).



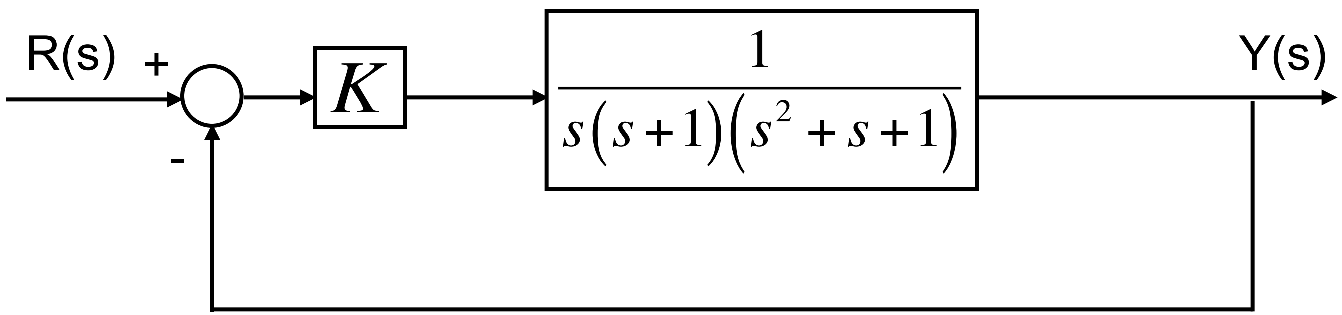
EMAITZA:

K_u= 0,53 eta **T_u= 2π s.**

Sistema Berrelikatuak

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

- ✓ **6. Ariketa**: Kalkulatu zein den K-ren balioa sistema kritikoki egonkorra izateko. Kalkulatu ere egoera honetan duen oszilazio-periodoa (T_u).



EMATIZA:

K_u= ¾ eta $\omega_u = \frac{1}{\sqrt{2}} rad/s$

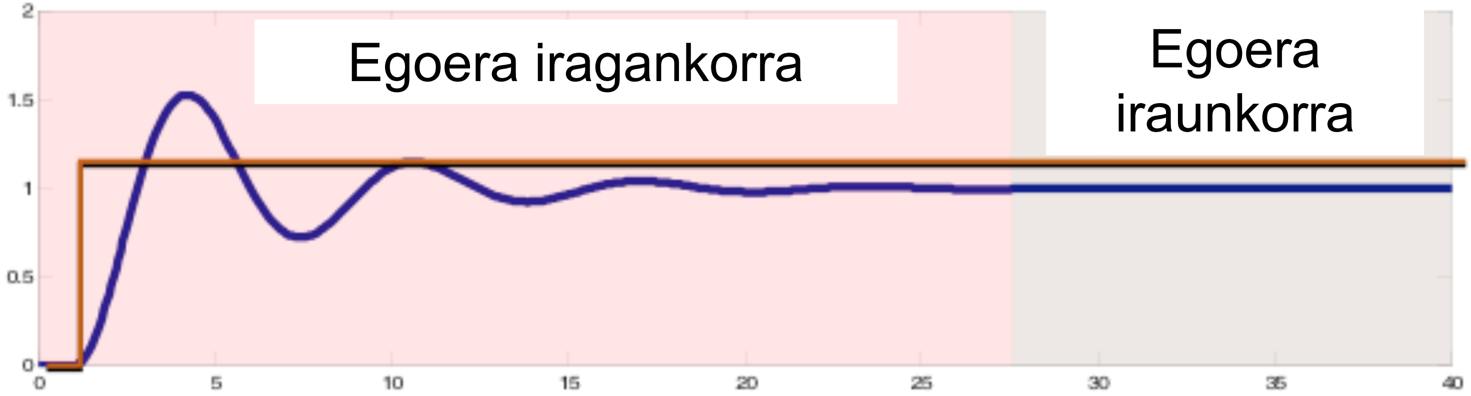
Sistema Berrelikatuak

Aurkibidea :

- Sistema berrelikatuak
- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
- **Egoera iraunkorra**
  - ✓ **Definizioa**
  - ✓ **Errore-seinalearen kalkulua**
  - ✓ **Espaloia, arrapala eta parabola-erantzunen errorea**
  - ✓ **Errore-koefiziente estatikoak**
  - ✓ **Sistema-mota**
- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

Sistema Berrelikatuak

- Egoera iraunkorra
  - ✓ **Definizioa:**



Egoera iraunkorra da poloen eragina desagertu denean lortzen dugun erantzuna. Egoera iraunkorra egoera iragankorra desagertu denean lortzen da (sistema egonkorra denean).

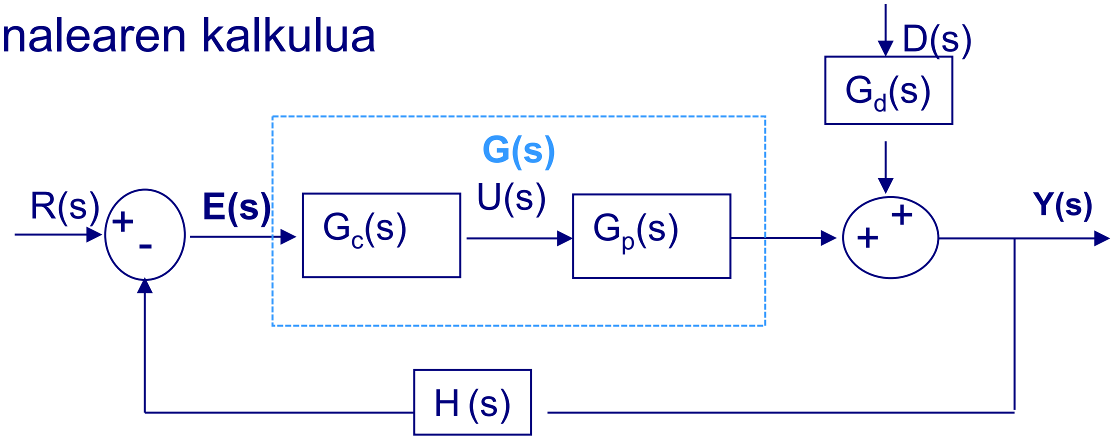
❑ **Egoerra iraunkorreko ohiko kontrol-eskakizunak :**

- ➢ Egoera iraunkorreko errorea zero izatea
- ➢ Egoera iraunkorreko erroreak maximo bat izatea.

Sistema Berrelikatuak

Egoera iraunkorra

- ✓ Errore-seinalearen kalkulua



$$E(s) = R(s) - Y(s)H(s) = R(s) - H(s)\left[G(s)E(s) + G_d(s)D(s))\right] = R(s) - G(s)H(s)E(s) - H(s)G_d(s)D(s)$$

$$E(s)\left[1 + G(s)H(s)\right] = R(s) - H(s)G_d(s)D(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) - \frac{H(s)G_d(s)}{1+Gs)H(s)}D(s)$$

Egoera iraunkorreko errorea:

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)}$$

Amaierako balioaren teorema (BAKARRIK SISTEMA EGONKORRETAN)

NOTA: ekuazio karakteristikoa berdina da perturbazio edota sarrerarako!

- Egoera iraunkorra

  ✓ **Errore-koefiziente estatikoak**

- ❑ Hainbat **R(s) erreferentzia**-sarreren (espaloia, arrapala, parabola) aurrean errorea kalkulatzeko erabiltzen dira.
- ❑ Bere balioa zenbat eta handiagoa izan, orduan eta txikiagoa izango da egoera iraunkorrean sistemak izango duen errorea.

- $\mathbf{K_p}$: Posizio errore-koefizientea.
  Espaloia erreferentzia-sarrerarako definitzen da.
- $\mathbf{K_v}$: Abiadura errore-koefizientea.
  Arrapala erreferentzia-sarrerarako definitzen da.
- $\mathbf{K_a}$: Azelerazio errore-koefizientea.
  Parabola erreferentzia-sarrerarako definitzen da

Sistema Berrelikatuak

- Egoera iraunkorra
  - ✓ K_p, K_v, K_a Koefizienteen kalkulua
    - ✓ **Posizioaren errore-koefizientea: K_p**

espaloi unitario-sarrera R(s)=1/s,

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)H(s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)}$$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}}$$

1. ***Sistemak begizta irekian (G(s)H(s)) polo bat badu jatorrian (s=0, integratzailea), espaloi-sarrera aurrean e_{ss}= 0***
2. ***Integratzailerik ez badauka, egoera iraunkorreko errorea Kp-ren araberakoa izango da, errorea txikituz Kp handitzen den heinean (maximora heldu arte, asetasuna edo egonkortasuna)).***

$$\boxed{K_p \uparrow \quad e_{ss} \downarrow}$$

Sistema Berrelikatuak

- Egoera iraunkorra
  - ✓ K_p, K_v, K_a Koefizienteen kalkulua
    - ✓ **Abiaduraren errore-koefizientea: K_v**

Arrapala unitario-sarrera $R(s)=1/s^2$,

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} \approx \frac{1}{sG(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)H(s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s)H(s)}$$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v}} \quad \boxed{K_v \uparrow \quad e_{ss} \downarrow}$$

1. ***Sistemak begizta itxian (G(s)H(s)) bi polo edo gehiago baditu jatorrian (s=0) , arrapala-sarreraren aurrean e_{ss}= 0.***
2. ***Sistemak begizta itxian integratzaile bakarra izatekotan, egoera iraunkorreko errorea K_v-rekin jaitsiko da maximora heldu arte (asetasuna edota egonkortasuna)***

Sistema Berrelikatuak

Egoera iraunkorra

- K_p, K_v, K_a Koefizienteen kalkulua
  - **Azelerazioaren errore-koefizientea: K_a**

Parabola unitarioa $R(s)=1/s^3$,

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s^3} \approx \frac{1}{s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)H(s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$\boxed{K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G(s)H(s)}$$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_a}}$$

$$\boxed{K_a \uparrow \quad e_{ss} \downarrow}$$

1. ***Sistemak begizta itxian (G(s)H(s)) hiru polo edo gehiago baditu jatorrian (s=0) , parabola-sarreraren aurrean e_{ss}= 0.***
2. ***Sistemak begizta itxian integratzaile bi izatekotan, egoera iraunkorreko errorea K_a-rekin jaitsiko da maximora heldu arte (asaetasuna edota egonkortasuna)***

Sistema Berrelikatuak

- Egoera iraunkorra

  ✓ **Sistema mota**

- Errore-koefizienteen kalkuluan, begizta irekiko transferentzi funtzioaren (G(s)H(s)) mugak garrantzi handia du.
- Begizta irekiko transferentzi funtzioan dauden integratzaile-kopuruak egoera egonkorreko errorea egongo den edo ez adieraztea ahalbidetzen digu.
- Hortaz, sistemak **sailkatzen dira begizta irekian dituen integratzaile-kopuruaren arabera.**
- j: begizta irekian ditugun integratzaile-kopurua.

$$G(s)H(s)=\frac{K(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots(1+T_m s)}{s^j(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots(1+T_n s)}$$

■	j = 0	**0 motako sistema**
■	j = 1	**1 motako sistema**
■	…	
■	j = n	**n motako sistema**

Sistema Berrelikatuak

- Egoera iraunkorra

✓ **Sistema mota**

	Espaloia	Arrapala	Parabola
0 mota	$\dfrac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1 mota	0	$\dfrac{1}{K_v}$	∞
2 mota	0	0	$\dfrac{1}{K_a}$
3 mota	0	0	0

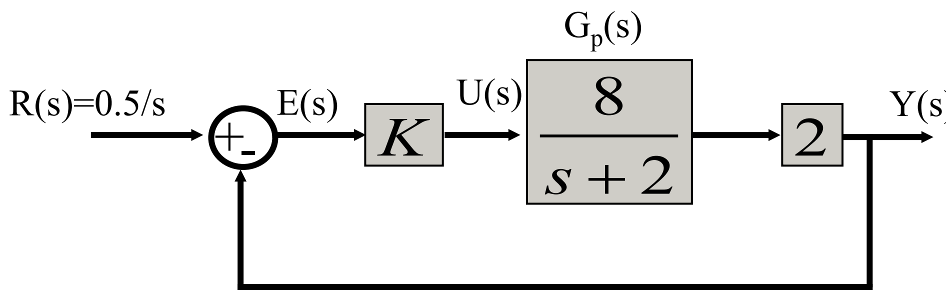
Laburpena: Egoera iraunkorreko errorea kentzeko, kontrolagailuaren bitartez integratzaileak gehitu daitezke. Hala ere, honek egonkortasun arazoak sortu ditzake begizta itxian!

Sistema Berrelikatuak

Egoera iraunkorra

✓ **10 Adibidea:**

Antena batek satelite baten jarraipena egiten du. K batez berrelikatutako kontrol-sistema eraikiko dugu:



K = 3:

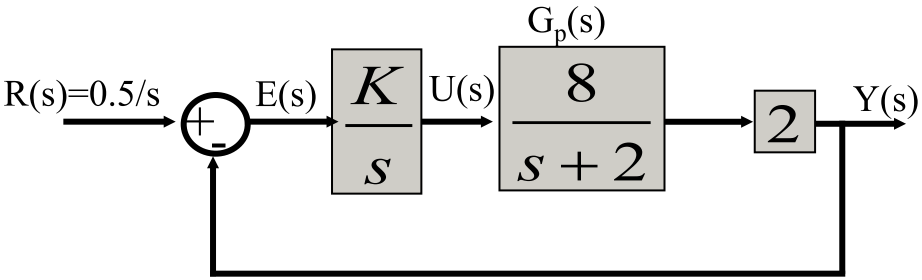
$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{2KG_p(s)}{1+2KG_p(s)\cdot 1} R(s) = \frac{s+2}{s+50} R(s) = \frac{0,5(s+2)}{s(s+50)}$$

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = 0.02}$$

Egoera iraunkorra

- ✓ **10 Adibidea :**

Irabazpen bat eta integratzailea gehituz:



K = 0.25:

$$E(s) = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 4} R(s)$$

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = 0}$$

eman ta zabal zazu

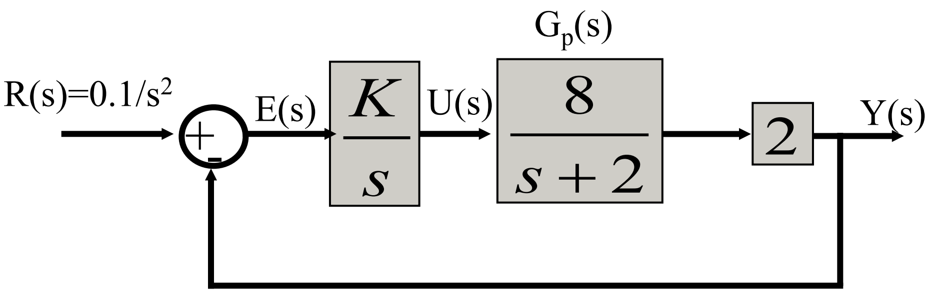
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Nagore Iriondo, Asier Zubizarreta, Marga Marcos, Itziar Cabanes

Sistema Berrelikatuak

- Egoera iraunkorra
  - ✓ **10. Adibidea:**

Sarrera-mota aldatzean, egoera iraunkorreko errorea berriro agertuko da.

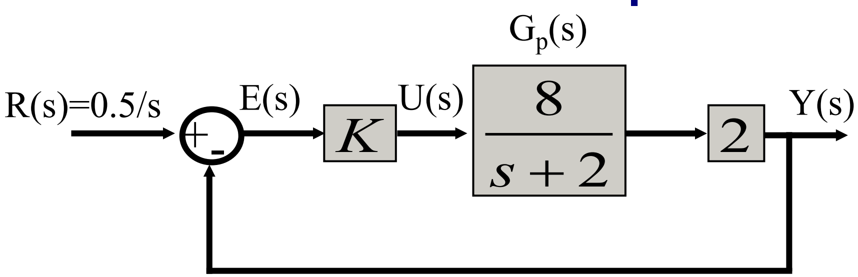


K = 0.25:

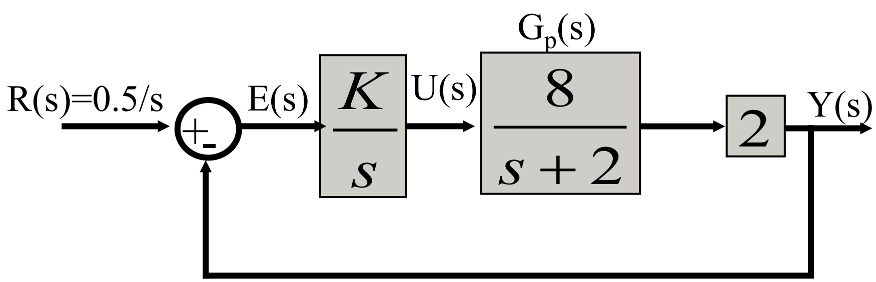
$$E(s)=\frac{s(s+2)}{s^2+2s+4}R(s)$$

$$\boxed{e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=0.05}$$

- Egoera iraunkorra
  - ✓ **10 Adibidea: Laburpena**

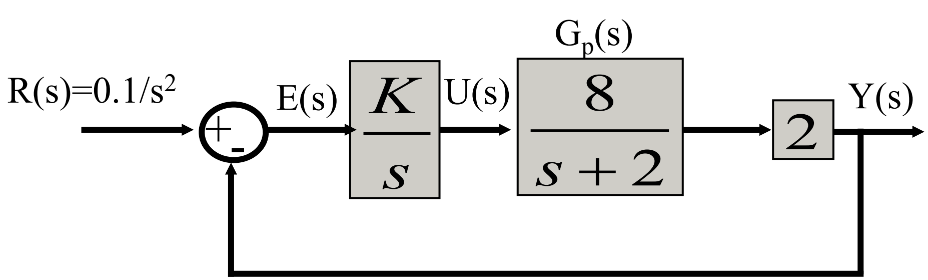


$$e_{ss} = 0.02$$



$$e_{ss} = 0$$

Integratzailea gehitzean errorea desagertuko da

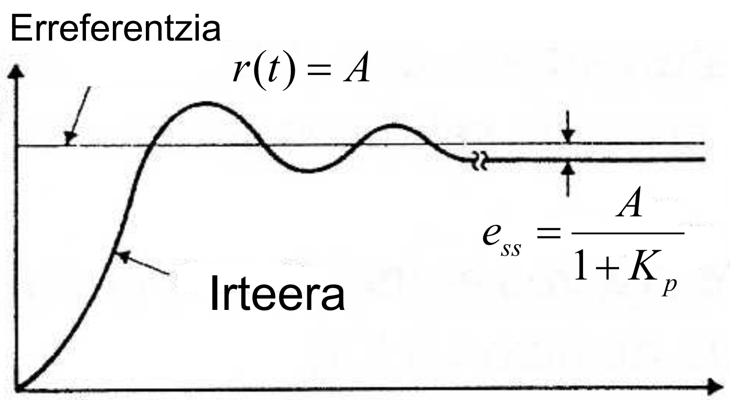


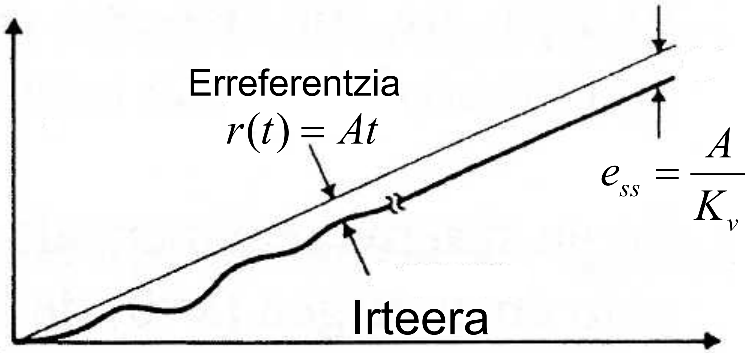
$$e_{ss} = 0.05$$

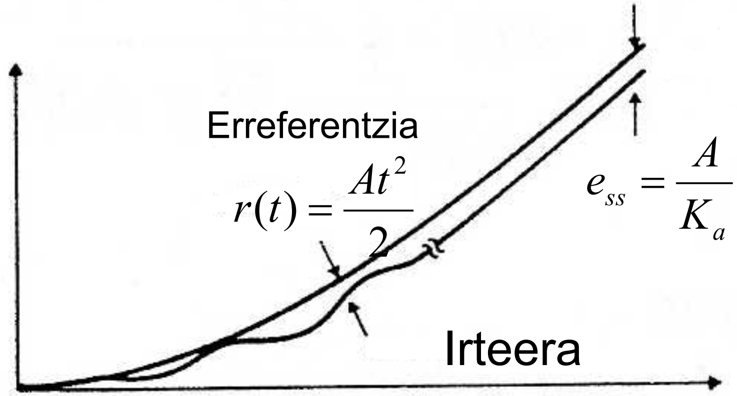
Sarrera-mota aldatzean errorea agertuko da

Egoera iraunkorra

- ✓ **7. Ariketa:** Zein motakoak dira ondorengo sistemak?

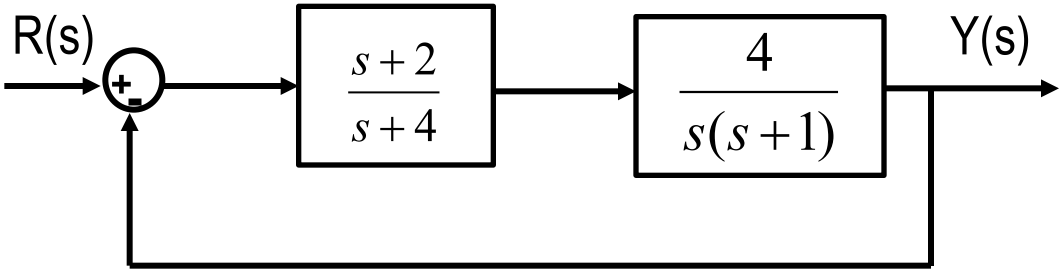






Sistema Berrelikatuak

- Egoera iraunkorra
  - ✓ **8. Ariketa**: Ondorengo sisteman, kalkulatu errore-koefiziente estatikoak eta espaloia, arrapala eta parabola unitarioen aurrean sistemak duen errorea



Nota: Gogoratu sistema egonkorra izan behar dela amaierako balioaren teorema aplikatu ahal izateko.

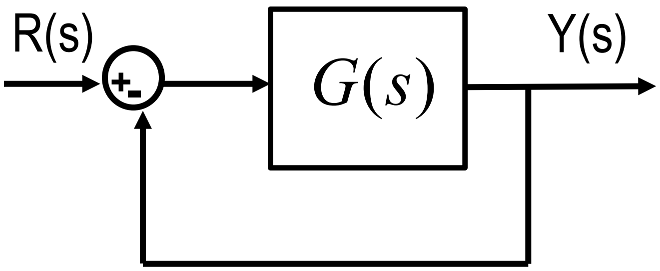
Egoera iraunkorra

- ✓ **9. Ariketa**:

Hurrengo sistemetan, kalkulatu espaloi eta arrapala-sarreren aurrean sistemek aurkezten duten errorea egoera iraunkorrean :

a) $$G(s)=\frac{K_1(as+b)}{(cs^2+ds+e)(fs+g)}$$

b) $$G(s)=\frac{K_1(as+b)}{s(cs^2+ds+e)(fs+g)}$$

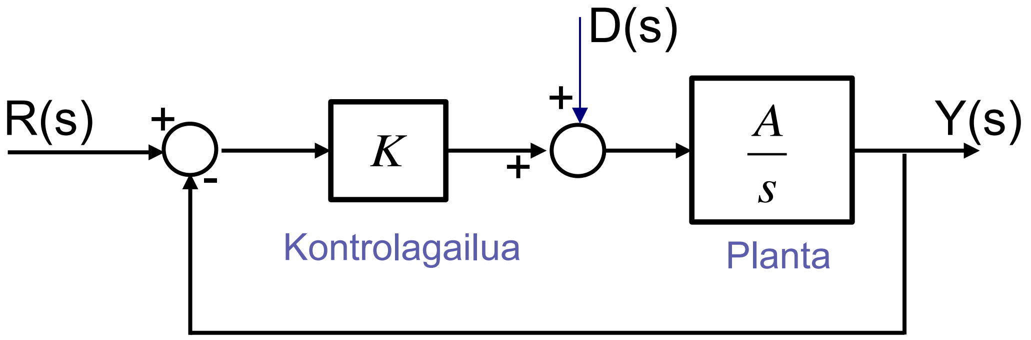


Sistema Berrelikatuak

Egoera iraunkorra

- ✓ **10. Ariketa:**

  Kalkulatu egoera iraunkorreko errorea, R(s) eta D(s) sarreretan espaloi unitario bat ezartzen badugu

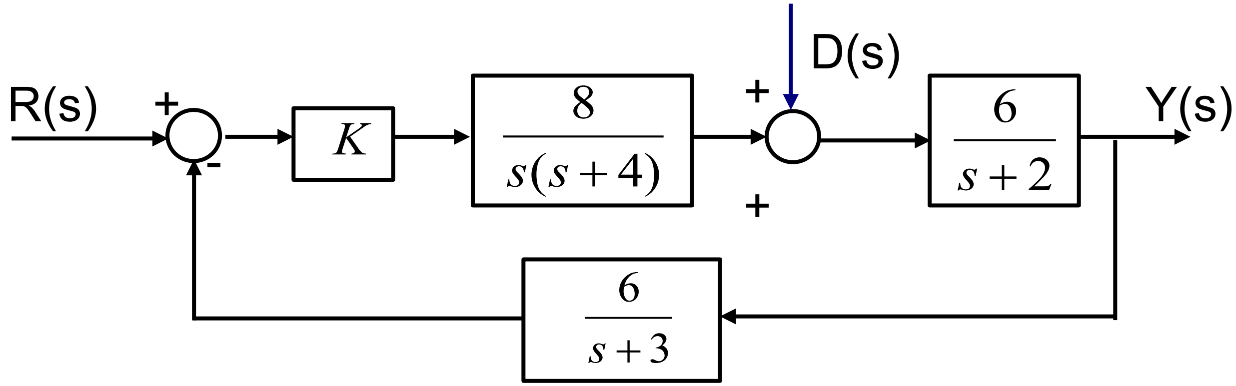


Sistema Berrelikatuak

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ **11. Ariketa**:

Irudian prozesu kimiko baten erregulazio-sistemaren bloke-diagrama daukagu



a) Y(s)/R(s) eta Y(s)/D(s) transferentzi funtzioak kalkulatu

b) Routh Hurwitz-en irizpidea aplikatuz, aztertu sistema berrelikatuaren egonkortasuna

c) $K=K_u$ irabazpena kritikoa denean, kalkulatu oszilazioaren periodoa.

d) K=0.1 irabazpena duen kontrolagailua erabiltzen badugu, kalkulatu egoera iraunkorreko errorea ondorengo kasuetarako :

① R(s)-n 2 anplitudeko espaloi-sarrera eta D(s)-n 0.5 anplitudeko espaloi-sarrera

② R(s)-n 2 maldako arrapala-sarrera eta D(s)-en 0.5 anplitudeko espaloi-sarrera, 3 denbora-unitate atzeratua $D(s)= 0.5/s\, e^{-3s}$.

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ 11. Ariketa :

EMAITZAK:

a) Y(s)/R(s) eta Y(s)/D(s) transferentzi funtzioak

$$Y_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{48 \cdot K \cdot (s+3)}{s^4 + 9s^3 + 26s^2 + 24s + 288K} \qquad Y_2(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{6 \cdot s \cdot (s+3) \cdot (s+4)}{s^4 + 9s^3 + 26s^2 + 24s + 288K}$$

b) K-ren balioak sistema egonkorra izateko

$0 < K < 0.216$

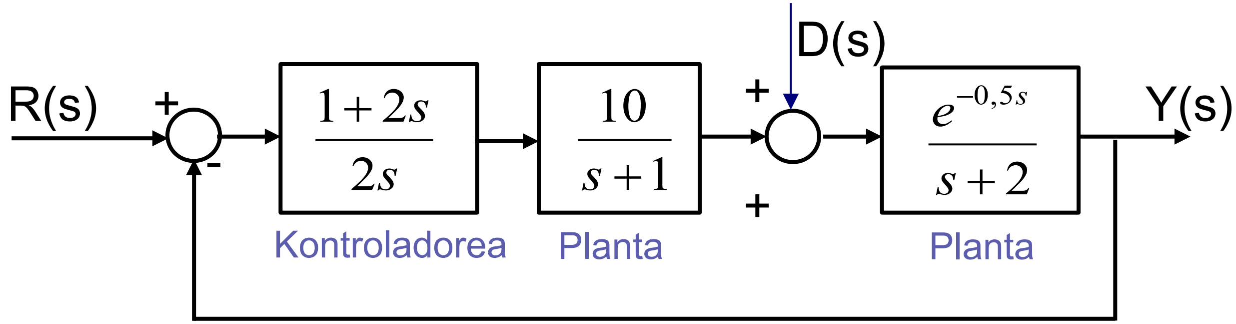
c) Tu= 3.9 s (poloak: $s_{1,2} = \pm 1.61j$; $s_{3,4} = -4.5 \pm 1.77j$)

d) 1) $ess_p = 0$; $ess_D = 0$; 2) $ess_v = 1.66$; $ess_D = 0$;

Sistema berrelikatuen egonkortasuna

✓ **10 Ariketa**:

Ondorengo irudian, atzerapena duen sistema berrelikatu bat dugu:



a) Kalkulatu egoera iraunkorrean sistemak duen errorea, erreferentzian eta perturbazioan espaloi unitario bat aplikatzen bada.

b) Erreferentzian eta perturbazioan 2 maldako arrapala bat aplikatuz, kalkulatu sistemak izango duen egoera iraunkorreko errorea.

Emaitza:

a) e_{ss}= 0.

b) e_{ss}= 2/5.

Sistema Berrelikatuak

Aurkibidea :

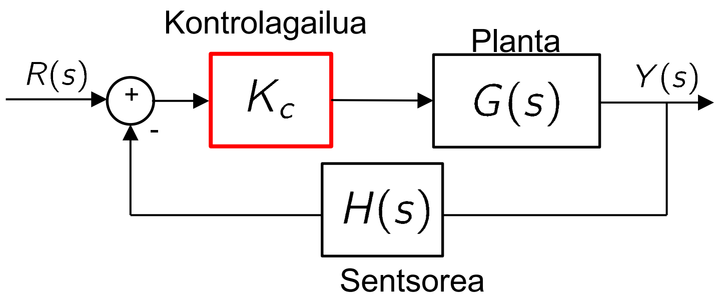
- Sistema berrelikatuak
- Sistema berrelikatuen egonkortasuna
- Egoera iraunkorra
- **Erroen toki geometrikoa**
  - ✓ **Definizioa**
  - ✓ **Eraikuntzarako oinarrizko arauak**
  - ✓ **Adibideak**

Sistema Berrelikatuak

Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

➢ Definizioa

- K_c irabazpenaren bidez berrelikatutako sistema baten:



$$G_{BC} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s) H(s)}$$

- Begizta itxiko sistemaren poloak ekuazio karakteristikoaren erroak dira:

$$1 + K_c G(s) H(s) = 1 + G_{BA}(s)$$

- Begizta itxiko poloen kokapenak sistema berrelikatuaren erantzun-ezaugarriak definitzen ditu (erantzun-denbora, moteldura, egonkortze-denbora, etabar)

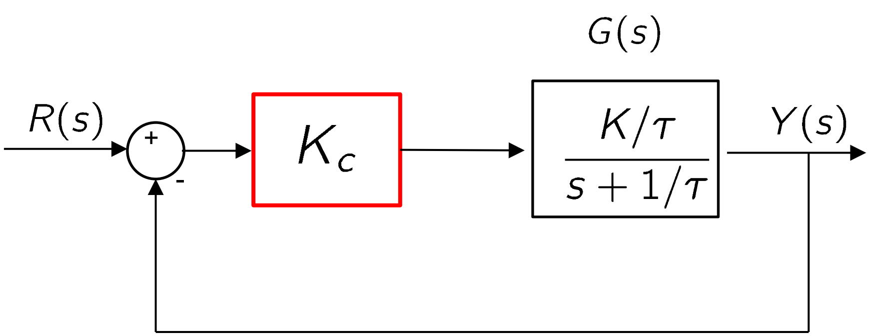
Sistema Berrelikatuak

Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

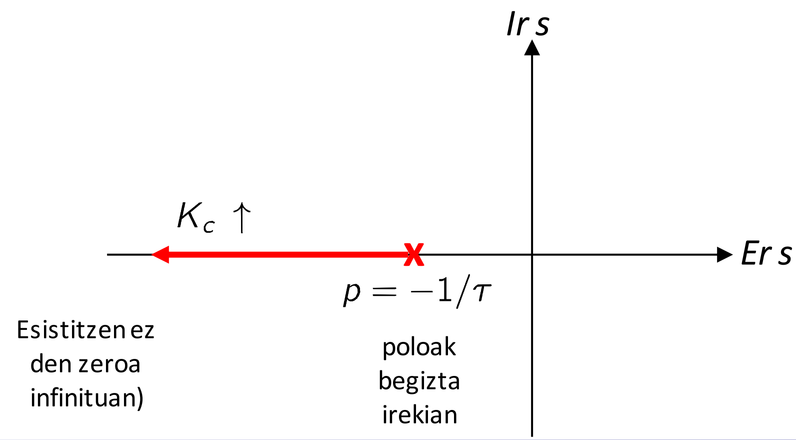
Definizioa

- **Erroen toki geometrikoa** esaten zaio, begizta itxiko sistemaren **poloek K_c** irabazpena **0-tik ∞-ra aldatzean osatzen duten toki geometrikoari**.

Adibidea: Lehen ordeneko sistema



$$G_{BC} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c K/\tau}{1+\left(1+K_c K\right)/\tau}$$



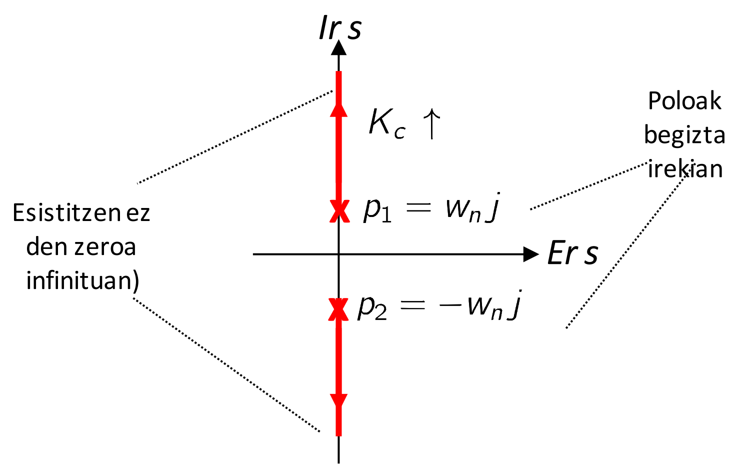
Begizta itxiko poloaren kokapena:

$$p_{BC} = -\left(1+K_c K\right)/\tau$$

Sistema Berrelikatuak

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - Definizioa

Ariketa: Demagun bigarren ordeneko sistema bat, s_1=-p_1 eta s_2=-p_2 polo errealak dituena. Frogatu erroen toki geometrikoa ondorengoa dela:



- Goi ordeneko sistemen kasuan ez da tribiala.
- Ikus dezagun zelan egin toki geometriko hurbildua ezagutu ahal izateko

Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

- Definizioa

Ekuazio karakteristikoari erreparatuz, ohar gaitezen Erroen Toki Geometrikoko poloek *K_c G(s) H(s) = -1* baldintza bete behar dutela. Ondorioz, baldintza bi hauek defini daitezke:

- **Moduluaren irizpidea**

$$\left\| K_c G(s)H(s) \right\| = 1 \rightarrow K_c \frac{\prod_{i=1}^{m} \left\| s + z_i \right\|}{\prod_{i=1}^{n} \left\| s + p_i \right\|} = 1$$

- **Argumentuaren irizpidea**

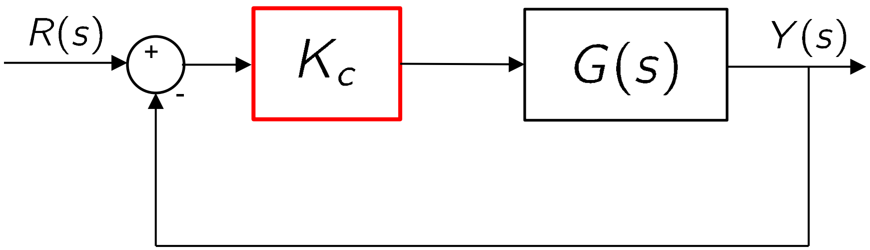
$$Arg(KG(s)H(s)) = Arg(K) + \sum_{j=1}^{m} Arg(s + z_j) - \sum_{i=1}^{n} Arg(s + p_i) = (2q+1)\pi$$

$$q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Sistema Berrelikatuak

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - Definizioa

Moduluaren eta **argumentuaren** baldintzetatik abiatuta, posible da sistema berrelikatu baten erroen toki geometrikoa marrazteko arauak definitzea.



Begizta irekiko TF:

$$G_{BA} = K_c G(s)$$

Begizta irekiko TF:

$$G_{BC} = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s)}$$

Sistema Berrelikatuak

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - Eraikuntzarako arauak

1. **Adar-kopurua**
   Erroen tokiaren adar-kopurua ***n*** da, $G_{BA}(s)$-ren polo-kopurua.

2. **Hasiera eta amaiera-puntuak**
   Adar bakoitza begizta irekiko sistemaren polo baten hasi ($K_c = 0$) eta begizta irekiko sistemaren zero baten amaitzen da ($K_c = \infty$).
   $n > m$ bada → $(n - m)$ adar infinituan dauden zeroetan amaituko dira.

Adibidea: Sistemaren transferentzi funtzioa bada $G(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s+4)}$

- Adar-kopurua = $G_{BA}(s)$- ren polo-kopurua = 2
- n-m=1 → adar bat infinituan amaituko da eta bestea s=-1 zeroan

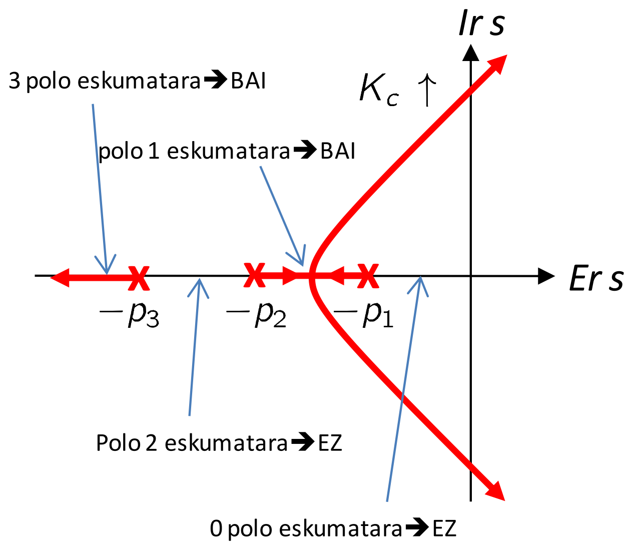
- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - Eraikuntzarako arauak

3. Erroen toki geometrikokoak diren ardatz errealeko puntuak

Ardatz errealeko puntu bat ETG-ko puntu bat da, bere **eskumatara dauden polo eta zeroen batuketa bakoitia denean**.

Aurreko adibidean:

- (-∞, -4) eta (-2, -1) tarteak erroen toki geometrikoan daude



Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

- Eraikuntzarako arauak

4. Erroen toki geometrikoaren simetria
ETG ardatz errealarekiko simetrikoa da.

5. Erroen toki geometrikoaren asintotak
Infinituko zeroetan amaitzen diren *(n - m)* adarrak, ardatz errealarekin ondorengo angelua osatzen duten lerroekiko asintotikoak dira:

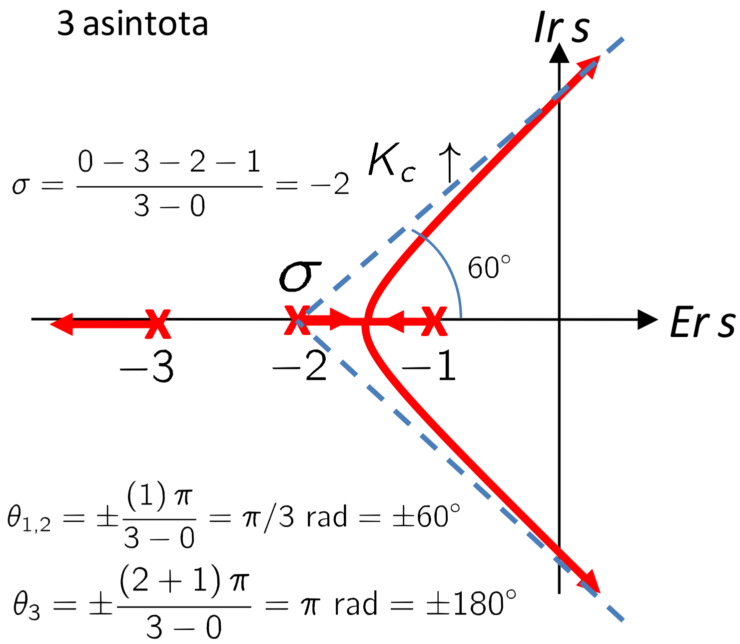
$$\theta = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Sistema Berrelikatuak

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - Eraikuntzarako arauak

6. Asintoten eta ardatz errealaren arteko ebaki-puntua

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{m} z_i - \sum_{j=1}^{n} p_j}{n-m}$$



Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

- Eraikuntzarako arauak

7. **Asintoten angeluak poloetatik irten eta zeroetara iristean**
   Irteera eta iriste-puntuetan, adarren tangenteek ardatz errealarekin osatzen dituzten angeluak dira.

$$\phi_{p_k} = \sum_{i=1}^{m} \phi_{z_i} - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \phi_{p_j} - (2r+1)\pi, \quad r = 1,2,\ldots$$

$$\phi_{z_k} = \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \phi_{z_i} - \sum_{j=1}^{n} \phi_{p_j} - (2r+1)\pi, \quad r = 1,2,\ldots$$

non, Φ_{zi} eta Φ_{pj}, dagokion polo eta zeroan tangenteak ardatz errealarekin duen angelua adierazten duen.

Sistema Berrelikatuak

Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

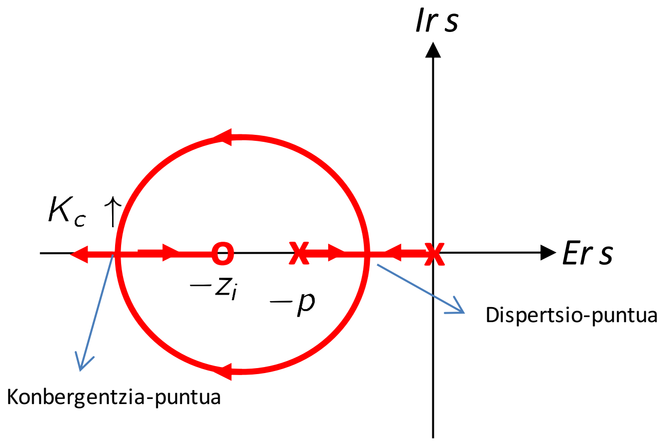
- Eraikuntzarako arauak

8. Adarren dispertsio eta konfluentzia-puntuak

Dispertsio-puntua da ETG bi adar konplexutan banatzen den ardatz errealeko puntua. Konfluentzia-puntua aldiz, bi adar konplexu ardatz errealean biltzen dituen puntua da.

Ondorengo funtzioaren minimoak dira:

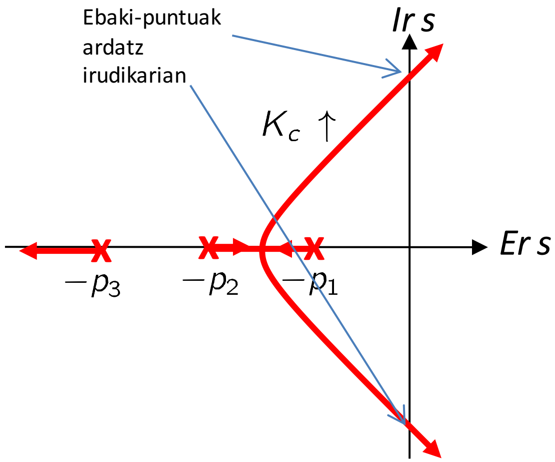
$$K_c = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$



Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

- Eraikuntzarako arauak

9. Ardatz irudikariarekiko ebaki-puntuak
Sistema kritikoki egonkor egiten duten K_c-ren balioei dagozkien poloak dira. Routh-Hurwitz-en bitartez kalkula daitezke.



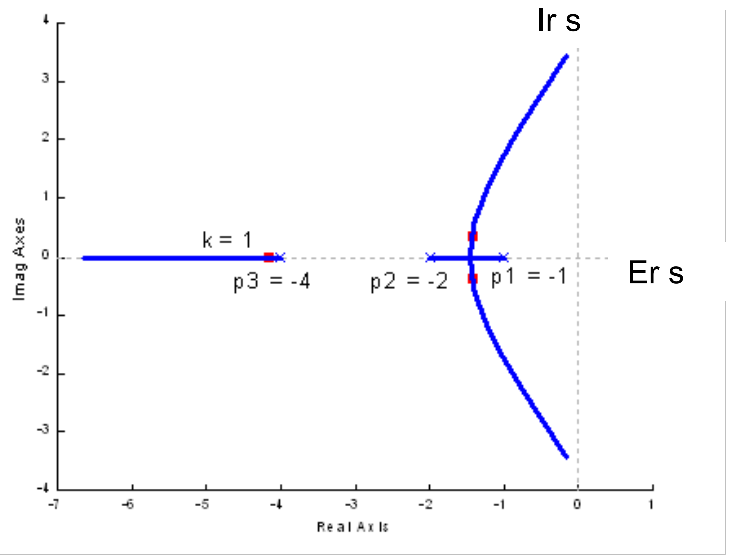
Sistema Berrelikatuak

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - ETG hurbilduaren eraikuntza

1. $G_{BA}(s)$-ren *n* poloak eta *m* zeroak *s* planoan kokatu.
2. Adar-kopurua = *n*
3. Ardatz errealeko zatiak: Eskumatara dauden polo eta zeroen batuketa bakoitia
4. $G_{BA}(s)$-ren *n* poloen adarren hasierak. Adarrak $G_{BA}(s)$-ren *m* zeroetara iritsiko dira. *n* > *m* bada, *n* - *m* adar asintotikoki doaz infinitura.
5. Asintotak definitu: $\sigma = \sum_{i=1}^{m} z_i - \sum_{j=1}^{n} p_j / (n-m)$ $\quad \theta = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
6. K_u eta ω_u kalkulatu: ardatz irudikariarekin ebaki-puntuak $\pm j\omega_u$ dira.

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - **Adibidea**: Hirugarren ordeneko sistema
    - Hiru polo erreal

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$



- Adar-kopurua= n= 3
- ET ardatz errealean: (-∞, -4) eta (-2, -1)

$\theta_{1,2}=\pm 60°$, $\theta_3=-180°$, $\sigma=-7/3$

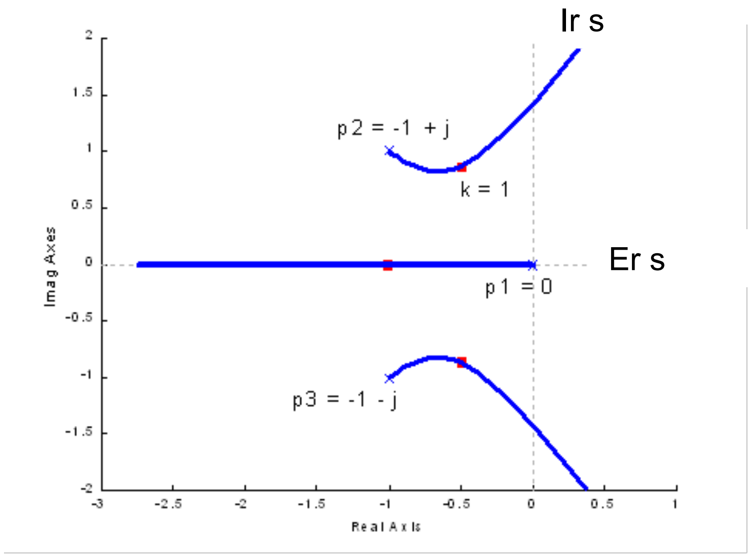
- Ebaki-puntua ardatz irudikarian

$K_u=90$, $\omega_u=\sqrt{14}$

Sistema Berrelikatuak

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - ✓ **Adibidea**: Hirugarren ordeneko sistema
    - ✓ Bi polo konplexu eta integratzailea

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$$



- Adar-kopurua= n= 3
- ET ardatz errealean : $(-\infty, 0)$
- Asintota-kopurua= n-m = 3

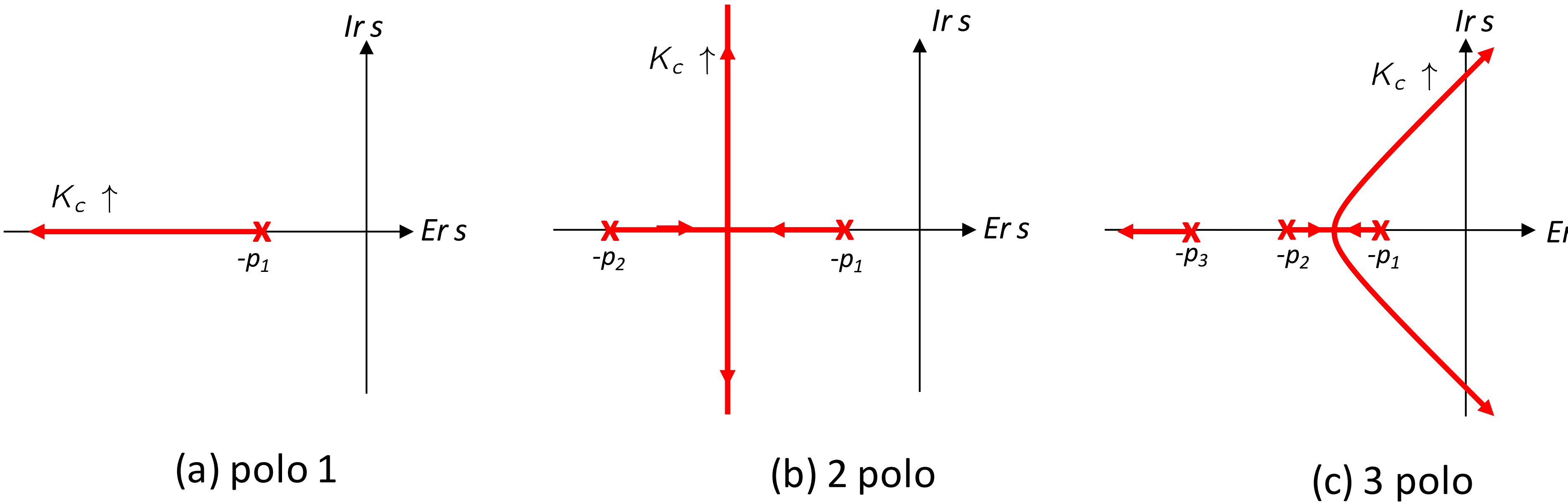
  $\theta_{1,2}=\pm 60°$, $\theta_3=-180°$, $\sigma=-2/3$
- Ebaki-puntua ardatz irudikarian

  $K_u=4$, $\omega_u=\sqrt{2}$

Sistema Berrelikatuak

- Erroen toki geometrikoaren eraikuntza
  - ✓ **Adibideak**: Polo finituak gehitzearen eragina

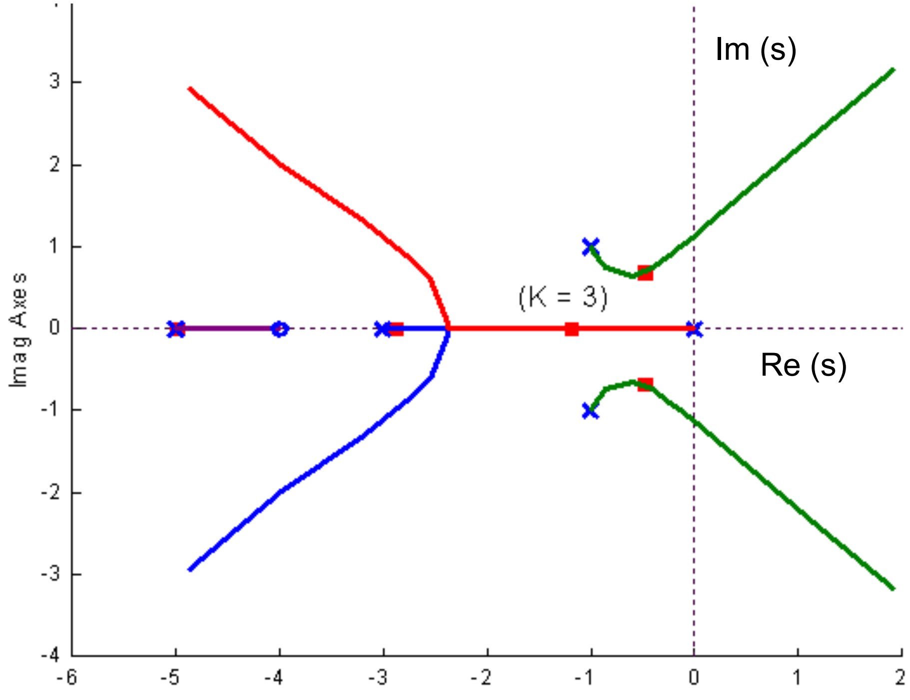
    Poloak gehitzeak eragin desegonkortzailea dauka, erroen tokia eskumatara mugituz.



Erroen toki geometrikoaren eraikuntza

✓ **Adibidea**: G(s)H(s)-ren Erroen Toki hurbildua:

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{s(s+3)(s+5)(s^2+2s+2)}$$



- Adar-kopurua= n= 5
- ET ardatz errealean: (-5, -4) eta (-3, 0)
- Asintota-kopurua= n-m = 4

  $\theta_{1,2}=\pm 45^\circ$, $\theta_{3,4}=\pm 135^\circ$, $\sigma=-6/4$

- Ebaki-puntua ardatz irudikarian

  $K_u=90$, $\omega_u=3{,}74$rad/s

Bibliografia

- “Sistemas de Control Moderno”. Dorf, Richard C., Bishop, Robert H. (2005). **5. kapitulua (1-6 atalak, problemak)**.
- “Ingeniería de Control Moderna” K. Ogata (traducción S. Dormido). (2010). **5. kapitulua (1-4 atalak, problemak)**.
- “Sistemas de Control Automático” (7ª edición). Benjamín C. Kuo. Pearson (1996). **7. kapitulua, problemak**.
- “Control Automático con herramientas interactivas”. JL Guzmán, R Costa, M. Berenguel y S. Dormido (2012). **3. kapitulua.**