eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Automatika eta Kontrola

4.Gaia
Denboraren eremuko azterketa

Sistemen Ingeniaritza eta Automatika Saila

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

Gai-zerrenda

- Irakasgaiaren edukiak
  - Aurkezpena
  - Sarrera
  - Sistema dinamikoen ereduak
  - Kanpo-adierazpidea
  - **Denboraren eremuko azterketa**
  - Sistema berrelikatuak
  - Kontrolagailuen diseinua
  - Maiztasunaren eremuko azterketa

Denboraren Eremuko Azterketa

❒ Helburuak

- ✓ Sistema baten transferentzi funtzioa ezagututa, sistemaren denbora-portaera aztertzea, hau da, kontrol eta perturbazio-sarreren aldaketen aurrean, zelan erantzuten duen aztertzea.

❒ Norbeneganatu beharreko gaitasunak:

- ☑ Sistemaren polo-kokapena eta denbora-portaera erlazionatzen jakitea.
- ☑ Sistema simpleen ezaugarri garrantzitsuenak identifikatu eta adierazten jakitea (lehen eta bigarren ordenekoak).
- ☑ Sistemen eredu hurbilduak lortzen jakitea, sarrera arrunten (espaloia, inpultsua, arrapala) aurrean ematen duten denbora erantzunean oinarrituz.

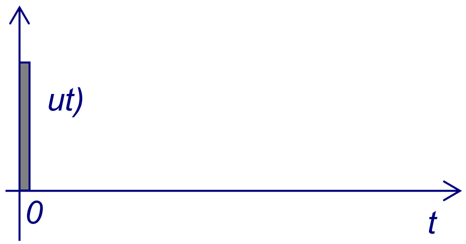
Denboraren Eremuko Azterketa

Aurkibidea:

- **Froga-seinaleak**
- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

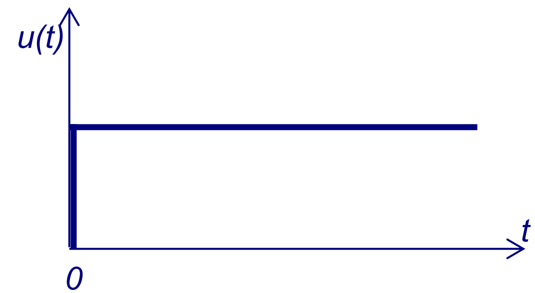
Denboraren Eremuko Azterketa

- **Froga-seinaleak.** Sistemen denbora-erantzuna aztertzeko erabiltzen diren seinaleak dira



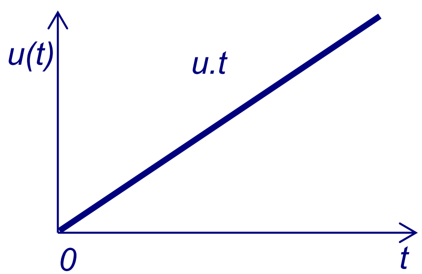
IMPULTSU-sarrera (u azalera)

$$\begin{cases} u(t) = \lim\limits_{t\to 0} u/t & t = 0 \\ u(t) = 0 & t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U(s) = u}$$



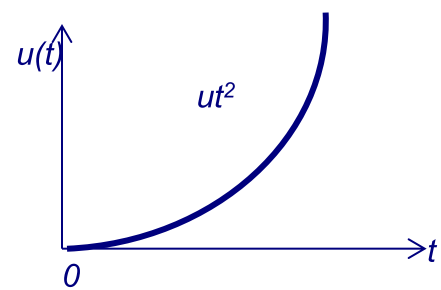
Espaloi-sarrera (u anplitudea)

$$\begin{cases} u(t) = u & t \geq 0 \\ u(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U(s) = \frac{u}{s}}$$



ARRAPALA-sarrera (u malda)

$$\begin{cases} u(t) = ut & t \geq 0 \\ u(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U(s) = \frac{u}{s^2}}$$



PARABOLA-sarrera

$$\begin{cases} u(t) = \frac{u}{2}t^2 & t \geq 0 \\ u(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U(s) = \frac{u}{s^3}}$$

Denboraren Eremuko Azterketa

Aurkibidea:

- Froga-seinaleak
- **Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna**
  - **Sistemen parametroak**
  - **espaloi-erantzuna**
  - **Impultsu-erantzuna**
  - **Identifikazio esperimentala**
  - **Berrelikaduraren eragina**
- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

Denboraren Eremuko Azterketa

Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

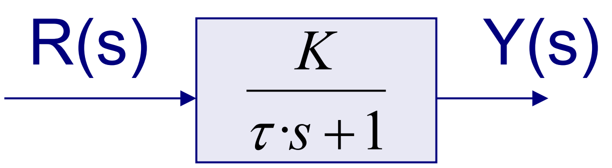
✓ Lehen ordeneko sistemen eredu matematikoa ondorengoa da:

$$\boxed{\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kr(t)}$$

- Orokorrean, eredu hau desbideratze-aldagaietan definituta egongo da. Beraz, sistema OP-tik abiatzen bada, hasierako baldintza nuluak izango dira.

- Laplaceren eraldaketa eginez (hasierako baldintza nuluak):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau \cdot s + 1}$$



Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ Sistemaren parametroak

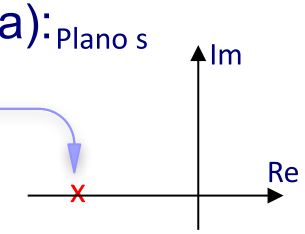
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Parametroak
- **K** **irabazpen estatikoa [Y unit./U unit.]**
- **τ** **Sistemaren denbora-konstantea**
  (Denbora-unitateak): Sistemaren azkartasuna neurtzen du

- Sistemaren poloa (denbora-konstantearen alderantzizkoa):

$$\tau s + 1 = 0$$

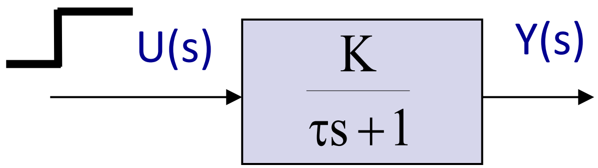
$$s = -\frac{1}{\tau}$$



Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ u anplitudeko espaloi-erantzuna:

$$\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Ku(t)$$



$$Y(s)=\frac{K}{(\tau s+1)}\frac{u}{s}=\frac{K/\tau}{(s+1/\tau)}\frac{u}{s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1/\tau};\qquad \frac{Ku}{\tau}=A(s+1/\tau)+B\,s$$

$$s=0 \qquad \Rightarrow Ku/\tau=A/\tau; \qquad A=Ku$$

$$s=-1/\tau \qquad \Rightarrow Ku/\tau=-B/\tau; \qquad B=-Ku$$

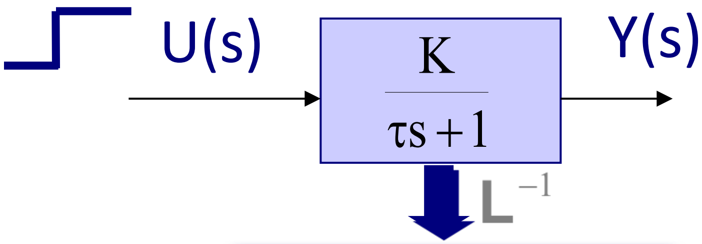
$$Y(s)=Ku(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/\tau}); \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=Ku\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1/\tau}\right]\right)$$

$$\boxed{y(t)=Ku\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

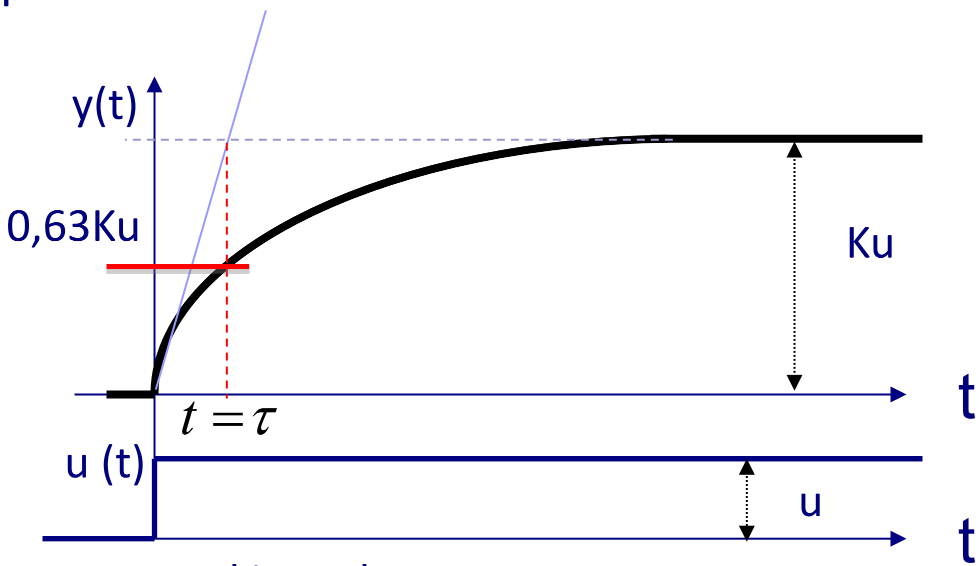
Denboraren Eremuko Azterketa

Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ Sistemaren erantzuna bi parametrok definitzen dute:



$$y(t) = Ku\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



τ > 0, erantzun egonkorra, monotonoki gorakorra

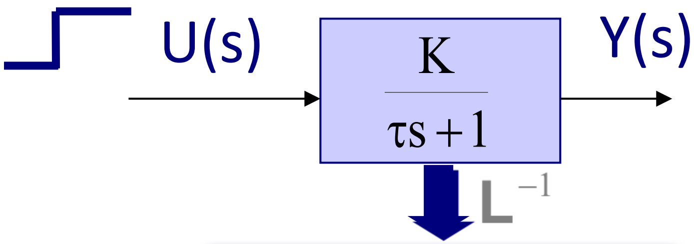
K: irabazpen estatikoa $K = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}$, >0 edo <0 izan ahal da

$\lvert K \rvert < 1$	Moteldu
$\lvert K \rvert > 1$	Anplifikatu
$\lvert K \rvert = 1$	Ez aldatu

τ: denbora-konstantea. Irteerak amaierako balioaren %63,2 lortzeko behar duen denbora (sistema egonkorretan) $t = \tau \Rightarrow y(\tau) = (1 - e^{-1})Ku = 0{,}6321Ku$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **denbora-erantzunak bi atal ditu:**



$$y(t) = Ku\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$y(t) = Ku - Ku\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Egoera iraunkorreko erantzuna: y_{ss}
(irabazpen estatikoaren menpekoa)

Erantzun iragankorra: y_t
(poloen menpekoa)

$$y(t) = y_{ss} + y_t(t); \qquad \lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0 \;\; si\; \tau > 0$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  - ✓ Egonkortze-denbora $\mathbf{t_s}$:

    Irteerak bere amaierako balioa lortzeko behar duen denbora da (egoera egonkorrera heltzeko).

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{\tau s+1}} \longrightarrow Y(s) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad \boxed{y(t) = Ku\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$$t=\tau \qquad (1-e^{-1})=0.63$$

$$t=2\tau \qquad (1-e^{-2})=0.86$$

$$\boxed{t=3\tau \qquad (1-e^{-3})=0.95}$$

$$\boxed{t=4\tau \qquad (1-e^{-4})=0.98}$$

$$t=5\tau \qquad (1-e^{-5})=0.99$$

%5 irizpidea

$$y(t_{95}) = 0.95Ku = Ku(1-e^{-\frac{t_{95}}{\tau}})$$

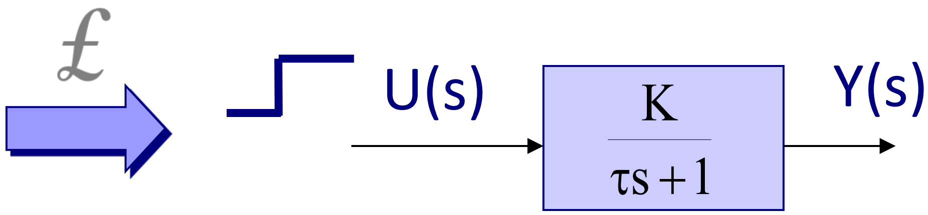
%2 irizpidea

$$y(t_{98}) = 0.98Ku = Ku(1-e^{-\frac{t_{98}}{\tau}})$$

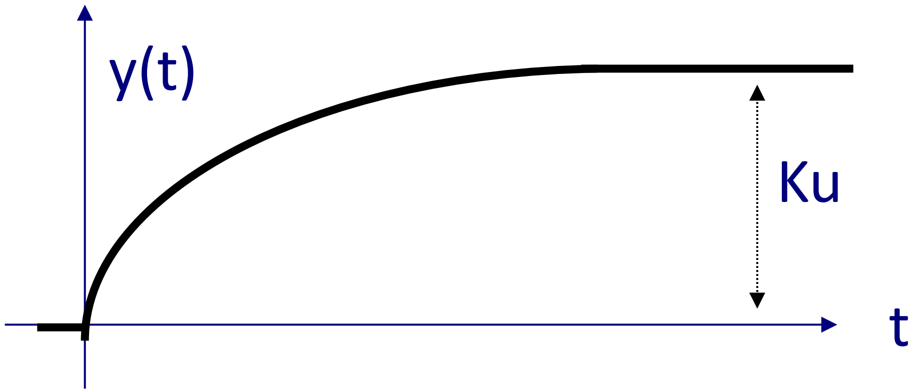
Denboraren Eremuko Azterketa

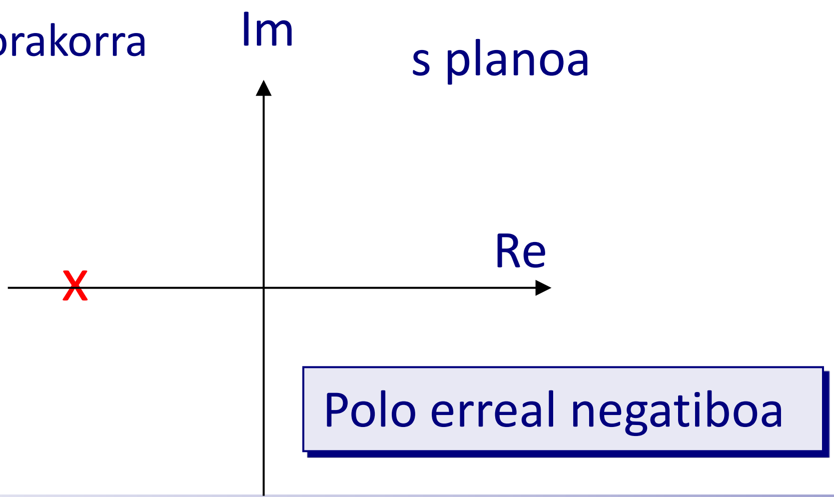
- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **s planoa aztertuz, polo erreal negatiboa:** u anplitudeko espaloi-erantzuna

$$y(t) = Ku\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



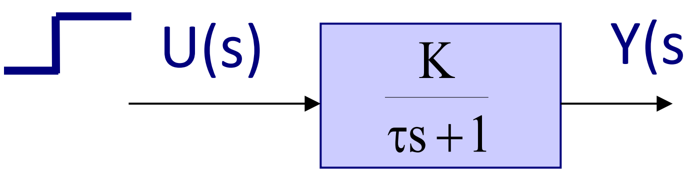
- ☐ $\tau s + 1 = 0$, polo erreala $s = -\frac{1}{\tau}$
- ☐ $\tau > 0$ erantzun egonkorra, monotonoki gorakorra



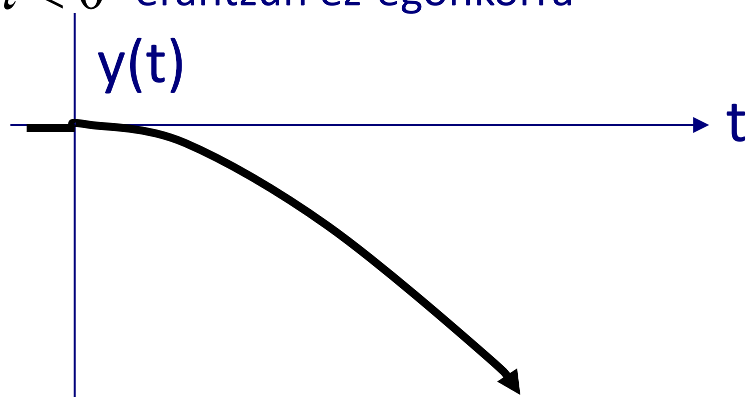


- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **s planoa aztertuz, polo erreal positiboa:** u anplitudeko espaloi-erantzuna

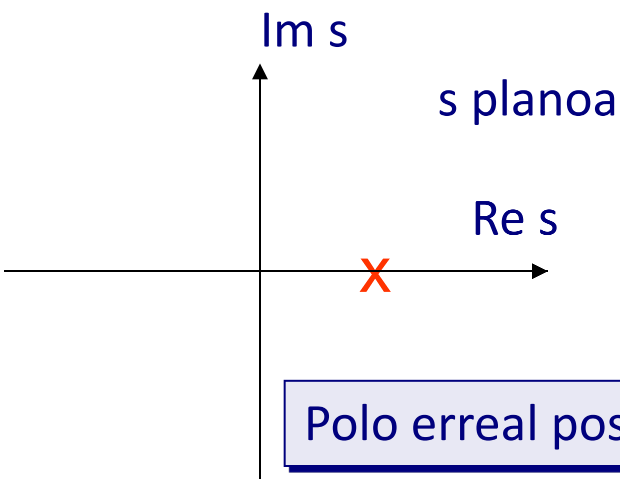
$$\boxed{y(t) = Ku\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \xrightarrow{\pounds}$$



- ☐ $\tau s + 1 = 0$, polo erreala $s = -\frac{1}{\tau}$
- ☐ $\tau < 0$ erantzun ez-egonkorra



Erantzun ez-egonkorra

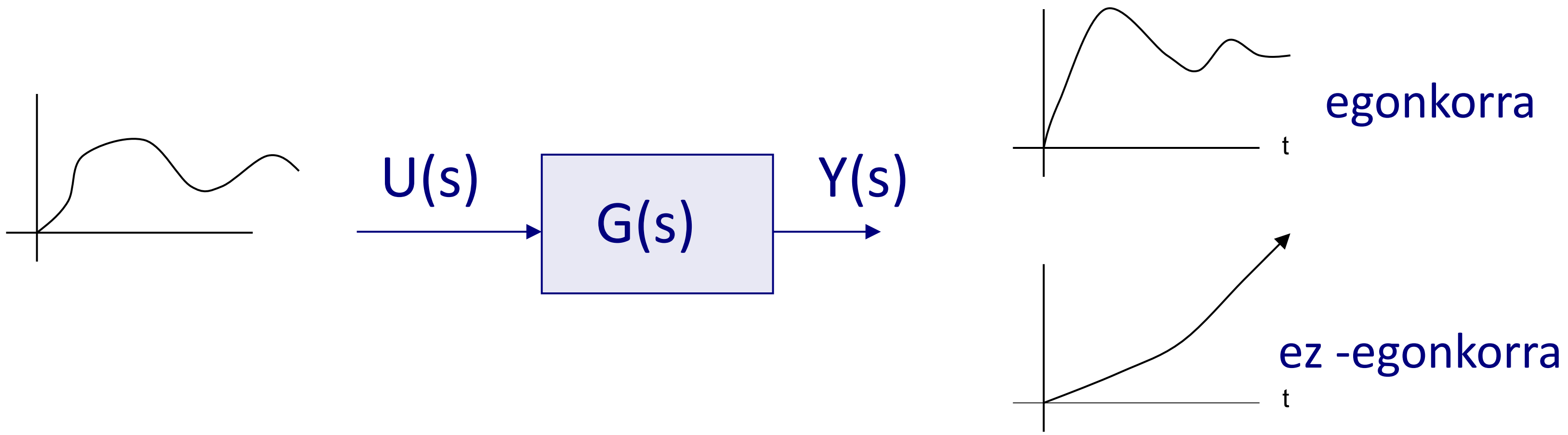


Polo erreal positiboa

Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

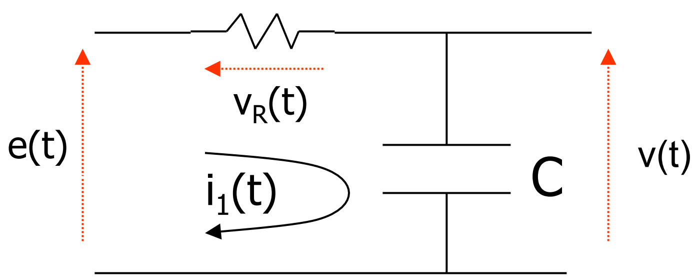
  ✓ BIBO (Bounded Input, Bounded Output) egonkortasunaren kontzeptua



Sistema bat egonkorra da, irteera mugatu bati erantzutean irteera ere mugatuta dagoenean.

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  - ✓ **1 Adibidea: sistema elektrikoa- RC zirkuitua**

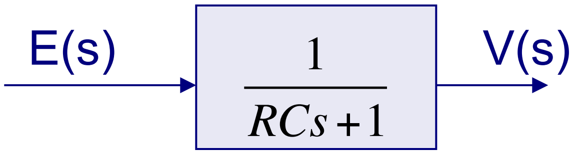


v(t) eta e(t) erlazionatzen dituen eredu matematikoa:

$$\boxed{RC\frac{dv(t)}{dt}+v(t)=e(t)}$$

Laplace-n eraldaketa aplikatuz (h.b. nuluak), bere transferentzi funtzioa lortzen dugu:

$$G(s)=\frac{V(s)}{E(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$



$$\frac{1}{RCs+1}$$

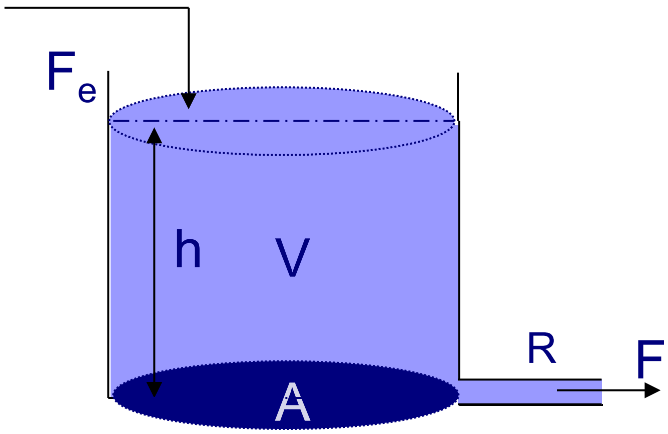
$$\boxed{\tau = RC; K = 1}$$

e(t)-n espaloi-erantzun unitario baten aurrean

$$\boxed{v(t)=1-e^{-\frac{t}{RC}}}$$

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ **1. Ariketa**: Kalkula ezazu, ondorengo bi kasuetan, h(t) irteera eta Fe(t) sarreraren arteko transferentzi funtzioaren parametroen adierazpidea.



- **Fluxu laminarra**

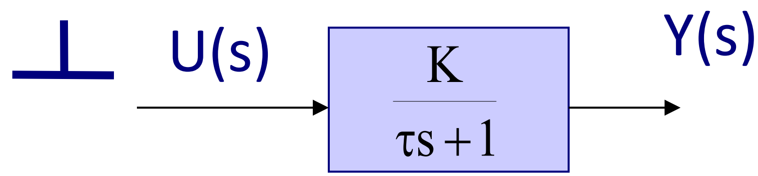
$$\frac{A}{k}\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=\frac{1}{R}F_e(t)$$

- **Fluxu zurrunbilotsua**: O.P.-ren araberako parametroak

$$\frac{2A\sqrt{\bar{h}}}{R}\frac{d\Delta h}{dt}+\Delta h=\frac{2\sqrt{\bar{h}}}{R}\Delta F_e$$

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

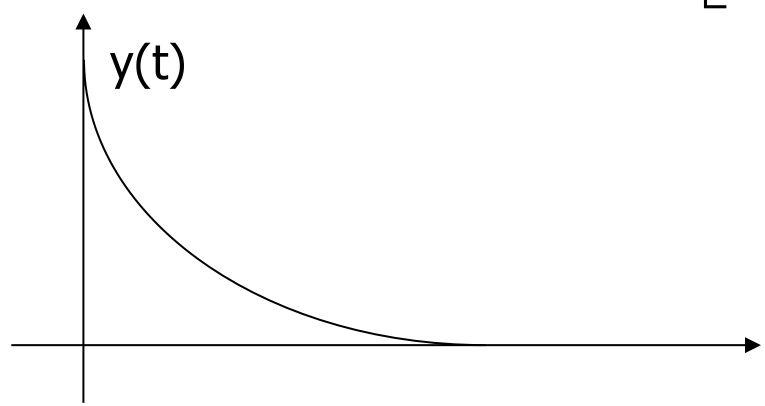
  ✓ **Inpultsu-erantzuna:**



$$U(s) = u$$

$$Y(s) = \frac{K}{(\tau s+1)} u = \frac{K/\tau}{(s+1/\tau)} u \; ; \; y(t) = L^{-1}\left[Y(s)\right] = \frac{Ku}{\tau} L^{-1}\left[\frac{1}{s+1/\tau}\right]$$

$$\boxed{y(t) = \frac{Ku}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

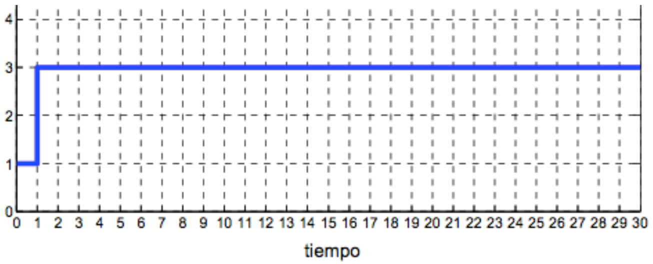


- **Egonkortasuna POLOAREN KOKAPENAK definitzen du, EZ SARRERA MOTA!**

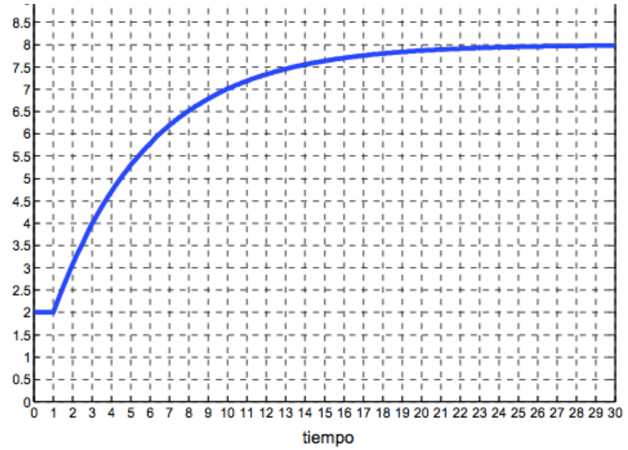
Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ **1. ordeneko sistema baten identifikazio esperimentala espaloi-sarrera baten aurrean.**

espaloi-SARRERA



SISTEMAREN ERANTZUNA

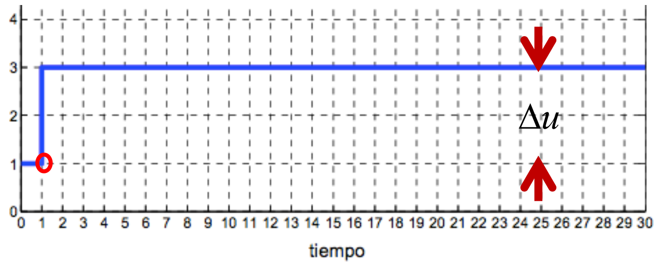


$$¿G(s)?$$

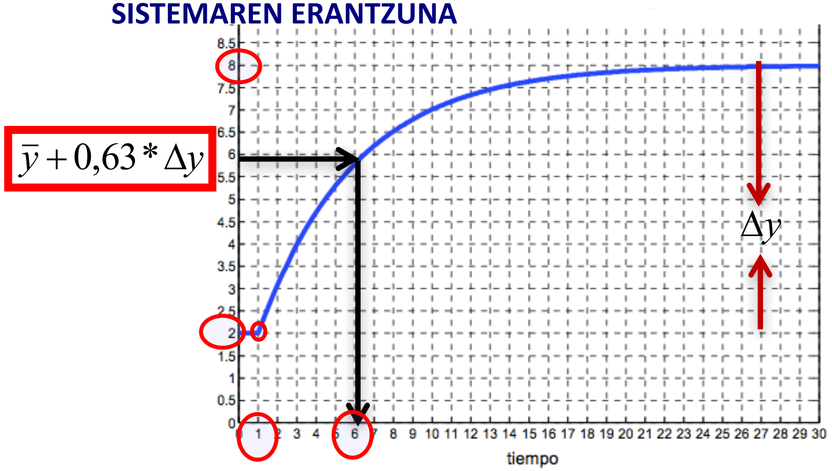
Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

✓ Lehen ordeneko sistema baten identifikazio esperimentala

espaloi-SARRERA



SISTEMAREN ERANTZUNA



- **K** irabazpena da, irteera-aldaketa eta sarrera-aldaketaren arteko erlazioa (egoera egonkorrean)

$$K=\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{8-2}{3-1}=3$$

- **τ denbora-konstantea** da. Grafikotik ateratzen da, amaierako balioaren %63,2-a lortzeko behar den denbora baita.

$$0{,}63*\Delta y=0{,}63*(8-2)=3{,}8$$

$$y_{63}=\bar{y}+0{,}63*\Delta y=2+0{,}63*(8-2)\approx 5{,}8\Rightarrow \tau\approx 5$$

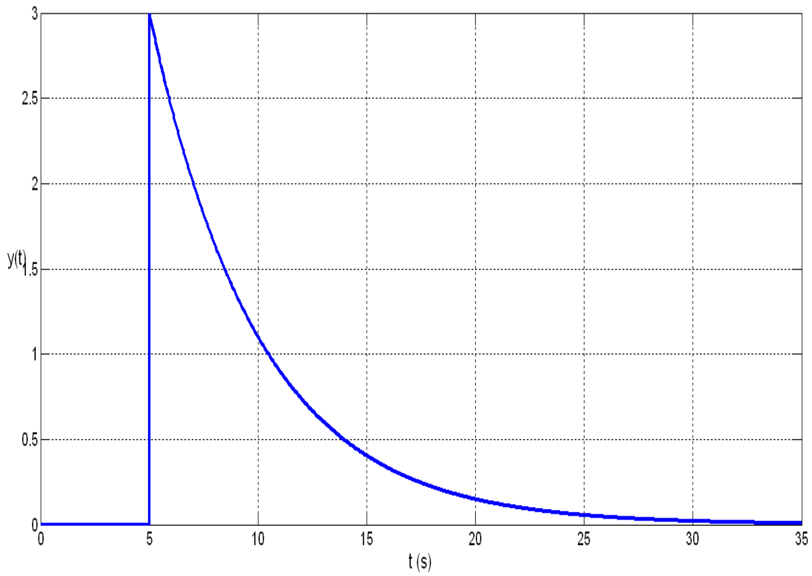
$$G(s)=\frac{3}{5s+1}$$

Denboraren Eremuko Azterketa

Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ Ariketa: Lehen ordeneko sistemen identifikazio esperimentala

Hurrengo grafikoan, 2 anplitudeko inpultsu baten aurrean sistema batek ematen duen irteera dugu. Aurkitu zein den bere G(s).



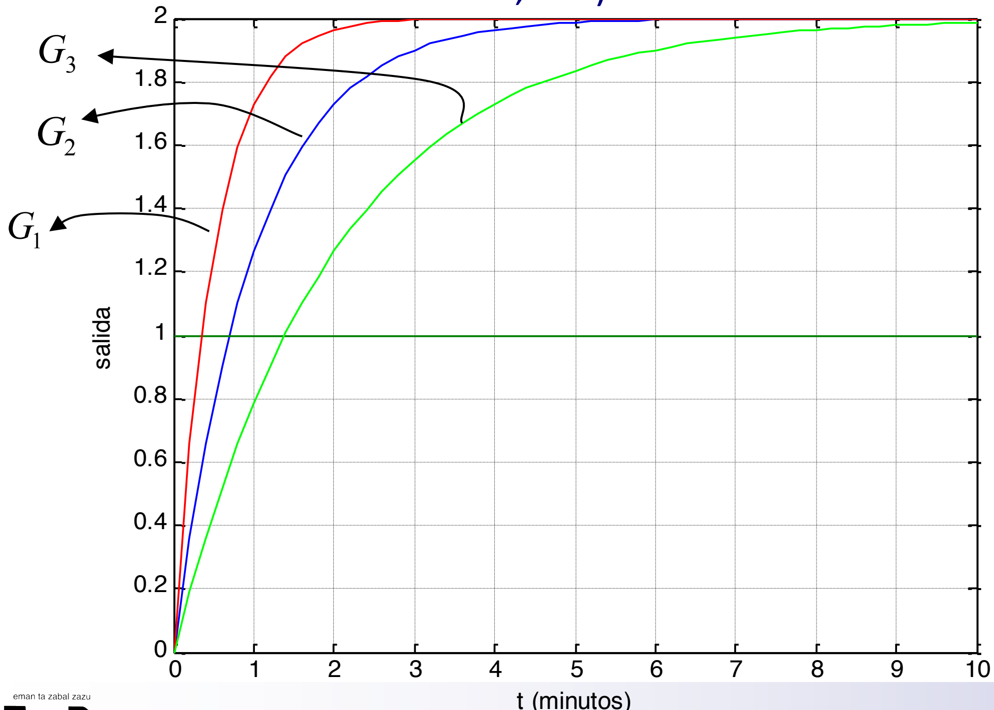
- irteerak t=0 unean duen balioaren arabera **K** kalkula dezakegu (u=2 kasu honetan):

$$y(t) = u\,\frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow y(0) = u\,\frac{K}{\tau}$$

- τ denbora-konstantea da, irteeraren amaierako balioaren %63,2 lortzeko behar duen denbora.

Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Irabazpen estatiko (K) berdina eta denbora-konstante ezberdina (τ) duten sistemak**
    - Denak egoera egonkor bera dute, $y_{ss} = Ku$
    - Zenbat eta txikiagoa izan τ, hainbat eta azkarragoa izango da sistema (azkarrago heltzen da %63,2-ra)



$$y(t) = Ku\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$G_1(s) = \frac{2}{0.5s+1};\ poloa \to \quad s = -\frac{1}{\tau} = -2$$

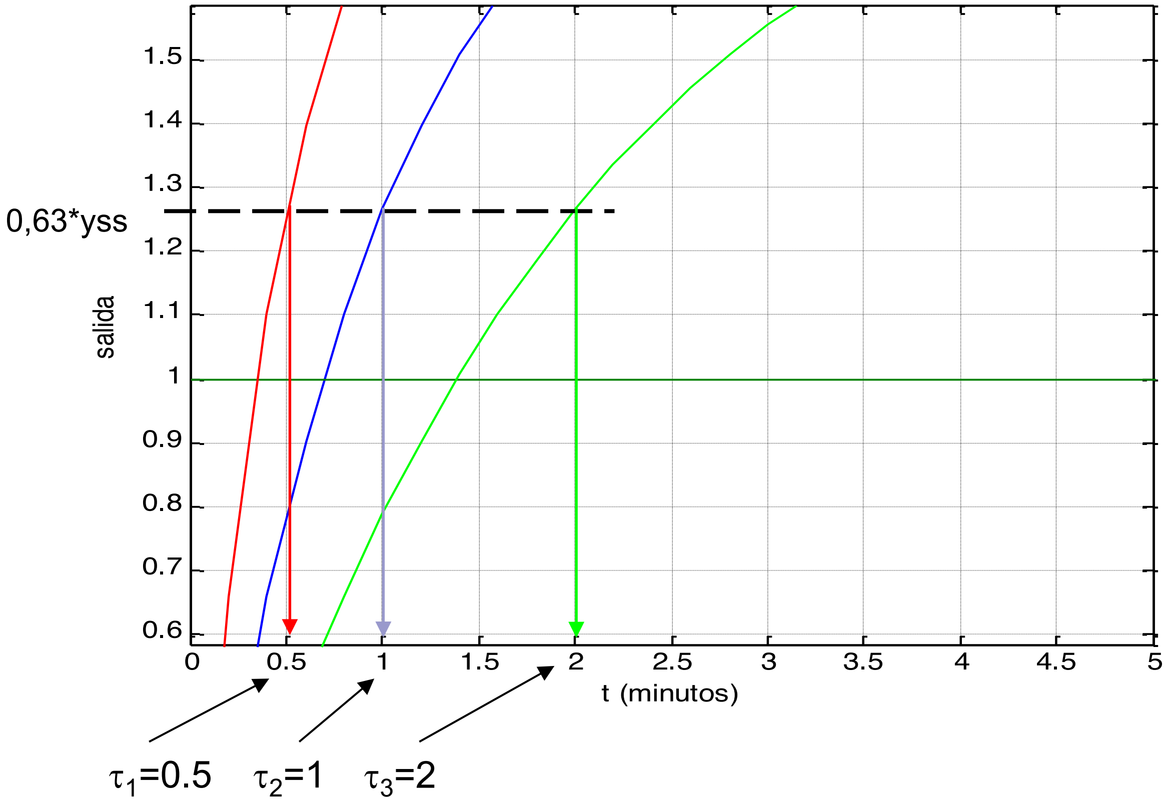
$$G_2(s) = \frac{2}{s+1};\ poloa \to \quad s = -\frac{1}{\tau} = -1$$

$$G_3(s) = \frac{2}{2s+1};\ poloa \to \quad s = -\frac{1}{\tau} = -0.5$$

1. Sistema azkarrena da
3. Sistema motelena da

Denboraren Eremuko Azterketa

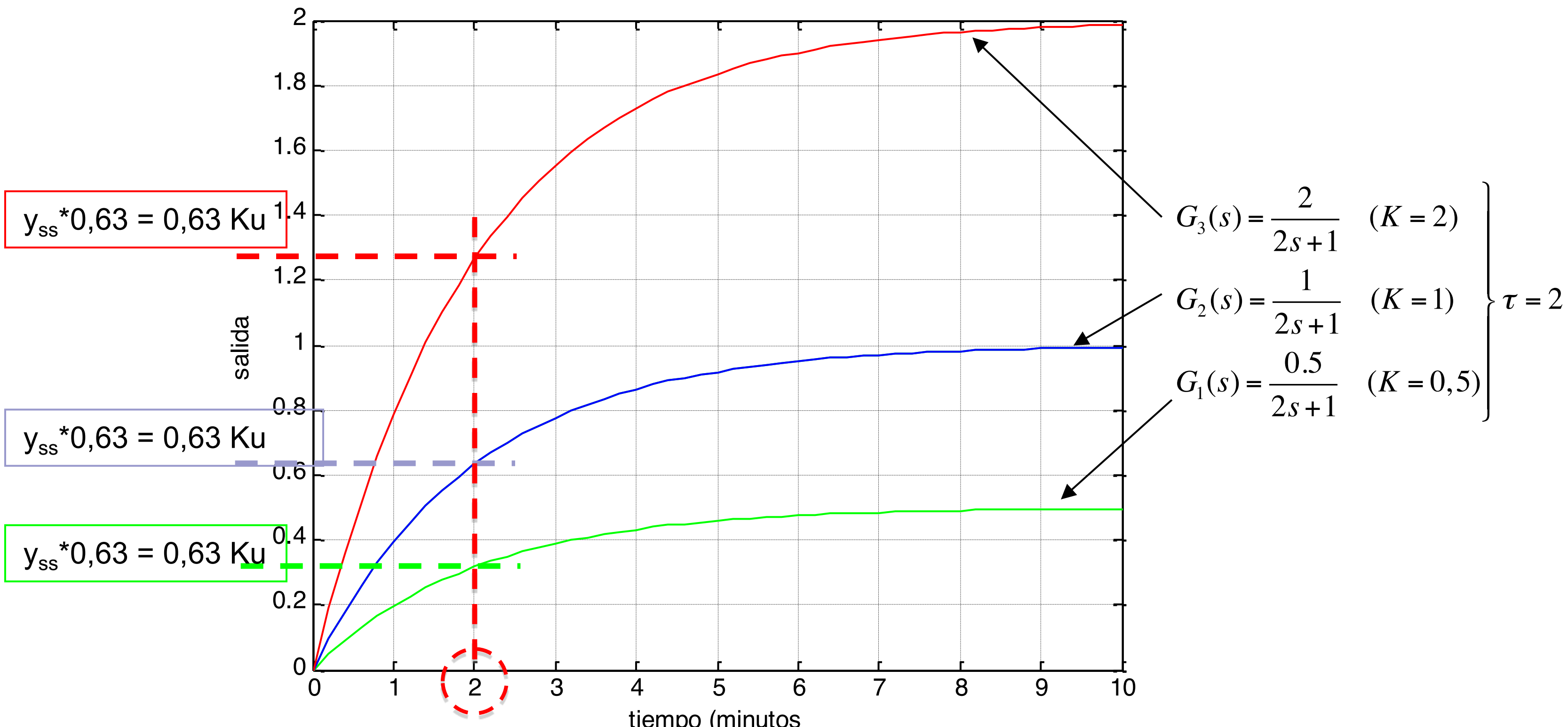
- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Irabazpen estatiko (K) berdina eta denbora-konstante ezberdina (τ) duten sistemak**



$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

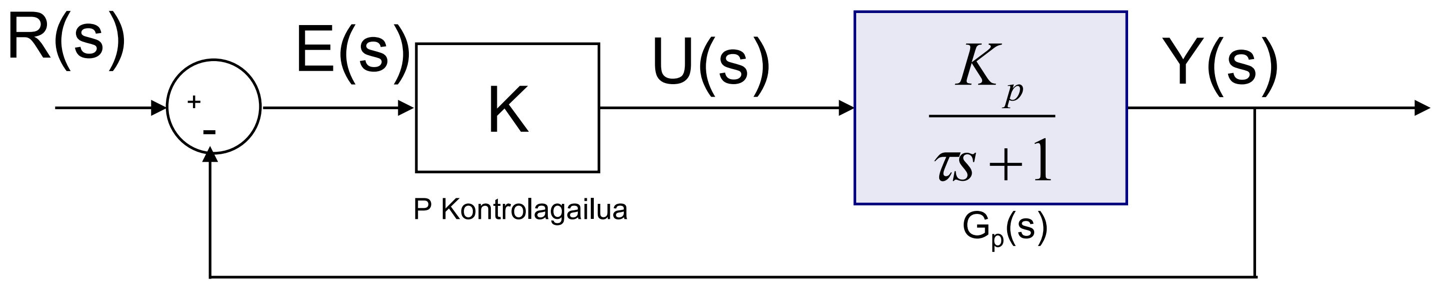
- τ denbora-konstantea poloaren kokapenaren araberakoa da.
- Zenbat eta hubilago egon ardatz irudikaritik, gero eta handiagoa izango da τ motelagoa sistema.

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Denbora-konstante berdina baina irabazpen estatiko ezberdina duten sistemak**
    - **Azkartasun bera baina doitasun ezberdina**



Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Berrelikaduraren eragina (K irabazpen aldakorra➔P kontrolagailua)



$$G_{BC}(s)=\frac{K\,G_p(s)}{1+K\,G_p(s)} \longrightarrow G_{BC}(s)=\frac{\dfrac{KK_p}{1+\tau\cdot s}}{1+\dfrac{KK_p}{1+\tau\cdot s}}=\frac{\dfrac{KK_p}{1+KK_p}}{1+\dfrac{\tau}{1+KK_p}s} \longrightarrow$$

$$K'=\frac{KK_p}{1+KK_p}$$

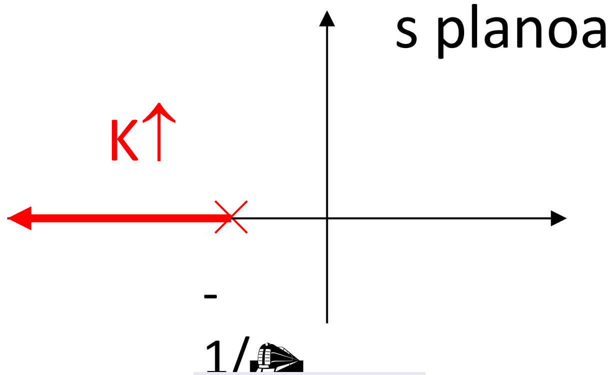
$$\tau'=\frac{\tau}{1+KK_p}$$

- ☐ Ekuazio karakteristikoa: $1 + K\,G_p(s) = 0$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Berrelikaduraren eragina (K irabazpen aldakorra ➔ P kontroladorea)
    - ☐ Ekuazio karakteristikoa: *1 + K Gp(s) = 0*

$$\boxed{1+K\frac{K_p}{1+\tau s}=0 \;\Rightarrow\; s=-\frac{1+KK_p}{\tau}}$$



- ☐ Irabazpen berria 1 baino handiagoa da eta K-rekin handitzen da.
- ☐ Denbora-konstante berria K-rekin txikitzen da.

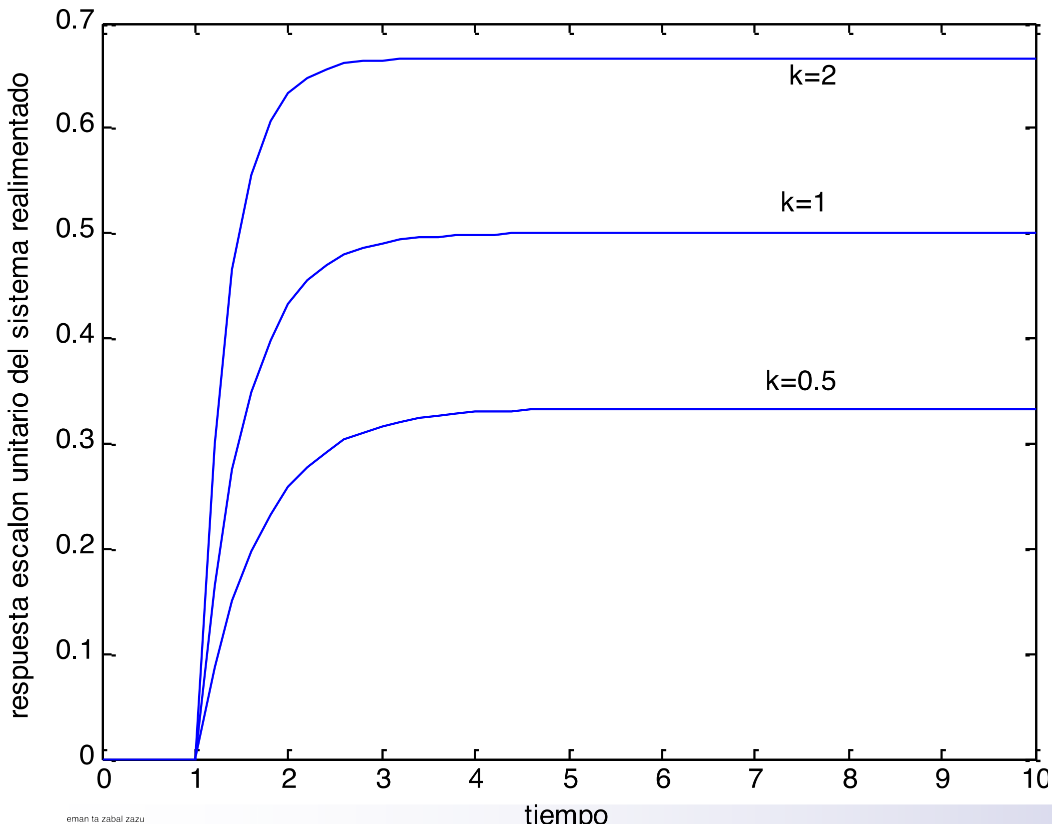
$$K'=\frac{KK_p}{1+KK_p}$$

$$\tau'=\frac{\tau}{1+KK_p}$$

➔ K handitzean sistema azkarragoa eta doitasun handiagokoa da

Denboraren Eremuko Azterketa

- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Berrelikaduraren eragina (K irabazpen aldakorra ➔ P kontroladorea)



- Zenbat eta haundiagoa izan K (ez da inoiz ezegonkortzen):
  - ✓ Sistema berrelikatuaren irabazpena 1-era hurbiltzen da
  - ✓ Sistema berrelikatua gero eta azkarragoa da.
  - ✓ Muga: Eragingailuaren asetasuna

Denboraren Eremuko Azterketa

- Ariketak

  ✓ **2. Ariketa:**

  Termometro batek 60s behar ditu gorputz baten tenperatura neurtzeko. Lehen ordeneko sistema bat dela emanez, kalkulatu bere G(s)-a %2ko irizpidea erabiliz.

  ✓ **3. Ariketa:**

  Marraztu ondorengo sistemen espaloi erantzuna, euren parametro esanguratsuak adieraziz:

$$G(s)=\frac{5}{s+2{,}5} \qquad G(s)=\frac{s+2}{s+1} \qquad G(s)=\frac{-1}{2s+1}$$

  ✓ **4. Ariketa:**

  Sistema baten inpultsu-erantzuna ezaguna da. Zein da transferentzi funtzioa?

$$y(t)=5-5e^{-t}$$

Denboraren Eremuko Azterketa

Aurkibidea:

- Froga-seinaleak
- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
- **Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna**
- Goi ordena sistemen denbora-erantzuna

Denboraren Eremuko Azterketa

Aurkibidea:

- **Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna**
  - **Sistemen Parametroak**
  - **Poloen kokapena s planoan**
  - **Espaloi-erantzuna**
  - **Inpultsu-erantzuna**
  - **Irteeraren balio esanguratsuak**
  - **Identifikazio esperimentala**
  - **Berrelikaduraren eragina**

Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

✓ Bigarren ordeneko sistema baten eredu matematikoa:

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\delta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t)}$$

- Orokorrean, eredu hau desbideratze-aldagaietan definituta egongo da. Hortaz, sistema OP-tik abiatzen bada, hasierako baldintza nuluak izango dira.

- Laplace-n eraaldaketa ezarriz (hasierako baldintza nuluak):

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow Y(s)$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ **Sistemaren Parametroak**

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K.\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

(zerorik gabe)

Parametroak

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{K} & \textbf{Irabazpen estatikoa [Y unit./U unit.]} \\ \boldsymbol{\delta} & \textbf{Moteldura-koefizientea [ez du unitaterik]} \\ \boldsymbol{\omega_n} & \textbf{Maiztasun naturala [rad/s]} \end{array}\right.$$

Moteldurarik ez duenean, sistemak maiztasun honetan oszilatzen du.

- Sistemaren poloak: $s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2=0$

$$s_{1,2}=-\delta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\delta^2-1}$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ **Poloen kokapena δ-ren arabera:**

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow s = -\delta\omega_n \pm \sqrt{\delta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

$\omega_n > 0$

$\delta = 0$ → **POLO IRUDIKARIAK**
$s = \pm j\omega_n$

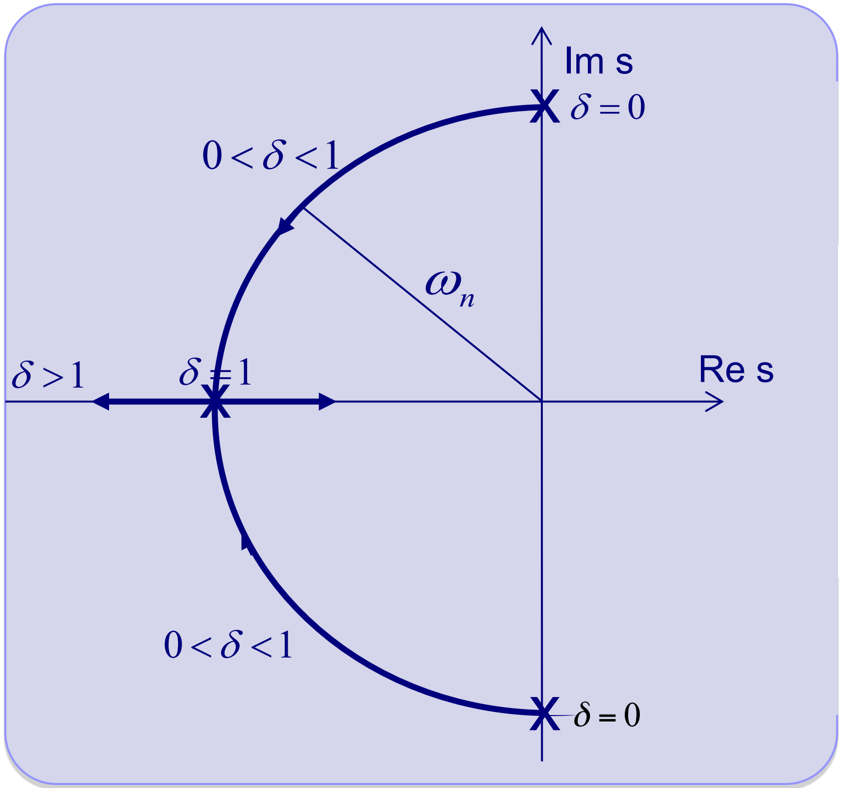
$\delta = 1$ → **POLO ERREAL BIKOITZA**
$s_{1,2} = -\omega_n$

$0 < \delta < 1$ → **POLO KONPLEXU KONJOKATUAK**
$s_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$

$\delta > 1$ → **POLO ERREALAK** $s_1 = -\delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$
$s_2 = -\delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$

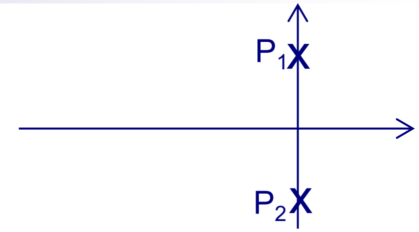
$\delta < 0$ → **ZATI ERREALA DUTEN POLOAK→ EZ-EGONKORRA**

Denboraren Eremuko Azterketa



$\delta = 0$

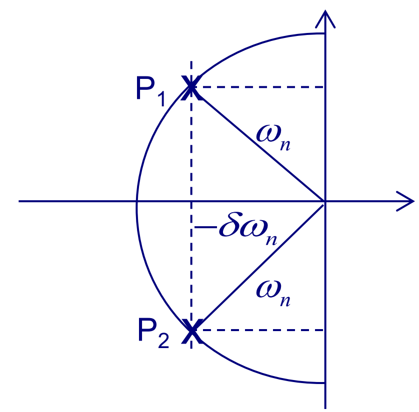
$$p_1 = +j\omega_n$$
$$p_2 = -j\omega_n$$



Kritikoki egonkorra

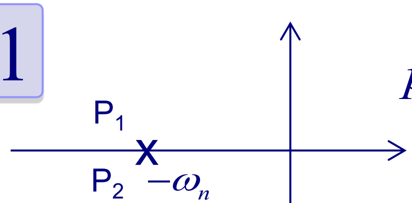
$0 < \delta < 1$

$$p_1 = -\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$
$$p_2 = -\delta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$



azpimoteldua

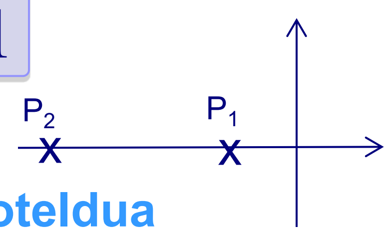
$\delta = 1$



$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$

Kritikoki moteldua

$\delta > 1$



$$p_1 = -\delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$
$$p_2 = -\delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

gainmoteldua

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi-erantzuna**

$$u \quad \xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}} \xrightarrow{Y(s)} \qquad Y(s)=G(s)\cdot U(s)$$

$0<\delta<1$ **AZPIMOTELDUA**

$$Y(s)=Ku\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2\delta\omega_n}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}\right)=Ku\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\delta\omega_n}{(s+\delta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\delta^2)}-\frac{\delta\omega_n}{(s+\delta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\delta^2)}\right)$$

Gogoratu: $\left\{ L^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right]=e^{-at}cosbt \qquad L^{-1}\left[\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right]=e^{-at}senbt \right.$

$$y(t)=Ku\left[1-e^{-\delta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t\right)-\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t\right)\right]$$

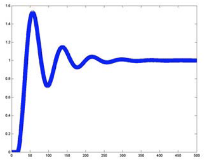
$$y(t)=\underbrace{Ku}_{y_{ss}(t)}\left[1-\underbrace{\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[\sqrt{1-\delta^2}.\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\;t\right)+\delta.sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\;t\right)\right]}_{y_t(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0}\right]$$

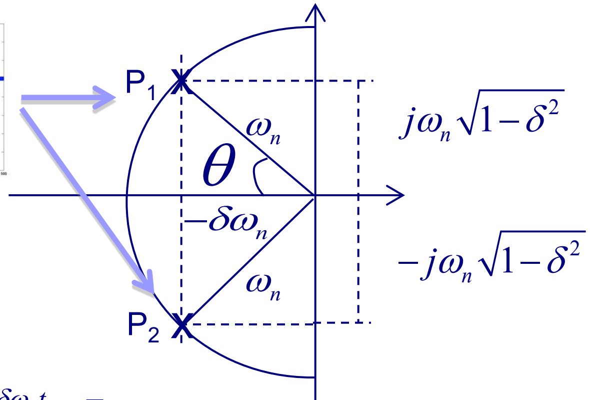
Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi-erantzuna**

$0<\delta<1$ **AZPIMOTELDUA**

$$y(t)=Ku\left[1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[\sqrt{1-\delta^2}.\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)t+\delta.sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)t\right]\right]$$





$$\begin{cases} sen\theta=\sqrt{1-\delta^2} \\ \cos\theta=\delta \\ tg\theta=\dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \end{cases} \rightarrow \theta=arctg\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

$$y(t)=Ku\left[1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[sen\theta.\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)t+\cos\theta.sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)t\right]\right]$$

$$\boxed{y(t)=Ku\left[1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[sen\left(\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)t+arctg\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)\right]\right]}$$

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ → moteldutako maiztasuna

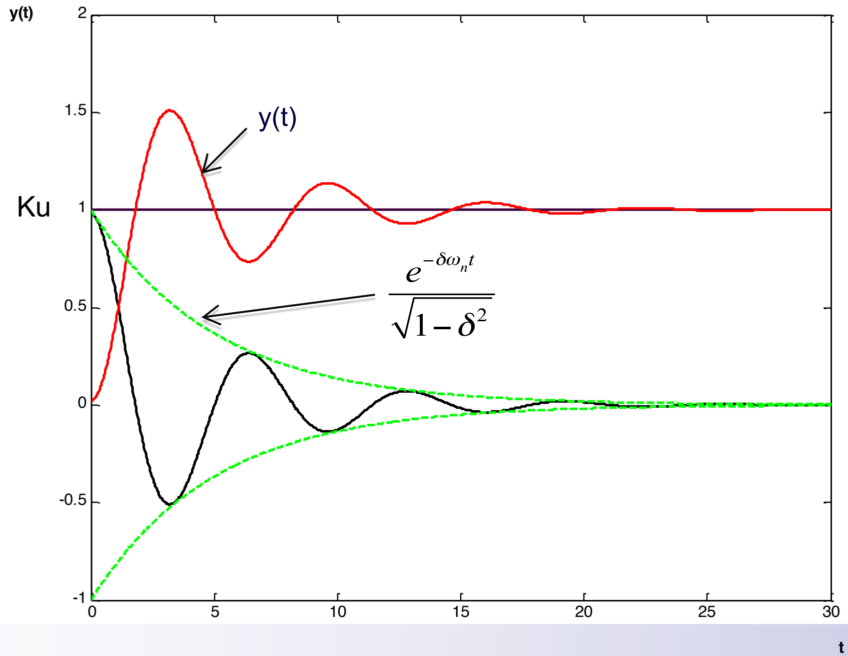
Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi-erantzuna**

$0 < \delta < 1$ **AZPIMOTELDUA**

$$y(t) = Ku\left[1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[sen\left(\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)t + \theta\right)\right]\right]$$

$$\theta = arctg\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$



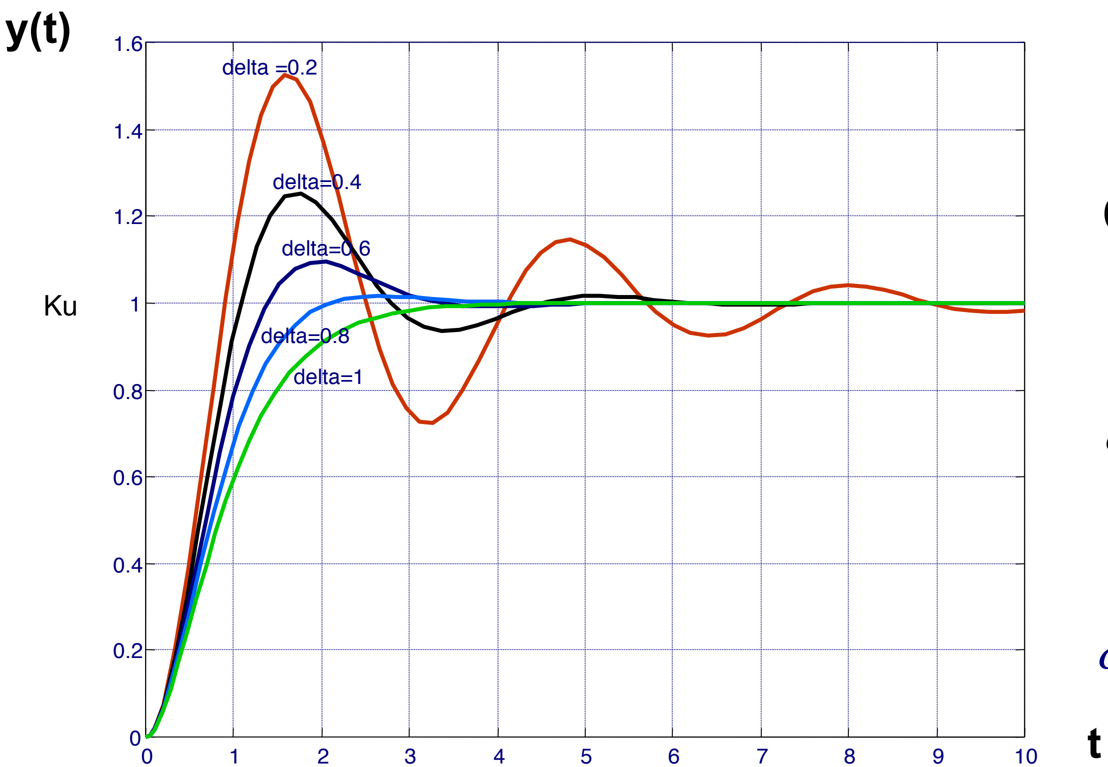
$y_{ss}(t \to \infty) = Ku$

Erantzun oszilatorio moteldua

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi erantzuna**

$0 < \delta < 1$ **AZPIMOTELDUA**



$0{,}2 < \delta < 0{,}8$ → **Erantzun oszilatorioa**

$\delta \geq 0{,}8$ → **Ez du oszilatzen (gain-inpultsua)**

$\delta \geq 1$ → **Gain-inpultsurik ez (bi polo erreal)**

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

$0 < \delta < 1$ **AZPIMOTELDUA**

Egoera iraunkorreko irteera (y_{ss})
Sarreraren gehikuntzarekin bat handitzen da. Irabazpen estatikoak definitzen du.

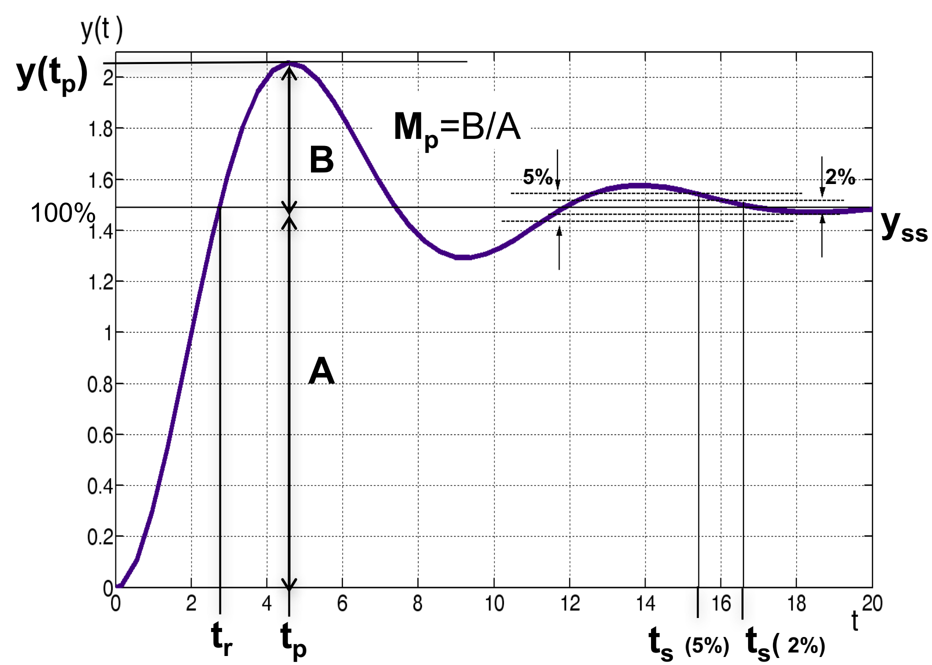
Igoera-denbora (t_r)
Amaierako baliora Lehen aldiz heltzeko behar den denbora da.

Punta-denbora (t_p)
Gaindiketa maximora heltzeko behar den denbora.

Gaindiketa (M_p)
Egoera iraunkorreko irteerarekiko dugun irteeraren balio maximoa (% tan)

$$M_p = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} x100 \quad \%$$

Egonkortze-denbora (t_s)
Egoera iraunkorrera heltzeko behar den denbora. %2 edo %5eko irizpideak erabil daitezke.

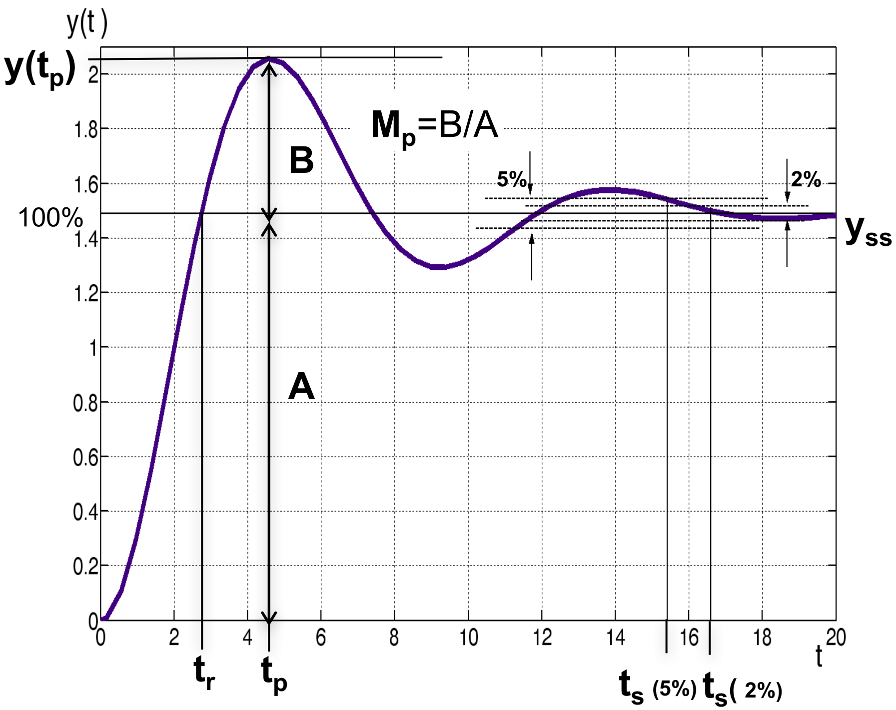


Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

$0 < \delta < 1$ **AZPIMOTELDUA**



✓ **t_r, igoera-denbora:**

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - arctg\,\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

✓ **t_p, punta-denbora:**

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

✓ **Mp: gaindiketa maximoa**

$$M_p = \frac{B}{A} = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \quad \text{en } \%$$

✓ **t_s: egonkortze-denbora**

$$t_s = \frac{4}{\delta\omega_n}$$

%2 irizpidea

$$t_s = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

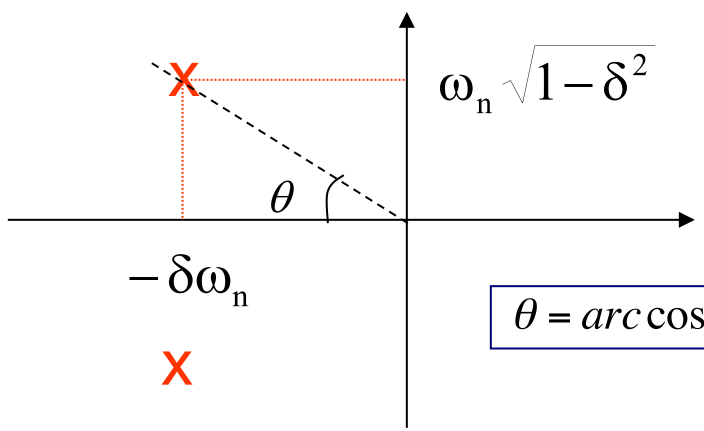
%5 irizpidea

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak** $\boxed{0<\delta<1}$

Poloak: $-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ ⟶ $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ Maiztasun moteldua (poloen zati irudikaria)

Polo konplexu konjokatuak, zati erreal negatiboa



$\boxed{\theta = arc\cos\delta}$

✓ τ: **kurba inguratzailearen denbora ktea.**

$\boxed{\tau = 1/\delta\omega_n}$ Poloen zati errealaren alderantzizkoa

✓ **t_p : punta-denbora**

$\boxed{t_p = \pi/\omega_d}$ Poloen zati irudikariaren alderantzizkoa

✓ **M_p : Gaindiketa** δ

Poloen angeluen araberakoa da, θ, moteldura koefizienteak definitutakoa $\boxed{\theta = ar\cos\delta}$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

$$\boxed{0<\delta<1}$$

✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

IGOERA-DENBORA (tr)

espaloi-erantzunetik abiatuta: $y(t)=Ku\left[1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[\sqrt{1-\delta^2}.\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\;t\right)+\delta.sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t\right)\right]\right]$

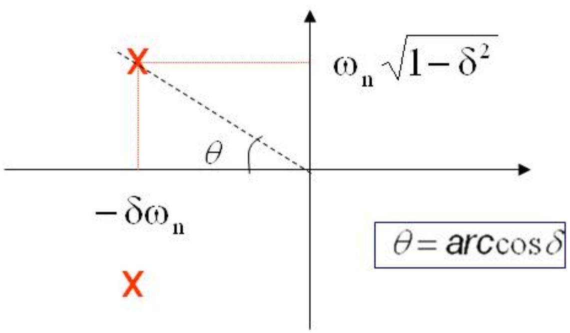
$$y(t_r)=Ku=Ku\left[1-\frac{e^{-\delta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[\sqrt{1-\delta^2}.\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\;t_r\right)+\delta.sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t_r\right)\right]\right]$$

$$\downarrow e^{-\delta\omega_n t_r}\neq 0$$

$$\sqrt{1-\delta^2}.\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\;t_r\right)+\delta.sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t_r\right)=0$$

$$\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t_r\right)+\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}.sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t_r\right)=0$$

$$tg(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t_r)=-\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\rightarrow tg(\omega_d t_r)=-tg\theta\rightarrow\omega_d t_r=\pi-\theta$$



$$\boxed{t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}=\frac{\pi-arctg\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}}$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Denboraren Eremuko Azterketa

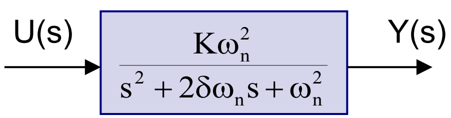
- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

$$0<\delta<1$$

punta-denbora (t_p), GAINDIKETA (M_p)

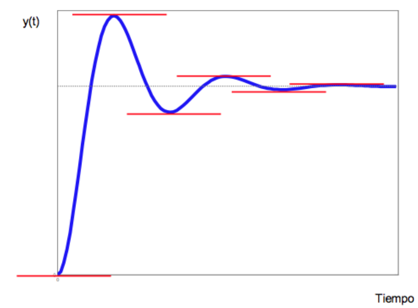
Espaloi-erantzunetik abiatuta:

$$y(t)=Ku\left(1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t+arctg\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)\right]\right)$$



$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$ Maiztasun moteldua

$$y(t)=Ku\left(1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[sen(\omega_d t+\theta)\right]\right)$$

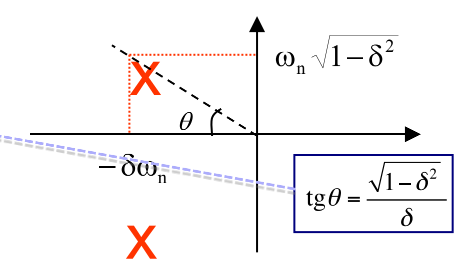


y(t) deribatuz eta 0-ra berdinduz, Lehen maximoa kalkula dezakegu:

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ku\left(\frac{\delta\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}sen(\omega_d t+\theta)-\omega_d\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\cos(\omega_d t+\theta)\right)=0$$

$$\delta sen(\omega_d t+\theta)=\sqrt{1-\delta^2}\cos(\omega_d t+\theta)\;\Rightarrow\; tg(\omega_d t+\theta)=\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

Baina, $tg\theta=\dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\;\xrightarrow{tg(\theta+\pi)=tg\theta}\;\omega_d t=n\pi\quad(n=1,2,3,\ldots)$



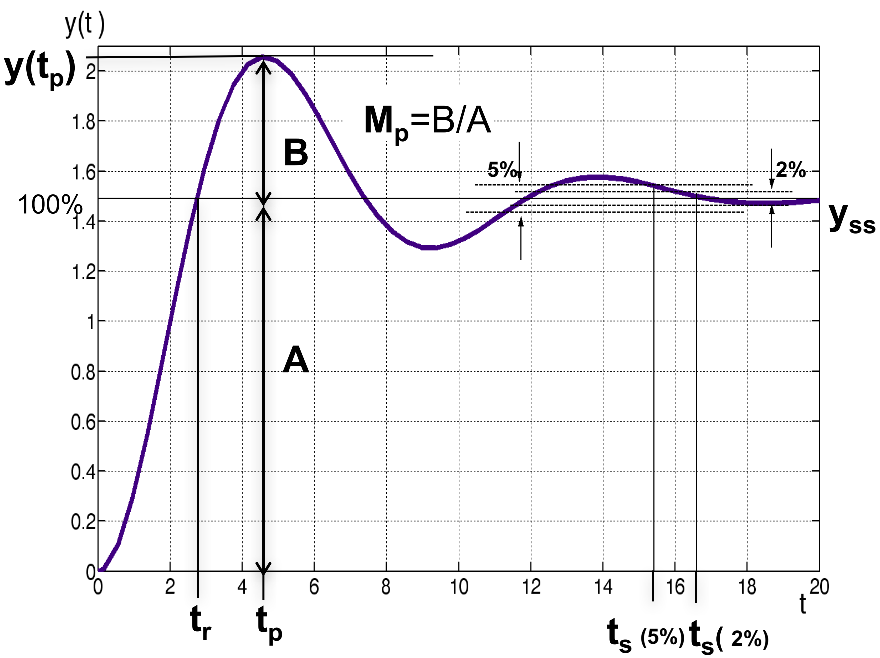
Hortaz, Lehen maximoa: $\omega_d t=\pi$

punta-denbora $\Rightarrow$ $$\boxed{t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

Punta-denbora (t_p), GAINDIKETA (M_p)



Gaindiketa

$$M_p = \frac{B}{A} \rightarrow \boxed{M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}}$$

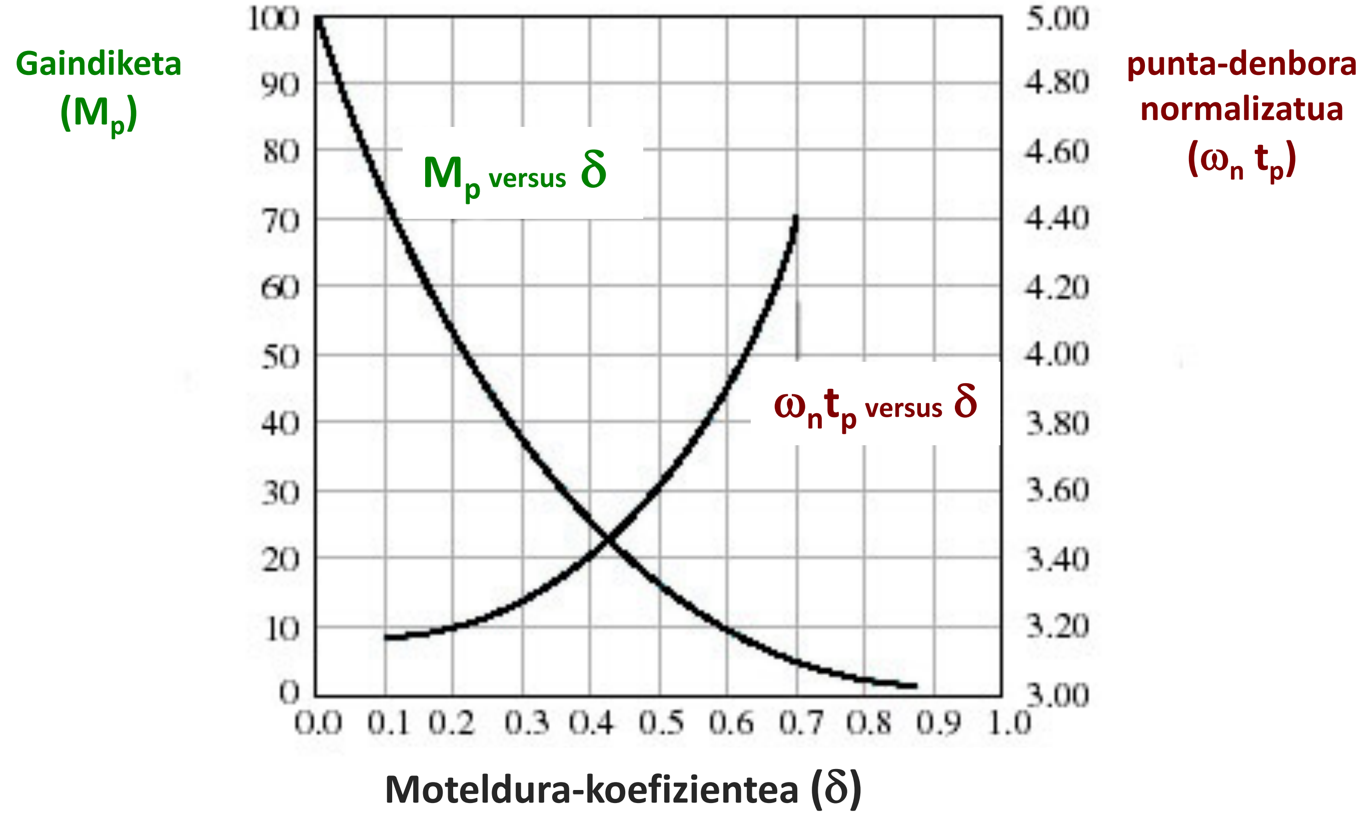
- **6. Ariketa:** Froga ezazu:

$$\boxed{M_p = e^{-\pi\delta / \sqrt{1-\delta^2}}}$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

Moteldura-koefizientea handitzean, punta-denbora handitu eta gaindiketa txikitzen da.



Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

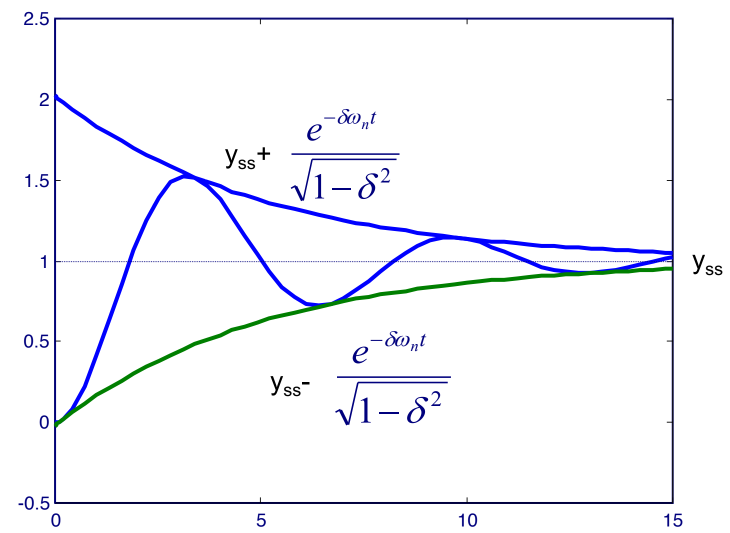
$0 < \delta < 1$

egonkortze-denbora (t_s)

$$y(t) = Ku\left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[sen\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + arctg\,\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)\right]\right)$$

$$\left.\begin{matrix} 1+\dfrac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ 1-\dfrac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \end{matrix}\right\}$$

Kurba inguratzaileak (esponentzialak).



- **Kurba inguratzaileen denbora-konstantea:**

$$1/\delta\omega_n$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Erantzunaren balio esanguratsuak**

$$0 < \delta < 1$$

egonkortze-denbora (t_s)

Egonkortze-denboraren balioa poloen zati errealen menpekoa da. Horien gutxi gora-beherako kalkulua egiteko ondorengo bi irizpide erabili ahal dira:

% 2

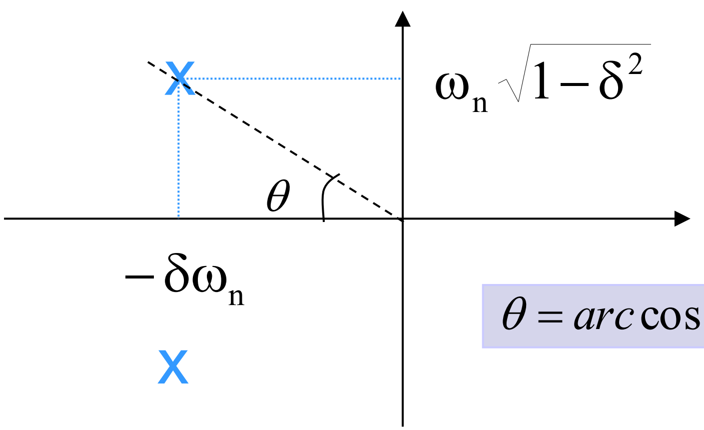
$$\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \leq 0{,}02 \longrightarrow \text{Hurbilketa} \quad e^{-\delta\omega_n t} \leq 0{,}02$$

$$-\delta\omega_n t_s = \ln 0{,}02 \longrightarrow \boxed{t_s = \frac{4}{\delta\omega_n}}$$

% 5

$$\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \leq 0{,}02 \longrightarrow \text{Hurbilketa} \quad e^{-\delta\omega_n t} \leq 0{,}05$$

$$-\delta\omega_n t_s = \ln 0{,}02 \longrightarrow \boxed{t_s = \frac{3}{\delta\omega_n}}$$

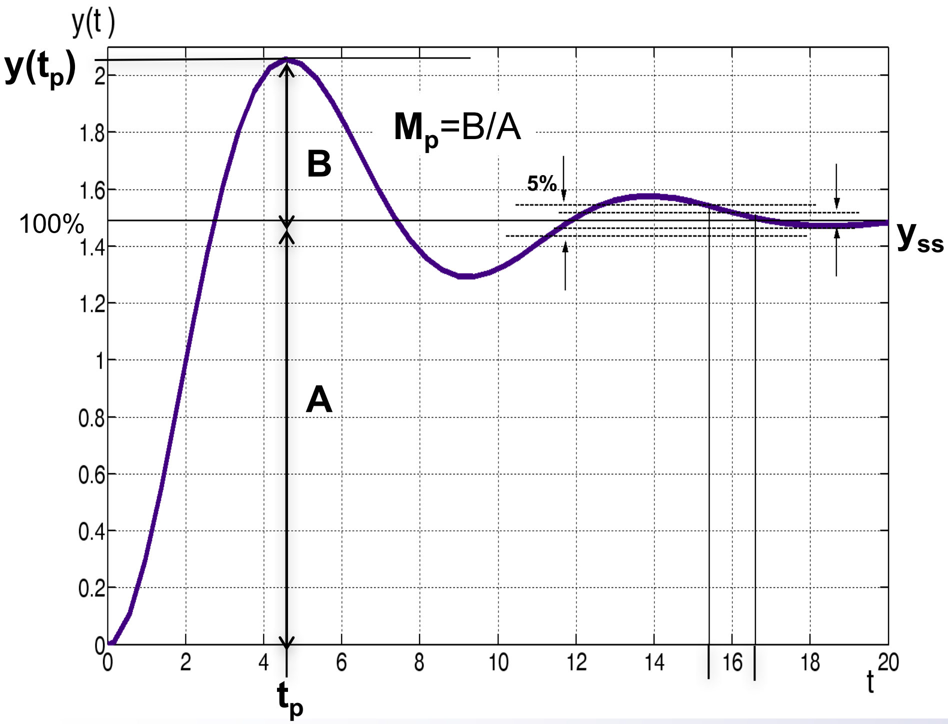


$$\theta = arc\cos\delta$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Identifikazio esperimentala espaloi-erantzunan oinarrituta**

$$0 < \delta < 1$$



- ✓ **Mp gaindiketan oinarrituta, moteldura-koefizientea kalkula dezakegu:**

$$M_p = \frac{B}{A} = 100e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \quad \text{en} \quad \%$$

- ✓ **t_p punta-denboran oinarrituta eta moteldura-koefizientea δ kalkulatuta, ω_n lor dezakegu**

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

- ✓ **Irabazpen estatikoaren kalkulua:**

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

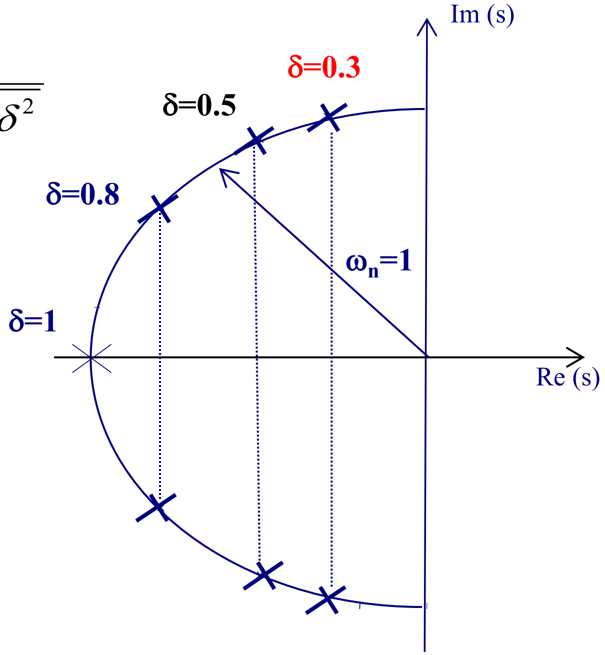
Denboraren Eremuko Azterketa

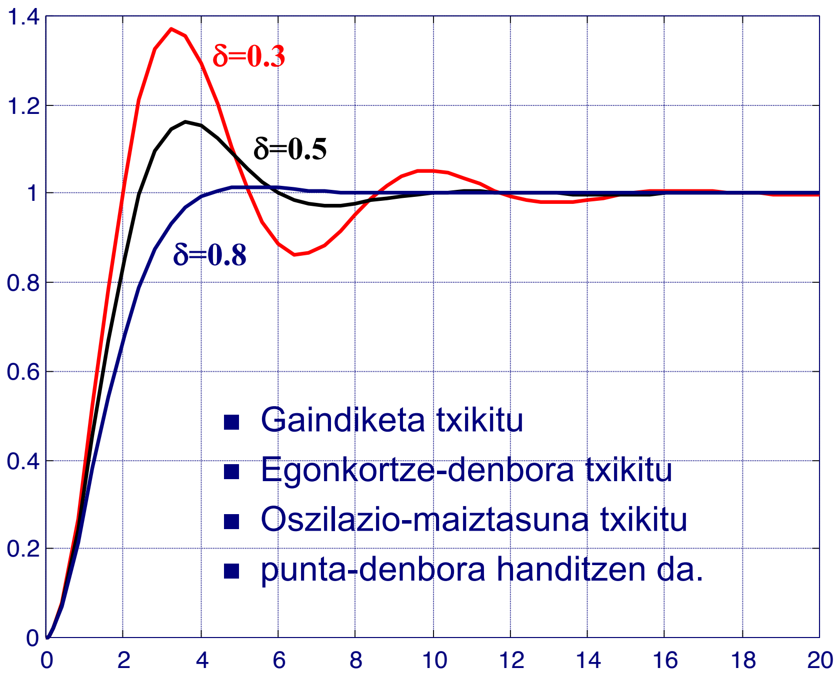
- ω_n **konstantea duten bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna**

ω_n **= cte** $\Rightarrow$ si $\delta\uparrow \Rightarrow M_p\downarrow$, $t_s\downarrow$ y $t_p\uparrow$, K=cte bada, doitasun bera

$$M_p = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$



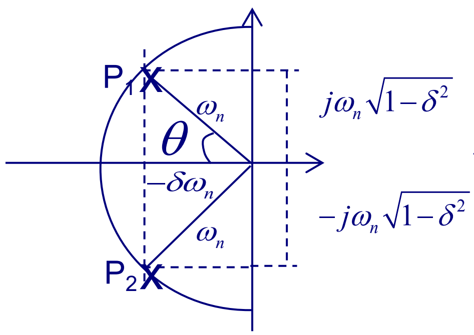


- Gaindiketa txikitu
- Egonkortze-denbora txikitu
- Oszilazio-maiztasuna txikitu
- punta-denbora handitzen da.

Nagore Iriondo, Asier Zubizarreta, Marga Marcos, Itziar Cabanes

- **δ konstantea duten bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna**

$$0<\delta<1$$

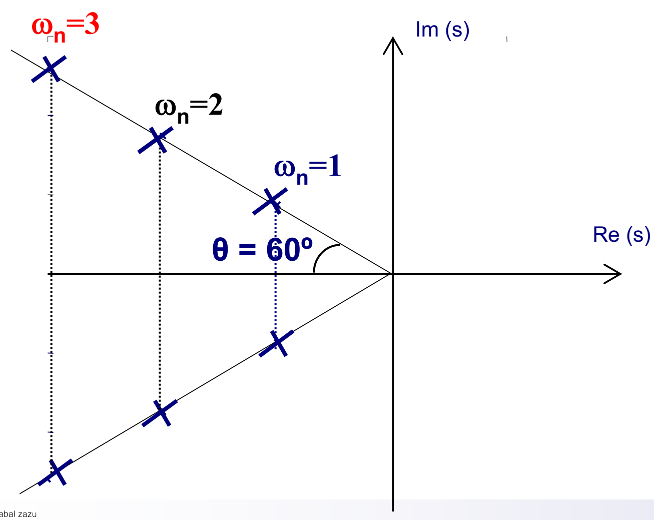


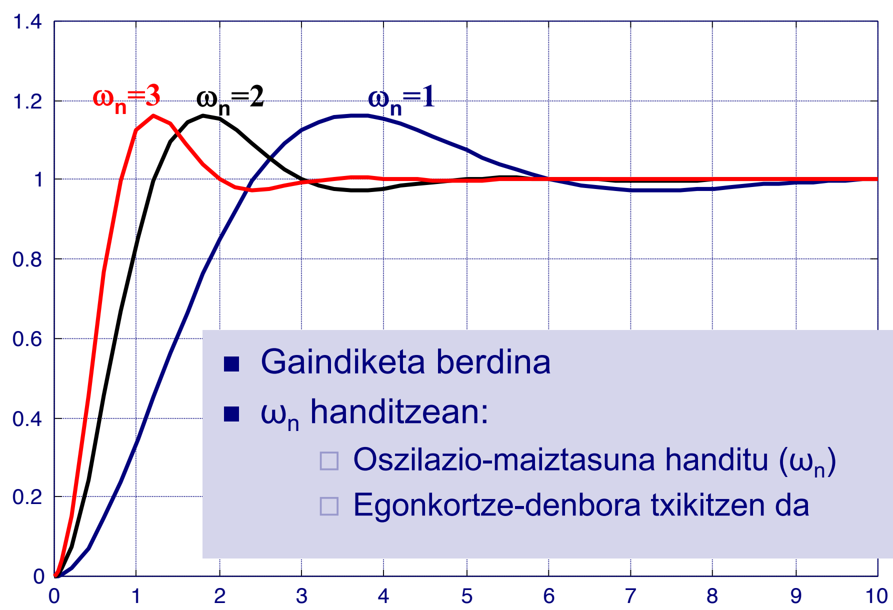
$$\begin{cases} sen\theta=\sqrt{1-\delta^2} \\ \cos\theta=\delta \\ tg\theta=\dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \end{cases}$$

K=kte bada→doitasun bera

$$\delta=cte \quad\Rightarrow \begin{cases} \theta=cte \\ M_p=cte \\ \omega_n\uparrow\Rightarrow t_s,\downarrow \omega_d\uparrow, t_p\downarrow \end{cases}$$

δ=0.5



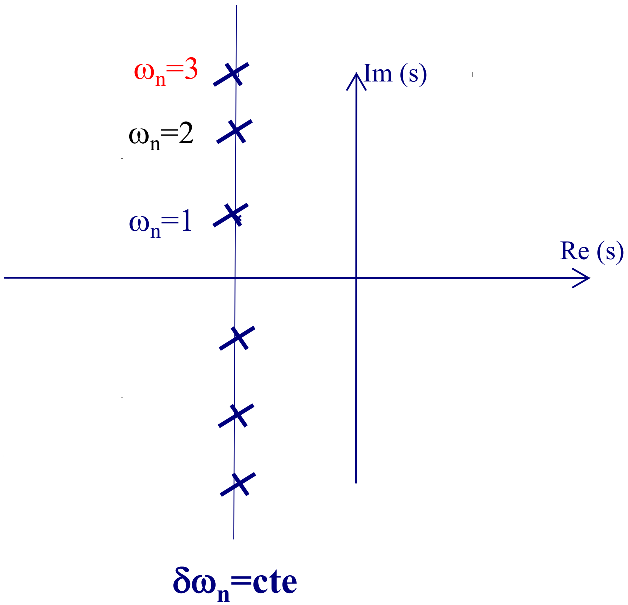


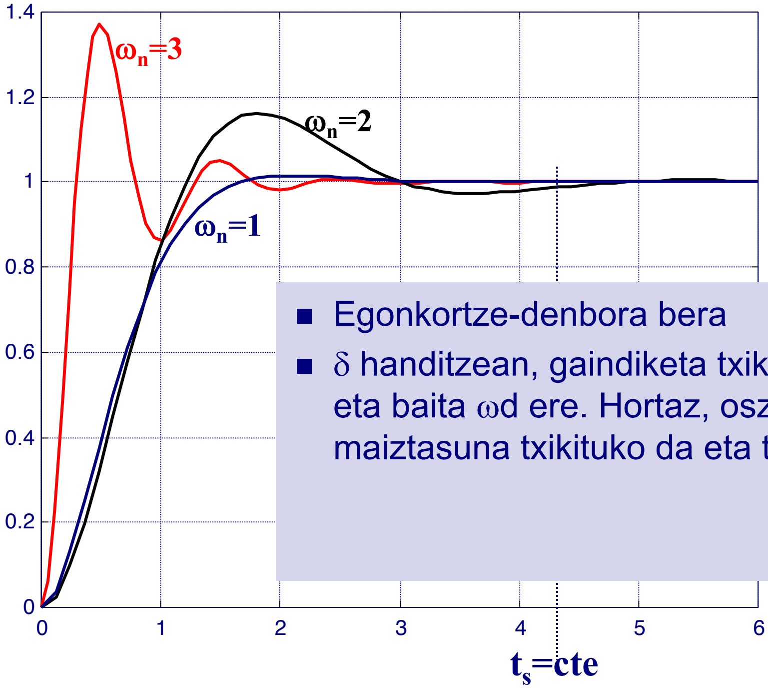
- Gaindiketa berdina
- ω_n handitzean:
  - Oszilazio-maiztasuna handitu (ω_n)
  - Egonkortze-denbora txikitzen da

Denboraren Eremuko Azterketa

- $\delta \cdot \omega_n$ **konstantea duten bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna**

$\boxed{\delta \cdot \omega_n = kte \rightarrow \; t_s = kte}$ si $\delta\uparrow \Rightarrow Mp \downarrow$ y $\omega_d \downarrow$ $tp\uparrow$; K=kte bada, doitasun berdina





- Egonkortze-denbora bera
- δ handitzean, gaindiketa txikitzen da eta baita ωd ere. Hortaz, oszilazio-maiztasuna txikituko da eta tp handitu

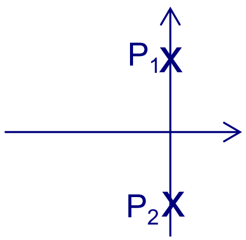
Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi-erantzuna**

$\delta = 0$ **KRITIKOKI EGONKORRA**

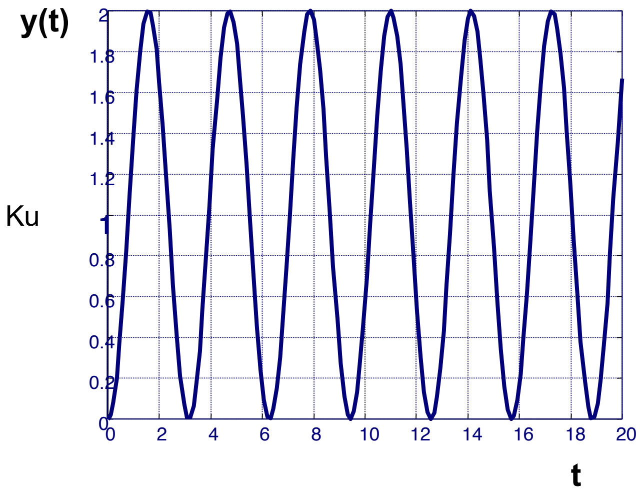
$$Y(s) = Ku\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}\right)$$

$$y(t) = Ku\left[1 - \cos(\omega_n t)\right]$$



Polo irudikariak:

$s_{1,2} = \pm j\omega_n$



Denboraren Eremuko Azterketa

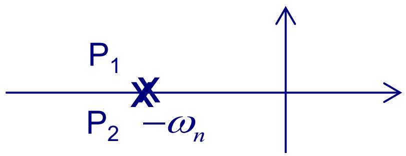
- Respuesta temporal de **sistemas de segundo orden**
  - ✓ **u anplitudedeko espaloi-erantzuna**

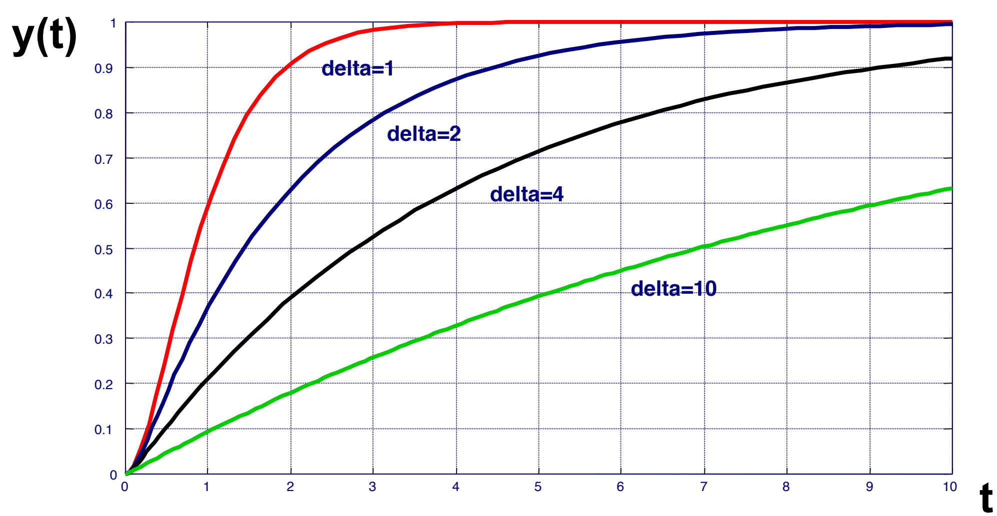
$\delta = 1$ **KRITIKOKI MOTELDUA**

$$Y(s) = Ku\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right) = Ku\left(\frac{1}{s} - \frac{(s+\omega_n)}{(s+\omega_n)^2} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right)$$

$$y(t) = Ku\left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right)$$

Polo bikoitza: $s_{1,2} = -\omega_n$





Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi-erantzuna**

$\delta > 1$ **GAINMOTELDUA**

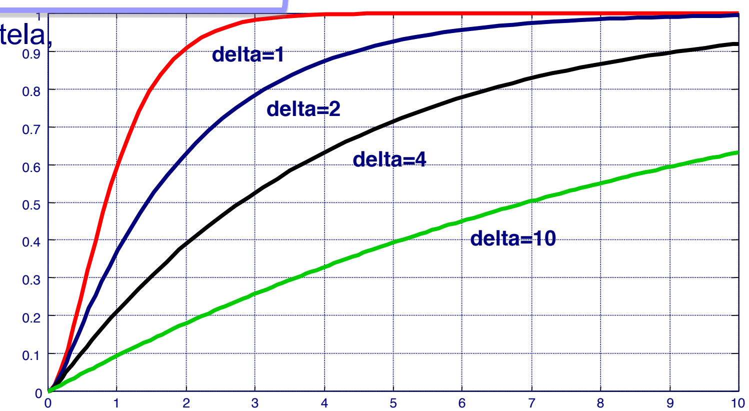
$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}\frac{u}{s} = \frac{K\omega_n^2}{(s+\delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2-1})(s+\delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2-1})}\frac{u}{s}$$

$$y(t) = Ku\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\delta^2-1}}\left(\frac{1}{\delta+\sqrt{\delta^2-1}}e^{-\left(\delta+\sqrt{\delta^2-1}\right)\omega_n t} - \frac{1}{\delta-\sqrt{\delta^2-1}}e^{-\left(\delta-\sqrt{\delta^2-1}\right)\omega_n t}\right)\right]$$

Exponentzial azkarra,
Hondar txikia

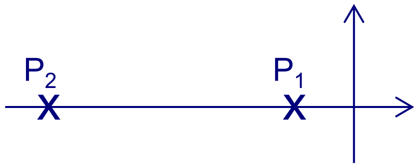
Exponentzial motela,
Hondar handia

$y(0) = 0 \quad y(\infty) = Ku$



Polo erreal ezberdinak:

$$p_1 = -\delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2-1}$$
$$p_2 = -\delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2-1}$$

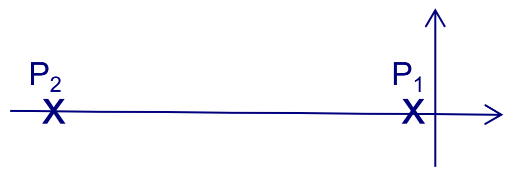


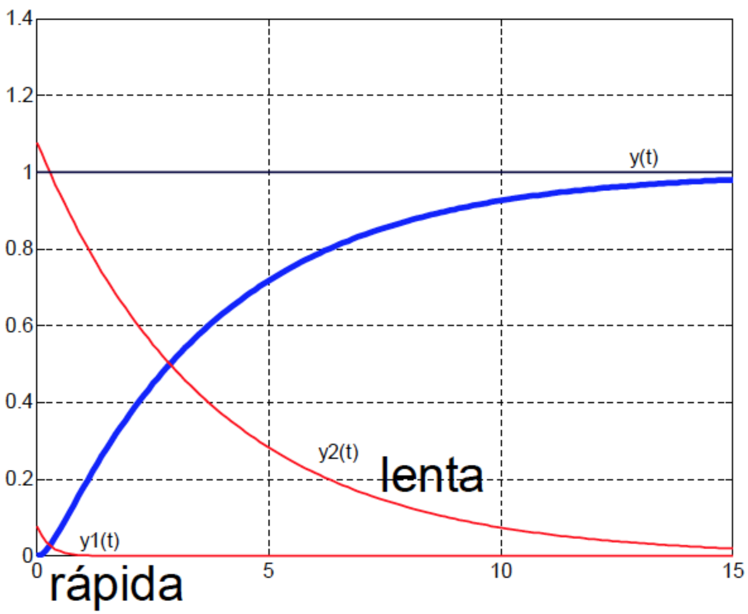
Denboraren Eremuko Azterketa

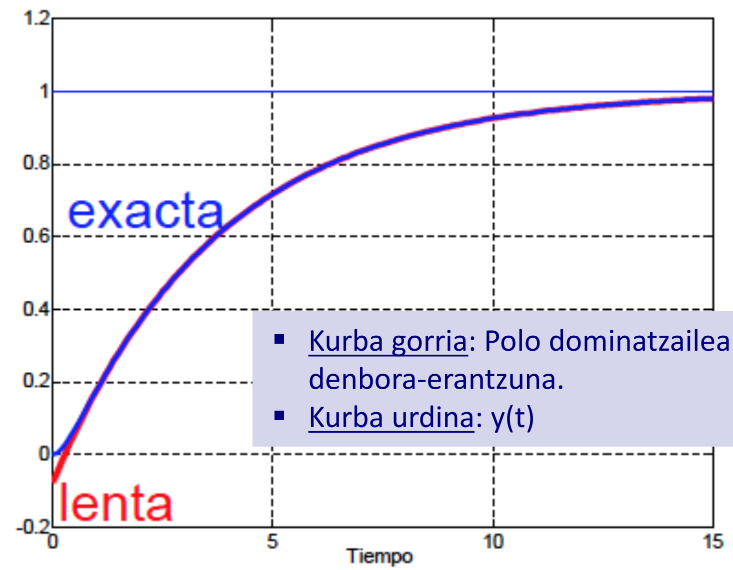
- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi-erantzuna**

$\delta > 1$	**GAINMOTELDUA**

- ❑ ADIBIDEA:







- Kurba gorria: Polo dominatzailearen denbora-erantzuna.
- Kurba urdina: y(t)

Denboraren Eremuko Azterketa

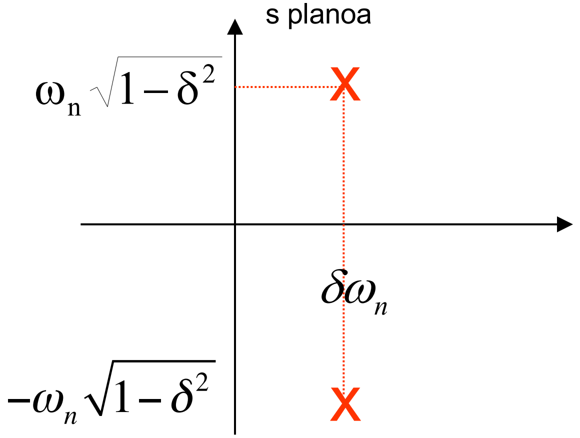
- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u anplitudeko espaloi-erantzuna**

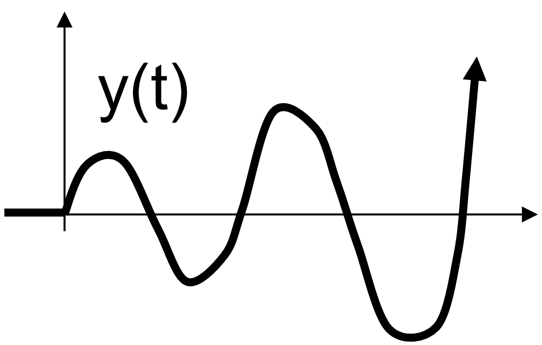
$\delta < 0$ **EZEGONKORRA**

$$s = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

Zati erreal positiboa

$$y(t) = Ku\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{\delta\omega_n t} sen(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \phi)\right]$$



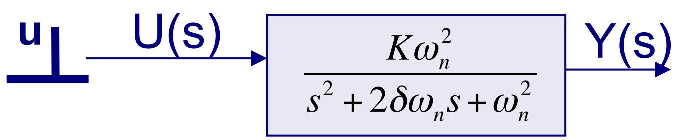


Sistema
Ez-egonkorra

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ **u azalerako inpultsu erantzuna**

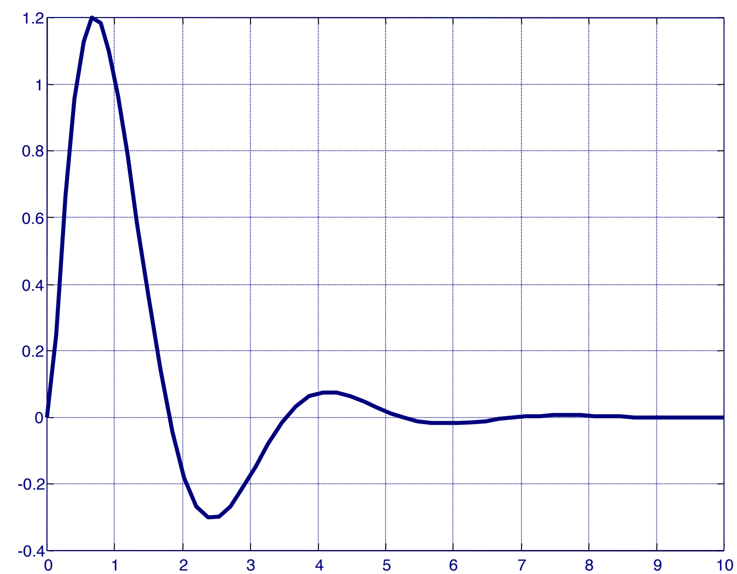


$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \overset{U(s)=1}{=} G(s)$$

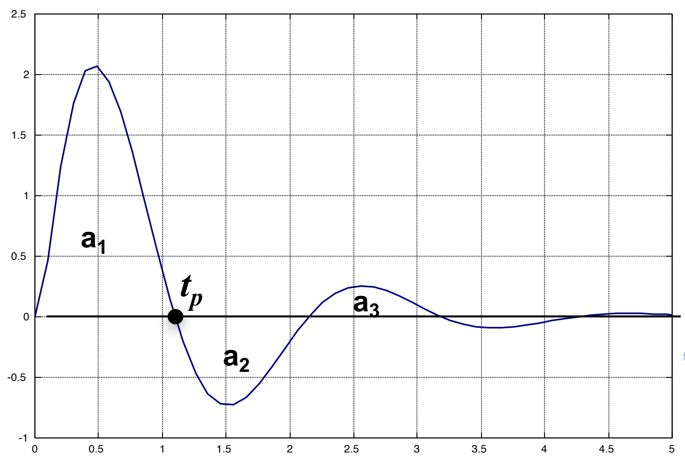
$0 < \delta < 1$ **AZPIMOTELDUA**

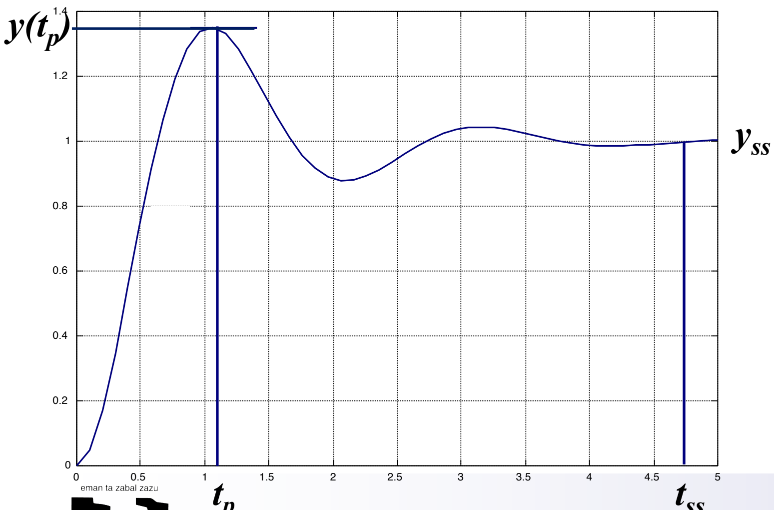
❑ Ariketa: u azalerako inpultsu-erantzuna ondorengoa dela frogatu:

$$y(t) = \frac{Ku\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} .sen\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2}\right) t$$



- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Identifikazio esperimentala inpultsu-erantzunean oinarrituta**





$$Y_{inpultsua}(s) = G(s)$$

$$Y_{maila}(s) = \frac{G(s)}{s}$$

$$Y_{inpultsua}(s) = s\,Y_{maila}(s)$$

$$y_{inpultsua}(t) = \frac{dy_{maila}(t)}{dt}$$

$$y_{maila}(t) = \int y_{inpultsua}(t)dt$$

$$y_{maila}(t_p) = \int_0^{t_p} y_{inpultsua}(t)dt = a_1$$

$$y_{maila}(\infty) = \int_0^{\infty} y_{inpultsua}(t)dt = a_1 - a_2 + a_3 = y_{ss}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{y_{ss}}{\Delta u}$$

$$M_p = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} \rightarrow \delta$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \rightarrow \omega_n$$

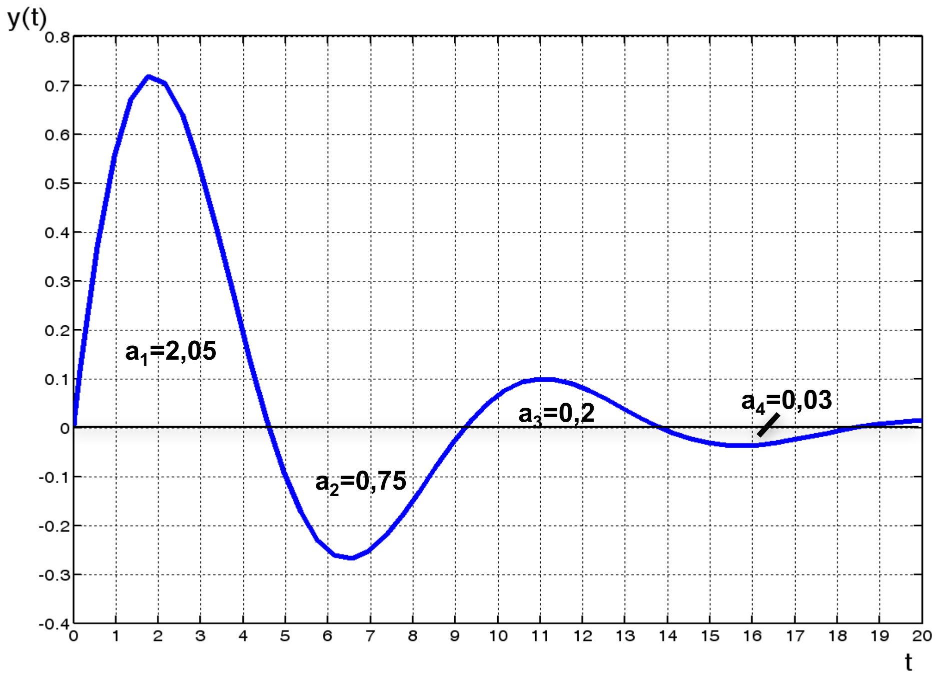
$$G(s)$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ **7. Ariketa**: 2 anplitudeko inpultsu baten aurrean sistemak ondorengo erantzuna eman du. Kalkulatu transferentzi funtzioa.

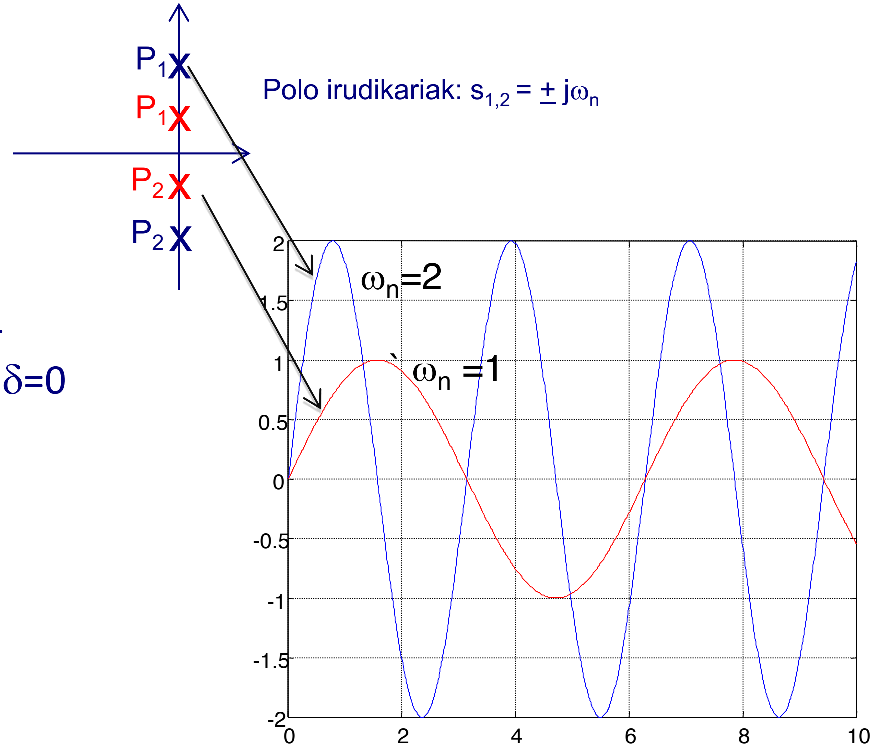


Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u azalerako inpultsu-erantzuna**

$\delta = 0$ **KRITIKOKI EGONKORRA**

$$Y(s) = \frac{Ku\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = Ku\frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = G(s)$$



- ❑ ARIKETA: Frogatu u azalerako inpultsu-erantzuna ondorengoa dela, δ=0 denean :

$$y(t) = g(t) = Ku\omega_n sen\omega_n t$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  ✓ **u azalerako inpultsu-erantzuna**

$\delta = 1$

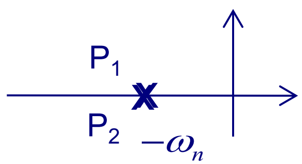
GAINMOTELDUA

$\delta > 1$

❑ ARIKETA: Frogatu u azalerako inpultsu-erantzuna ondorengoa dela, δ=1 denean :

Polo bikoitza:

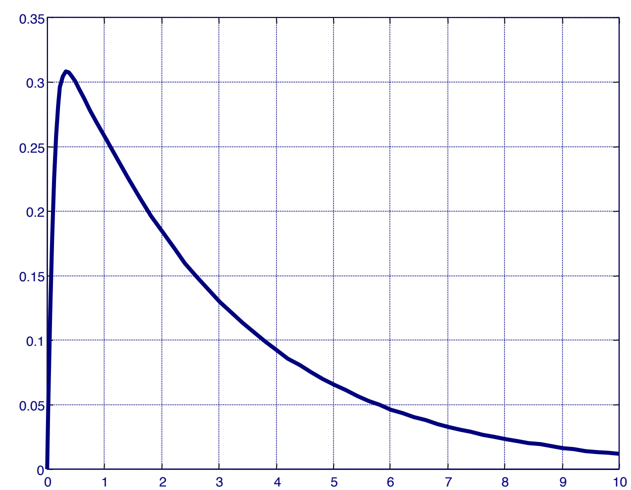
$s_{1,2} = -\omega_n$

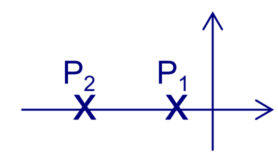


$$y(t) = Ku\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

❑ ARIKETA: Frogatu u azalerako inpultsu-erantzuna ondorengoa dela ,δ>1 denean :

$$y(t) = Ku\left(\frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\partial^2}} e^{p_1 t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\partial^2}} e^{p_2 t}\right)$$





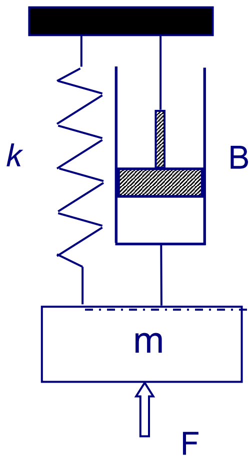
Polo erreal bikoitza:

$$p_1 = -\delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$
$$p_2 = -\delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

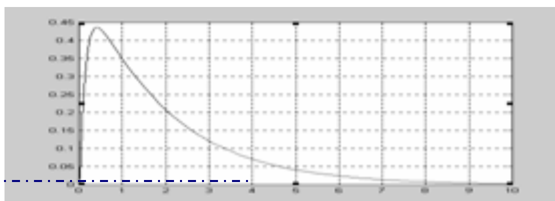
Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **u azalerako inpultsu-erantzuna**

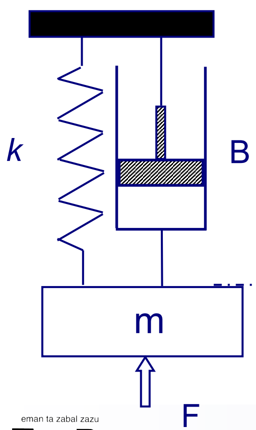
❑ **5. Ariketa** Irudiko sistema mekanikoaren erantzuna interpretatu



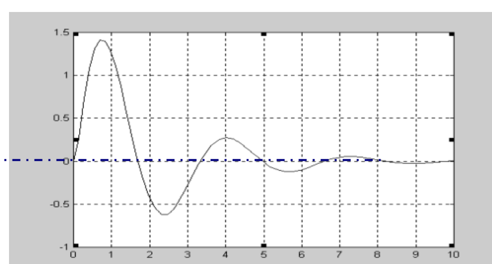
$\delta > 1 \rightarrow B > 2\sqrt{mk}$

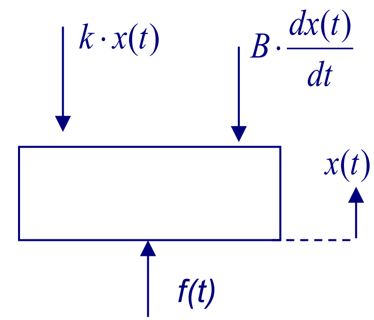


Inpultsua



$\delta < 1 \rightarrow B < 2\sqrt{mk}$





$$F(t) - k \cdot x(t) - B \cdot \frac{dx(t)}{dt} = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$F(s) - k \cdot X(s) - B \cdot s \cdot X(s) = m \cdot s^2 \cdot X(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + B \cdot s + k}}$$

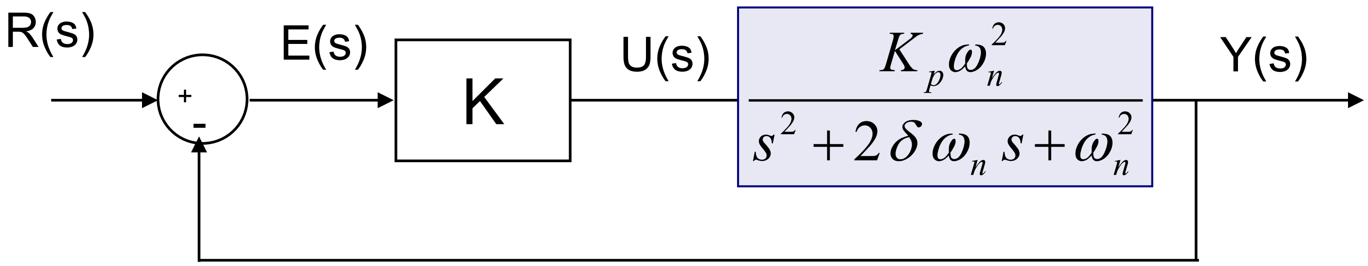
2. ordeneko sistema

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = \frac{1}{k} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \delta = \frac{B}{2\sqrt{mk}}$$

Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

✓ Berrelikaduraren eragina bigarren ordeneko sistema baten:



- Ekuazio karakteristikoa: 1 + K G(s) = 0
- Berrelikatutako sistemaren poloak: $s = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1 - KK_p}$

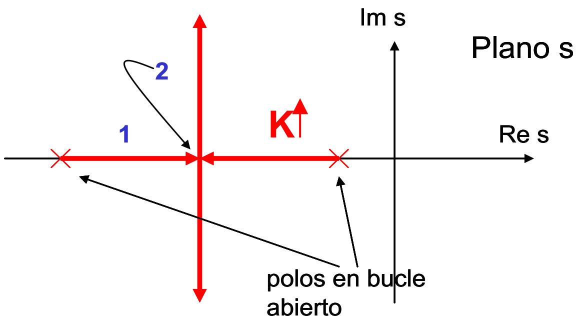
Denboraren Eremuko Azterketa

- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Berrelikaduraren eragina bigarren ordeneko sistema baten:
  - ✓ **K handitzean**

Begizta irekiko sistema gainmoteldua

→ Sistema azkarragoa da (polo dominatzailea 0-tik urrunago)

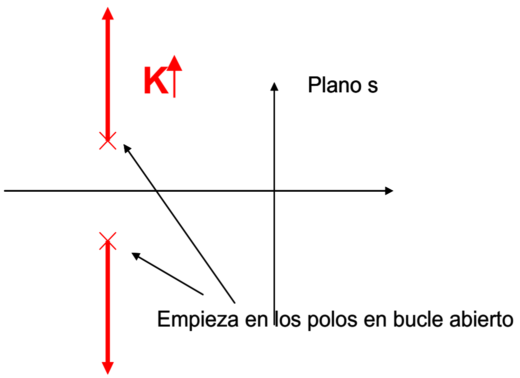
→ K-ren balio batetik aurrera sistema azpimoteldua da



$$s = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1 - KK_p}$$

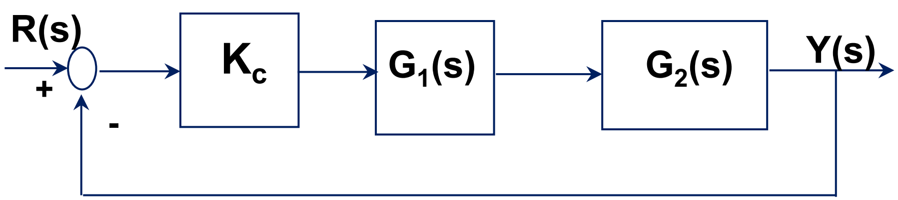
- $\delta\omega_n$ = kte → ts= cte
- δ txikitu→ M_p handitu
- ω_d handitu→ ω_n y t_p txikitu

Begizta itxiko sistema gainmoteldua



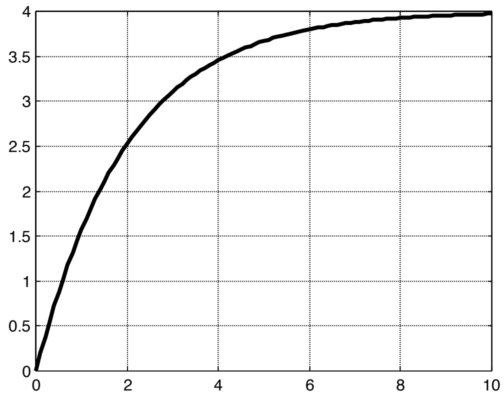
- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna

  - **8. Ariketa:** Hurrengo sistema berrelikatuan $G_1(s)$ eta $G_2(s)$ sistemen espaloi-erantzuna ezagutzen da,

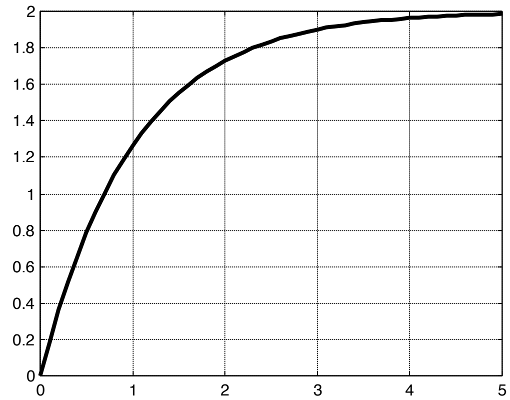


- **Kalkulatu sistema berrelikatuaren transferentzi funtzioa K_c=2 denean, K, δ eta ω_n parametroen balioak adieraziz.**
- **Marraztu Y(s) sistemaren espaloi-erantzuna K_c=2 denean. Grafikoan, parametro esanguratsuak adierazi eta kalkulatu (M_p, t_p, t_s, y_{ss})**

$G_1(s)$ espaloi-erantzuna



$G_2(s)$ espaloi-erantzuna



Denboraren Eremuko Azterketa

Aurkibidea:

- Froga-seinaleak
- Lehen ordeneko sistemen denbora-erantzuna
- Bigarren ordeneko sistemen denbora-erantzuna
- **Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna**

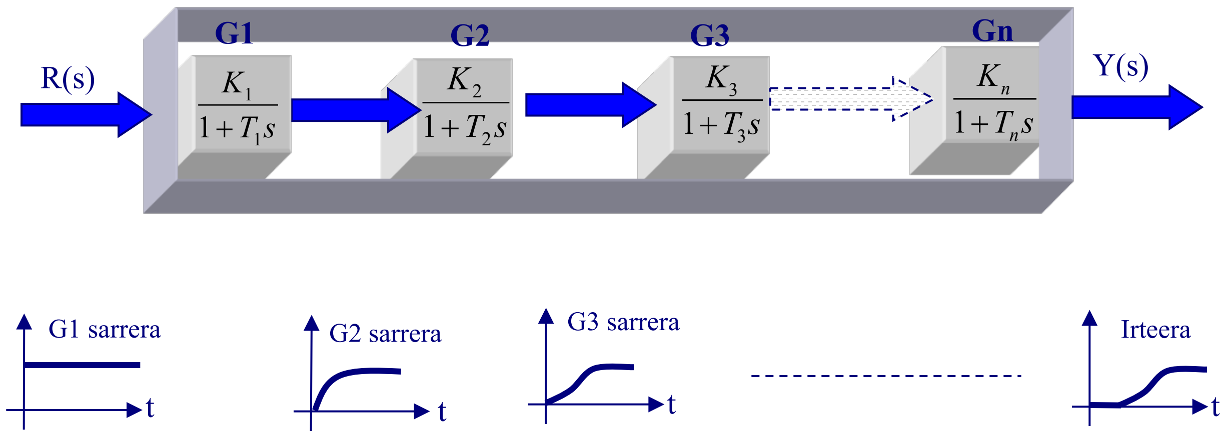
Denboraren Eremuko Azterketa

Aurkibidea:

- **Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna**
  - **Espaloi-erantzuna**
  - **Poloen eragina (dominatzaileak eta dominatzaileak ez direnak)**
  - **Zeroen eragina**
  - **Sistema baten orden murrizketa**
  - **Identifikazio esperimentala**

Denboraren Eremuko Azterketa

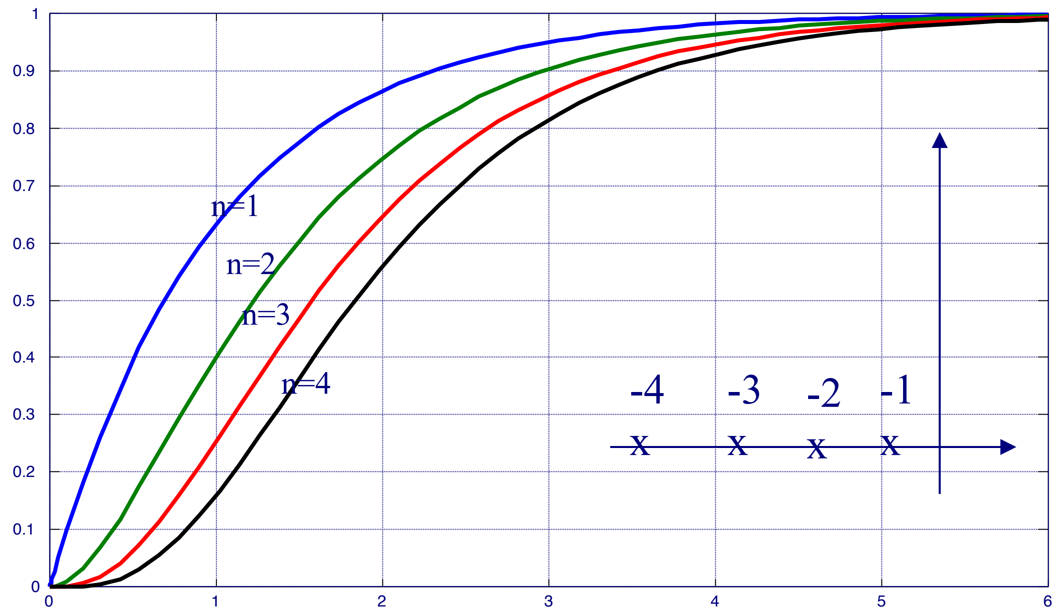
- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Espaloi-erantzuna



- Espaloi-sarrera baten aurrean, $G_1(s)$-k Lehen ordeneko sistema bat bezala erantzuten du. Honen irteera $G_2(s)$-ren sarrera da, espaloia ez dena, eta dinamika bat duena. Hortaz, azken honen erantzuna atzeratuagoa egongo da. Erantzun hau $G_3(s)$-ren sarrera izango da, eta horrela sistemaren polo guztiekin…

Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Espaloi-erantzuna

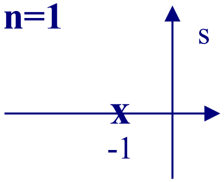


- Sistemaren polo erreal bakoitzak sistemaren erantzun osoan eragina du, atzerapen txiki bat gehituz.
- Zenbat eta jatorritik urrutiago egon poloa, hainbat eta handiagoa izango da bere zati esponentziala, eta hortaz, bere eragina txikiagoa erantzun osoan.

Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

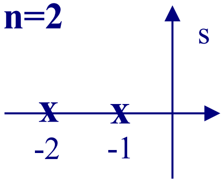
- ✓ Espaloi-erantzuna

n=1



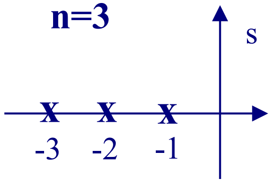
$$G_1(s)=\frac{1}{s+1}\begin{cases} Y_1(s)=G_1(s)\cdot\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s(s+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1} \\ y_1(t)=1-e^{-t} \end{cases}$$

n=2



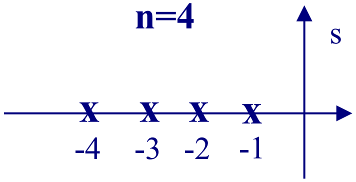
$$G_2(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}\begin{cases} Y_2(s)=G_2(s)\cdot\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s+2} \\ y_2(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t} \end{cases}$$

n=3



$$G_3(s)=\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{cases} Y_3(s)=G_3(s)\cdot\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{3}{s+1}+\dfrac{3}{s+2}-\dfrac{1}{s+3} \\ y_3(t)=1-3e^{-t}+3e^{-2t}-e^{-3t} \end{cases}$$

n=4



$$G_4(s)=\frac{24}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\begin{cases} Y_4(s)=G_4(s)\cdot\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{4}{s+1}+\dfrac{6}{s+2}-\dfrac{4}{s+3}+\dfrac{1}{s+4} \\ y_4(t)=1-4e^{-t}+6e^{-2t}-4e^{-3t}+e^{-4t} \end{cases}$$

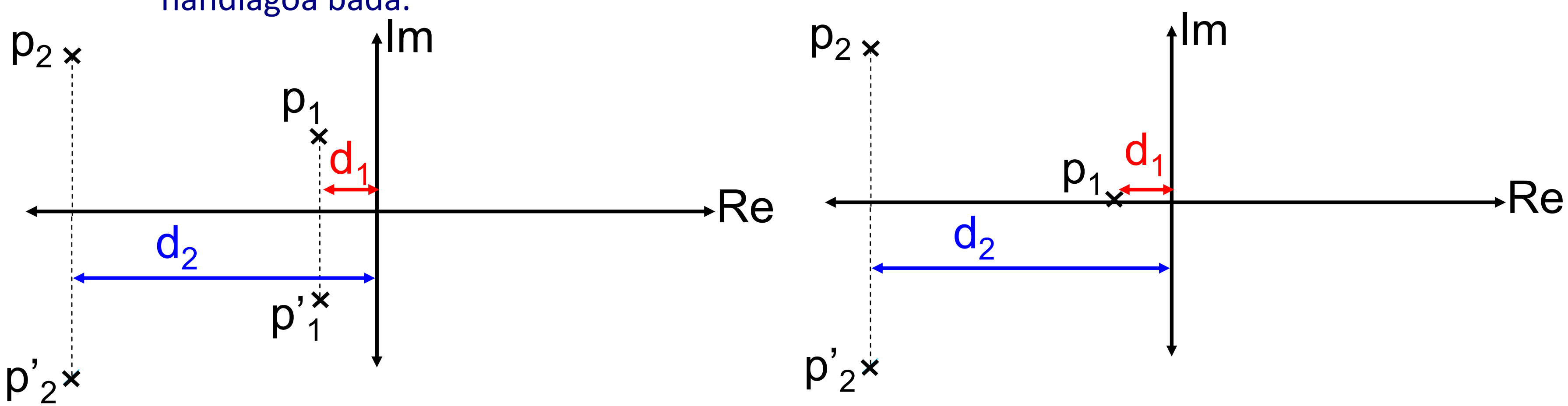
Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Poloen eragina

    - Poloak sistema baten erantzuna atzeratzen du (esponentzial beherakorra gehitzen du, poloak zati erreal negatiboa daukanean)
    - Zenbat eta txikiagoa izan poloaren zati erreala (jatorritik hurbilago), hainbat eta handiagoa izango da bere denbora-konstantea τ_i, poloari dagokion esponentziala motelagoa eginez. Gainera, horren hondarra handiagoa izango da ziurrenez, eta ondorioz, erantzun iragankorrean eragin handiagoa izango du.
    - Erantzunaren denbora-bilakaera polo dominatzaileen kokapenaren araberakoa izango da.
    - Polo bati lotutako hondarra, polo horren eta besteen arteko kokapen erlatiboaren araberakoa da.

Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Polo dominatzaileak
    - Polo baten nagusitasuna kalkulatzeko, jatorritik duen kokapen erlatiboa aztertu behar da. Zenbat eta jatorritik hurbilago egon, hainbat eta dominatzaileagoa izango da, betiere beste poloekiko kokapena aztertuz.
    - Polo bat beste batekiko dominatzailea dela diogu, bien zati errealen arteko erlazioa 5 baino handiagoa bada.



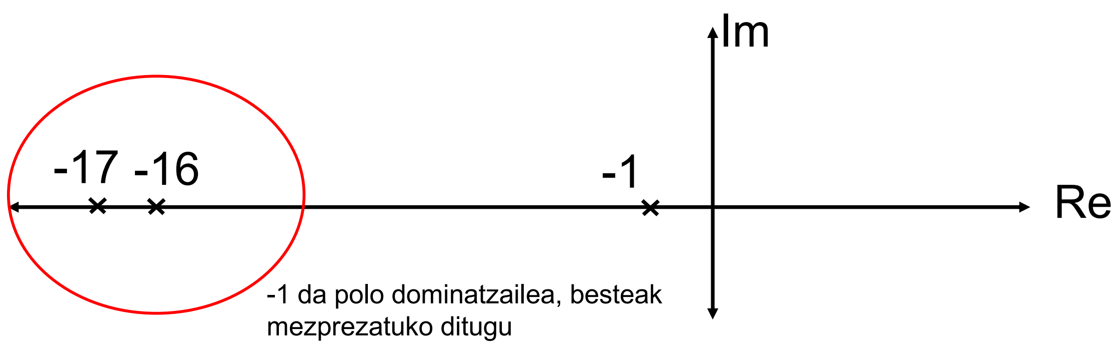
p_1, p_1' dominatzaileak izango dira $d_2/d_1>5$ betetzen bada

p_1 dominatzailea izango da $d_2/d_1>5$ betetzen bada

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Polo dominatzaileak
    - Goi ordeneko sistema baten ordena murriztu dezakegu, dominatzen ez duten poloen eragina mesprezatuz (hots, polo azkarrenak kenduz).
    - Kontuz! Dominatzaileak ez diren poloak kentzerakoan, kontutan izan irabazpen estatikoa ez dela aldatu behar!

✓ **2. Adibidea:**

$$G(s)=\frac{544}{(s+1)(s+16)(s+17)}\approx\frac{544}{(s+1)(16)(17)}=\frac{2}{s+1}$$

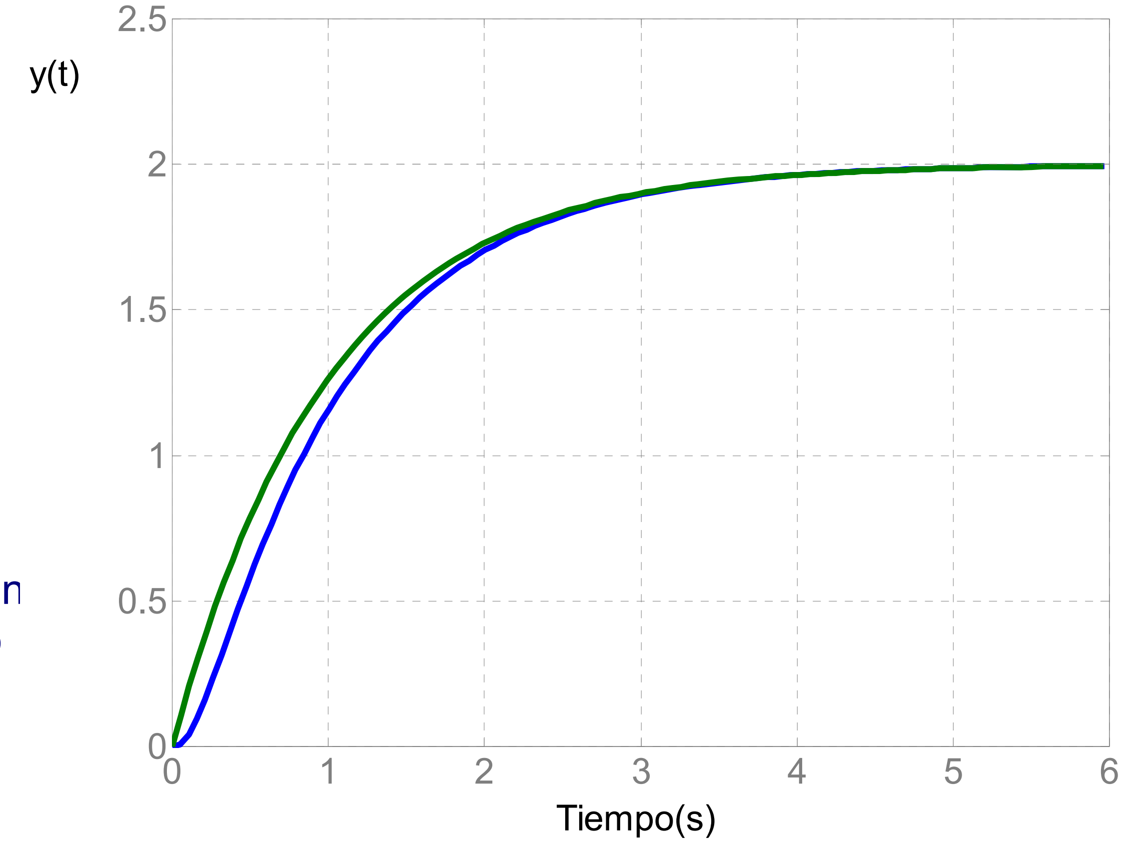


Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Polo dominatzaileak

✓ **2. Adibidea** :

- ☐ Hirugarren ordeneko sistema bat lehen ordeneko sistema baten bidez hurbildu da (poloen murrizketa eginez).
- ☐ Irudian, jatorrizko sistemaren eta hurbilduaren (murriztuaren) espaloi-erantzunak aurkeztu dira. Bien arteko tartea mesprezatutako poloen eragina da.



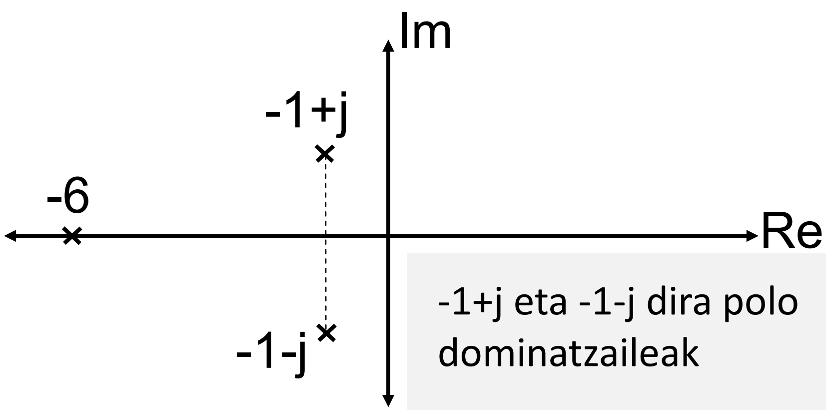
Nagore Iriondo, Asier Zubizarreta, Marga Marcos, Itziar Cabanes

Denboraren Eremuko Azterketa

Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ Polo dominatzaileak
  - **3. Adibidea**:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+2s+2}} \longrightarrow \boxed{\frac{10}{s+6}} \longrightarrow$$

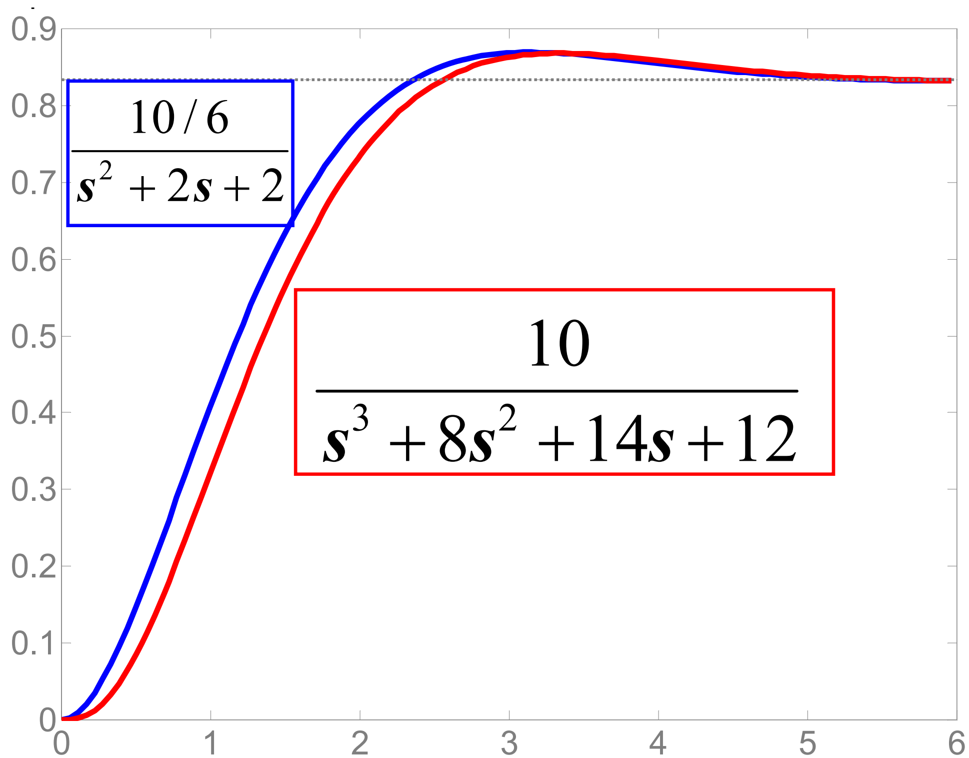


-1+j eta -1-j dira polo dominatzaileak

- Dominatzen ez duen poloa kendu da baina irabazpen estatiko mantenduz.

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+2s+2}} \longrightarrow \boxed{\frac{10}{6}} \longrightarrow$$

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Polo dominatzaileak
    - ☐ **3. Adibidea**: Erantzunen parekatzea



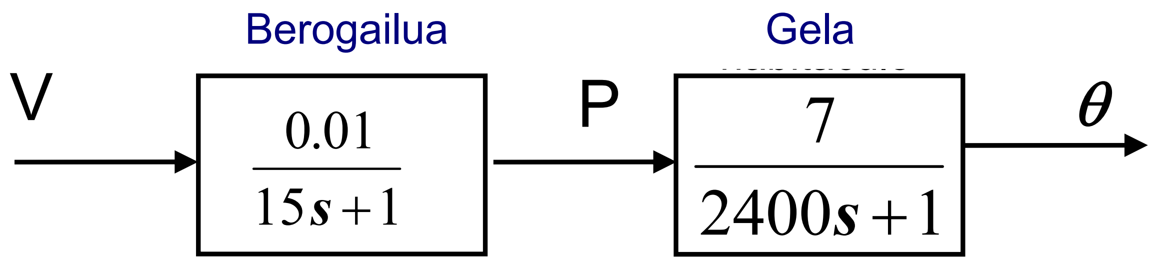
Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Polo dominatzaileak
    - **Interpretazio fisikoa**: Dominatzaileak ez diren poloa kentzerakoan, beraien eragina "bat-batekoa" dela ematen da. Hots, polo nagusiak, hain direnez motelak dominatzen ez dutenekiko, azken horiek "bat-batekoak" direla eman daitekeela.
    - **4. Adibidea**: Gela bat berogailu batekin berotu nahi dugu. Tenperatura berri horretaraino berotzeko (egoera iraunkorreraino) behar den denbora kalkulatu nahi dugu. Horretarako bi azpisistema hartuko dira kontutan:
      - ✓ *Berogailua*: **Sarrera**: tentsioa (V) eta **Irteera:** bero-potentzia (kW).
      - ✓ *Gela*: **Sarrera**: bero-potentzia (berogailuak emandakoa) (kW) eta **Irteera**: Tenperatura (ºC).

Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ Polo dominatzaileak
    - □ Interpretazio fisikoa

Bloke-diagrama:

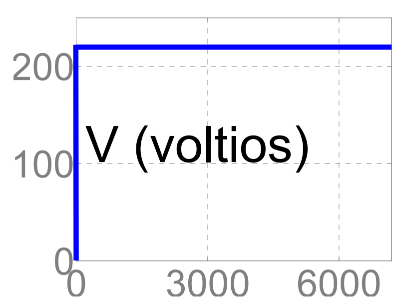


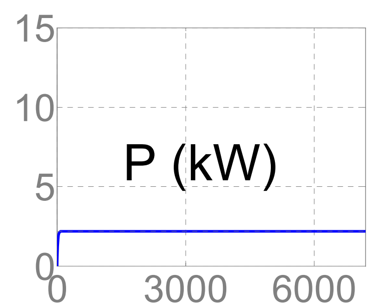
Egoera egonkorrean:

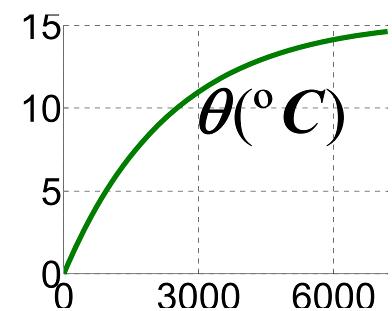
$$V(\infty) = 220\ V$$

$$P(\infty) = 2{,}2\ kW$$

$$\theta(\infty) = 15.4^{o}\,C$$



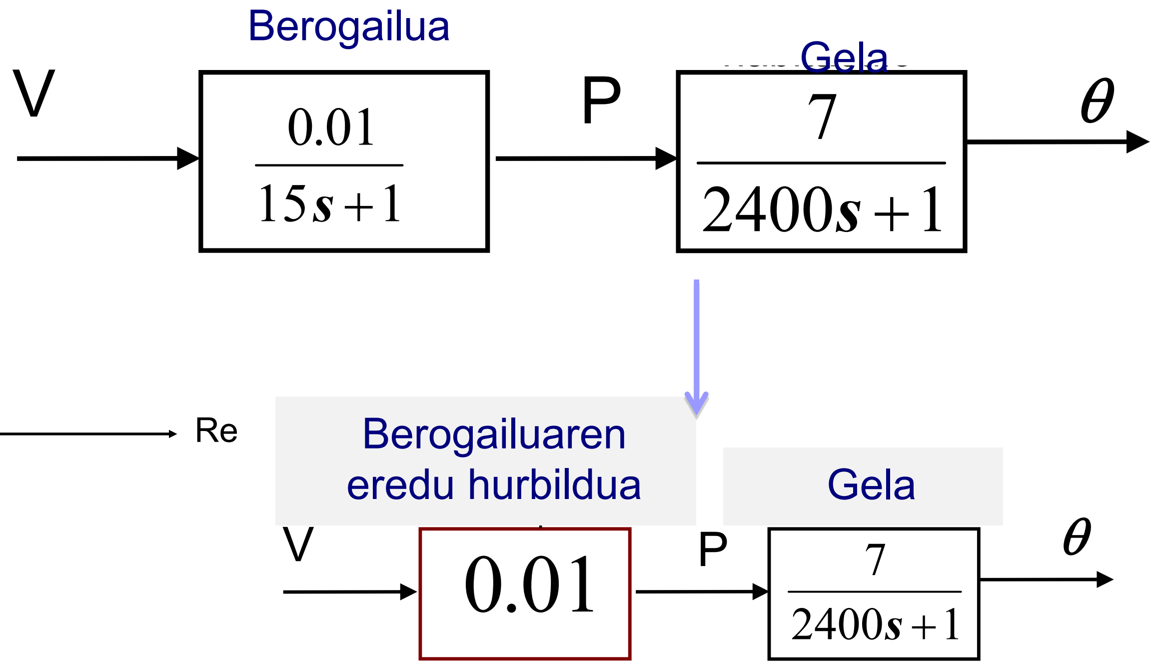


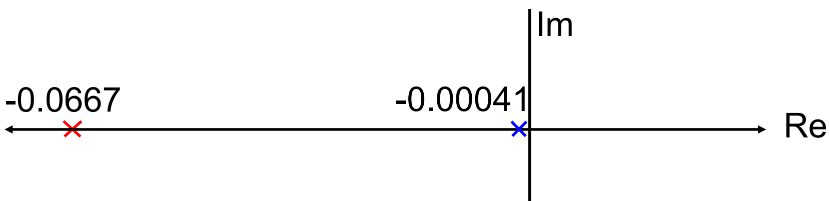


Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ Polo dominatzaileak
  - ☐ Interpretazio fisikoa

Bloke-diagrama:

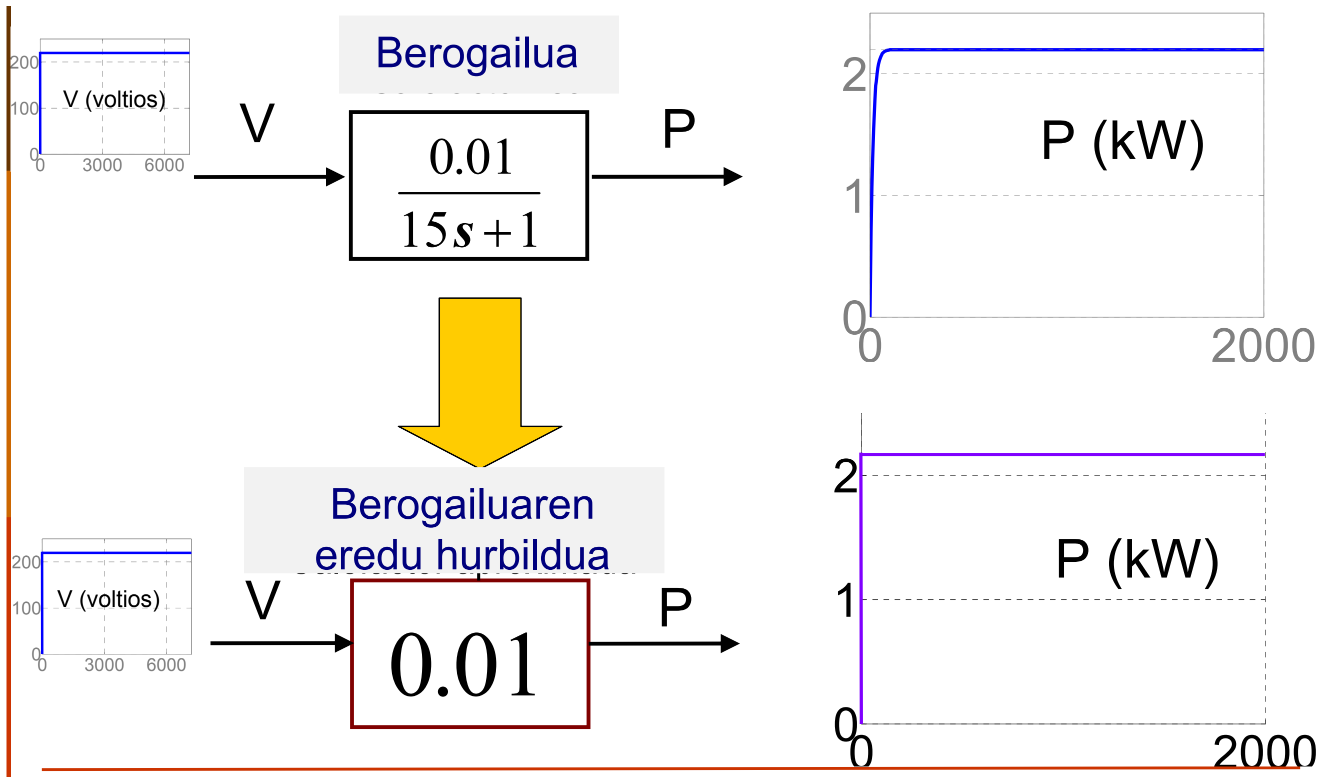




0.0667/0.0041=160 >> 5

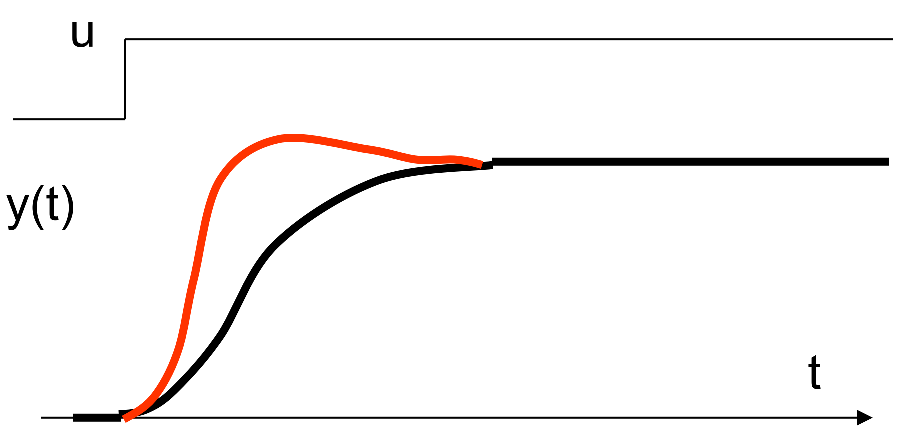
■ Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

Polo azkarrenaren dinamika “bat-bateko” dinamika batengatik ordezkatu dugu

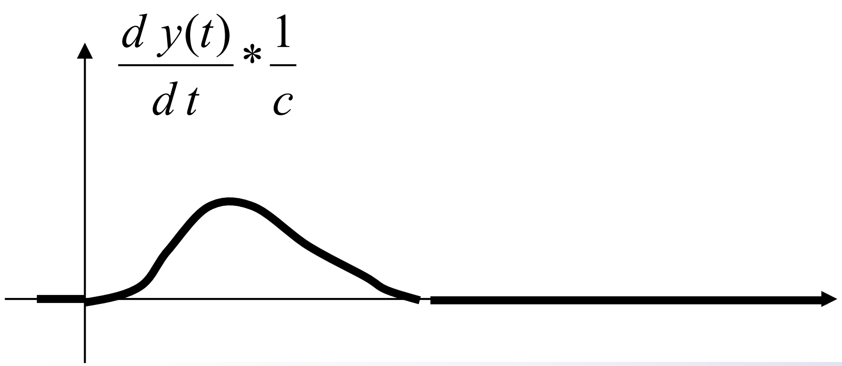


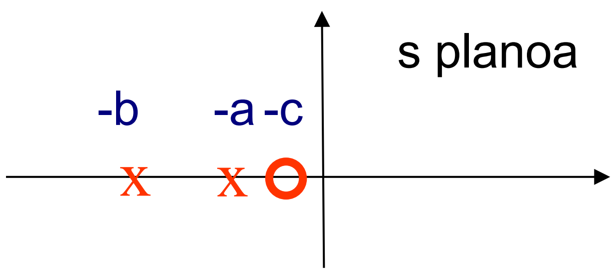
Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ **Zeroen eragina erantzunean**



c > 0 (zero egonkorra) bada, erantzuna aurreratuko da. Erantzunak oszilaziorik ez baditu, zeroak ez du oszilaziorik sortuko. Hala ere, gaindiketa bat sortu dezake, poloak baino dominatzaileagoa denean.

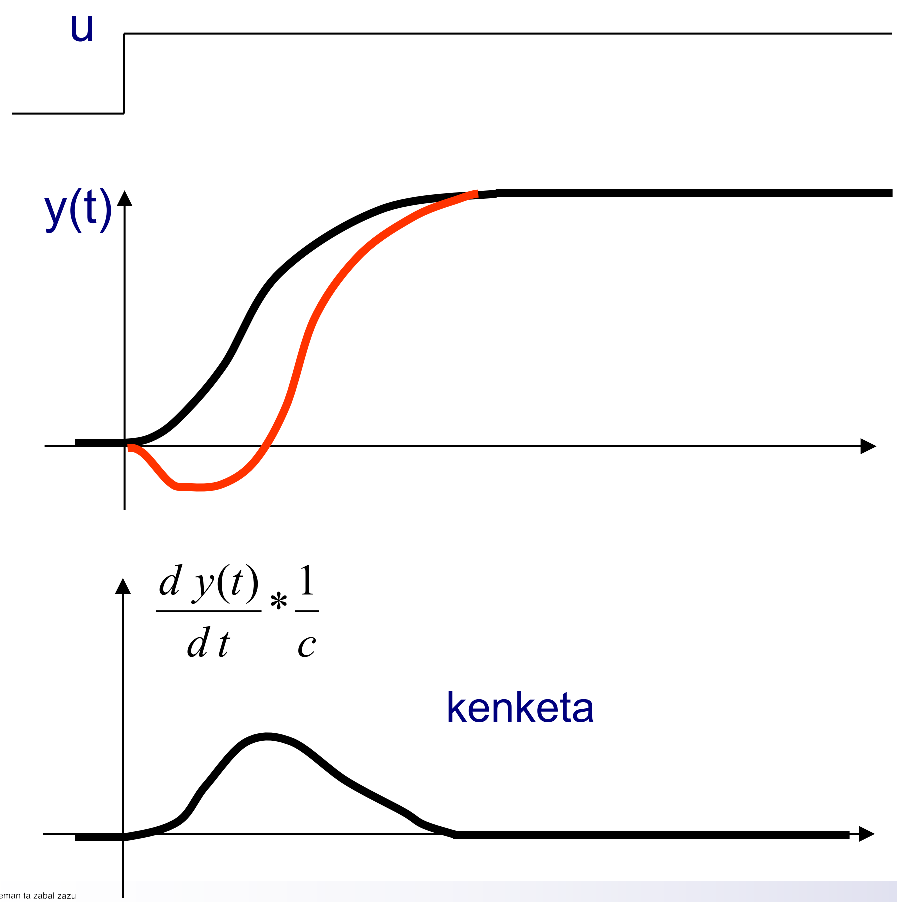




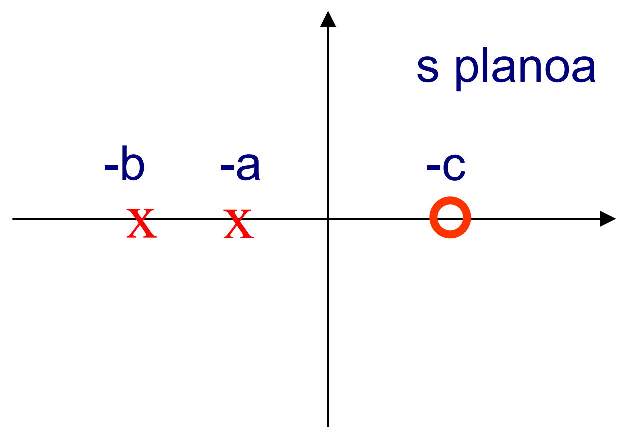
Zero dominatzailea (zati erreal negatiboa)

Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Zeroen eragina erantzunean**



c < 0, (zero ezegonkorra) dugunean, erantzunak alderantziz jokatuko du hasieran (fase ez-minimoko sistema)



Zati erreal positibodun zeroa

Denboraren Eremuko Azterketa

Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

- ✓ **Zeroen eragina erantzunean**

$$U(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow Y_1(s) \qquad Y_1(s) = G(s).U(s) \quad \Rightarrow \quad y_1(t)$$

$$U(s) \rightarrow \boxed{G(s)\left(1+\frac{1}{a}s\right)} \rightarrow Y_2(s) \qquad Y_2(s) = \left[G(s)\left(1+\frac{1}{a}s\right)\right].U(s) \quad \Rightarrow \quad y_2(t)$$

Zero bat 2. ordeneko sistema bati gehitzean **s = -a**

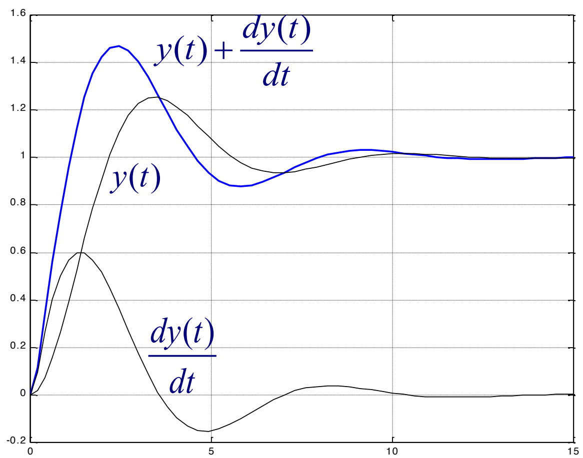
$$Y_2(s) = \left[G(s)\left(1+\frac{1}{a}s\right)\right]U(s) = G(s)U(s) + \frac{1}{a}sG(s)U(s)$$

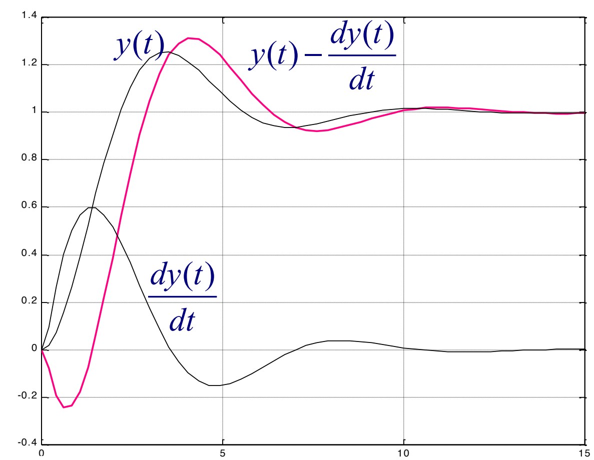
$$y_2(t) = y_1(t) + \frac{1}{a}\frac{dy_1(t)}{dt}$$

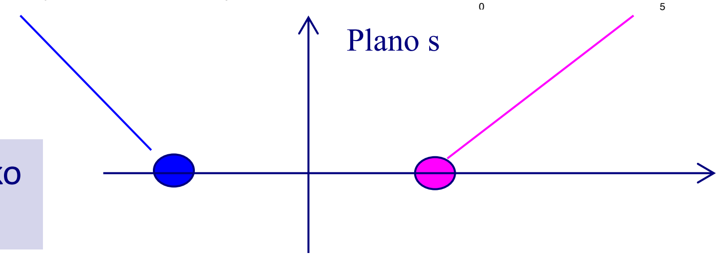
Zenbat eta jatorritik hurbilago egon zeroa, hainbat eta nabarmenagoa izango da bere eragina erantzunean.

Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Zeroen eragina erantzunean**







Zeroak erantzuna aurreratuko du eta gaindiketa handitu

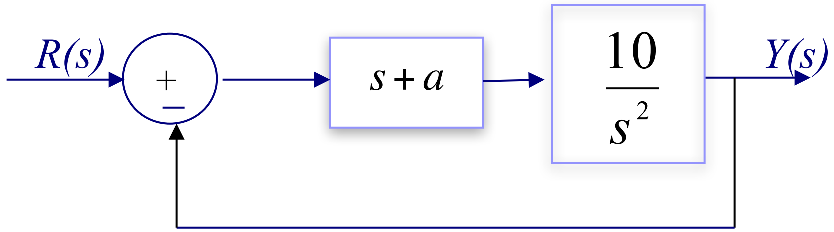
Zero ez-egonkorrarekin, hasieran sistemak atzerantz egingo du (fase ez-minimoko sistema)

Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

✓ **Zeroen eragina erantzunean**

✓ **9. Ariketa**: Ondorengo sisteman oinarrituta, kalkula ezazu:

1) Begizta itxiko transferentzi funtzioa, $G_{BC}(s)$
2) Polo eta zeroen kokapena s planoan, a-ren ondorengo balioentzat: +3; -0,5; -1; -5; +0,5
3) Marraztu zein izango litzatekeen espaloi-erantzuna, a-ren balio bakoitzarentzat,.



Denboraren Eremuko Azterketa

Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

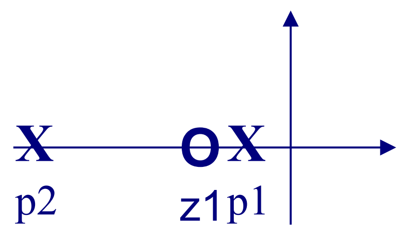
✓ **Zeroen eragina erantzunean**

- Zero batek erantzuna **aurreratuko du**.
- Poloekin gertatzen zen bezala, zenbat eta urrunago egon jatorritik , hainbat eta txikiagoa izango da zeroaren eragina. Zeroa oso urrun dagoenean, bere eragina mesprezagarria da.
- Erantzunaren forma polo dominatzaileen araberakoa da EZ ZEROENA. Zeroek ez dute forma aldatzen. Hala ere, eragina dute poloen ponderazio erlatiboan (hondarretan),hortaz, erantzuna zerbait aurreratu edo gaindiketa bat sor dezakete.
- Zero bat polo batetik oso hurbil dagoenean, poloaren hondarra oso txikia egiten da zeroaren eragina dela eta. Oso hurbil daudenean, batak bestearen eragina baliogabetzen du.

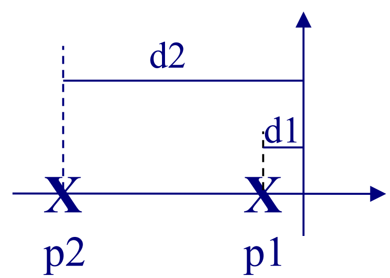
Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Sistema baten ordenaren murrizketa**

- Polo eta zeroen kokapenaren arabera, posiblea da dinamika dominatzaileak, ez direnak eta polo-zero baliogabetzeak era errazean ikustea.
- Polo dominatzaileak zeintzuk diren argi dagoenean, eredu hurbilduak lor daitezke sistemaren ordena murriztuz.
- **Murrizketa egiteko**:
  - Hurbil dauden polo eta zeroak bata bestearekin baliogabetzen dira (irabazpen estatikoa mantenduz)
  - Dominatzaileak ez diren poloak, mespreza daitezke



$$\frac{(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)} \Rightarrow \frac{z_1}{p_1(s+p_2)}$$



$$d_2 \geq 5d_1$$

$$\frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)} \Rightarrow \frac{1}{(s+p_1)p_2}$$

- **Lehenengo, polo/zero baliogabetzeak aztertzen dira, eta gero nagusitasuna.**
- **Bi kasuetan, irabazpen estatikoa mantendu behar da.**

Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

✓ Sistema baten ordenaren murrizketa

- **6. Adibidea**:

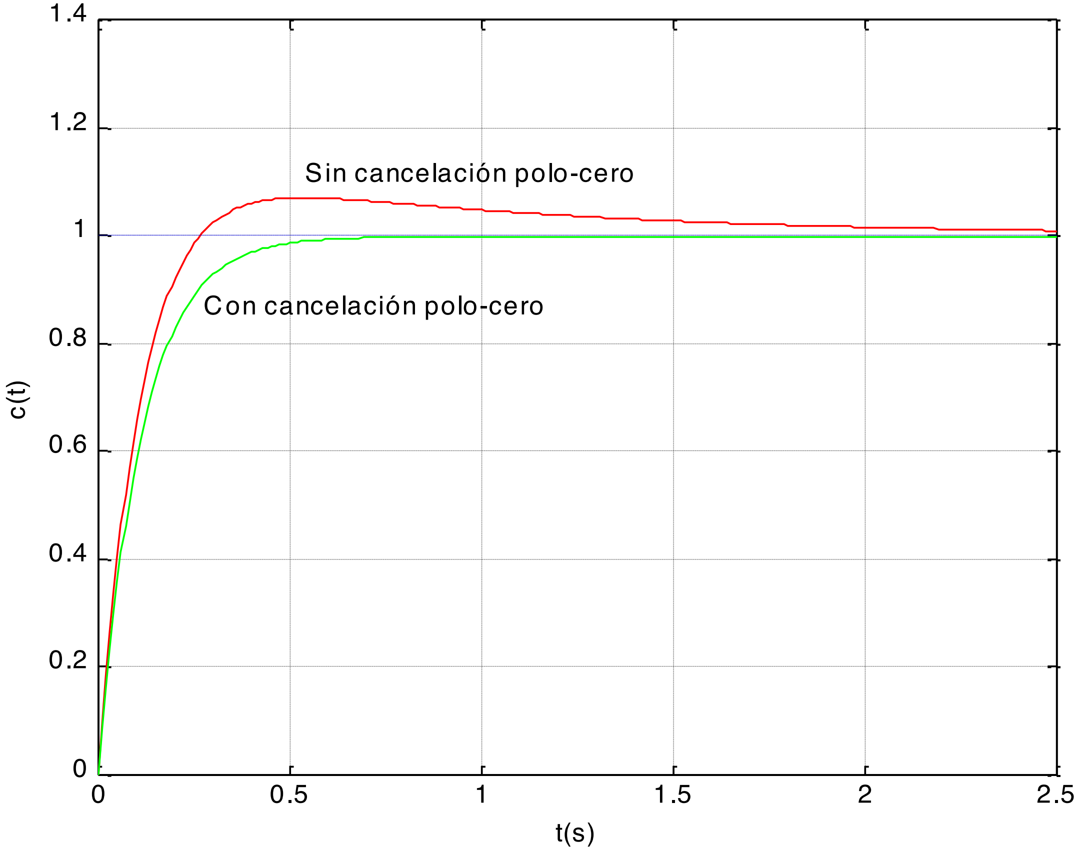
$$G_1(s) = \frac{10\cdot(s+1)}{s^2+10s+10} = \frac{10\cdot(s+1)}{(s+1{,}13)(s+8{,}87)} \qquad G_2(s) = \frac{10}{(s+8{,}87)\cdot 1{,}13}$$

s=-8,87 poloa s=-1,13 poloarekiko ez da dominatzailea, hortaz nagusitasunaren irizpidea ezin daiteke aplika.

s=-1,13 poloa s=-1 zeroarekiko oso hurbil dago eta posiblea da biak elkarren eragina baliogabetzea, Lehen ordeneko sistema bat lortuz (sistema murriztua, hurbilketa dena)

Denboraren Eremuko Azterketa

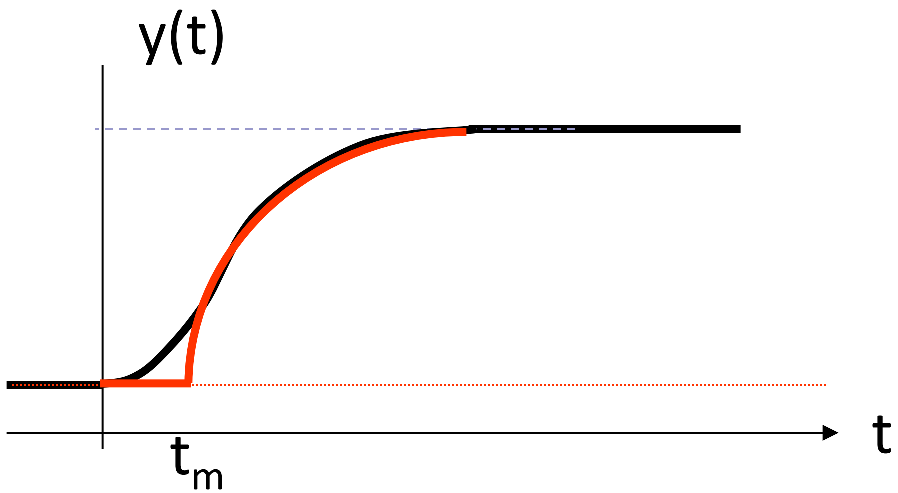
- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Sistema baten ordenaren murrizketa**



Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **Identifikazio esperimentala**

Dominatzen ez duten polo-kopurua handia denean, sistemak "S" formako erantzuna du, eta atzerapen nabarmena erakutsiko du erantzunean.



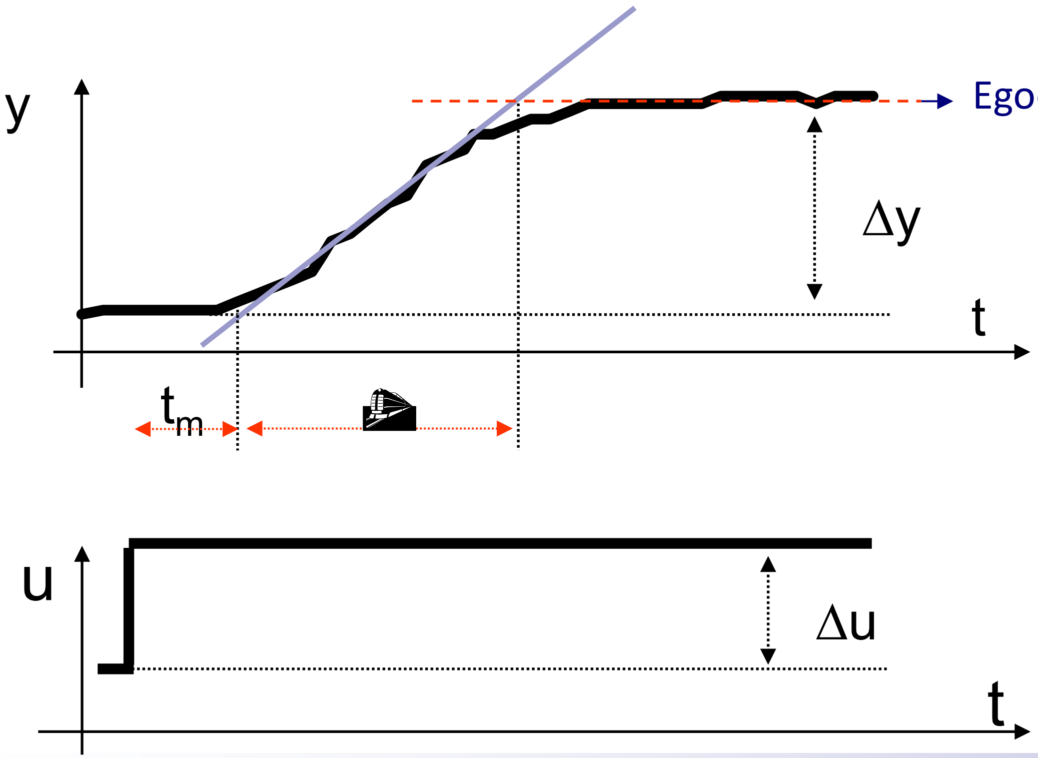
- Hurbilketa:

$$G(s)=\frac{Ke^{-t_m s}}{\tau s+1}$$

Goi ordeneko sistema baten erantzuna (monotonoki gorakorra denean eta aurreko "S" forma duenean), denbora hila gehi lehen ordeneko eredu hurbildu baten bitartez (POMTM) adieraz daiteke.

Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **POMTM sistema baten identifikazioa**
    - ☐ Malda maximoaren metodoa (ez da oso zehatza seinaleak zarata badu, hortaz, ez da oso gomendagarria)

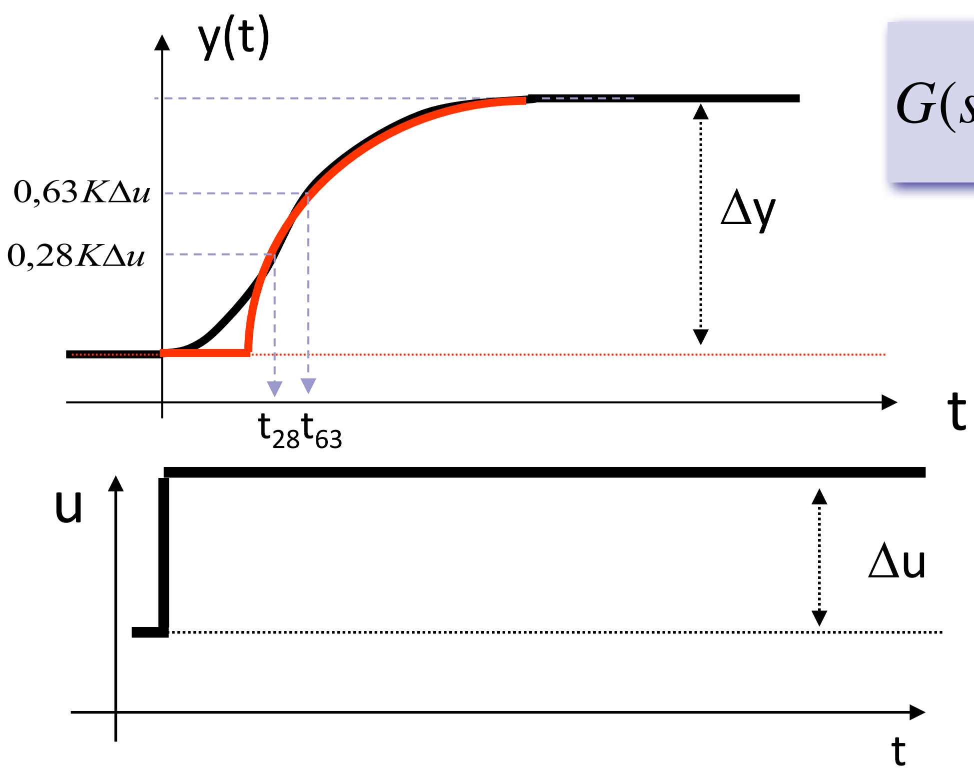


$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

POMTM eredua

$$G_{POMTM}(s) = \frac{Ke^{-t_m s}}{\tau s + 1}$$

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **POMTM sistema baten identifikazioa**
    - ☐ Bi puntuen metodoa:



POMTM eredua

$$G(s)=\frac{Ke^{-t_m s}}{\tau s+1}\;\Rightarrow y(t)=K\,\Delta u\left(1-e^{\frac{-(t-t_m)}{\tau}}\right)$$

POMTM eredua eta benetako erantzuna bi puntutan bat egitean datza ($t_1=t_m+\tau$ y $t_2=t_m+\tau/3$)

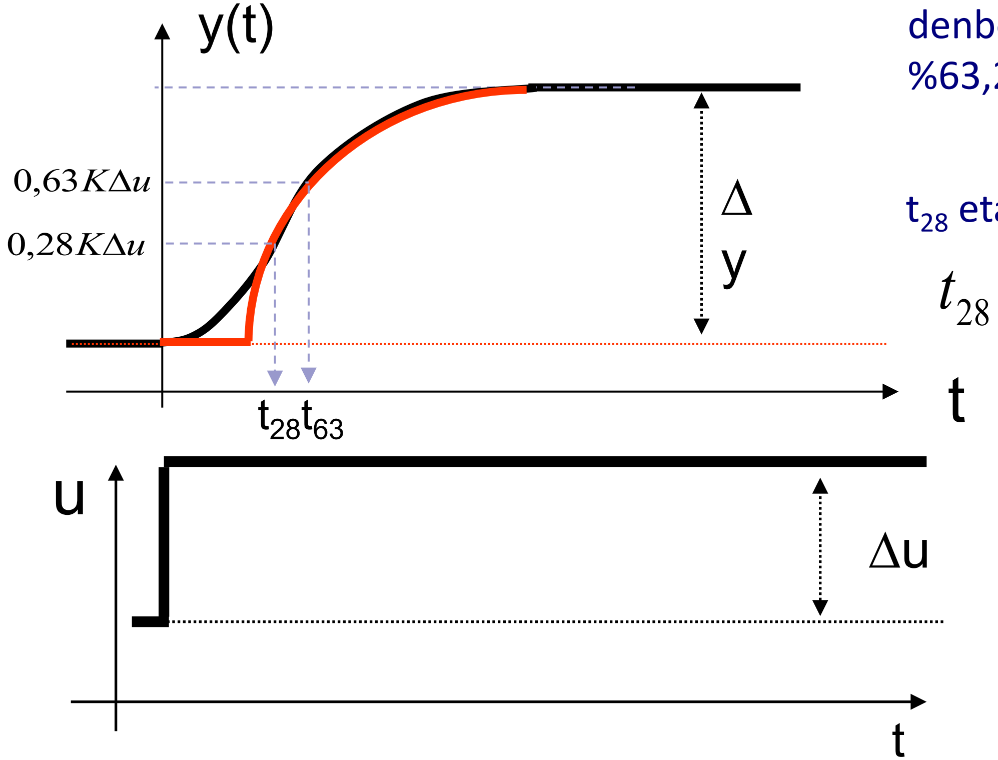
$$y(t_m+\tau)=K\Delta u(1-e^{-1})=0.632K\Delta u=y(t_{63})$$

$$y(t_m+\frac{\tau}{3})=Ku(1-e^{-1/3})=0.283K\Delta u=y(t_{28})$$

Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna

✓ POMTM sistema baten identifikazioa

- Bi puntuen metodoa:



t_{28} (irteeraren amaierako balioaren %28,3 lortzeko denbora) eta t_{63} (irteeraren amaierako balioaren %63,2 lortzeko denbora) grafikotik lortzen dira

t_{28} eta t_{63} ezagututa, posiblea da t_m eta τ lortzea

$$t_{28} = t_m + \tau / 3 \qquad t_{63} = t_m + \tau$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad \tau = \tfrac{3}{2}\left(t_{63} - t_{28}\right) \quad t_m = t_{63} - \tau$$

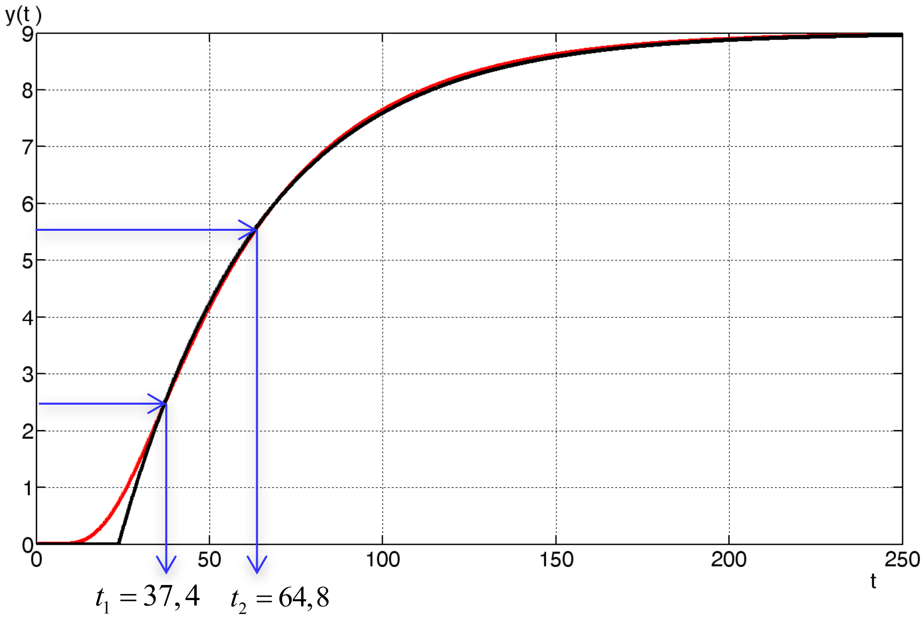
POMTM eredua

$$G(s) = \frac{K e^{-t_m s}}{\tau s + 1}$$

Denboraren Eremuko Azterketa

- Goi ordeneko sistemen denbora-erantzuna
  - ✓ **POMTM sistema baten identifikazioa**

❑ **7.Adibidea** : Goi ordeneko sistema batek gorriz dagoen erantzuna eman du Δu=10 anplitudeko espaloi-sarrera baten aurrean. Lortu eredu esperimental bat (beltzez)



$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{9}{10} = 0.9$$

$$y(t_1) = 0.283 * \Delta y = 0.283 * 9 = 2.54 \quad t_1 = 37.4\,s$$

$$y(t_2) = 0.632 * \Delta y = 0.632 * 9 = 5.68 \quad t_2 = 64.8\,s$$

$$\tau = 1.5(t_2 - t_1) = 41.1\,s$$

$$L = t_2 - \tau = 23.7\,s$$

$$\boxed{G_{POMTM}(s) = \frac{0.9}{41.1s + 1} e^{-23.7s}}$$

Bibliografia

- "Sistemas de Control Moderno". Dorf, Richard C., Bishop, Robert H. (2005). **5 kapitulua (1-6 atalak, problemak)**.
- "Ingeniería de Control Moderna" K. Ogata (traducción S. Dormido). (2010). **5 kapitulua (1-4 atalak, problemak)**.
- "Sistemas de Control Automático" (7ª edición). Benjamín C. Kuo. Pearson (1996). **7 kapitulua (problemak)**.
- "Control Automático con herramientas interactivas". JL Guzmán, R Costa, M. Berenguel, S. Dormido (2012). **3 kapitulua .**