Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Automatika eta Kontrola

2. Gaia Sistema Dinamikoen Ereduak

Sistemen Ingeniaritza eta Automatika Saila

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Gai-Zerrenda

- Irakasgaiaren edukiak
  - Aurkezpena
  - Sarrera
  - **Sistema dinamikoen ereduak**
  - Kanpo-adierazpidea
  - Denboraren eremuko azterketa
  - Sistema berrelikatuak
  - Kontrolagailuen diseinua
  - Maiztasunaren eremuko azterketa

Sistema Dinamikoen Ereduak

Aurkibidea:

- **Sarrera**
- Eredu motak
- Eredu matematikoak
- Ereduen linealizazioa

Sistema Dinamikoen Ereduak

Helburuak

- Propietateen kontserbazio-legeak aplikatuz, sistema baten eredu matematikoa kalkulatzen ikastea.

Norbereganatu beharreko gaitasunak:

- Hainbat sistema-motaren (mekanikoa, hidraulikoa, elektrikoa,…) portaera dinamikoa sortzen duten fenomeno fisiko-kimikoak identifikatzeko gaitasuna.
- Prozesu baten sarrera-aldagai (manipulatutako aldagaia eta perturbazio-aldagaiak) eta kontrolatutako irteera-aldagaiaren arteko eredu matematikoa lortzeko gaitasuna.

Sarrera

Zer da sistema baten eredua?

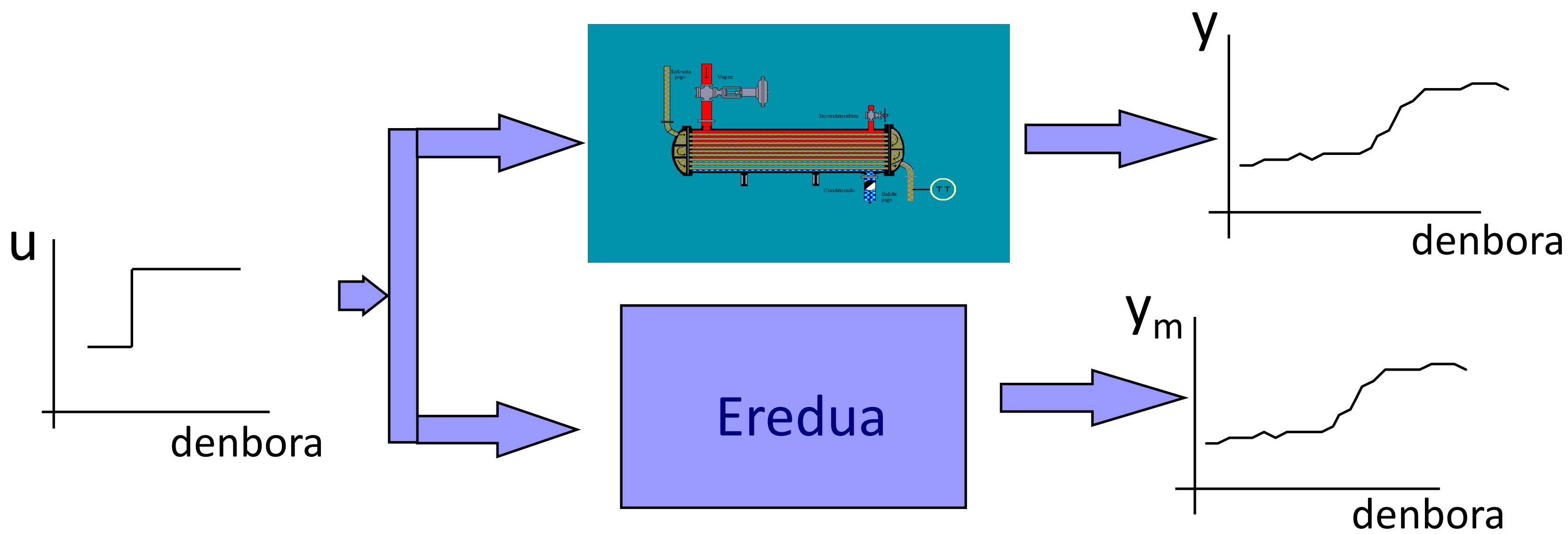
- ✓ Errealitatearen adierazpen bat da, non interesgarriak diren elementuak eta erlazioak bakarrik adierazten diren.
- ✓ Helburu eta prozesu-mota bakoitzeko, hainbat eredu-mota definitu ditzakegu: fisikoak, kualitatiboak, matematikoak,…
- ✓ Diseinuan, entrenamenduan, simulazioan,… erabiliak.
- ✓ Ezinbestekoa da erraztasunaren eta doitasunaren arteko konpromezua lortzea, hots, eredu simplea edo konplexua aukeratzea.

Sistema Dinamikoen Ereduak

❒ Sarrea

☐ Zer da sistema baten eredua?

- Sistema baten ereduak, sarrera ezagun baten aurrean, benetako sistemak bezala erantzuten du.



Sistema Dinamikoen Ereduak

Sarrera

Eredu matematikoak

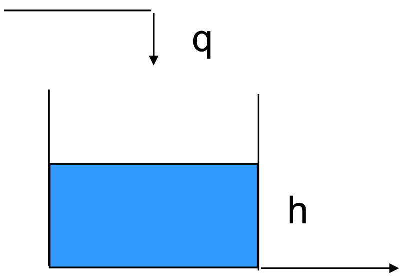
- ✓ Sistema baten aldagaien arteko erlazioa adierazten duten ekuazio-multzoa da. Ekuazio horiek sistemaren portaera adierazten dute.
- ✓ Ezagutza-arloari dagokien lege eta printzipioetan oinarrituta lortzen dira.
- ✓ Sarrera eta irteera-aldagaien arteko erlazioa adierazten dute.
- ✓ *Kontrol-ereduak* eredu matematikoak manipulatuz lortzen dira, bakarrik esanguratsuak diren aldagien arteko erlazioak lortu arte.

Sarrera

Prozesu jarraituak eta gertaera diskretuak:

✓ Prozesu jarraituak

- Prozesuko aldagaiak hauek denboran zehar era jarraituan bilakatzen dira, balio-tarte bateko edozein balio hartuz.
- Normalean, ekuazio diferentzialen edo deribatu partzialen bitartez adierazten dira.
- Aldagaien guztien artean, bakarrik batzuen eboluzioa nolakoa den ezagutzea da helburua.



Sarrera

- Prozesu jarraituak eta gertaera diskretuak:
  - ✓ Gertaera diskretuko prozesuak
    - Aldagaiak une diskretuetan bakarrik alda daitezke eta har ditzaketen balioak mugatuta daude.
    - Eginkizunen sekuentzien bitartez adierazten dira.
    - Irteresgarriak diren aldagaien portaera estadistikoa ezagutzea da helburua.

Aurkibidea:

- Sarrera
- **Eredu motak**
- Eredu matematikoak
- Ereduen linealizazioa

Sistema Dinamikoen Ereduak

- Eredu motak
  - Eredu **Estatikoak**:

    Sistema baten aldagaiak erlazionatzen dituzte, sistema orekan dagoenean.

    - ✓ **Egoera iraunkorra** adierazten dute
    - ✓ **Ekuazio algebraiko**en bitartez adierazten dira
    - ✓ Diseinurako erabiltzen dira

Sistema Dinamikoen Ereduak

- Eredu motak
  - Eredu **Dinamikoak**:

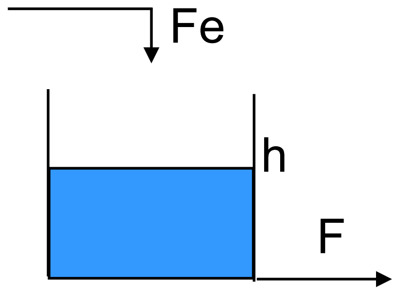
    Sistema baten aldagaiak erlazionatzen dituzte, denboran bilakatzen direnean.

    - ✓ **Portaera** adierazten dute
    - ✓ **Ekuazio diferentzial**en bitartez adierazten dira.
    - ✓ Kontrolean eta entrenamenduan erabiltzen dira.

Sistema Dinamikoen Ereduak

❐ Eredu motak

- Eredu estatikoak vs dinamikoak

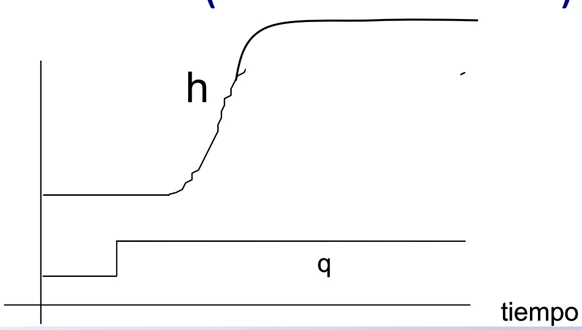


Eredu **estatikoa**: $\boxed{F = F_e \; ; \; F = k\sqrt{h}}$

✓ Egoera iraunkorreko erlazioak (orekako erlazioa)

Eredu **dinamikoa**: $\boxed{\dfrac{dV}{dt} = A\dfrac{dh}{dt} = F_e - k\sqrt{h}}$

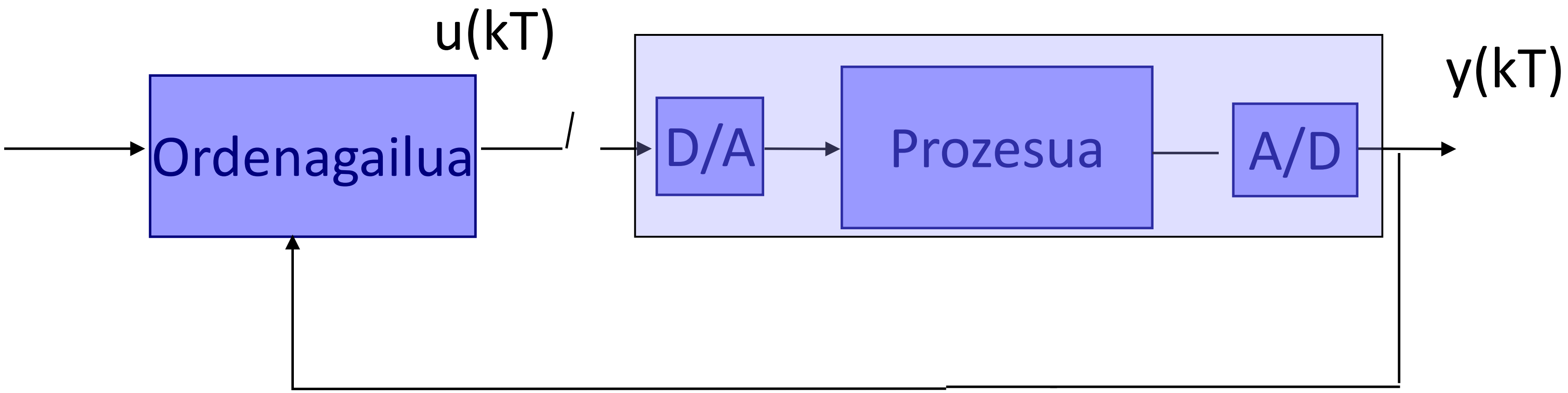
✓ Egoera iragankorreko erlazioak (denboran zehar)



Eredu motak

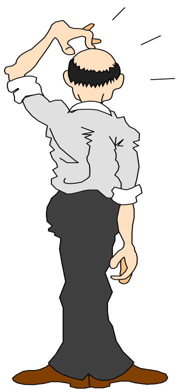
Eredu Diskretizatuak

- ✓ Sarrera eta Irteera-aldagaiak erlazionatzen dituzte kT laginketa periodoetan (Denbora Diskretuko Ereduak)



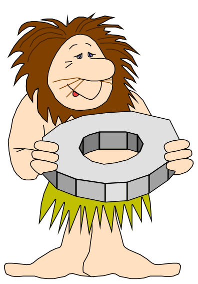
Eredu motak

Eredu **matematikoak**:



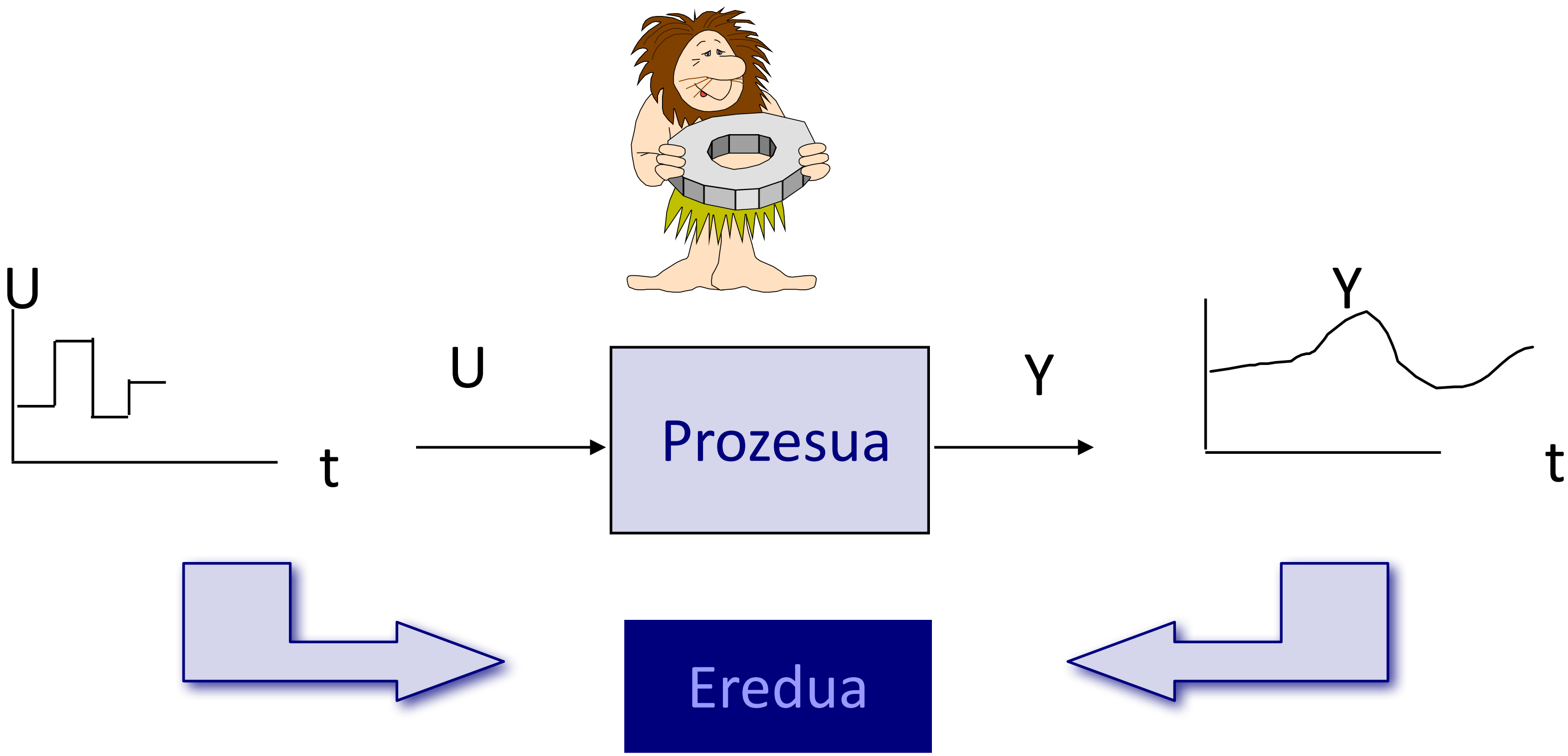
- ✓ Ezagutza-arloko lege eta printzipioak aplikatuz lortzen dira.
- ✓ Erabilgarritasun orokorra dute.
- ✓ Prozesuaren eta baita ere lege eta printzipio fisiko-kimikoen ezagutza sakona ezinbestekoak da.

Eredu **esperimentalak**:



- ✓ Esperimentazioan eta datuen analisian oinarrituta daude.
- ✓ Eredua prozesuaren sarrera eta irteera-datu esperimentaletatik lortzen da.

- Eredu motak
  - Eredu **esperimentalak**:



Sistema Dinamikoen Ereduak

Aurkibidea:

- Sarrera
- Eredu motak
- **Eredu matematikoak**
- Ereduen linealizazioa

Eredu Matematikoak

Metodologia

- ✓ Ereduaren limite eta helburuak ezarri (baliotasun-tartea, parametroen balioak,…)
- ✓ Hipotesi basikoak ezarri (sistemaren bloke-diagrama, aldagai esanguratsuak)
- ✓ **Ezagutza arloko legeak eta printzipioak erabiliz**, sistemaren aldagaiak erlazionatzen dituzten ekuazioak idatzi:
  - Propietateen kontserbazio-printzipioak (masa, energia, momentua,…)
  - Ezagutza-arloko lege espezifikoak (mekanika, elektrizitatea, hidraulika,…)

Eredu Matematikoak

Metodologia

- **Askatasun-graduak** (Eredu osoa) **NF=NV-NE=0**
  - NF: askatasun-graduak
  - NV: irteera-aldagaiak
  - NE: ekuazioak
- Lortutako ekuazioek linealak ez diren elementuak eduki ditzakete.
  - Batzuetan ez-linealtasunak mesprezatzen dira (hipotesia)
  - Ezin direnean mezprezatu, eredu lineal hurbildu bat lortu dezakegu (eredu matematiko linealizatua) ➔**Linealizazioa**
- Eredu lineal hurbilduan oinarrituta, posible da kontrol-eredu bat lortzea (ekuazioak konbinatuz eta esanguratsuak ez diren aldagaiak kenduz)

Eredu Matematikoak

Eredu-motak:

- ✓ Eskuazio diferentziak lineal edo ez-linealak
- ✓ Koefiziente konstanteak edo denboran aldakorrak
- ✓ Parametro **kontzentratuak** (ekuazio diferentzialak) edo **parametro banatuak** (deribatu partzialak).

Sistema Dinamikoen Ereduak

Eredu Matematikoak

P propietate baten kontserbazio-legea

Sistema baten P propietate baten metaketa-abiadura, V bolumen finko batean

=

P propietatearen sarrera-abiadura V-n

-

P propietatearen irteera-abiadura V-tik

+

P propietatearen sorrera-abiadura V-n

-

P propietatearen desegite-abiadura V-n

Eredu Matematikoak

Sistema Mekanikoak

- Masa, motelgailu edo malguki baten portaera dituzten elementuez osatutako sistemak dira.
- Eredu matematikoak lortzeko **Newton-en legeak** erabiltzen dira

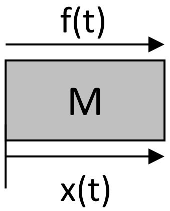
Newton-en 2. legea $\vec{F} = \sum m\vec{a}$

- Sistema mekaniko motak:
  - Traslazio-sistema mekanikoak
  - Errotazio-sistema mekanikoak

Eredu Matematikoak

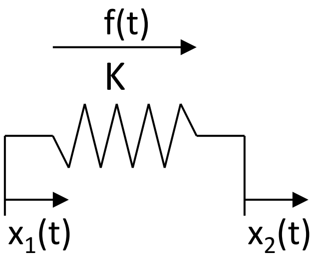
Traslazio-sistema mekanikoak: Oinarrizko elementuak

Masa



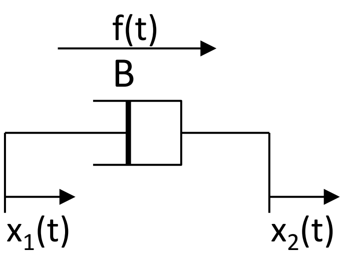
$$f(t) = M\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Malgukia



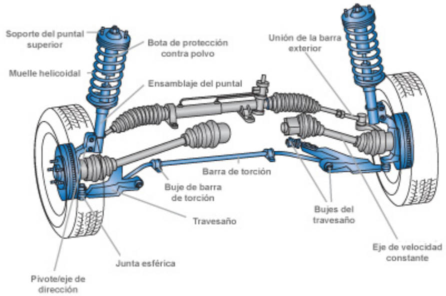
$$f(t) = K\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$

Motelgailua



$$f(t) = B\left[\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right]$$

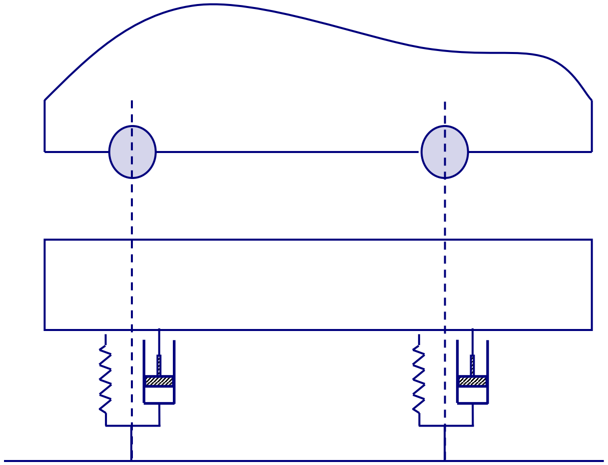
Sistema Dinamikoen Ereduak



❒ Eredu Matematikoak

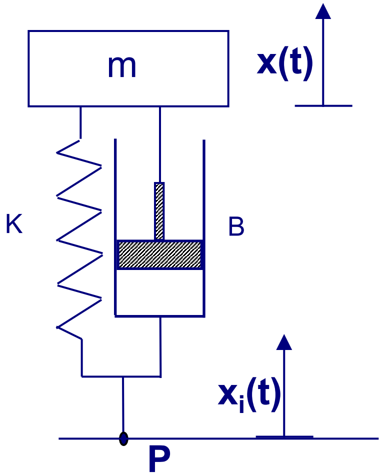
□ Traslazio-sistema mekanikoak

✓ **1 Adibidea: Automobil baten esekidura-sistema**. Kotxearen *m* masaren *x(t)* desplazamendua ezagutu nahi da, $x_i(t)$ aldatzerakoan



- sarrera: xi(t), irteera: x(t)

Eredu matematikoa Newton-en 2. legea aplikatuz lortzen da:



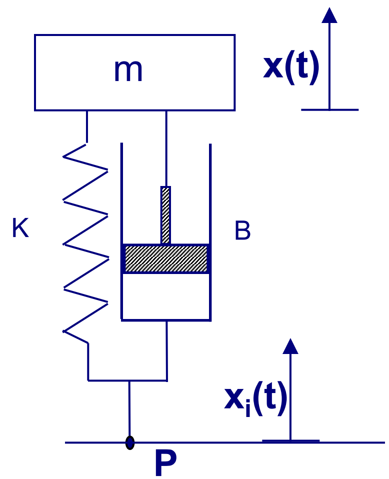
$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

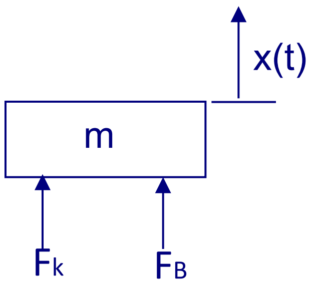
Sistema Dinamikoen Ereduak

Eredu Matematikoak

Translazio-sistema mekanikoak: 1 Adibidea

✓ *m* masan eragiten duten indarrak (eman $x_i > x$ dela)





$$F_K + F_B = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_k = K(x_i(t) - x(t))$$

$$F_B = B\frac{d(x_i(t) - x(t))}{dt}$$

NV= 3 (F_K, F_B, x)
NE= 3, NF=0

F_B eta F_K kenduz:

- sarrera: xi(t), irteera: x(t)

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = B\frac{dx_i(t)}{dt} + Kx_i(t)$$

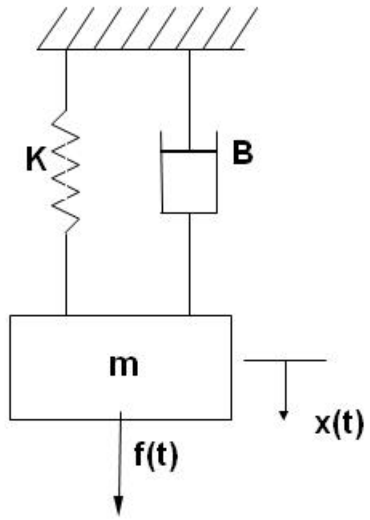
Sistema Dinamikoen Ereduak

❒ Eredu Matematikoak

☐ Traslazio-sistema mekanikoak:

✓ **1 Ariketa: Masa-malguki-motelgailua (1. mintegia)**

- *m* masaren *x(t)* desplazamendua eta *f(t)* indarra erlazionatzen dituen eredu matematikoa lortu.

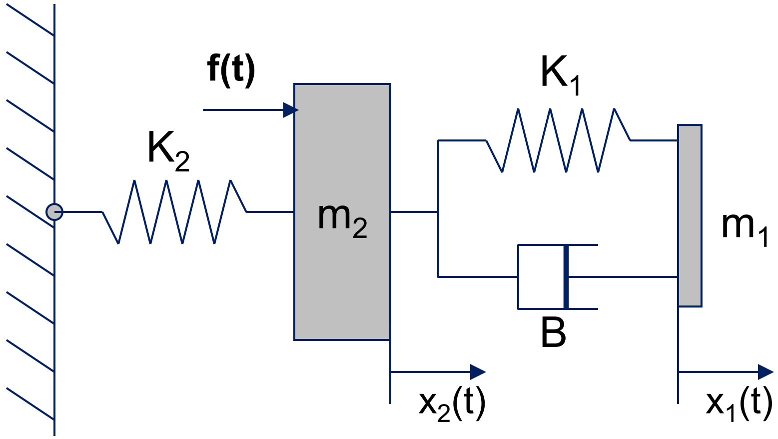


Eredu Matematikoak

Translazio-sistema mekanikoak

✓ 2 Ariketa: Energia-xurgatzailea (1. mintegia)

- m_2 masa bati f(t) indarra ezartzean, $x_2(t)$ desplazamenduan bibrazioak sortzen dira. Bibrazioak horiek murrizteko, m_1 masa gehitu zaio sistemari, motelgailu eta malguki baten bitartez. m_2 baino askoz txikiagoa da m_1.
- Aurki ezazu x_1 eta x_2 desplazamenduen (irteerak) erlazioa f(t) indarrarekiko (sarrera).



Sistema Dinamikoen Ereduak

Eredu Matematikoak

Errotazio-sistema mekanikoak:

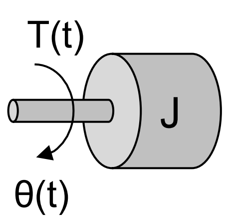
✓ Newton-en 2. legea errotazio-sistema baten:

$$T = J\alpha$$

non:

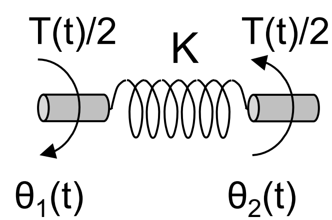
- T: gorputz baten eragiten duten indar-pareen batukaria (Nm)
- J: gorputz baten inertzia-momentua bere masa-zentruarekiko (Kg m^2)
- α: gorputzaren azelerazio angeluarra(rad/s^2)

✓ Oinarrizko errotazio-elementuak



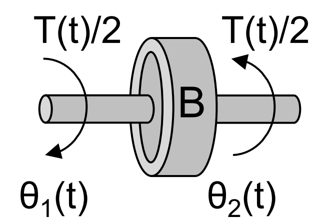
Inertzia

$$T(t) = J\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$



Malgukia

$$T(t) = K\left[\theta_1(t) - \theta_2(t)\right]$$



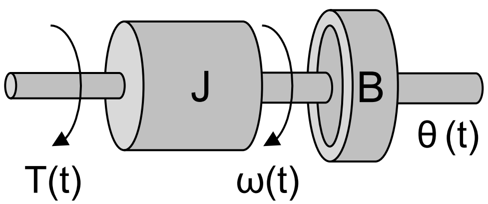
Marruskadura

$$T(t) = B\left[\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt}\right]$$

Eredu Matematikoak

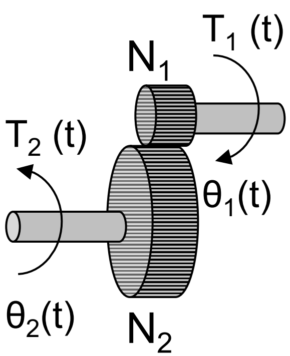
Errotazio-sistema mekanikoak

✓ **2. Adibidea**: **Inertzia eta moteldura**



$$T(t) - T_B(t) = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

✓ **3. Adibidea**: **Engranajeak**



Erradioaren eta hortzen arteko erlazioa: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$

Desplazamendu linealak berdinak dira: $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$

Engranajeek egindako lana berdina da: $T_1(t)\theta_1(t) = T_2(t)\theta_2(t)$

$$T_1(t) = \frac{N_1}{N_2} T_2(t) \qquad \theta_1(t) = \frac{N_2}{N_1}\theta_2(t)$$

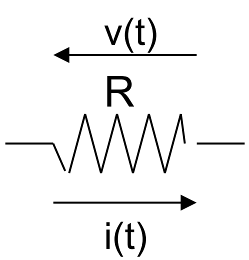
Sistema Dinamikoen Ereduak

❐ Eredu Matematikoak

☐ Sistema elektrikoak:

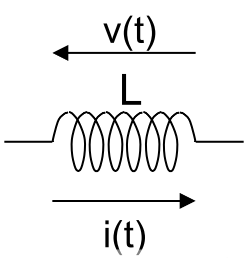
- ☐ Erresistentzia, bobina eta kondentsadorek osatuta daude
- ☐ **Kirchoff-en legea** da energia-kontserbazio legea
  - ✓ Intentsiatearen legea (nodoak) eta tentsioen legea (mailak)
- ☐ Elementu basikoak:

Erresistentzia



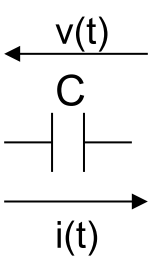
$$v(t) = R\,i(t)$$

Harila (bobina)



$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

Kondentsadorea

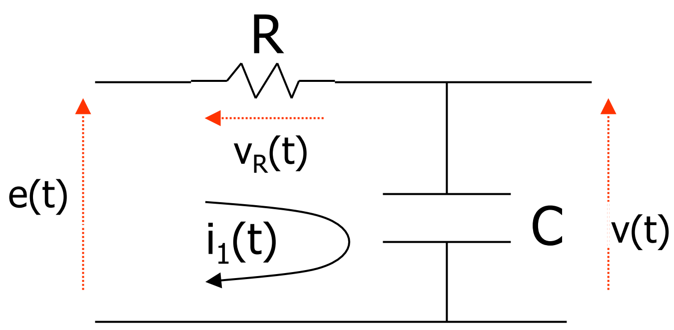


$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

Eredu Matematikoak

Sistema elektrikoak:

✓ 4. Adibidea: RC zirkuitua



Kirchhoff-en legeak aplikatuz:

$$e(t) = v_R(t) + v(t)$$

$$v_R(t) = Ri_1(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)\,dt$$

NV= 3 (v_R, v, i_1)
NE= 3
NF=0

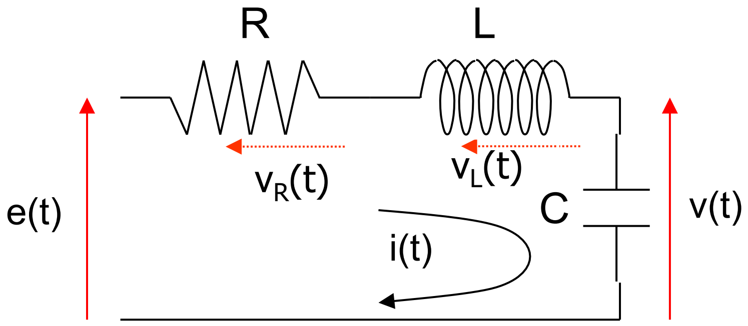
v(t) eta e(t)-ren arteko erlazioa lortzeko, ekuazioak konbinatuz $v_R(t)$ eta i(t) kendu behar ditugu:

$$\boxed{RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t)}$$

Eredu Matematikoak

Sistema elektrikoak

5. Adibidea: RLC zirkuitua



Kirchhoff-en legeak aplikatuz:

$$e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v(t)$$

$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

NV= 4 (v_R, v_L, v, i)
NE= 4
NF=0

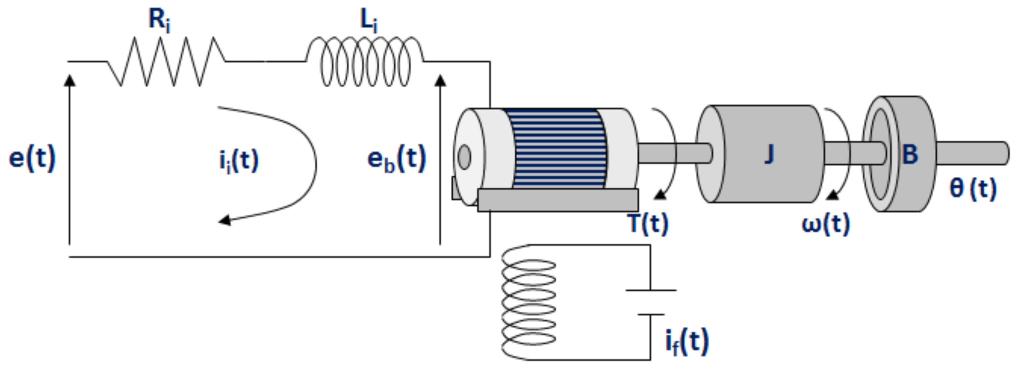
$v_R(t)$, $v_L(t)$ eta i(t) kenduz, v(t) eta e(t)-ren erlazioa lor dezakegu:

$$\boxed{LC\frac{d^2v(t)}{dt^2} + RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t)}$$

❐ Eredu Matematikoak

- Sistema elektromekanikoa
  - ✓ **6. Adibidea: CC Motorra**

Motorrak energia elektrikoa (e(t)) energia mekaniko bihurtzen du, motorrari konektatutako karga baten ardatza bira araziz (θ(t)).



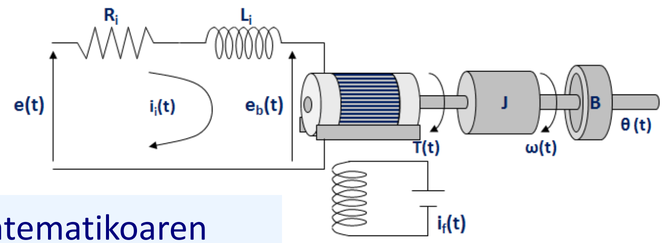
- ✓ Lor ezazu bere dinamikaren eredu matematikoa.

Sistema Dinamikoen Ereduak

Eredu Matematikoak

Sistema elektromekanikoa.

6. Adibidea: CC Motorra



Eredu matematikoaren kalkulua oinarrizko lege eta printzipioak ezarriz.

1. Estatorrean sortu eta errotorra zeharkatzen duen fluxu magnetikoa eremu-zirkuituak sortzen du, eta eremu-korrontearekiko $i_f(t)$ proportzionala da:

$$\Phi(t) = K_f i_f(t) \quad (1)$$

2. Motorrean sortutako momentu eragilea, $T(t)$, fluxu magnetikoa $\phi(t)$ eta induzituaren korrontearekiko $i_i(t)$ proportzionala dela :

$$T(t) = K_i \phi(t) i_i(t) \quad (2)$$

$$T(t) = K_i K_f i_f(t) i_i(t)$$

Eredua lineala izatea nahi badugu, motorra induzituaren bidez kontrolatuko dugunean $i_f(t)$ = *kte* egingo dugu, eta eremuaren bidez kontrolatzerakoan $i_i(t)$ = *kte.*

3. Induzituaren zirkuituan (errotorra):

$$e(t) = R_i\, i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} + e_b(t) \quad (3)$$

4. $e_b(t)$ da errotorreko zirkuituan intentsitatea dabilenean sortzen den indar kontraelektroeragilea. Tentsio hau ardatzaren abiadurarekiko proportzionala da:

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (4)$$

5. Eremu magnetikoaren zirkuitua:

$$e_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \quad (5)$$

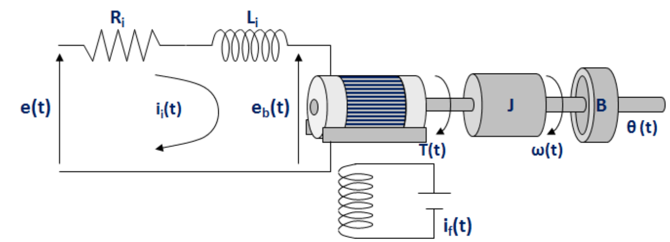
6. Azkenik, motor-momentuak $T(t)$, motorraren ardatzari lotutako sistema mekanikoa higiaraziko du:

$$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (6)$$

Eredu Matematikoak

Sistema elektromekanikoa

6. Adibidea: CC Motorra



1. Estatorrean sortu eta errotorra zeharkatzen duen fluxu magnetikoa eremu-zirkuituak sortzen du, eta eremu-korrontearekiko $i_f(t)$ proportzionala da:

2. Eman dezagun motorrean sortutako momentu eragilea, $T(t)$, fluxu magnetikoa eta induzituaren korrontearekiko $i_i(t)$ proportzionala dela :

$$\boxed{\Phi(t) = K_f i_f(t)} \quad (1)$$

$$\boxed{T(t) = K_i \phi(t) i_i(t)} \quad (2)$$

$$\boxed{T(t) = K_i K_f i_f(t) i_i(t)}$$

Eredua lineala izatea nahi badugu, motorra induzituaren bidez kontrolatuko dugunean $i_f(t) = kte$ egingo dugu, eta eremuaren bidez kontrolatzerakoan $i_f(t) = kte$.

INDUZITUAREN BIDEZ KONTROLATZEKO: i_f= kte

$$\boxed{T(t) = K_m i_i(t)}$$ $K_m = K_i K_f i_f$ konstante

EREDUAREN BIDEZ KONTROLATZEKO : i_i= Kte

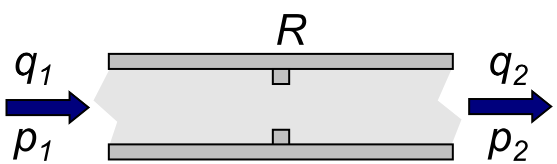
$$\boxed{T(t) = K_m i_f(t)}$$ $K_m = K_i K_f i_i$ Konstante

Eredu Matematikoak

Sistema hidraulikoak

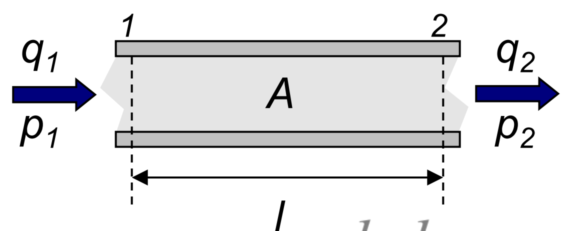
✓ Oinarrizko elementuak

Erresistentzia



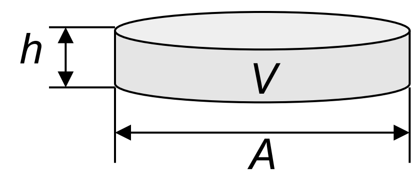
$$R = \frac{dp}{dq}$$

Inertzia



$$p_1 - p_2 = \frac{\rho l}{A}\frac{dq}{dt}$$

Kapazitatea

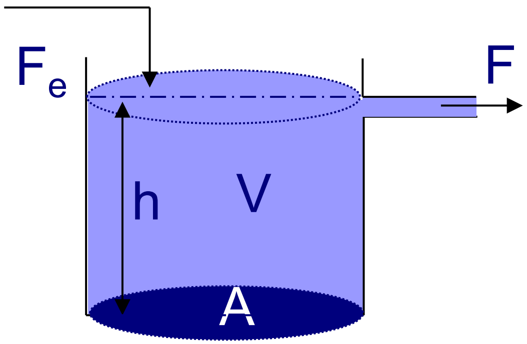


$$C = \frac{dV}{dh}$$

Eredu Matematikoak

Sistema hidraulikoak

✓ **7. Adibidea**: Gainezka husten den tankea



Hipotesia:
- **Tankeko likido-maila konstantea da**
- ***m***: tankeeko likido-masa
- ***A***: tankearen zeharkako azalera
- ***ρ***: dentsitatea (konstantea likidoetan)**,**
- ***Fe(t)* eta *F(t)***: sarrera eta irteera-emariak

✓ Masaren kontserbazio-legea:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dm}{dt} = \rho F_e - \rho F \\ m = \rho V = \rho A h \end{array}\right\}$$

Ek. diferentziala

$$A\frac{dh}{dt} = F_e - F \qquad \textbf{(1)}$$

Ek. Algebraikoa

✓ Gainezkako hustuketa:

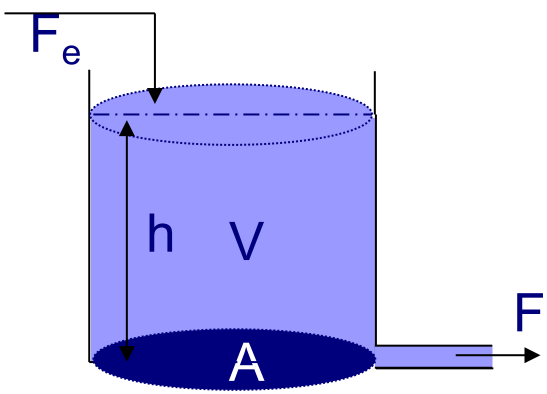
$$F_e = F \qquad \textbf{(2)}$$

NV= 2 (h eta F)
NE= 2
NF=0

Eredu Matematikoak

Sistema Hidraulikoak

- **7. Adibidea**: Grabitatez husten den tankea



- **Tankeko likido-maila ez da konstantea**

  - Tankeko likido-masaren kontserbazio-legea

$$A\frac{dh}{dt} = F_e - F$$ **Ek. Diferentziala** **(1)**

  - Grabitatearen bidezko hustuketa: mailaren araberakoa

    - **Fluxu laminarra** $F = k\,h$
    - **Fluxu zurrunbilotsua** $F = k\sqrt{h}$

Ek. Algebraikoa **(2)**

NV= 2 (h eta F), NE= 2, NF=0

F (1) eta (2)-tik kenduz

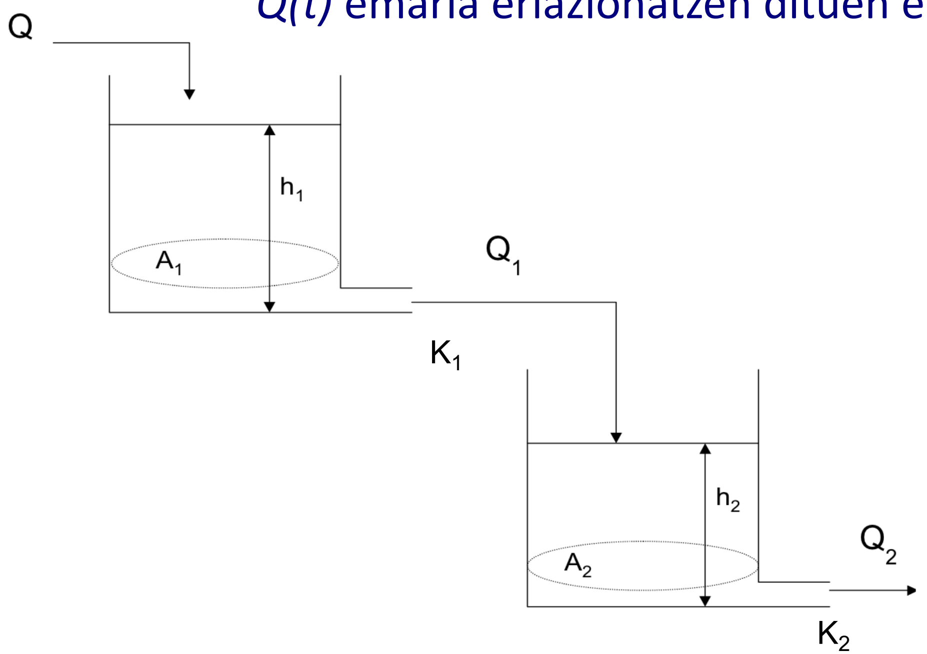
$$A\frac{dh}{dt} = F_e - kh$$

Eredu Matematikoak

Sistema hidraulikoak

- **3. Ariketa** : Tanke independenteak

  - Bigarren tankeko h_2 maila eta lehenengo tankean sartzen den $Q(t)$ emaria erlazionatzen dituen eredu matematikoa lortu.



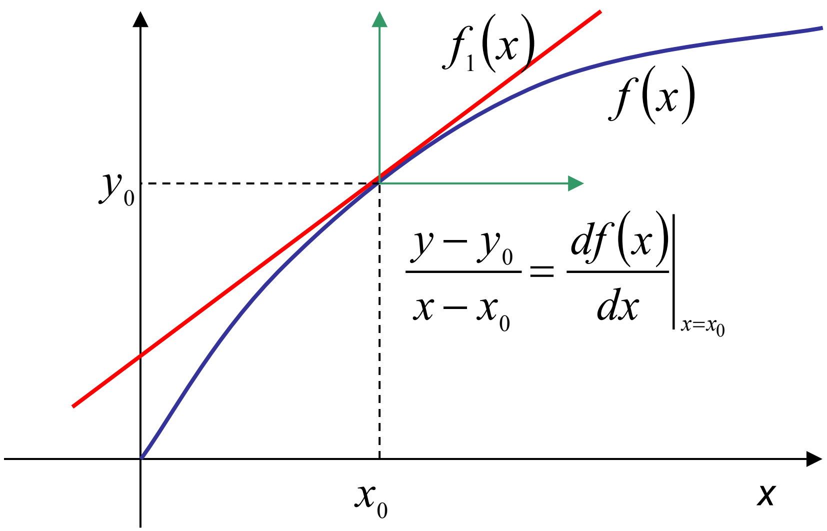
Sistema Dinamikoen Ereduak

Aurkibidea:

- Sarrera
- Eredu-motak
- Eredu matematikoak
- **Ereduen linealizazioa**

Sistema Dinamikoen Ereduak

❑ Ereduen Linealizazioa



$$y = y_0 + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

- Eredu lineal hurbilduak lortzea da helburua. Ekuazioak operazio-puntuaren (OP) inguruan linealizatuz lor daiteke hori.
- Operazio-puntua, sistemak oreka-egoera egonkorrean operatzen duen puntua da.
- OP-n, aldagaiek balio konstante jakin bat daukate.
- Eredu hauek hurbilketak dira, eta operazio-puntutik hurbil lan egiten dugunean bakarrik ematen dituzte emaitza onak.
- Linealizazioaren oinarria:
  Kurba, zuzen baten bitartez hurbidu dezakegu OP inguruan.

Edozein sistena ez-lineal, eredu lineal hurbildu baten bitartez ordezka daiteke operazio-puntuaren inguruan (Taylor-en seriea garatuz eta 1. ordenako terminoak mezprezatuz)

Ereduen Linealizazioa

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots$$

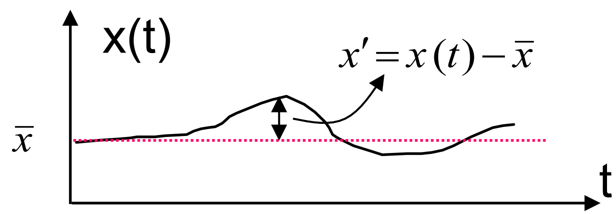
- Hurbilketa lineala goi-ordenakoak (>1) diren terminoak mezprezatuz lortzen da (kurbaren tangentea lortuko dugu):

$$f(x)\cong f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x0)$$

Sistema Dinamikoen Ereduak

Ereduen Linealizazioa

- ✓ Ekuazio ez-linealen hurbilketa lineala lortzean datza
- ✓ Matematikoki errezago eta sinpleagoak dira
- ✓ Erabilkortasun-tarte txikia (bakarrik OP inguruan)
- ✓ Desbideratze-aldagaiak /Aldagai inkrementalak:
  - Linealizatu eta gero, OP-a da zeroa, hortaz, eredu matematikoa desbideratze-aldagai edo aldagai inkrementaletan definitzen da.



$$A\frac{dh}{dt} = F_e - k\sqrt{h}$$

$$\Rightarrow$$

$$A\frac{d\ \Delta h}{dt} = \beta\ \Delta F_e - \alpha\ \Delta h$$

Sistema Dinamikoen Ereduak

❒ Ereduen Linealizazioa

- ✓ Ekuazio diferentzial ez-lineala: $f(x, y, z) = 0$
- ✓ Operazio-puntuan aldagaien balioak: $OP : x_0,\ y_0,\ z_0$
- ✓ Operazio-puntua ekuazio diferentzial ez-linealaren soluzioa da:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- ✓ Taylorren seriea garatuz:

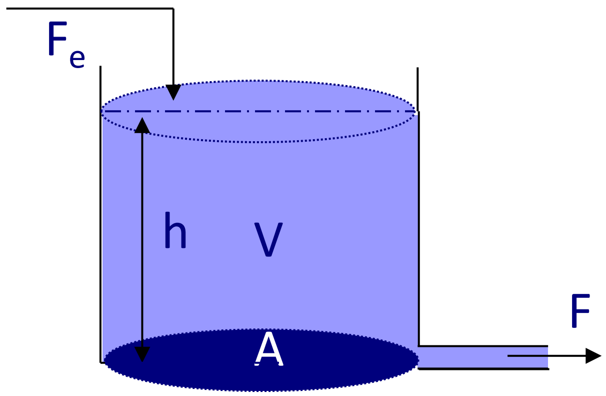
$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{PO}(x - x_0) + \left.\frac{df}{dy}\right|_{PO}(y - y_0) + \left.\frac{df}{dz}\right|_{PO}(z - z_0) + \ldots$$

- ✓ **Hurbilketa lineala** (goi-ordeneko terminoak mezprezatuz):

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{PO}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{PO}(y - y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{PO}(z - z_0) = 0$$

- Ereduen Linealizazioa

  - **8. Adibidea: grabitatez husten den tankea**



- Masa-kontserbazio legea:

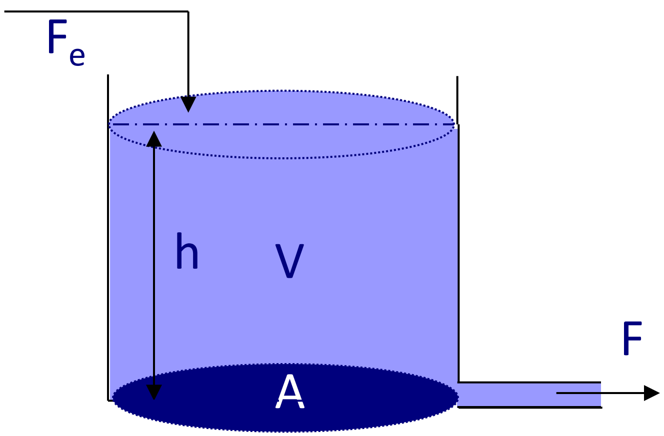
$$A\frac{dh}{dt} = F_e - F \qquad [1]$$

- Fluxu zurrunbilotsua:

$$F = k\sqrt{h} \qquad [2]$$

Ereduen Linealizazioa

8 Adibidea: grabitatez husten den tankea



Ekuazio diferentzial ez lineala

$$\boxed{A\frac{d\,\Delta h}{dt}+\frac{k}{2\sqrt{\bar{h}}}\Delta h-\Delta F_e=0}$$

Koefizienteen balioa operazio-puntuarekikoaren menpekoa da

- [2] eta [1] konbinatuz:

$$\boxed{A\frac{dh}{dt}-F_e+\ \mathrm{k}\ \sqrt{\mathrm{h}}=0} \qquad \boxed{f(\dot{h},h,F_e)=0}$$

Operazio-puntua: $\bar{\dot{h}},\bar{h},\bar{F}_e$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_{PO}\Delta\dot{h}+\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{PO}\Delta h+\left.\frac{\partial f}{\partial F_e}\right|_{PO}\Delta F_e=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_{PO}=A\ ;\ \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{PO}=\frac{k}{2\sqrt{\bar{h}}}\ ;\ \left.\frac{\partial f}{\partial F_e}\right|_{PO}=-1$$

Desbideratze-aldagaiak:

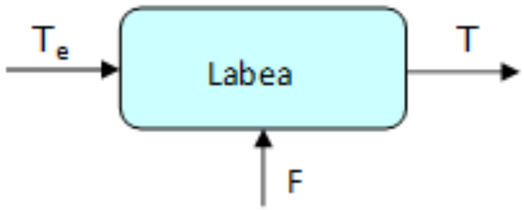
$$\Delta h=h-\bar{h}\ ;\ \Delta F_e=F_e-\bar{F}_e$$

Sistema Dinamikoen Ereduak

❒ Ereduen Linealizazioa

✓ 4. Ariketa: Labea

Materiala berotzeko labe baten, Te tenperatura duela sartu eta T tenperatura duela irtengo da. Materialak T tenperatura lor dezan F likido beroa manipulatuko da. Operazio-puntuan, sarrerako tenperaturak 10ºC ditu eta irteerakoak 40ºC. Hala ere, sarrerako tenperatura hori aldakorra izango da giro tenperatura-aldaketen ondorioz. Sarrera-tenperatura neurtzeko -10ºC eta 50ºC neurtze-tartea duen sentsorea erabiliko da.



Bestalde, sarrera Te (ºC) eta irteeraT (ºC) tenperaturen eta likido beroaren F (kg/min) arteko erlazioa honakoa da:

$$(5+3F)\frac{dT}{dt}+2T^2=3FT+T_e$$

Likido beroa manipulatzeko balbula bat erabiliko da, gehienez 90 kg/min-ko emaria erregula dezakeena. Irteera-tenperatura neurtzeko -10ºC eta 110ºC tarteko sentsorea erabiliko da.

Honakoa eskatzen da:

✓Lor ezazu sistemaren eredu linealizatua adierazitako operazio-puntuarentzat. Transferentzi funtzio eran adierazi.
✓Prozesuaren bloke-diagrama marraztu, aldagai esanguratsuenak adieraziz. Gc(s) kontrolagailuaren sarrera eta irteerak %-tan adierazi behar dira.

Bibliografia

- "Sistemas de Control Moderno". Dorf, Richard C., Bishop, Robert H. (2005). **2. atala (1, 2 eta 3 azpiatalak, ariketak)**.
- "Ingeniería de Control Moderna" K. Ogata (traducción S. Dormido). (2010). **2. atala (3 eta 7 azpiatalak, ariketak); 3 eta 4 atalak eta**
- "Sistemas de Control Automático" (7ª edición). Benjamín C. Kuo. Pearson (1996). **4. atala eta ariketak**
- "Sistemas Automáticos". F.X. Blasco Ferragud. M.A. Martínez Iranzo, J.S. Senent Español, J. Sanchis Sáez. (2000). **1. atala eta ariketak**.