INTERPRETACIÓN MATRICIAL DEL MÉTODO

Matriz U: Se reordena la matriz final, según el vector de pivotaje final

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ FINAL

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Matriz L: Se construye a partir de los multiplicadores (m_{ij}) usados. Pero hay que tener en cuenta los intercambios realizados.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ m_{p_2,1} & 1 & & & \\ m_{p_3,1} & m_{p_3,2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{p_n,1} & m_{p_n,2} & m_{p_n,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$p_2, p_3, \ldots, p_n$ se obtienen del vector de pivotaje

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{p_2,1} & 1 & 0 \\ m_{p_3,1} & m_{p_3,2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{31} & 1 & \\ m_{21} & m_{22} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Factorización LU: El producto $L \cdot U$ no es A, sino que es A reordenado según el vector de pivotaje final. En este método:

$$\boxed{L \cdot U = P^t \cdot A} \rightarrow$$ A con sus filas reordenadas según p final.

La matriz P es : $P = (\underline{e}_{p_1}\ \underline{e}_{p_2} \dots \underline{e}_{p_n})$, donde $\underline{e}_{p_i}$ es un vector columna con todo 0s, excepto un 1 en la fila p_i.

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P es SIEMPRE ortogonal: $P^t = P^{-1}$

$$P^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo del determinante : $P^t \cdot A = L \cdot U \Rightarrow |P^t| \cdot |A| = \underbrace{|L|}_{=1} \cdot |U| \Rightarrow$

$|P^t| = (-1)^{\text{nº intercambio de filas}}$

$$|A| = (-1)^{\text{nº intercambio de filas}} \cdot |U|$$

$|P^t|$

(10)

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{3\ 5\ 3\ 7}}^{A}} & \\ 3 & 5 & 3 & 7 & -8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & -6 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right)$$

Cálculo de factores de escala:

$$\begin{cases} s_1 = \max\{|3|, |5|, |3|, |7|\} = 7 \\ s_2 = 4 \\ s_3 = 5 \\ s_4 = 8 \end{cases}$$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

Paso K=1 Se busca en la columna 1 el elemento de máximo valor absoluto, como si la matriz se hubiese escalado

$$\max_{i\geq 1}\left\{\frac{|a_{i1}|}{s_i}\right\} = \max\left\{\frac{3}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{6}{8}\right\} = \frac{|a_{21}|}{s_2}$$ PIVOTE

Transformaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & 7 & -8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & -6 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \\ F_4 = F_4 - 2F_2}]{\substack{m_{11}=1;\ m_{31}=1 \\ m_{41}=2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Paso K=2 Se busca en columna 2 el elem. de máx. valor absoluto, como si la matriz se hubiese escalado:

$$\max\left\{\frac{|a_{12}|}{s_1}, \frac{|a_{32}|}{s_3}, \frac{|a_{42}|}{s_4}\right\} = \left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{0}{8}\right\} = \frac{|a_{32}|}{s_3}$$ PIVOTE

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - F_3 \\ F_4 = F_4}]{\substack{m_{12}=1 \\ m_{42}=0}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Paso K=3 Se busca en la columna 3 el elem. de máx. valor absoluto, como si la matriz se hubiese escalado.

$$\max\left\{\frac{|a_{13}|}{s_1}, \frac{|a_{43}|}{s_4}\right\} = \max\left\{\frac{0}{7}, \frac{|-1|}{8}\right\} = \frac{|a_{43}|}{s_4}$$ PIVOTE

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - \cancel{0F_4}]{m_{13}=0} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ -x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \xrightarrow[\text{REGRESIVA}]{\text{SUSTITUCIÓN}} \begin{array}{l} \to x_4 = -1 \\ x_1 = \frac{1}{3}(-3+8-1+2) = 2 \\ \to x_2 = -3-2+3 = -2 \\ \to x_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{array} ; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{MATRIZ FINAL}} \longrightarrow \boxed{U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{p_2,1} & 1 & & \\ m_{p_3,1} & m_{p_3,2} & 1 & \\ m_{p_4,1} & m_{p_4,2} & m_{p_4,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{31} & 1 & & \\ m_{41} & m_{42} & 1 & \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{L \cdot U = P^t \cdot A}$$

$$|A| = (-1)^{\text{nº intercambios de filas}} \cdot |U| \Rightarrow \underline{|A|} = (-1)^3(-6) = \underline{6}$$

El algoritmo de eliminación gaussiana con pivotaje parcial y cambio de escala soluciona los problemas de estabilidad del algoritmo de eliminación gaussiana (o factorización compacta de Doolittle y Crout). Aún existen matrices que resultan ser problemas mal condicionados: matrices próximas a matrices singulares.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Dada la definición:

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el cálculo de A^{-1} se puede hacer resolviendo n sistemas de ecuaciones lineales:

$$\boxed{A \cdot \underline{x}_j = \underline{e}_j \quad , \; j = 1, \ldots, n}$$

$\underline{x}_j$ = columna j de la matriz inversa

$\underline{e}_j$ = vector columna con todo 0s, excepto 1 en la fila j

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} A \cdot (\bar{x}_1 \, \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n) = (\bar{e}_1 \, \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n) \\ A \cdot A^{-1} = I \end{gathered}}$$

Si usamos eliminación gaussiana para resolver los n sistemas, lo más práctico es hacerlos todos simultáneamente.

③ a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\underline{x}_j = \underline{e}_j \Rightarrow \begin{array}{l|l|l} x + y + 2z = 1 & 0 & 0 \\ x + 2y + z = 0 & 1 & 0 \\ 2x + y + z = 0 & 0 & 1 \\ (1) & (2) & (3) \end{array}$$

$$\rightarrow (A \mid \underline{e}_1\, \underline{e}_2\, \underline{e}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{\substack{\text{Paso } k=1 \\ m_{21} = 1 \\ m_{31} = 2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3 = F_3 + F_2 \\ \text{Paso } k=2}]{m_{32} = -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l|l} x + y + 2z = 1 & 0 & 0 \\ \quad y - z = -1 & 1 & 0 \\ \quad\quad -4z = -3 & 1 & 1 \\ (1) & (2) & (3) \end{array} \right.$$

(1) $z = \frac{3}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$

(2) $z = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$

(3) $z = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

Para el determinante $|A|$, usamos $A = L \cdot U \rightarrow |A| = \underbrace{|L|}_{1} \cdot |U| = |U|$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{|A| = |U| = -4}$$

Dada una factorización $A = LU$, hay dos métodos para obtener la matriz inversa:

1. $A \cdot \underline{x}_j = \underline{e}_j \quad (j = 1, \dots, n) \longrightarrow L\underbrace{U\underline{x}_j}_{= \underline{y}_j} = \underline{e}_j$

   Si se define: $U\underline{x}_j = \underline{y}_j$, se realiza el siguiente procedimiento:

   - Se resuelven los n sistemas $L\underline{y}_j = \underline{e}_j \xrightarrow{\text{SUST. PROGRESIVA}} \underline{y}_j$
   - Se resuelven los n sistemas $U\underline{x}_j = \underline{y}_j \xrightarrow{\text{SUST. REGRES.}} \underline{x}_j \rightarrow A^{-1}$

2. $A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$

   - Se calcula U^{-1}, resolviendo los n sistemas $U\underline{x}_j = \underline{e}_j$, mediante sust. regresiva
   - Se calcula L^{-1}, resolviendo los n sistemas $L\underline{x}_j = \underline{e}_j$, mediante sust. progresiva
   - $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$