

MÉTODOS DE ELIMINACIÓN O FACTORIZACIÓN COMPACTA (A=LU)

de factorización $A=LU$ no es única

Dada una factorización $A=LU$, y una matriz diagonal D cualquiera regular

$$A=L \cdot U = L \underbrace{(D D^{-1})}_{I} \cdot U = (LD) (D^{-1}U) = \underline{L' \cdot U'}$$

Si fijamos los elementos de la diagonal de L o U , entonces la factorización si que es única. Por ejemplo, en la EG todos los elementos diagonales de L son 1.

Las dos elecciones más comunes son:

- Fijamos a 1 todos los elementos de la diagonal de L , $l_{ii}=1 \forall i=1, \dots, n$

FACTORIZACIÓN DE DOOLITTLE (=EG)

- Fijamos a 1 todos los elementos de la diagonal de U , $u_{ii}=1 \forall i=1, \dots, n$

FACTORIZACIÓN DE CROUT

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & 13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{DOOLITTLE}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ 0 & & & u_{44} \end{pmatrix}$$

Paso $k=1$

1. Cálculo del elemento diagonal u_{11}

$$F1L \times C1U \quad \underline{u_{11}=6}$$

2. Cálculo l_{21}, l_{31}, l_{41}

$$F2L \times C1U \quad l_{21} \cdot u_{11} = 12 \rightarrow \underline{l_{21}=2}$$

$$F3L \times C1U \quad l_{31} \cdot u_{11} = 3 \rightarrow \underline{l_{31}=\frac{1}{2}}$$

$$F4L \times C1U \quad l_{41} \cdot u_{11} = -6 \rightarrow \underline{l_{41}=-1}$$

3. Cálculo de u_{12}, u_{13}, u_{14}

$$F1L \times C2U \quad \underline{u_{12}=-2}$$

$$F1L \times C3U \quad \underline{u_{13}=2}$$

$$F1L \times C4U \quad \underline{u_{14}=4}$$

Paso K=2

Cálculo diagonal u_{22}

$$F2L \times C2U \quad l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = -8 \rightarrow \underline{u_{22} = -4}$$

Cálculo de fila 2 y columna 2

$$F3L \times C2U \quad l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = -13 \\ -1 + l_{32} \cdot (-4) = -13 \rightarrow \underline{l_{32} = 3}$$

$$F4L \times C2U \quad l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} = 4 \\ 2 + l_{42} \cdot (-4) = 4 \rightarrow \underline{l_{42} = -\frac{1}{2}}$$

$$F2L \times C3U \quad l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = 6 \\ 4 + u_{23} = 6 \rightarrow \underline{u_{23} = 2}$$

$$F2L \times C4U \quad l_{21} \cdot u_{14} + u_{24} = 10 \\ 8 + u_{24} = 10 \rightarrow \underline{u_{24} = 2}$$

Paso K=3

u_{33}

$$F3L \times C3U \quad l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} = 9 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 \cdot 2 + u_{33} = 9 \rightarrow \underline{u_{33} = 2}$$

l_{43}

$$F4L \times C3U \quad l_{41} \cdot u_{13} + l_{42} \cdot u_{23} + l_{43} \cdot u_{33} = 1 \\ -1 \cdot 2 + (-\frac{1}{2}) \cdot 2 + l_{43} \cdot 2 = 1 \rightarrow \underline{l_{43} = 2}$$

u_{34}

$$F3L \times C4U \quad l_{31} \cdot u_{14} + l_{32} \cdot u_{24} + u_{34} = 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 \cdot 2 + u_{34} = 3 \rightarrow \underline{u_{34} = -5}$$

Paso K=4

u_{44}

$$F4L \times C4U \quad l_{41} \cdot u_{14} + l_{42} \cdot u_{24} + l_{43} \cdot u_{34} + u_{44} = -18 \\ -1 \cdot 4 + (-\frac{1}{2}) \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + u_{44} = -18 \rightarrow \underline{u_{44} = -3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) = L \cdot U$$

↓
DOOLITTLE