AZTERKETA ARIKETAK – ALDAGAI KONPLEXUKO FUNTZIOAK
2015-2016 IKASTURTEA

1. ARIKETA

Lor itzazu f(z) funtzioaren puntu singular guztiak: $f(z)=\dfrac{\sqrt{z^2-1}}{\operatorname{tg}(z)-\sqrt{3}+2i}$

Soluzioa:

$z=i\cdot y$ eta $z=x\,/\,|x|\leq 1$

$z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $z=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi-i\dfrac{L\left|\sqrt{3}\right|}{2}$ non $k\in\mathbb{Z}$

2. ARIKETA

i) Ebatzi ondoko ekuazioa α -ren balio ezberdinetarako.

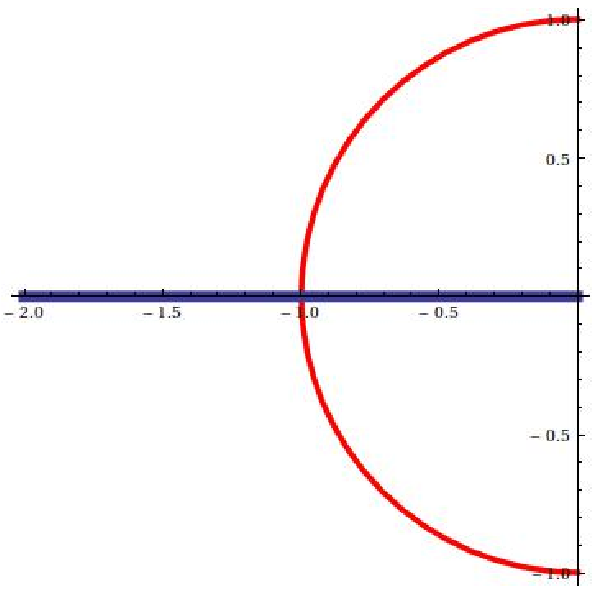
$$\operatorname{Ch}(i\cdot z)-\frac{\alpha}{2}\cdot e^{i\cdot z}=0 \quad \text{non } \alpha\in\mathbb{R}\ (\alpha\neq 1)$$

ii) Lortu $f(z)=\sqrt{z+\dfrac{1}{z}}$ funtzioaren analikotasun eremua.

Soluzioa:

i) $z=-\dfrac{i}{2}\cdot\log\left(\dfrac{1}{\alpha-1}\right)=\dfrac{i}{2}\cdot\log(\alpha-1)=\dfrac{i}{2}\begin{cases} L|\alpha-1|+2\pi\cdot k\cdot i & \alpha>1\\ L|\alpha-1|+i(\pi+2\pi\cdot k\cdot i) & \alpha<1\end{cases}$

ii) $y=0\wedge x\leq 0$; $x^2+y^2=1\wedge x\leq 0$



3. ARIKETA

i) Ondorioztatu $\omega = \arccos(z)$-ren adierazpen logaritmikoa.

ii) Lortu ondoko funtzioaren puntu singularrak: $f(z) = \dfrac{\sqrt{z^2+3}}{\left(\cos(z) - \sqrt{2}\cdot i\right)\cdot\left(e^{2z}+i\right)}$

Soluzioa:

i) $\omega = \arccos(z) = -i \cdot \log\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$

ii) $z = x + i \cdot y \,/ \begin{cases} x = 0 \\ |y| \geq \sqrt{3} \end{cases}$

$$\begin{cases} z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi\right) - i\cdot L\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right| \\ z = \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi\right) - i\cdot L\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| \end{cases} \quad \text{non k} \in \mathbb{Z}$$

$$z = i\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \quad \text{non k} \in \mathbb{Z}$$

4. ARIKETA

i) Ondorioztatu $\omega = ArgTh(z)$-ren adierazpen logaritmikoa.
ii) Lortu ondoko funtzioaren puntu singularrak:

$$f(z) = \frac{\text{ArgTh}(3-z)}{4\sin(z)\cdot\cos(z)+i}$$

Soluzioa:

i) $\omega = \text{ArgTh}(z) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}$

ii) $z = x + i\cdot y \,/ \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 2 \end{cases}$ non $y = 0$ eta $\begin{cases} z = k\cdot\pi - \dfrac{i}{2}\cdot L\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \\ z = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi - \dfrac{i}{2}\cdot L\left|\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \end{cases}$ non k $\in \mathbb{Z}$

5. ARIKETA

i) Ondorioztatu $f(z) = \arcsin(z)$ funtzioaren adierazpen logaritmikoa.

ii) Aplikatu adierazpen hori ondoko ekuazioa ebazteko: $\sin(z) = \sqrt{3}\,i$.

Soluzioa:

i) $\omega = \arcsin(z) = -i \cdot \log\left(i \cdot z \pm \sqrt{1-z^2}\right)$

ii) $\begin{cases} z = 2k \cdot \pi - i \cdot L\left|2-\sqrt{3}\right| \\ z = \pi + 2k \cdot \pi - i \cdot L\left|2+\sqrt{3}\right| \end{cases}$ non $k \in \mathbb{Z}$

6. ARIKETA

Lortu $f(z) = \mathrm{Log}\left(z^2 - i \cdot z + 2\right)$ funtzioaren analikotasun eremua.

Soluzioa:

$D = \forall z \in \mathbb{C} - \left\{ z = x + i \cdot y \,/\, x = 0 \text{ eta } \{ y \geq 2 \text{ edo } y \leq -1 \} \right\}$

7. ARIKETA

Lortu $\log(z)$ eta $\mathrm{Log}(z)$, ondoko z-ren balioetarako:

$$z = -i,\ e^{-3},\ e^{5i},\ -5e$$

Soluzioa:

$$\log(-i) = i \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi\right); \quad \mathrm{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2} \cdot i$$
$$\log\left(e^{-3}\right) = -3 + i \cdot 2k \cdot \pi; \quad \mathrm{Log}\left(e^{-3}\right) = -3$$
$$\log\left(e^{5i}\right) = i \cdot (5 + 2k \cdot \pi); \quad \mathrm{Log}\left(e^{5i}\right) = i \cdot (5 - 2\pi)$$
$$\log(-5e) = \left(1 + \mathrm{L}|5|\right) + i \cdot (\pi + 2k \cdot \pi); \quad \mathrm{Log}(-5e) = \left(1 + \mathrm{L}|5|\right) + i \cdot \pi$$

8. ARIKETA

Lortu analitikoki eta grafikoki ondoko funtzioaren puntu singularrak:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - i \cdot x + y - 1 - i)^4} + \frac{\sqrt{\dfrac{z}{z-1}}}{\mathrm{Ch}(z) - \mathrm{Sh}(z) + e^z}$$

Soluzioa:

$z = \begin{cases} 1 + i \\ -1 \end{cases}$ $\qquad z = x$ non $x \in [0,1]$ $\qquad z = \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) \cdot i$

9. ARIKETA

Lortu analitikoki eta grafikoki ondoko funtzioaren puntu singularrak:

$$f(z)=\frac{\sqrt{z^2-i\cdot z}}{z^6-2z^3+1}$$

Soluzioa:

$$z=\begin{cases}1\\ e^{\frac{2\pi}{3}i}\\ e^{\frac{4\pi}{3}i}\end{cases} \qquad z=x+i\cdot y \ \text{ non } \begin{cases}x=0\\ y\geq 1\\ y\leq 0\end{cases}$$

10. ARIKETA

Lortu ondoko ekuazioaren $z\in\mathbb{C}$ soluzio guztiak:

$$4\cdot\sin(z)=\frac{(1-i)\cdot e^{2i\cdot z}}{\cos(z)}$$

Soluzioa:

$$z=\frac{\pi}{8}+\frac{k\cdot\pi}{2}$$

11. ARIKETA

i) Ondorioztatu $\omega=\operatorname{arctg}(z)$ funtzioaren adierazpen logaritmikoa.

ii) Kalkulatu $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(z)-\omega}$ funtzioaren singulartasunak, ω zenbakia z^3-3z^2+4z-2 polinomioaren zati irudikaririk handieneko erroa izanik.

Soluzioa:

i) $\omega=\operatorname{arctg}(z)=\dfrac{i}{2}\cdot\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)=-\dfrac{i}{2}\cdot\log\left(\dfrac{1+i\cdot z}{1-i\cdot z}\right)$

ii) $z=-\dfrac{1}{2}(\theta+2k\cdot\pi)+i\cdot\dfrac{L\left|\sqrt{5}\right|}{2}$ non $\theta=\operatorname{arctg}(2)+\pi$

12. ARIKETA

i) z-ren zeintzu baliotarako da cos(z) erreala? Arrazoitu erantzuna.

ii) z=1+i bada, kalkulatu ondoko balioak: $\left|e^{1/z}\right|$ eta $\left|e^{i\cdot z}\right|$

Soluzioa:

i) $z = x + i\cdot y$ non $\begin{cases} \forall x \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad z = x + i\cdot y$ non $\begin{cases} x = k\cdot\pi \\ \forall y \end{cases}$

ii) $\left|e^{1/z}\right| = \left|e^{1/(1+i)}\right| = \sqrt{e}$ $\quad \left|e^{i\cdot z}\right| = \left|e^{-1+i}\right| = \dfrac{1}{e}$

13. ARIKETA

Lortu analitikoki eta grafikoki f(z) analitikoa ez den puntuak.

$$f(z) = \frac{\sqrt{z+2\pi}}{\sin(z)-\cos(z)}$$

Soluzioa:

$z = x + i\cdot y$ non $\begin{cases} x \le -2\pi \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad z = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot\pi$

14. ARIKETA

i) Ondorioztatu $\omega = \mathrm{ArgSh}(z)$ funtzioaren adierazpen logaritmikoa.
ii) Ebatzi ondoko ekuazioa: $\mathrm{Sh}(z) = \mathrm{Sh}(i\cdot z)$.

Soluzioa:

i) $\omega = \mathrm{argSh}(z) = \log\left(z \pm \sqrt{1+z^2}\right)$ $\quad$ ii) $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right)\cdot(1+i)$

15. ARIKETA

i) Lortu, frogatuz, $f(z) = \arccos(z)$ funtzioaren adierazpen logaritmikoa.

ii) Aplikatu aurreko adierazpena $\cos(z) = \sqrt{3}\,i$ ekuazioa ebazteko.

iii) Kalkulatu $f\left(z\right)=\dfrac{\sqrt[3]{z^2+z-2}}{\cos\left(z\right)-\sqrt{3}\,i}$ funtzioaren analikotasun eremua.

Soluzioa:

i) $f\left(z\right)=\operatorname{arccos}\left(z\right)=-i\cdot\log\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)$

ii) $z=\operatorname{arccos}\left(\sqrt{3}i\right)=-i\cdot\log\left(\sqrt{3}i\pm 2i\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi+(-1)^{k+1}\cdot i\cdot L\left|2+\sqrt{3}\right|$

iii) Analikotasun eremua $\left\{\mathbb{C}-\text{puntu singularrak}\right\}$ da non puntu singularrak ondokoak diren:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\left(z^2+z-2\right)\le 0\\ \operatorname{Im}\left(z^2+z-2\right)=0\end{cases}\Rightarrow z=x+i\cdot y\,/\begin{cases}-2\le x\le 1\ \ ,\ \ y=0\\ x=-1/2\ ,\ \forall y\end{cases}\quad ,$$

$$z=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi+(-1)^{k+1}\cdot i\cdot L\left|2+\sqrt{3}\right|$$