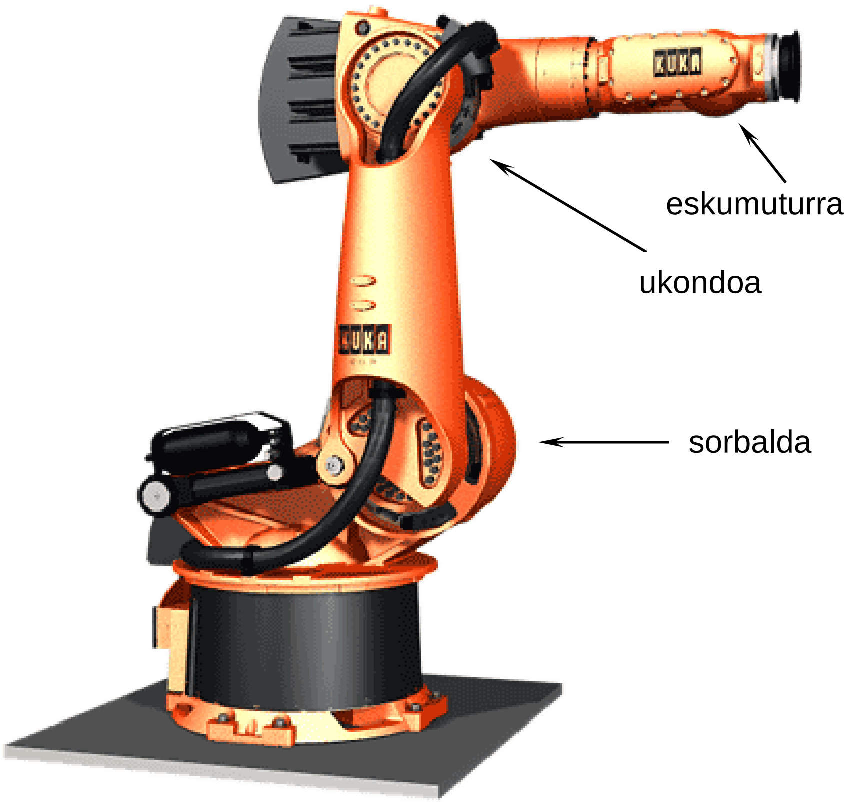
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Departamento de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

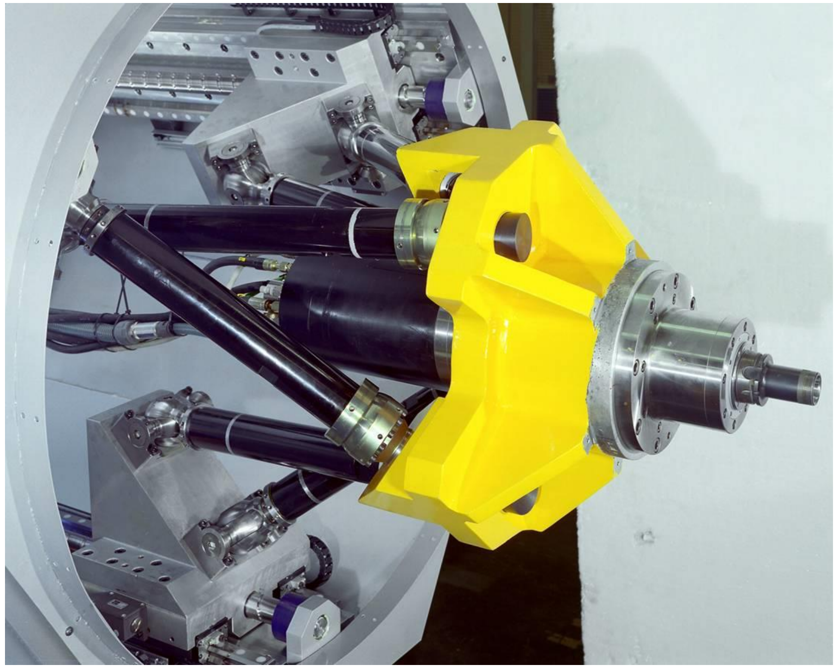
5. Gaia
Mekanismo espazialen analisi zinematikoa

Mekanismoen Teoria eta Bibrazio Mekanikoak

5.1 Mekanismo espazialen sarrera



KUKA
errobota



Manipuladore paraleloa
(Hermes, FATRONIK)

5.1 Mekanismo espazialen sarrera

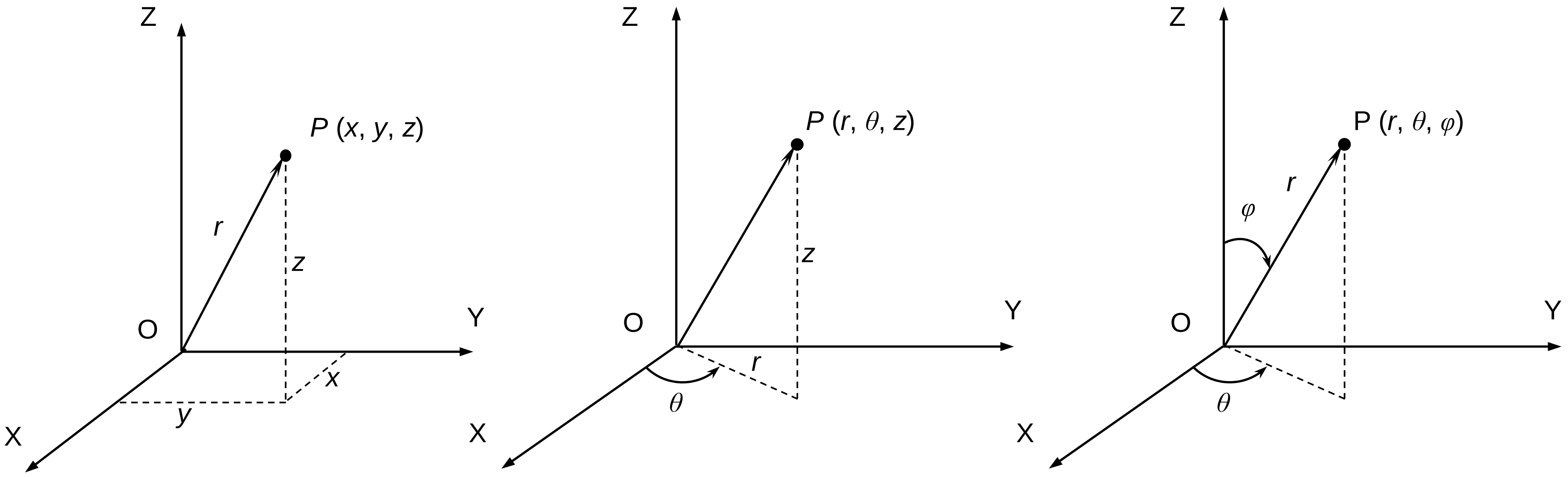
Errobot Seriea	Manipuladore paraleloa
Zurruntasun gutxiko mekanismoa	Zurruntasun handia
Errobotaren karga/pisu erlazio txikia	Errobotaren karga/pisu erlazio handia
Zehaztasun txikia, erroreak metatzen dira	Zehaztasun handia
Abiadura eta azelerazio txikiak, ezaugarri dinamiko baxuak	Abiadura eta azelerazio handiak, erantzun dinamiko hobea
Zinematikaren ebazpen sinplea	Zinematika konplexua, ekuazioak akoplaturik daudelako
Lan eremu handia	Lan eremu murriztuagoa
Kokapen singularrak bakarrik alderantzizko arazoan	Singulartasunak edozein kokapen arazotan ager daitezke
Emaitza bakarra arazo zuzenean	Emaitza anitz arazo zuzenean

5.2 Kokapenak, orientazioak eta objektuak

Notazioa:

Bektoreak: letra xehe lodiak
Matrizeak: letra larri lodiak

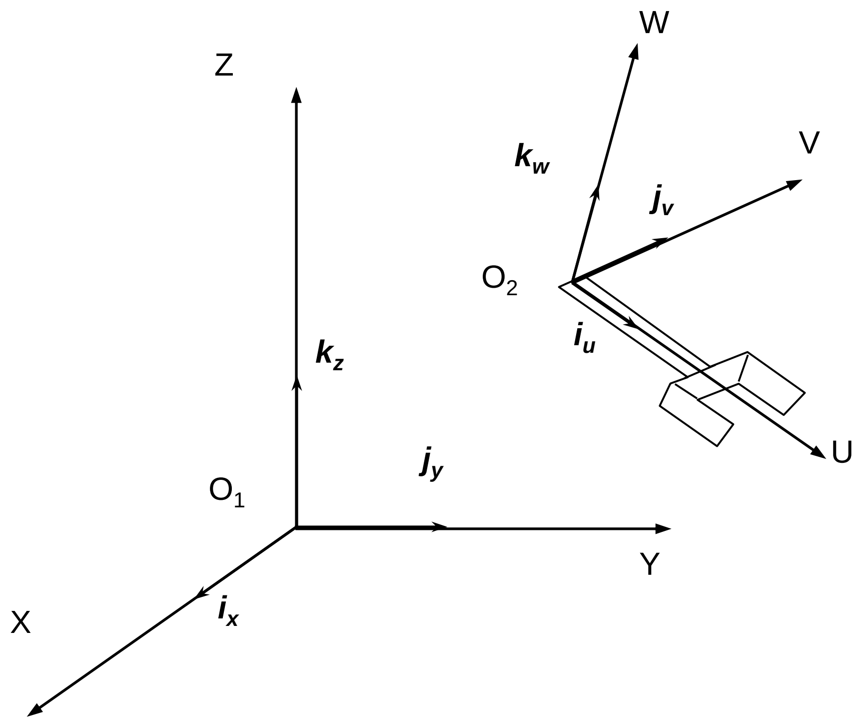
Kokapen baten definizioa:



Koordenatu kartesiarrak
Koordenatu zilindrikoak
Koordenatu esferikoak

5.2 Kokapenak, orientazioak eta objektuak

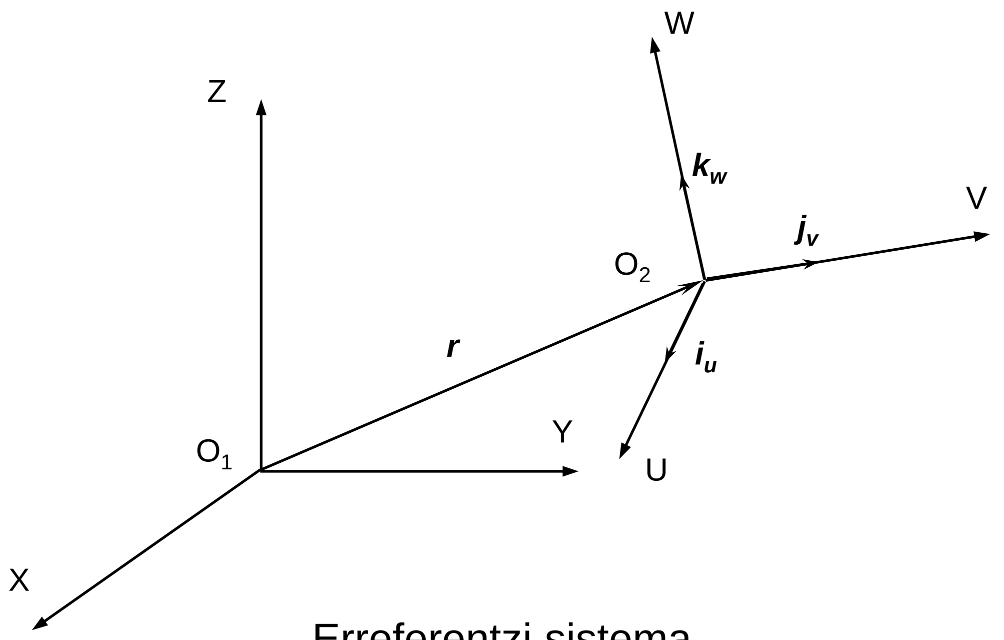
Orientazioaren definizioa



Errobota baten gakoaren orientazioa sistema finkoarekiko OXYZ

5.2 Kokapenak, orientazioak eta objektuak

Objektu baten definizioa:

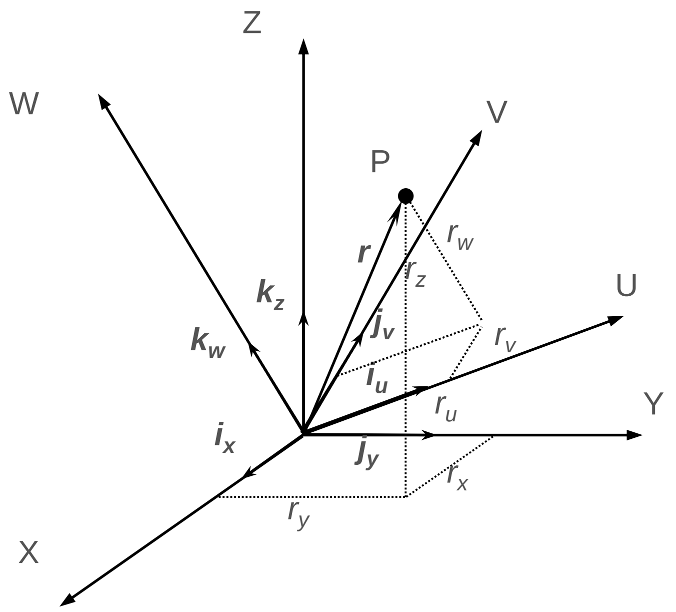


Erreferentzi sistema

Kokapena $\boldsymbol{r}$
Orientazioa ($\boldsymbol{i_u}$, $\boldsymbol{j_v}$, $\boldsymbol{k_w}$)

5.3 Orientazioaren irudikapena

Biraketazko Matrizea



1 eta 2 erreferentzi sistemak: $(OXYZ)_1$ eta $(OUVW)_2$. Sistema biek oinarri bera dute.

Demagun 2. erreferentzi sistemarekin batera mugitzen den objektu bat. Sistema honek aldatzen du bere orientazioa, 1go. sistemarekiko

P puntuaren kokapena **r** bektorearen bidez definitzen da

Bektore hau adierazten da 1go sistemaren oinarri kanonikoan:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_x}\,\boldsymbol{i_x} + \boldsymbol{r_y}\,\boldsymbol{j_y} + \boldsymbol{r_z}\,\boldsymbol{k_z} = {}^1\boldsymbol{r}$$

Gainera, bektore hau adierazi daiteke 2. sistemaren oinarri kanonikoan:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_u}\,\boldsymbol{i_u} + \boldsymbol{r_v}\,\boldsymbol{j_v} + \boldsymbol{r_w}\,\boldsymbol{k_w} = {}^2\boldsymbol{r}$$

5.3 Orientazioaren irudikapena

Biraketazko Matrizea

r bektorearen osagaiak, 1go sistemarekiko, bektore honen proiekzioak dira *OX*, *OY* eta *OZ ardatzetan*:

$$r_x = \boldsymbol{i_x} \cdot \boldsymbol{r}\ ; \qquad r_y = \boldsymbol{j_y} \cdot \boldsymbol{r}\ ; \qquad r_z = \boldsymbol{k_z} \cdot \boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_x \cdot \boldsymbol{i}_u & \boldsymbol{i}_x \cdot \boldsymbol{j}_v & \boldsymbol{i}_x \cdot \boldsymbol{k}_w \\ \boldsymbol{j}_y \cdot \boldsymbol{i}_u & \boldsymbol{j}_y \cdot \boldsymbol{j}_v & \boldsymbol{j}_y \cdot \boldsymbol{k}_w \\ \boldsymbol{k}_z \cdot \boldsymbol{i}_u & \boldsymbol{k}_z \cdot \boldsymbol{j}_v & \boldsymbol{k}_z \cdot \boldsymbol{k}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c(U,X) & c(V,X) & c(W,X) \\ c(U,Y) & c(V,Y) & c(W,Y) \\ c(U,Z) & c(V,Z) & c(W,Z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix}$$

OU, OV eta OW ardatzen **norabide-kosinuek** $\mathbf{i_u}$, $\mathbf{j_v}$ **eta** $\mathbf{k_w}$ bektoreen sistema finkoko osagaiak dira. Matrize hau honela adierazi daiteke:

$$\begin{bmatrix} c(U,X) & c(V,X) & c(W,X) \\ c(U,Y) & c(V,Y) & c(W,Y) \\ c(U,Z) & c(V,Z) & c(W,Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} = {}^1_2\mathbf{R}$$

Koordenatuen aldaketazko matrizea edo biraketazko matrizea

5.3 Orientazioaren irudikapena

Biraketazko matrizea

Matrize honen interpretazioak (edo aplikazioak):

- $(OUVW)_2$ sistemaren orientazioa beste sistemarekiko, $(OXYZ)_1$-rekiko, definitzea
- $(OUVW)_2$ eta $(OXYZ)_1$ sistemen arteko transformazioa edo koordenatuen aldaketa definitzea.
- ${}^1r$ bektorearen biraketa egin transformazio honen bidez: ${}^1r' = R\ {}^1r$. Kasu honetan, ${}^1r$ eta ${}^1r'$ bektoreak,1go sistemarekiko definitzen dira, beraz, R ez du azpi-indize edo gainindizerik.

5.3 Orientazioaren irudikapena

Biraketazko Matrizea

Orientazio bat zehazteko 3 a.g. behar dira. Beraz, nahiz eta matrizeak 9 termino eduki, beraien artean bakarrik 6 ekuazioekin erlazionatzen dira:

$\boldsymbol{i_u}\cdot\boldsymbol{i_u} = 1$; $\boldsymbol{j_v}\cdot\boldsymbol{j_v} = 1$; $\boldsymbol{k_w}\cdot\boldsymbol{k_w} = 1$; $\boldsymbol{i_u}\cdot\boldsymbol{j_v} = 0$; $\boldsymbol{i_u}\cdot\boldsymbol{k_w} = 0$; $\boldsymbol{j_v}\cdot\boldsymbol{k_w} = 0$

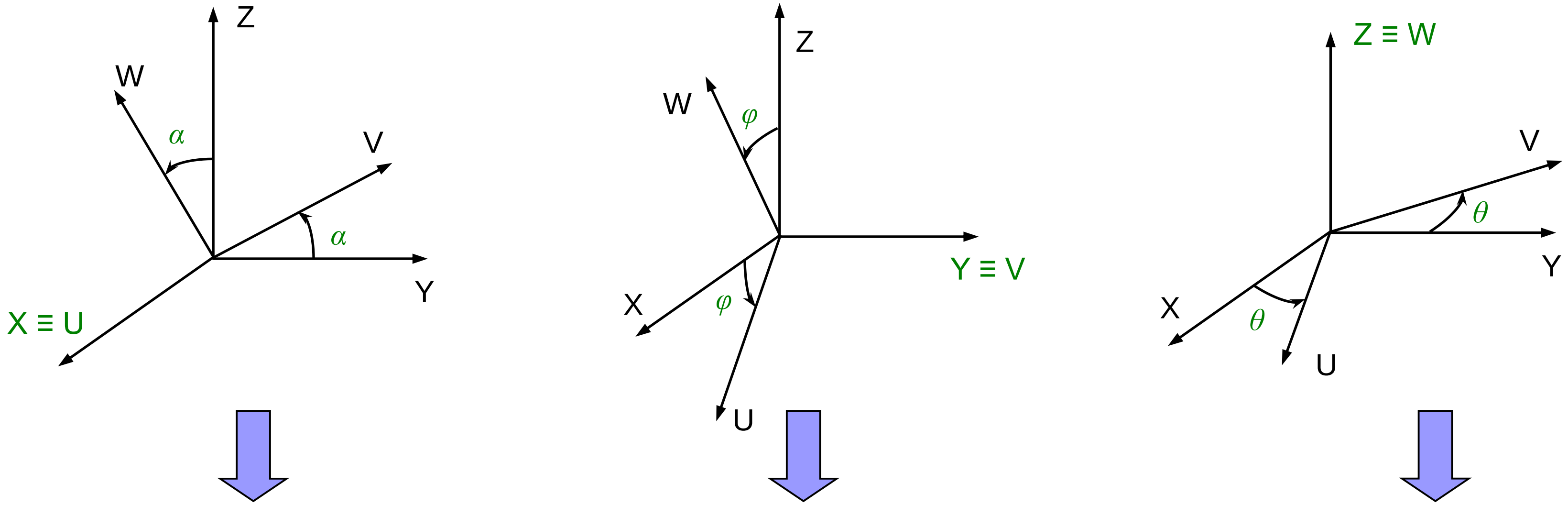
Alderantzizko erlazioa:

$$\begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_u\cdot\boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_u\cdot\boldsymbol{j}_y & \boldsymbol{i}_u\cdot\boldsymbol{k}_z \\ \boldsymbol{j}_v\cdot\boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{j}_v\cdot\boldsymbol{j}_y & \boldsymbol{j}_v\cdot\boldsymbol{k}_z \\ \boldsymbol{k}_w\cdot\boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{k}_w\cdot\boldsymbol{j}_y & \boldsymbol{k}_w\cdot\boldsymbol{k}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}$$

Honako hau geratzen: $\,^{2}_{1}\mathbf{R} = \,^{1}_{2}\mathbf{R}^{-1} = \,^{1}_{2}\mathbf{R}^{T}$ Alderantzizko matrizea = matrize iraulia

Oinarrizko biraketazko matrizeak

$(OUVW)_2$ sistemaren biraketak, $(OXYZ)_1$ sistemaren ardatz bakoitzarekiko.



$$\mathbf{R}_{\alpha,X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_{\varphi,Y} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_{\theta,Z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oinarrizko biraketazko matrizeak

5.3 Orientazioaren irudikapena

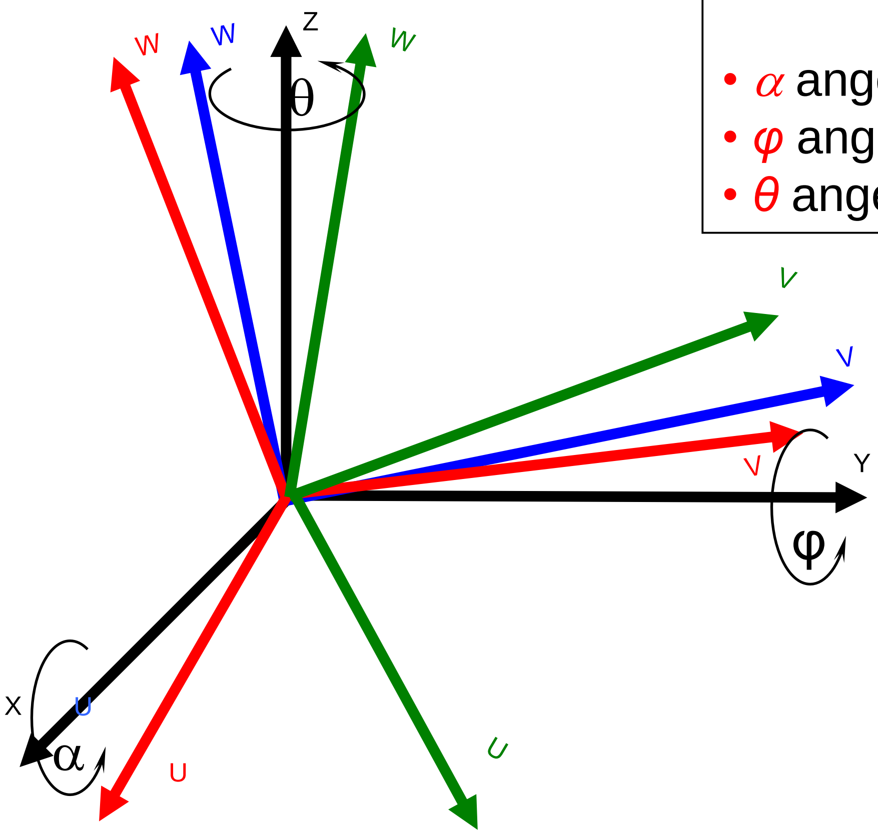
Oinarrizko biraketen konposaketa:

Sistema finkoarekiko biraketak pre-biderkatzen dira

$$ {}^{1}_{2}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(\alpha,\varphi,\theta),(X,Y,Z)} = \mathbf{R}_{\theta,Z}\mathbf{R}_{\varphi,Y}\mathbf{R}_{\alpha,X} $$

Biraketaren sekuentzia da:

- α angelua (*roll* - biraketa) *OX* ardatzarekiko.
- φ angelua (*pitch* - gorapena) *OY* ardatzarekiko.
- θ angelua (*yaw* - desbiderapena) *OZ* ardatzarekiko.

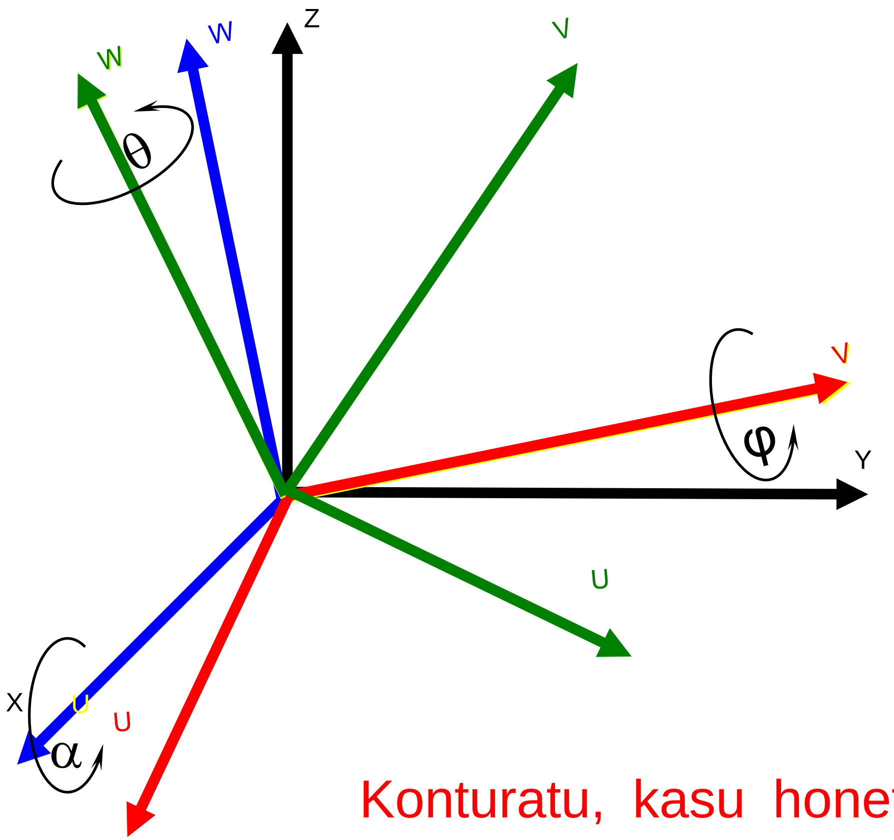


$ux = \cos\theta \cos\varphi$
$vx = \cos\theta \,\text{sen}\varphi \,\text{sen}\alpha - \text{sen}\theta \cos\alpha$
$wx = \cos\theta \,\text{sen}\varphi \cos\alpha + \text{sen}\theta \,\text{sen}\alpha$
$uy = \text{sen}\theta \cos\varphi$
$vy = \text{sen}\theta \,\text{sen}\varphi \,\text{sen}\alpha + \cos\theta \cos\alpha$
$wy = \text{sen}\theta \,\text{sen}\varphi \cos\alpha - \cos\theta \,\text{sen}\alpha$
$uz = -\text{sen}\varphi$
$vz = \cos\varphi \,\text{sen}\alpha$
$wz = \cos\varphi \cos\alpha$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

Oinarrizko biraketen konposaketa

Biraketa hauek definitu ahal dira 2. sistema mugikorrarekiko



Biraketaren sekuentzia da:

- α angelua *OU* ardatzarekiko.
- φ angelua *OV* ardatzarekiko.
- θ angelua *OW* ardatzarekiko.

Kasu honetan:

$$ {}^{1}_{2}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(\alpha,\varphi,\theta),(\mathrm{U,V,W})} = \mathbf{R}_{\alpha,\mathrm{U}}\,\mathbf{R}_{\varphi,\mathrm{V}}\,\mathbf{R}_{\theta,\mathrm{W}} $$

Konturatu, kasu honetan, oinarrizko biraketak post-biderkatzen direla. Lehengo kasuan, pre-biderkatzen ziren.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

Oinarrizko biraketen konposaketa

Biraketazko matrizeen edozein konposaketa interpretatu daiteke sistema finkoarekiko eginda, ala sistema mugikor batekiko eginda.

Adibidez, hurrengo konposaketa:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \mathrm{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Izan daiteke:

- φ angeluaren biraketa OY ardatzarekiko, eta jarraian θ angeluaren biraketa OZ-rekiko, biak (OXYZ) sistema finkoarekiko zehaztuta.

edo

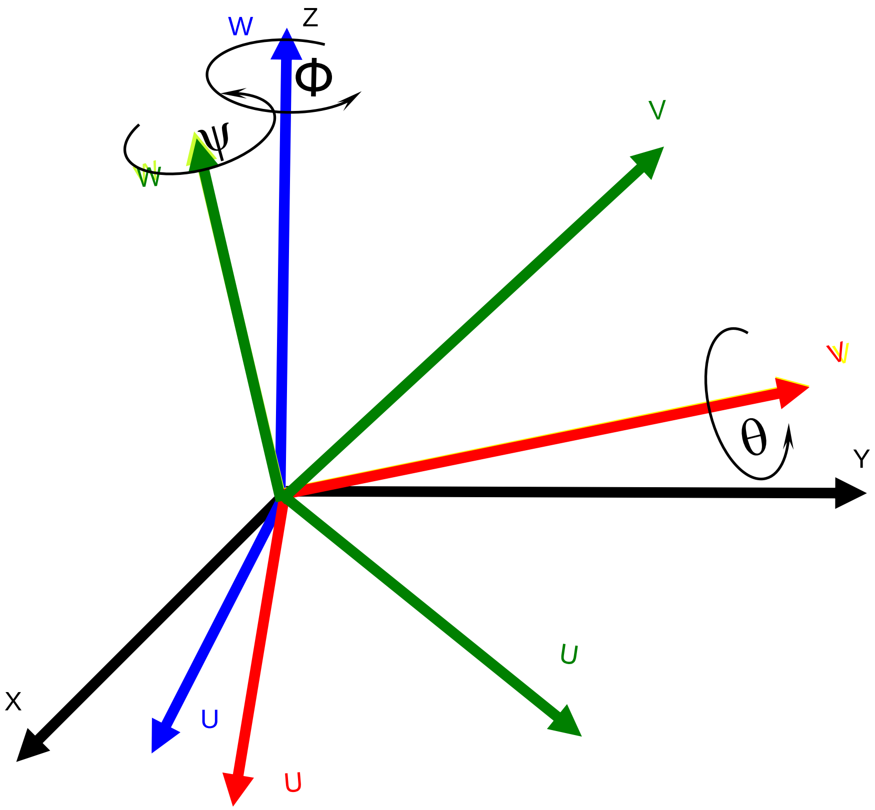
- θ angeluaren biraketa OW ardatzarekiko, eta jarraian φ angeluaren biraketa OV-rekiko, biak (OUVW) sistema mugikorrarekiko zehaztuta.

5.3 Orientazioaren irudikapena

Euler-en angeluak

Oinarrizko biraketen konposaketaren bidez

$\Phi_W \theta_V \psi_W$ konposaketa koordenatu lokaletan

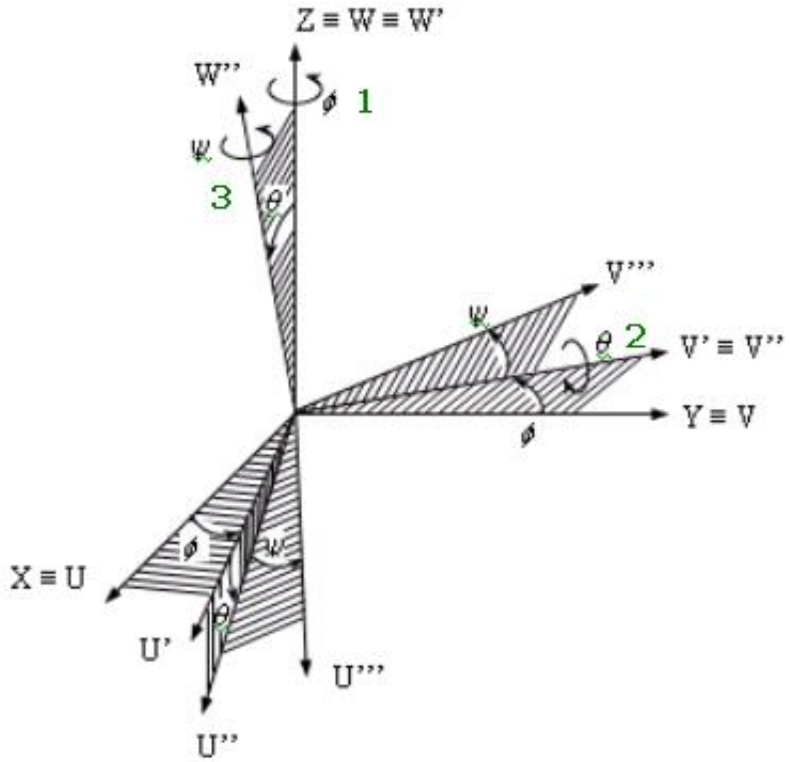


$$ {}^{1}_{2}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(\phi,\theta,\psi),(\mathrm{W,V,W})} = \mathbf{R}_{\phi,\mathrm{W}} \mathbf{R}_{\theta,\mathrm{V}} \mathbf{R}_{\psi,\mathrm{W}} $$

5.3 Orientazioaren irudikapena

Euler-en angeluak

$$\boxed{{}^{1}_{2}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(\phi,\theta,\psi),(\mathrm{W,V,W})} = \mathbf{R}_{\phi,\mathrm{W}}\mathbf{R}_{\theta,\mathrm{V}}\mathbf{R}_{\psi,\mathrm{W}}}$$



Secuencia de rotación euleriana WVW

$ux = \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\psi$
$uy = \mathrm{sen}\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\,\mathrm{sen}\psi$
$uz = -\mathrm{sen}\theta\cos\psi$
$vx = -\cos\phi\cos\theta\,\mathrm{sen}\psi - \mathrm{sen}\phi\cos\psi$
$vy = -\mathrm{sen}\phi\cos\theta\,\mathrm{sen}\psi + \cos\phi\cos\psi$
$vz = \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\psi$
$wx = \cos\phi\,\mathrm{sen}\theta$
$wy = \mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta$

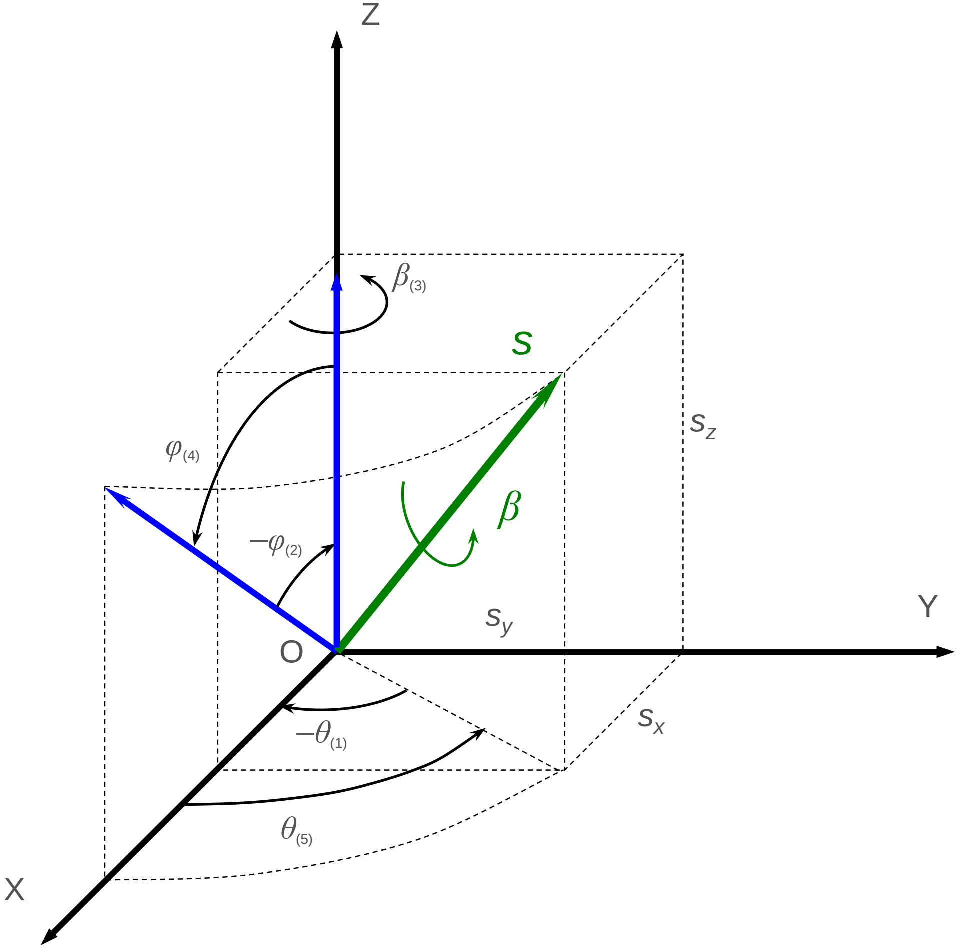
Angelua eta biraketazko ardatza

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

$$\mathrm{sen}\varphi = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{s_z}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}}$$

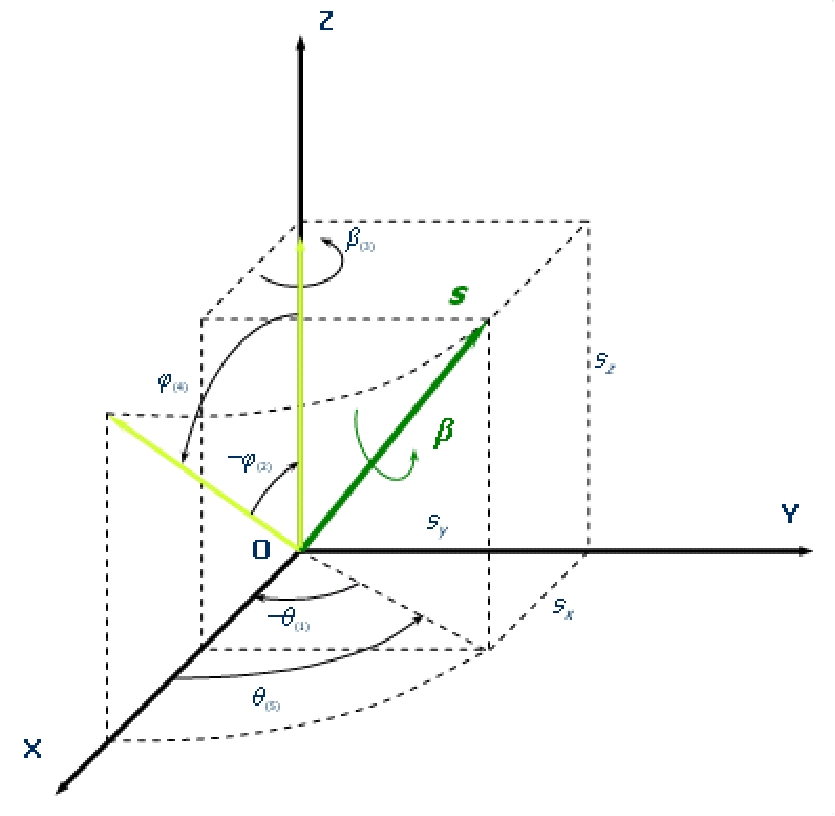


$$\boxed{\mathbf{R}_{\beta,s} = \mathbf{R}_{\theta,Z}\,\mathbf{R}_{\varphi,Y}\,\mathbf{R}_{\beta,Z}\,\mathbf{R}_{-\varphi,Y}\,\mathbf{R}_{-\theta,Z}}$$

5.3 Orientazioaren irudikapena

Angelua eta biraketazko ardatza

$$\mathbf{R}_{\beta,s} = \mathbf{R}_{\theta,Z}\,\mathbf{R}_{\varphi,Y}\,\mathbf{R}_{\beta,Z}\,\mathbf{R}_{-\varphi,Y}\,\mathbf{R}_{-\theta,Z}$$

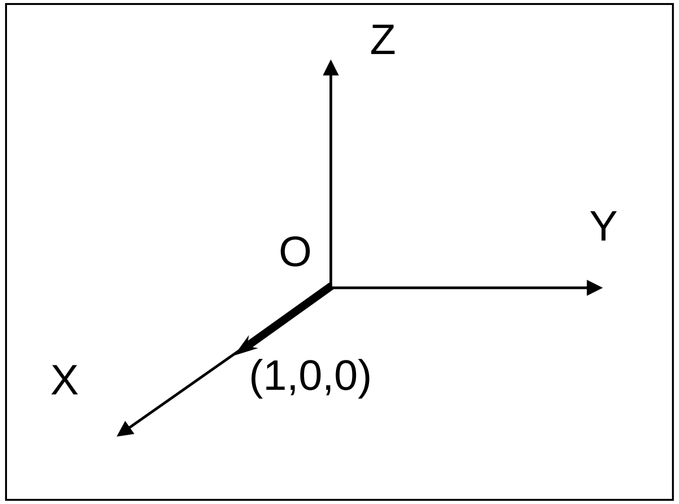


ux = (1 – cosβ) + cosβ
uy = $sx\ sy$ (1 – cosβ) + sz senβ
uz = $sx\ sz$ (1 – cosβ) – sy senβ
vx = $sx\ sy$ (1 – cosβ) – sz senβ
vy = (1 – cosβ) + cosβ
vz = $sy\ sz$ (1 – cosβ) + sx senβ
wx = $sx\ sz$ (1 – cosβ) + sy senβ
wy = $sy\ sz$ (1 – cosβ) – sx senβ
wz = (1 – cosβ) + cosβ

5.3 Orientazioaren irudikapena

<u>Erabilpen adibide bat:</u>

Hurrengo bektoreari (1,0,0) jarraian adierazten den biraketa konposaketa aplikatu:



- *Sistema finkoan*: 90º-tako biraketa *OZ-rekiko*, 90º *OX-rekiko* eta 90º *OY-rekiko*.
- *Sistema mugikorrean*: 90º-tako biraketa *OW-rekiko*, 90º *OU-rekiko* eta 90º *OV-rekiko*..

Kasu bietan, biraketazko matrizea $(OXYZ)_1$ sistema finkoarekiko eskuratu.

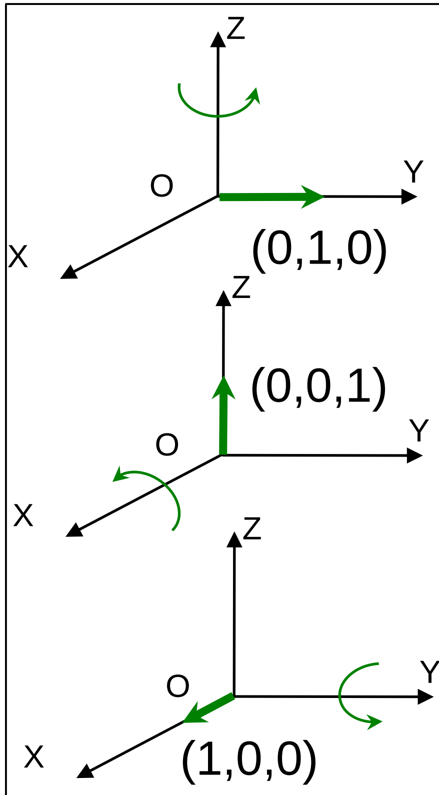
5.3 Representación de la orientación

En el sistema de referencia fijo

giro de 90º alrededor de OZ

giro de 90º alrededor de OX

giro de 90º alrededor de OY



$$\mathbf{R}_{90°,Z}$$

$$\mathbf{R}_{90°,X}$$

$$\mathbf{R}_{90°,Y}$$

Matriz de rotación respecto del sistema de referencia fijo:

$$ {}^{1}_{2}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{90°,Y}\,\mathbf{R}_{90°,X}\,\mathbf{R}_{90°,Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

$$\boxed{ {}^{1}\mathbf{r} = \mathbf{R}_{90°,Y}\,\mathbf{R}_{90°,X}\,\mathbf{R}_{90°,Z} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} }$$

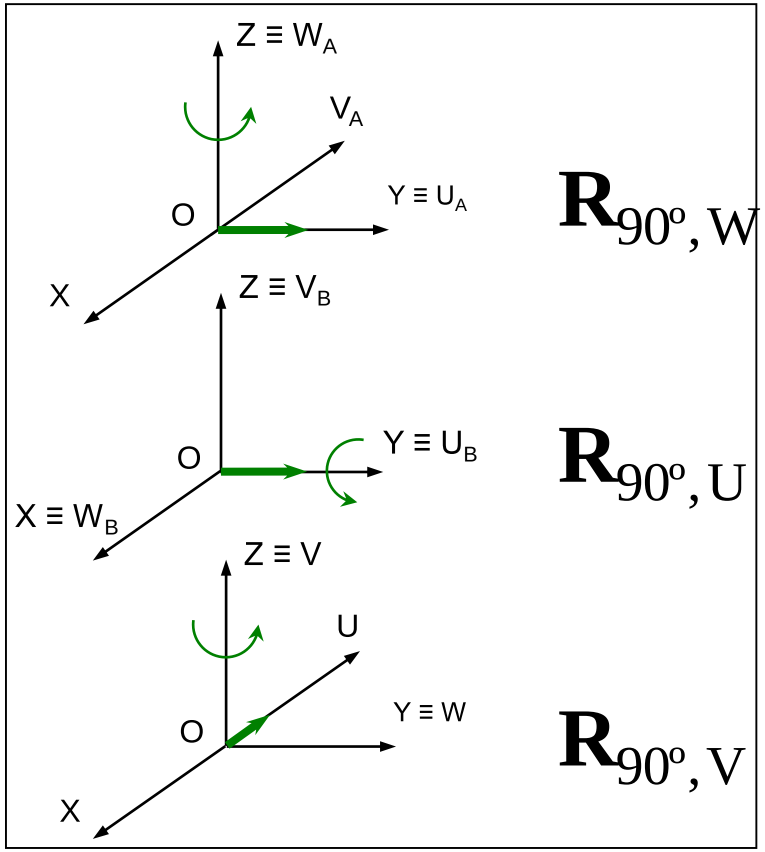
5.3 Orientazioaren irudikapena

Sistema mugikorrean:

90º- ko biraketa *OW-rekiko*

90º- ko biraketa *OU-rekiko*

90º- ko biraketa *OV-rekiko*



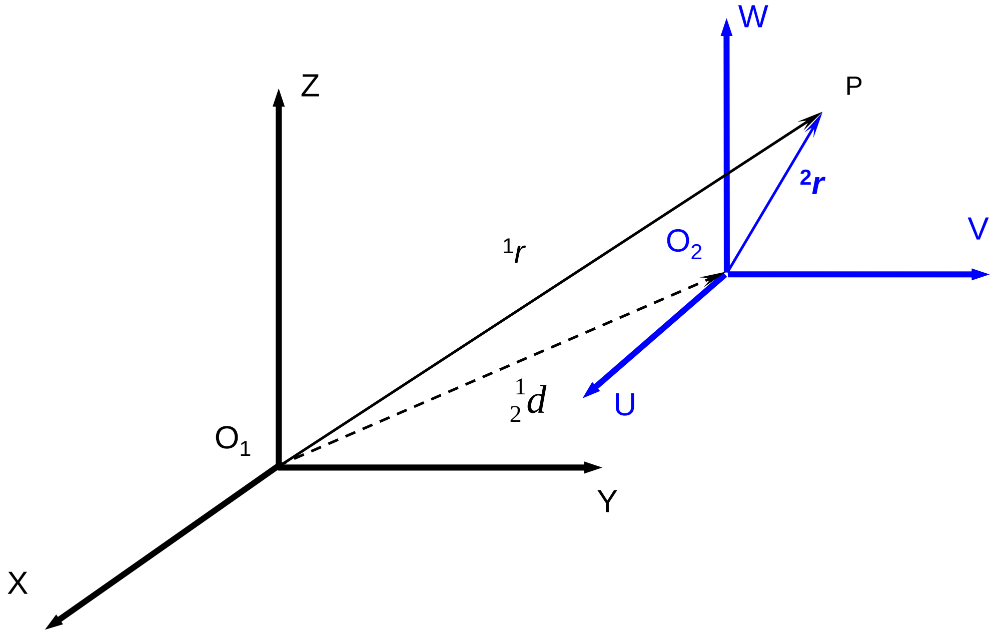
Biraketazko matrizea sistema mugikorrarekiko (post-biderkatu):

$$
{}^{1}_{2}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{90º,W}\,\mathbf{R}_{90º,U}\,\mathbf{R}_{90º,V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boxed{{}^{1}\boldsymbol{r} = \mathbf{R}_{90º,W}\,\mathbf{R}_{90º,U}\,\mathbf{R}_{90º,V}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}
$$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Sistemen orientazioa mantentzen bada:

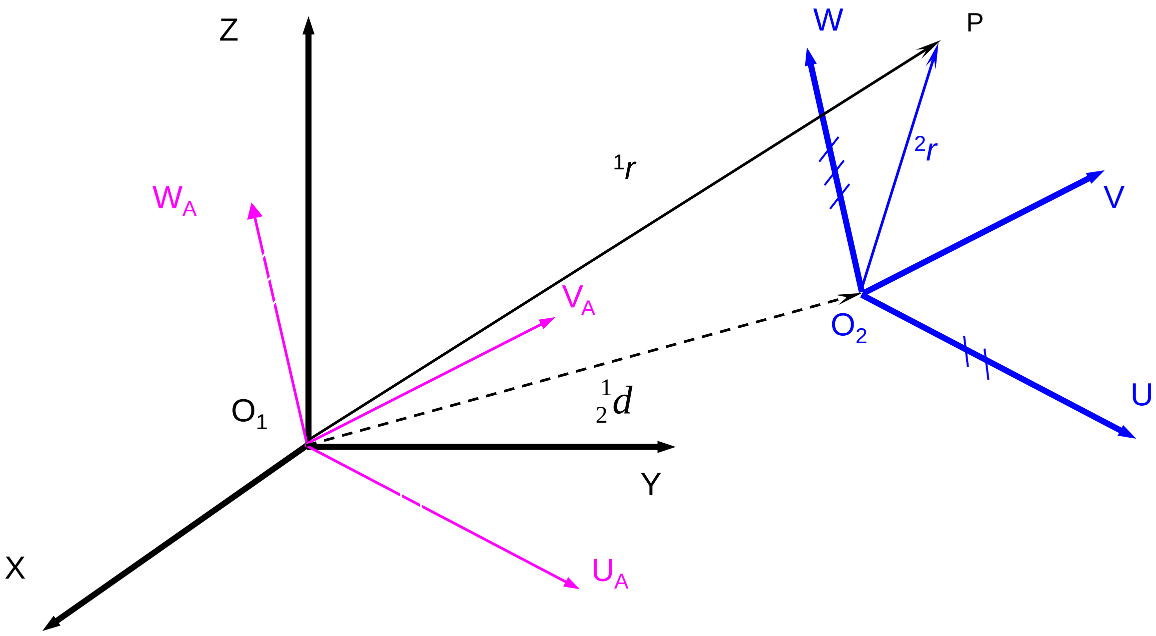


$$^1\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{d} + {}^2\mathbf{r} \Rightarrow \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix}$$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Edozein orientazioa:



$$^1\boldsymbol{r} = {}^1_2\mathbf{R}\,{}^2\boldsymbol{r} + {}^1_2\boldsymbol{d}$$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Transformaziozko matrize homogeneoa

$$\begin{cases} {}^{1}\boldsymbol{r} = {}^{1}_{2}\mathbf{R}\,{}^{2}\boldsymbol{r} + {}^{1}_{2}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{1} = \boldsymbol{1} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} {}^{1}\boldsymbol{r} \\ - \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}_{2}\mathbf{R} & | & {}^{1}_{2}\boldsymbol{d} \\ - & & - \\ 000 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{2}\boldsymbol{r} \\ - \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$${}^{1}_{2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^{1}_{2}\mathbf{R} & {}^{1}_{2}\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaziozko matrize homogeneoa

$$\boxed{{}^{1}\boldsymbol{r} = {}^{1}_{2}\mathbf{T}\,{}^{2}\boldsymbol{r}}$$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Transformaziozko matrize homogeneoaren interpretazioa:

1. $(OUVW)_2$ sistemaren kokapena $(OXYZ)_1$ sistemarekiko.

2. Koordenatuen aldaketa $(OUVW)_2$ eta $(OXYZ)_1$ sistemen artean.

3. **a** bektorearen biraketa eta traslazioa, **a'** bihurtuz, bektore biak (OXYZ) sistemarekiko zehaztuta izanda.

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Transformaziozko matrizeen konposaketa

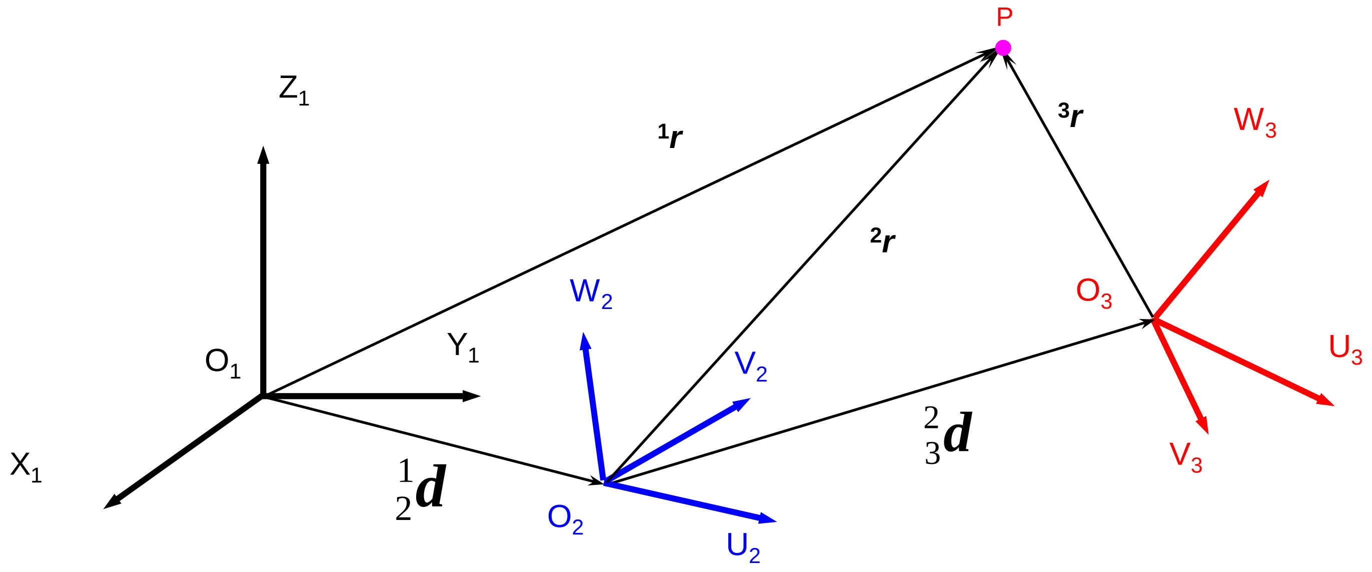
1- Transformazioak sistema finkoarekiko (OXYZ) definitzen baldin badira, matrizeak pre-biderkatzen dira.

2- Transformazioak sistema mugikorrarekiko (OUVW) definitzen baldin badira, matrizeak post-biderkatzen dira.

3- Edozein tranformazio produktu bi eratara interpreta daiteke, sistema finkoarekiko edo mugikorrarekiko definituta balego bezala.

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Transformaziozko matrizeen konposaketa



$$ {}^1\boldsymbol{r} = {}^1_2\mathbf{T}\,{}^2_3\mathbf{T}\,{}^3\boldsymbol{r} \quad \text{con} \quad {}^1_3\mathbf{T} = {}^1_2\mathbf{T}\,{}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2_3\mathbf{R} & {}^2_3\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R}\,{}^2_3\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{R}\,{}^2_3\boldsymbol{d} + {}^1_2\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} $$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

- Translaziozko oinarrizko matrize homogeneoa

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Biraketazko oinarrizko matrize homogeneoa

$$ {}_2^1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Translazioa eta biraketa, biak batera:

$$ {}_2^1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}_2^1\mathbf{R} & {}_2^1\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & d_x \\ u_y & v_y & w_y & d_y \\ u_z & v_z & w_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

- Biraketazko oinarrizko matrizeak ardatz finkoekiko:

$$\mathbf{T}_{\alpha,\mathrm{X}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha & 0\\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{T}_{\varphi,\mathrm{Y}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \mathrm{sen}\varphi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\mathrm{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{T}_{\theta,\mathrm{Z}}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 & 0\\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

- Kontuz!!! Matrize hauen arteko eragitekak ez dira trukakorrak. Sekuentziaren ordena hartu behar da kontuan:

$$\mathbf{T}_d\ \mathbf{T}_{\alpha,\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha & d_y \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\alpha,\mathrm{X}}\ \mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\alpha & -\mathrm{s}\alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & \mathrm{c}\alpha & -\mathrm{s}\alpha & d_y\mathrm{c}\alpha - d_z\mathrm{s}\alpha \\ 0 & \mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha & d_y\mathrm{s}\alpha + d_z\mathrm{c}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Alderantzizko transformazioa:

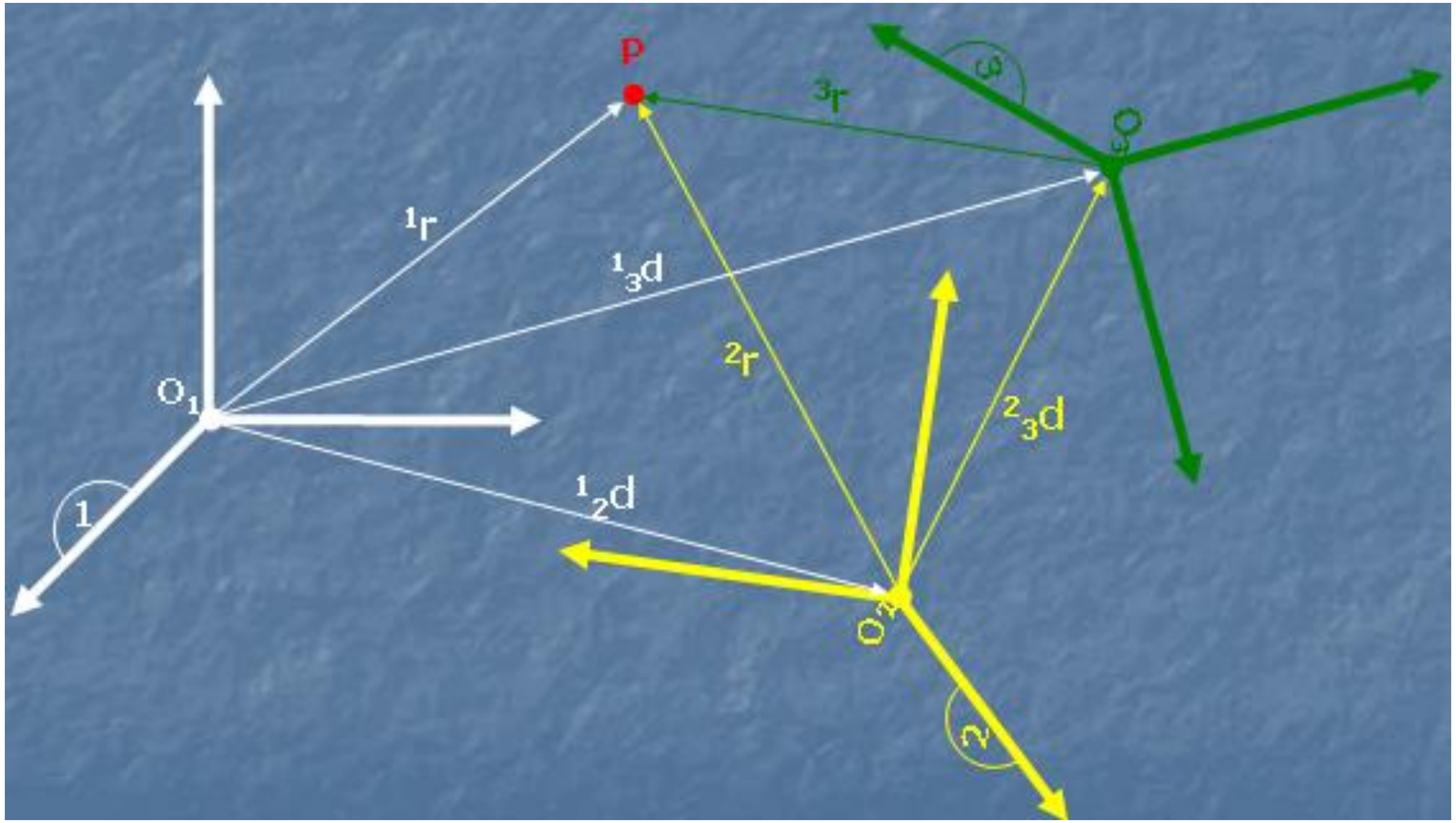
$$ {}^2_1\mathbf{T} = \left({}^1_2\mathbf{T}\right)^{-1} $$

$$ {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & {}^1_2\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \left({}^1_2\mathbf{R}\right)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^1_2\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^1_2\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R}^T & -{}^1_2\mathbf{R}^T\,{}^1_2\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} $$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak



Transformazioen konposaketa kate itxian:

$${}^1\boldsymbol{r} = {}^1_2\mathbf{T}\;{}^2_3\mathbf{T}\;{}^3\boldsymbol{r}$$

$${}^1\boldsymbol{r} = {}^1_3T\;{}^3\boldsymbol{r}$$

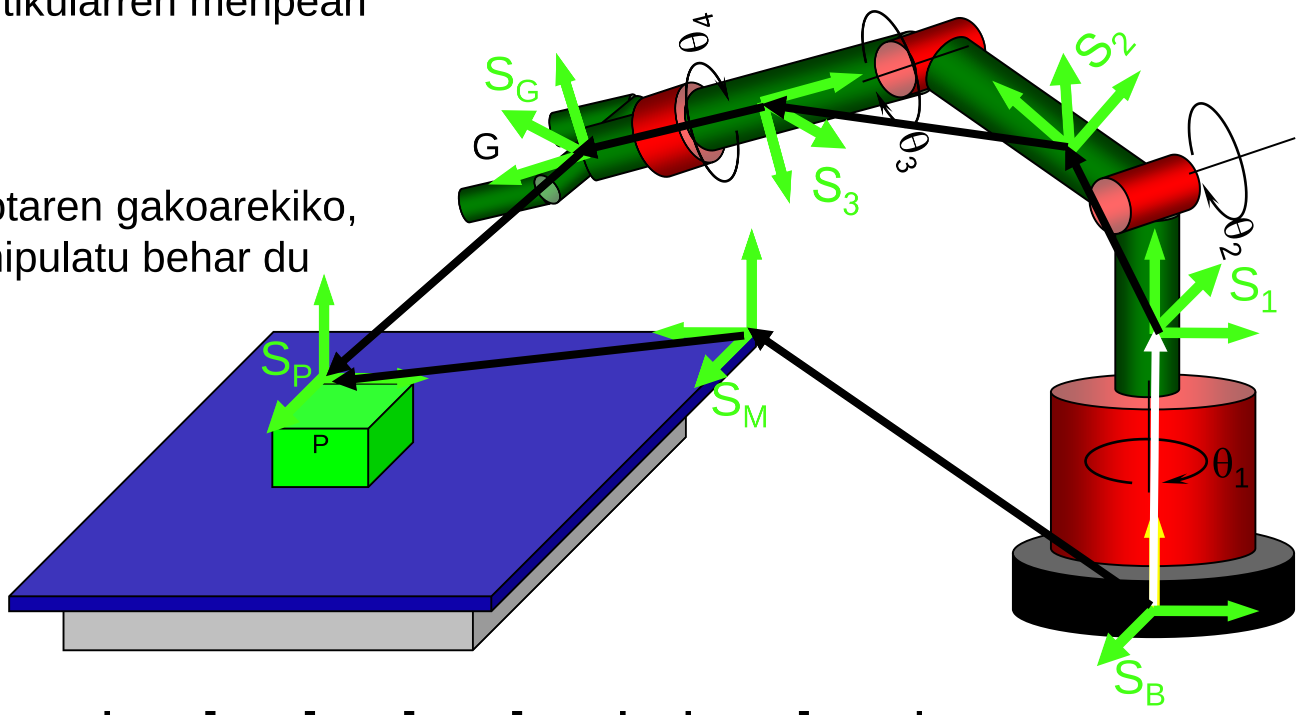
Entonces $${}^1_3\mathbf{T} = {}^1_2\mathbf{T}\;{}^2_3\mathbf{T}$$ O bien $${}^1_2\mathbf{T}\;{}^2_3\mathbf{T}\left({}^1_3\mathbf{T}\right)^{-1} = \mathbf{I}$$

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

ERABILPEN ADIBIDEA

$[{}^{G}_{P}T]$ transformazioaren matrizea errobotaren aldagai artikularren menpean planteatu

Helburua:
Pieza kokatzea errobotaren gakoarekiko, zeren eta gakoak manipulatu behar du pieza hau.



$$\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]\left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]\left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]\left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]\left[{}^{G}_{P}\mathbf{T}\right]=\left[{}^{B}_{M}\mathbf{T}\right]\left[{}^{M}_{P}\mathbf{T}\right]$$

Non:
$$\begin{cases}\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]=f(\theta_1)\\ \left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]=f(\theta_2)\\ \left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]=f(\theta_3)\\ \left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]=f(\theta_4)\end{cases}$$

Eragiketak eginez:
$$\left[{}^{G}_{P}\mathbf{T}\right]=\left[\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]\left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]\left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]\left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]\right]^{-1}\left[{}^{B}_{M}\mathbf{T}\right]\left[{}^{M}_{P}\mathbf{T}\right]$$

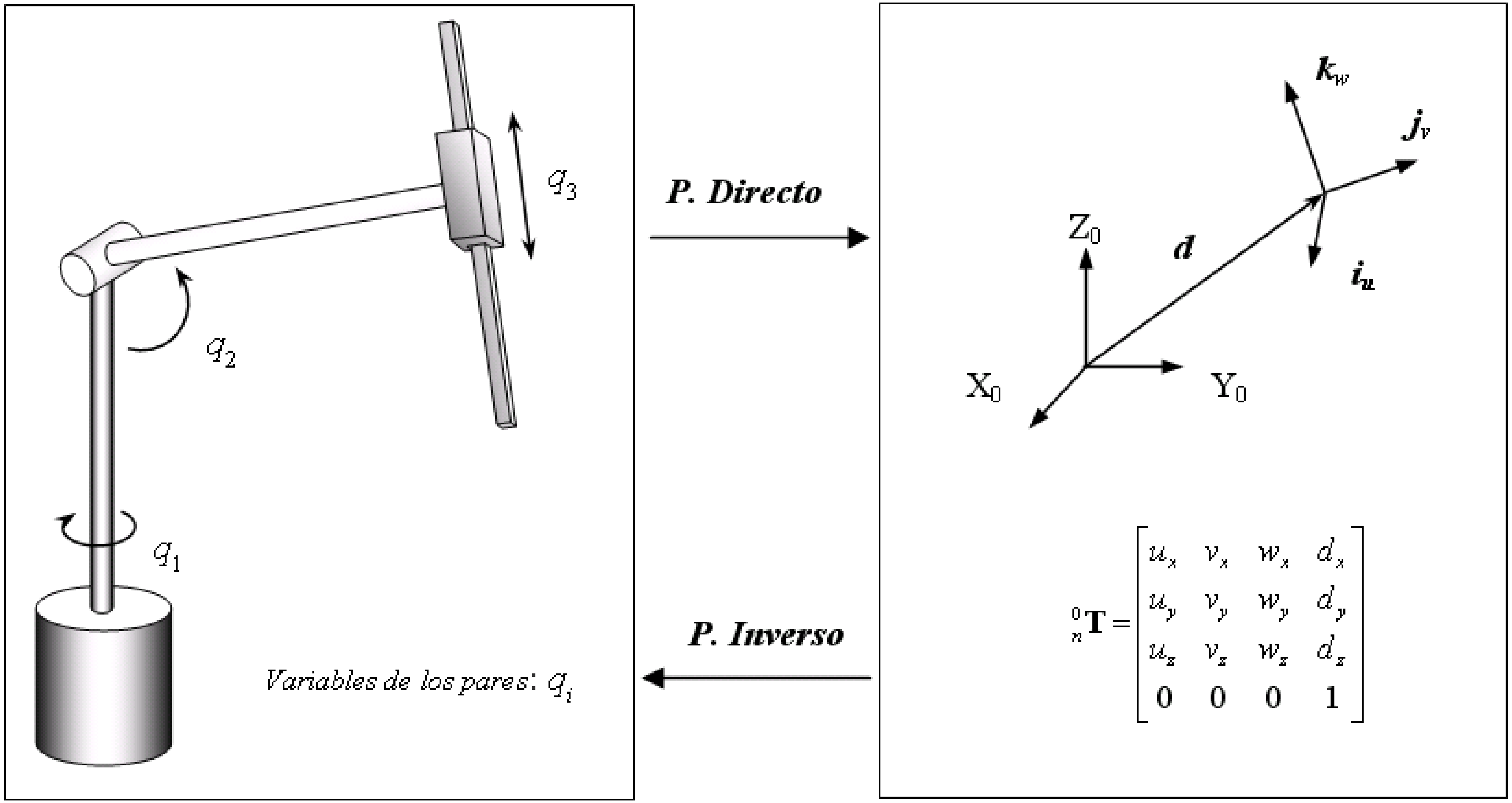
5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

- Planteamendua:
  - Metodo matriziala (Denavit-Hartenberg): errobot serieak edo lazo bakar baten mekanismoak
  - Planteamendu geometrikoa: lazoen ekuazio bektorialak
- Ebazpena:
  - Metodo analitikoak
  - Metodo numerikoak

5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Kate irekiko mekanismoak: Metodo Matriziala

Kokapen arazo zuzena eta alderantzizkoa



Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

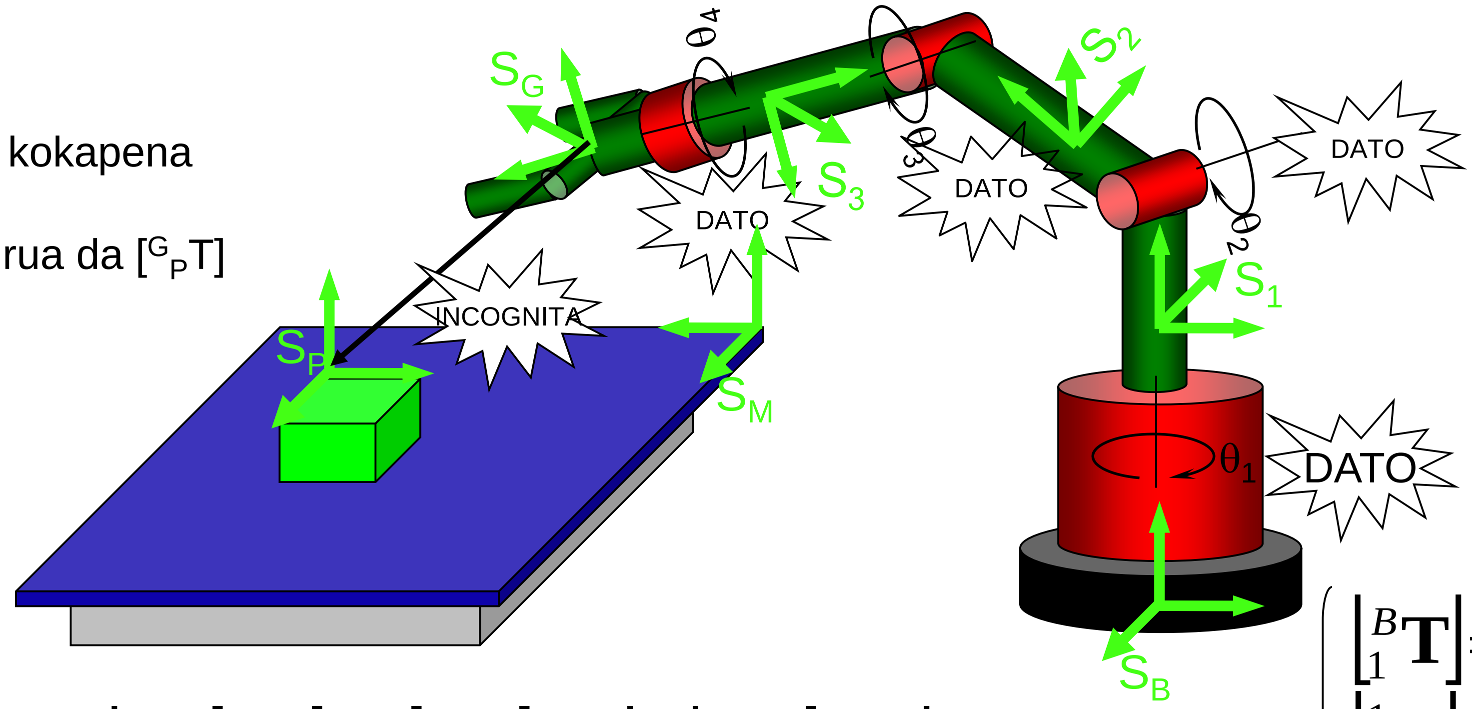
5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

KOKAPEN ARAZO ZUZENA

Datuak:
Mekanismoaren a.g.

Ezezaguna:
Elementu terminalaren kokapena

Adibide honetan, helburua da $[{}^{G}_{P}T]$ matrizea lortzea



$$\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]\left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]\left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]\left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]\left[{}^{G}_{P}\mathbf{T}\right]=\left[{}^{B}_{M}\mathbf{T}\right]\left[{}^{M}_{P}\mathbf{T}\right]$$

$$\left[{}^{G}_{P}\mathbf{T}\right]=\left[\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]\left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]\left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]\left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]\right]^{-1}\left[{}^{B}_{M}\mathbf{T}\right]\left[{}^{M}_{P}\mathbf{T}\right]$$

Non:
$$\begin{cases}\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]=f(\theta_1)\\ \left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]=f(\theta_2)\\ \left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]=f(\theta_3)\\ \left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]=f(\theta_4)\end{cases}$$

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

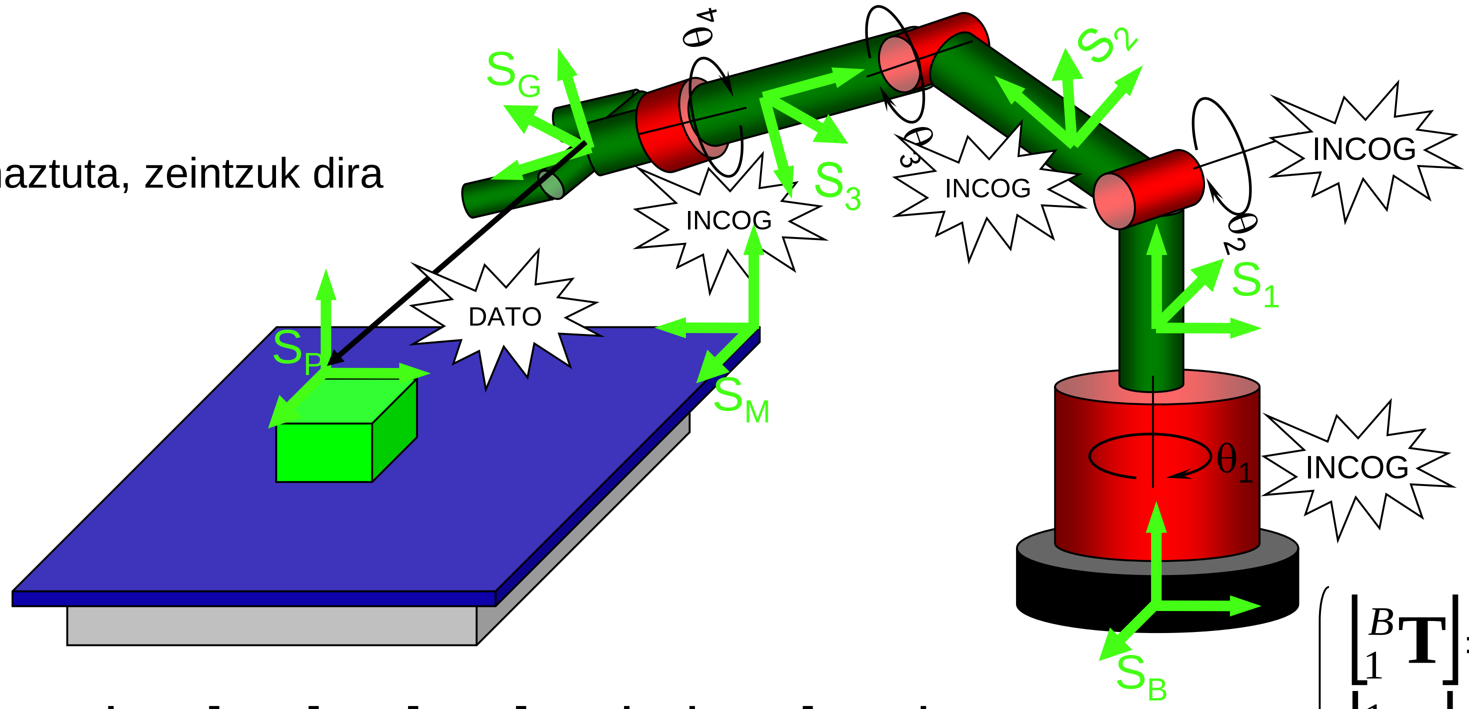
5.4 Objektu baten irudikapena: Transformaziozko matrizeak

Datuak:
Elementu terminalaren kokapena

Ezezaguna:
Mekanismoaren a.g.

Adibide honetan, $[{}^{G}_{P}T]$ zehaztuta, zeintzuk dira aldagai artikularrak?

ALDERANTZIZKO ARAZOA



$$\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]\left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]\left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]\left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]\left[{}^{G}_{P}\mathbf{T}\right]=\left[{}^{B}_{M}\mathbf{T}\right]\left[{}^{M}_{P}\mathbf{T}\right]$$

$$\left[{}^{G}_{P}\mathbf{T}\right]=\left[\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]\left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]\left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]\left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]\right]^{-1}\left[{}^{B}_{M}\mathbf{T}\right]\left[{}^{M}_{P}\mathbf{T}\right]$$

Non:
$$\begin{cases}\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]=f(\theta_1)\\ \left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]=f(\theta_2)\\ \left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]=f(\theta_3)\\ \left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]=f(\theta_4)\end{cases}$$

5.5 Metodo matriziala

***Denavit-Hartenberg**-en Notazioa*

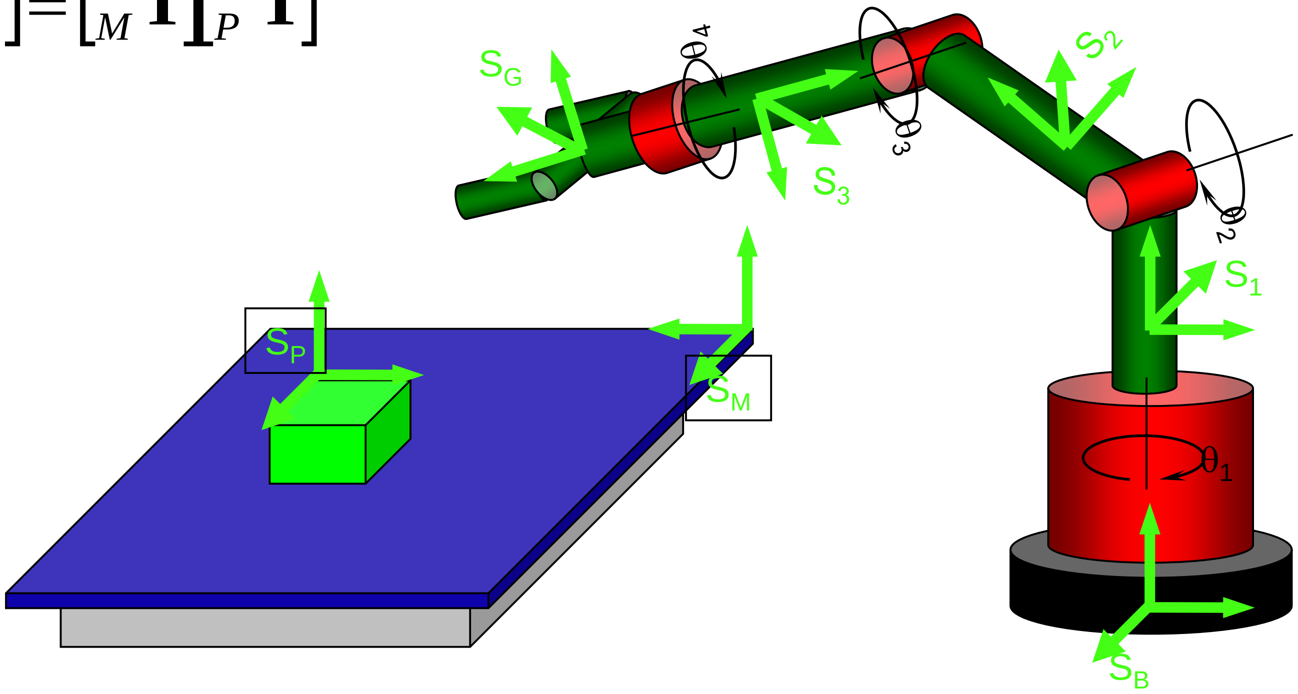
Beharrezkoa da elementu bakoitzaren erreferentzi sistema planteatzea:

Erreferentzi sistema hauek erabiltzen dira transformazio matrizeak lortzeko:

$$\left[{}^{B}_{1}\mathbf{T}\right]\left[{}^{1}_{2}\mathbf{T}\right]\left[{}^{2}_{3}\mathbf{T}\right]\left[{}^{3}_{G}\mathbf{T}\right]\left[{}^{G}_{P}\mathbf{T}\right]=\left[{}^{B}_{M}\mathbf{T}\right]\left[{}^{M}_{P}\mathbf{T}\right]$$

Denavit-ek eta Hartenberg-ek aurkeztu zuten 1955-an erreferenzti sistema elementalak eskuratzeko metodo sistematiko bat.

Zertan datza? Elementu bakoitzeko parametro batzuk planteatzen dira matrizeak automatikoki lortzeko.



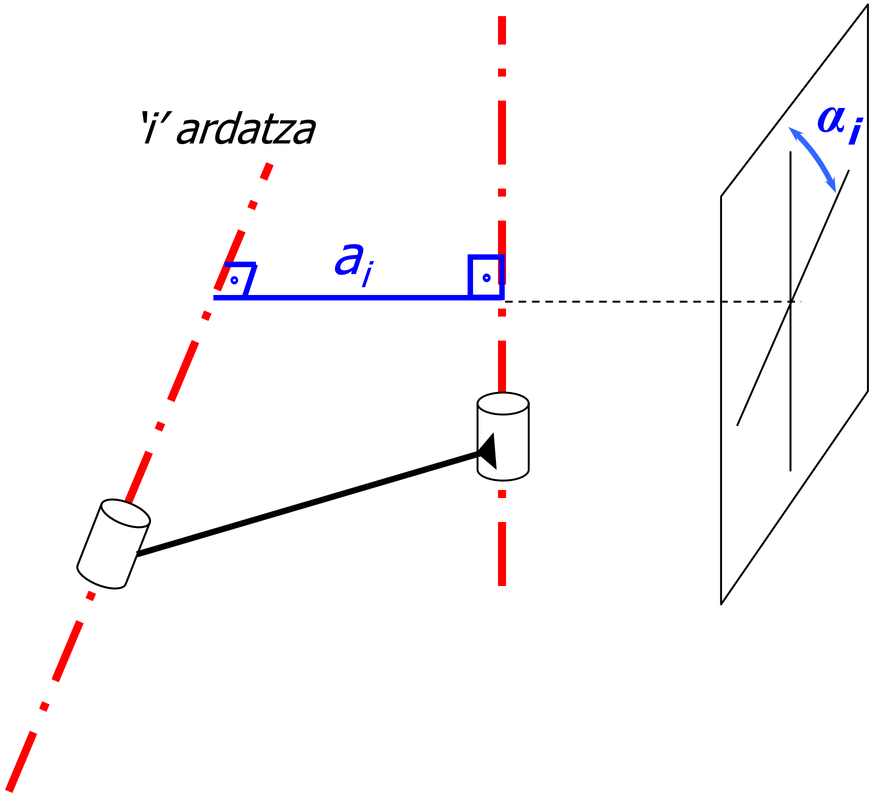
5.5 Metodo matriziala

Denavit-Hartenberg-en Notazioa

<u>“i” elementuaren parametroak:</u>

a_i: elementuaren luzera

α_i: elementuaren tortsioa



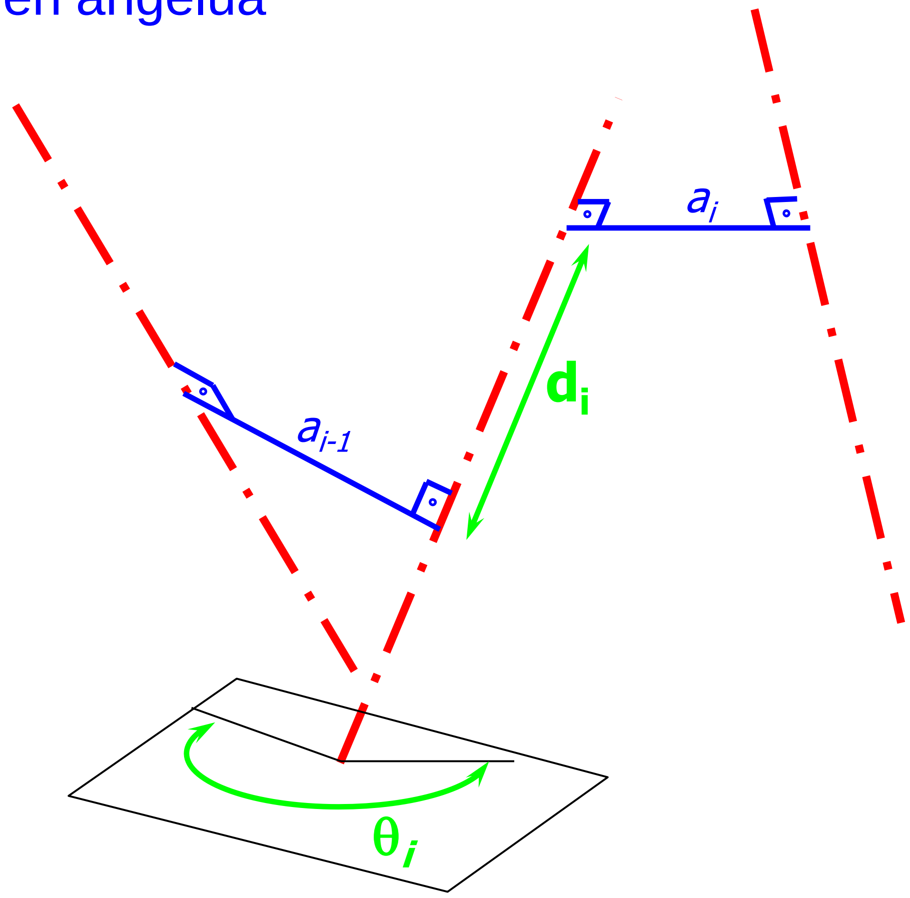
5.5 Metodo matriziala

Denavit-Hartenberg*-en Notazioa*

<u>“i” loturaren parametroak.</u>

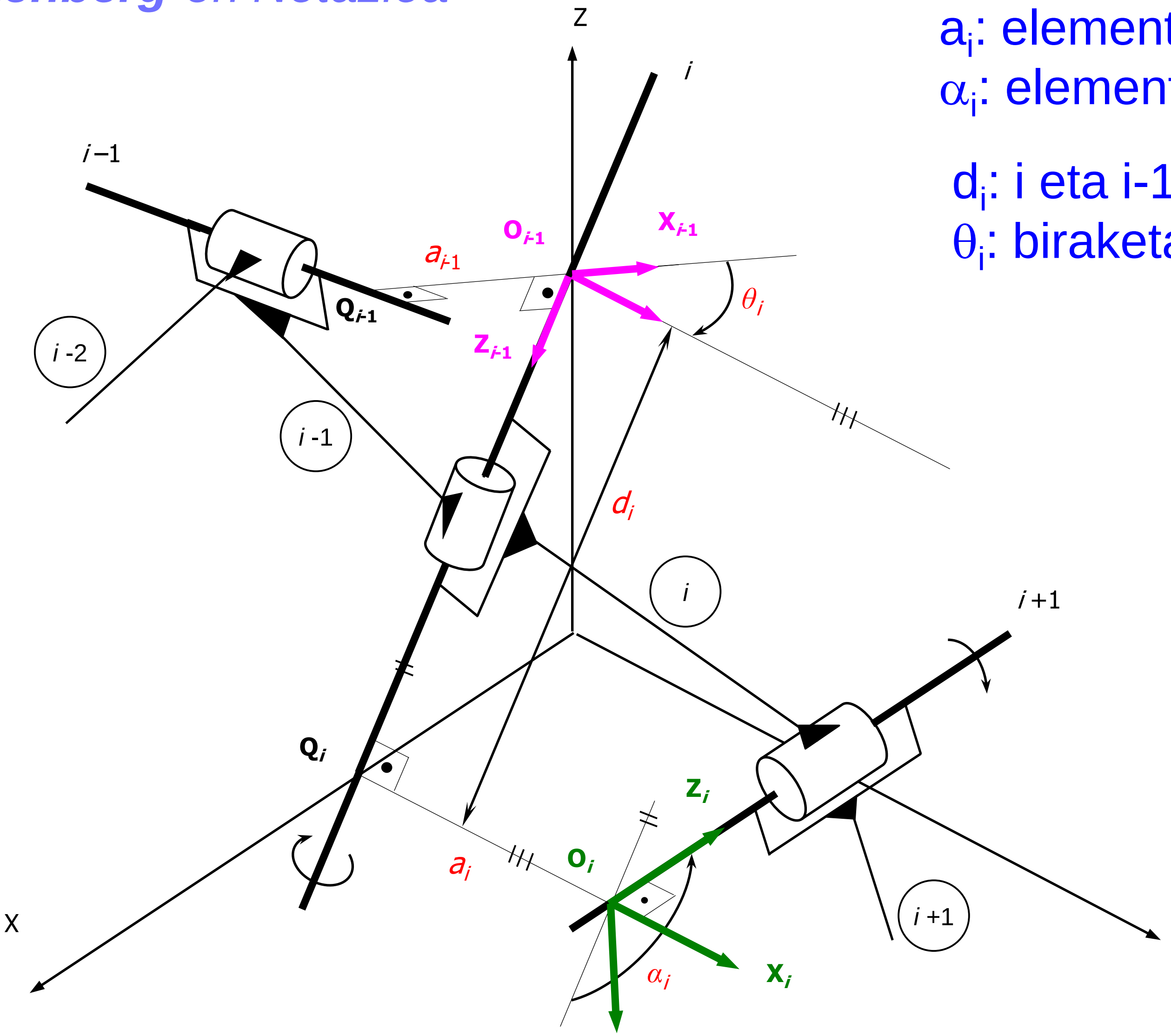
d_i: i eta i-1ardatzen arteko distantzia

θ_i: biraketa-momentuaren angelua



5.5 Metodo matriziala

Denavit-Hartenberg-en Notazioa



a_i: elementuaren luzera
α_i: elementuaren tortsioa

d_i: i eta i-1ardatzen arteko distantzia
θ_i: biraketa-momentuaren angelua

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

Transformaziozko matrize elementalak

i eta ***i* –1** sistemen arteko transformazioen sekuentzia :

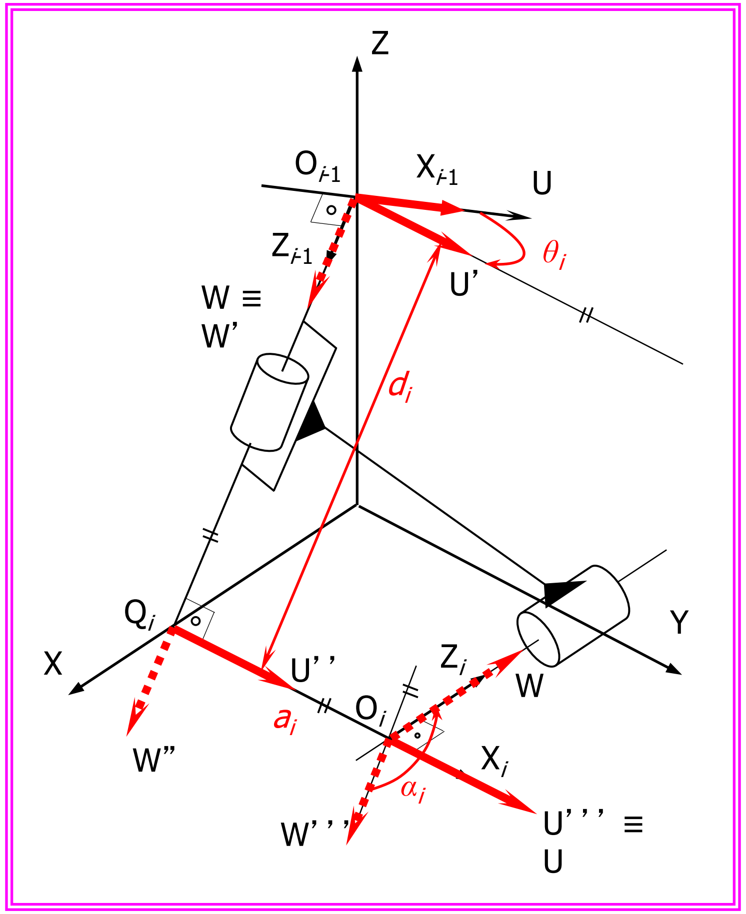
1.- θ_i angeluaren *biraketa bat W-rekiko*, kokapen horretan Z_{i-1} izanez

2.- *W* ardatzatik, d_i distantziako traslazioa

3.- *U* ardatzatik, a_i distantziako traslazioa

4.- α_i angeluaren *biraketa bat U -rekiko*

$$ {}^{i-1}_{\;\;i}\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\theta_i,\mathrm{W}}\,\mathbf{T}_{d_i,\mathrm{W}}\,\mathbf{T}_{a_i,\mathrm{U}}\,\mathbf{T}_{\alpha_i,\mathrm{U}} $$



5.5 Metodo matriziala

Transformaziozko matrize elementalak

Lehengo lau transformazioak (OUVW) sistema mugikorrarekiko egin direnez, transformaziozko matrizea matrize elementalak post-biderkatzen lortzen da:

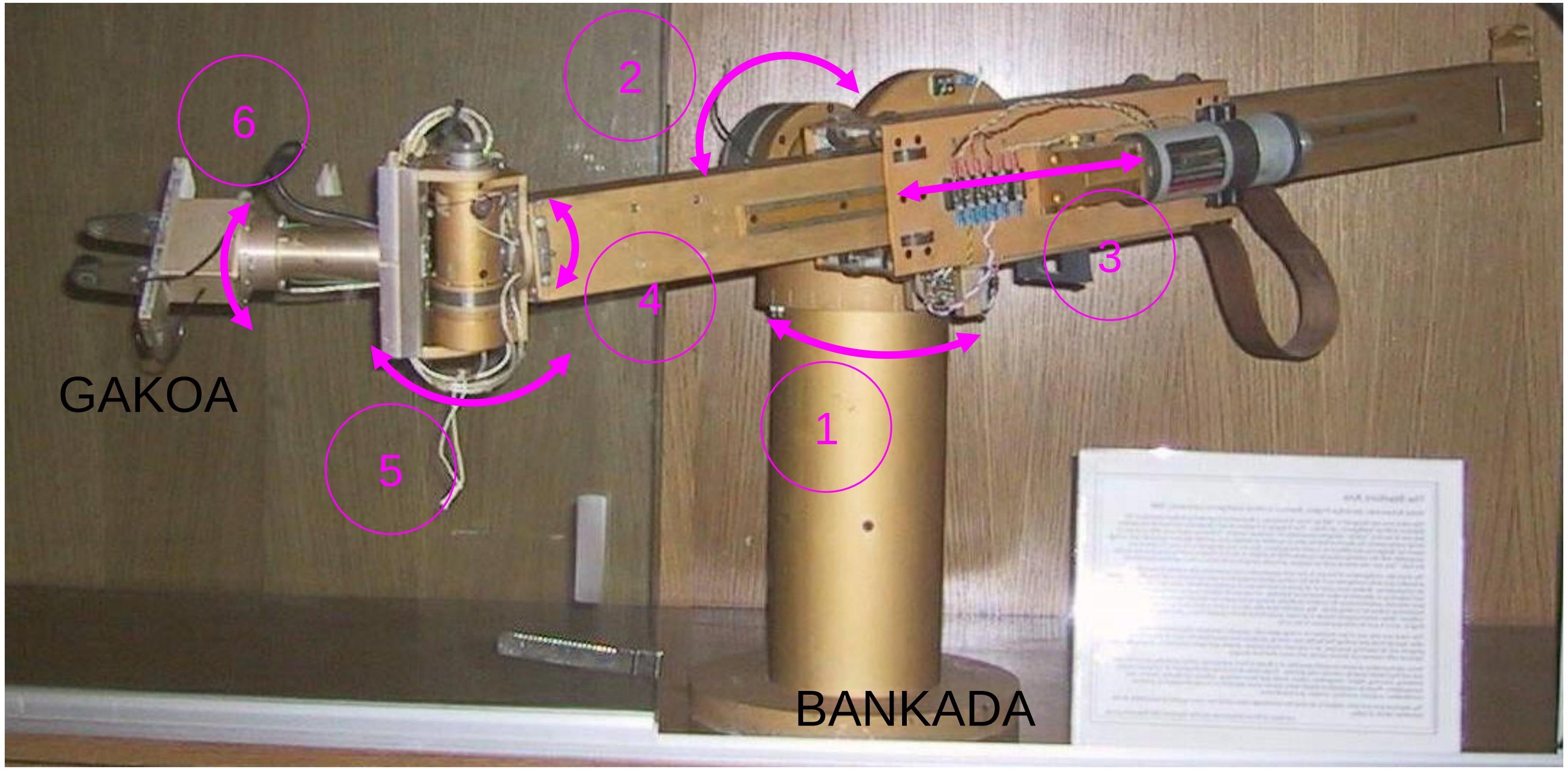
$$ {}^{i-1}_{i}\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\theta_i,\mathrm{W}}\,\mathbf{T}_{d_i,\mathrm{W}}\,\mathbf{T}_{a_i,\mathrm{U}}\,\mathbf{T}_{\alpha_i,\mathrm{U}} $$

$$ {}^{i-1}_{i}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta_i & -\mathrm{s}\theta_i & 0 & 0 \\ \mathrm{s}\theta_i & \mathrm{c}\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\alpha_i & -\mathrm{s}\alpha_i & 0 \\ 0 & \mathrm{s}\alpha_i & \mathrm{c}\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \boxed{ {}^{i-1}_{i}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta_i & -\mathrm{s}\theta_i\mathrm{c}\alpha_i & \mathrm{s}\theta_i\mathrm{s}\alpha_i & a_i\mathrm{c}\theta_i \\ \mathrm{s}\theta_i & \mathrm{c}\theta_i\mathrm{c}\alpha_i & -\mathrm{c}\theta_i\mathrm{s}\alpha_i & a_i\mathrm{s}\theta_i \\ 0 & \mathrm{s}\alpha_i & \mathrm{c}\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} } $$

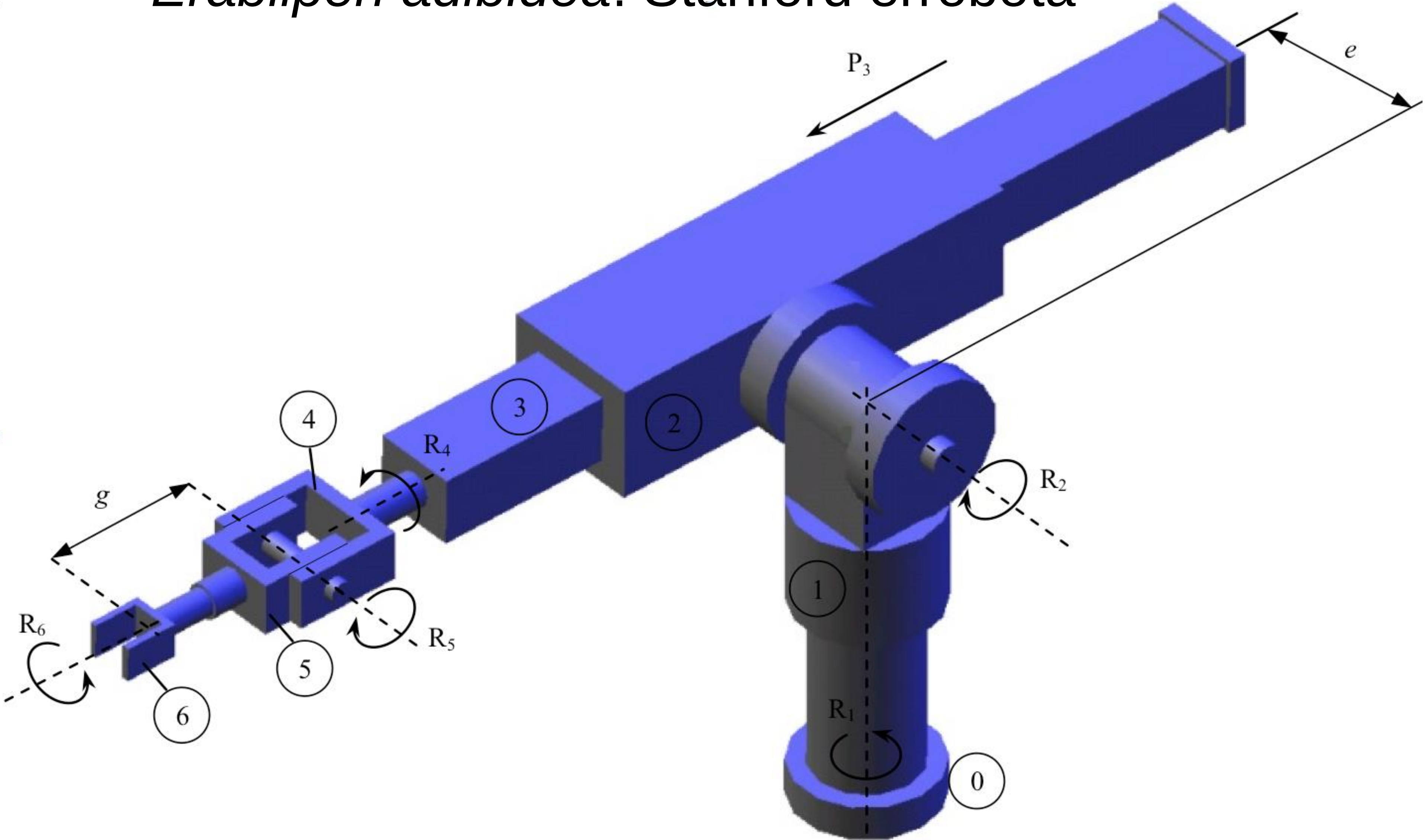
5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



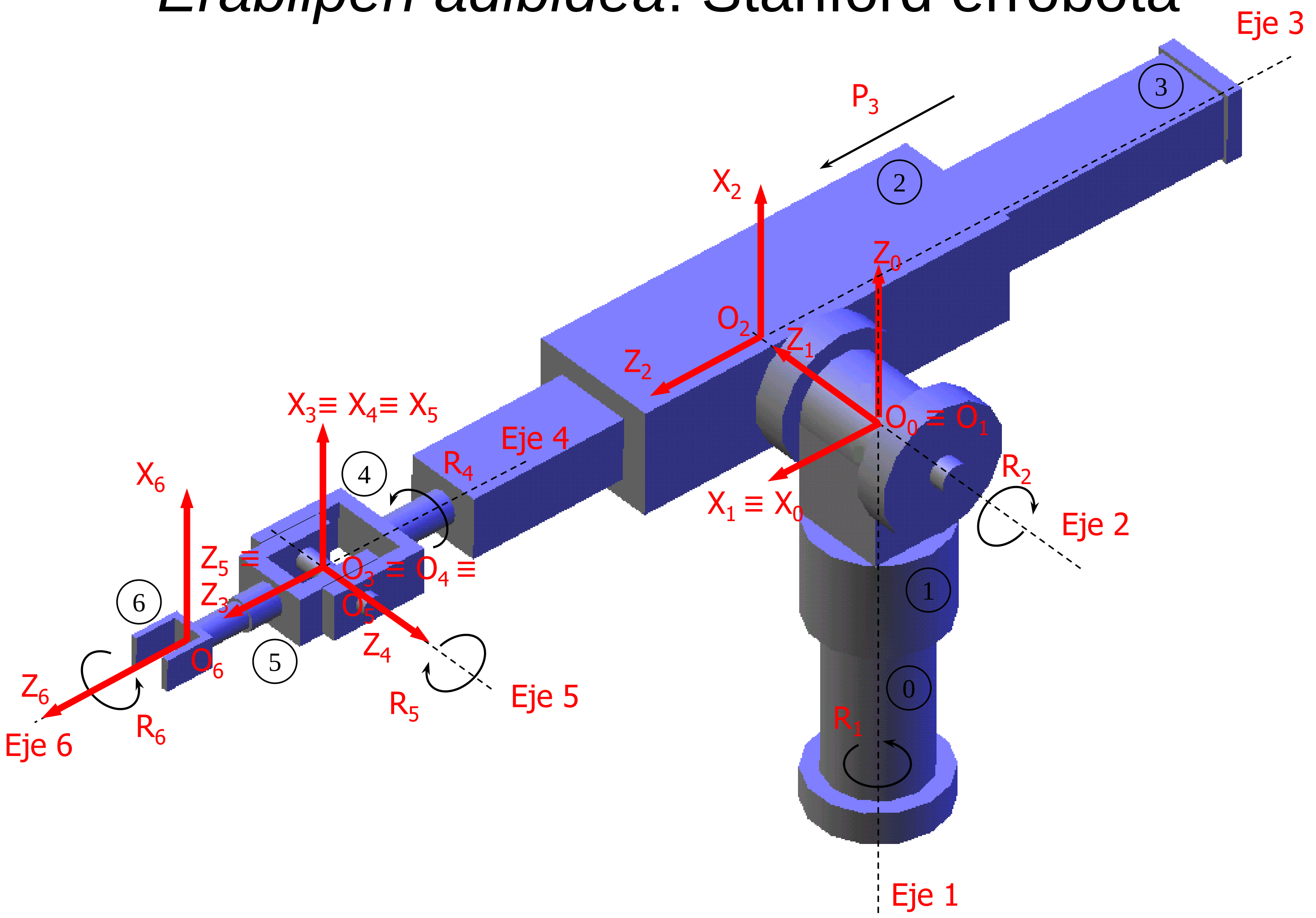
5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



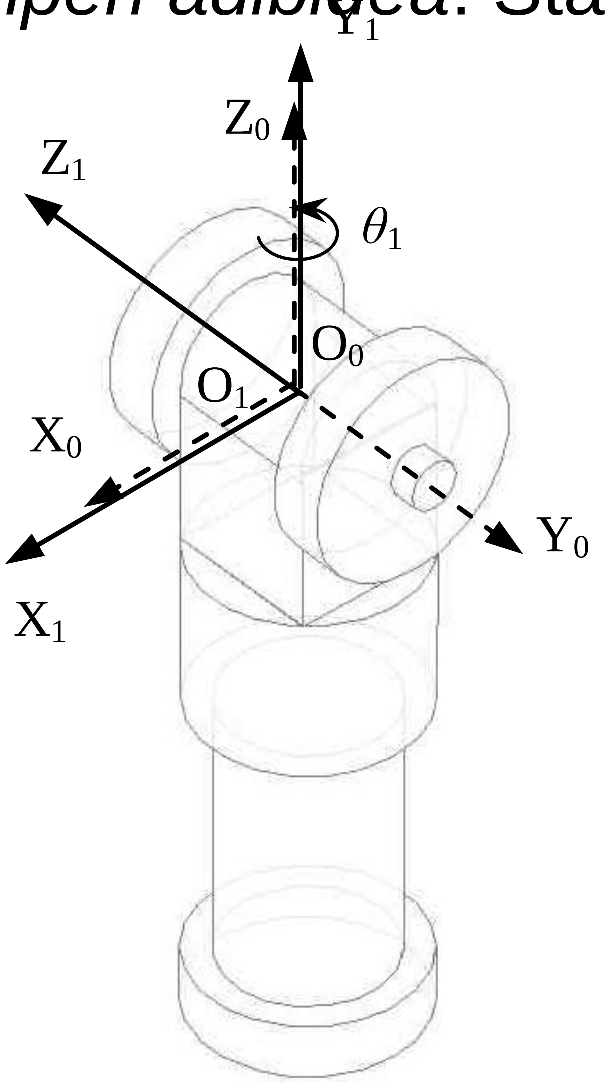
5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



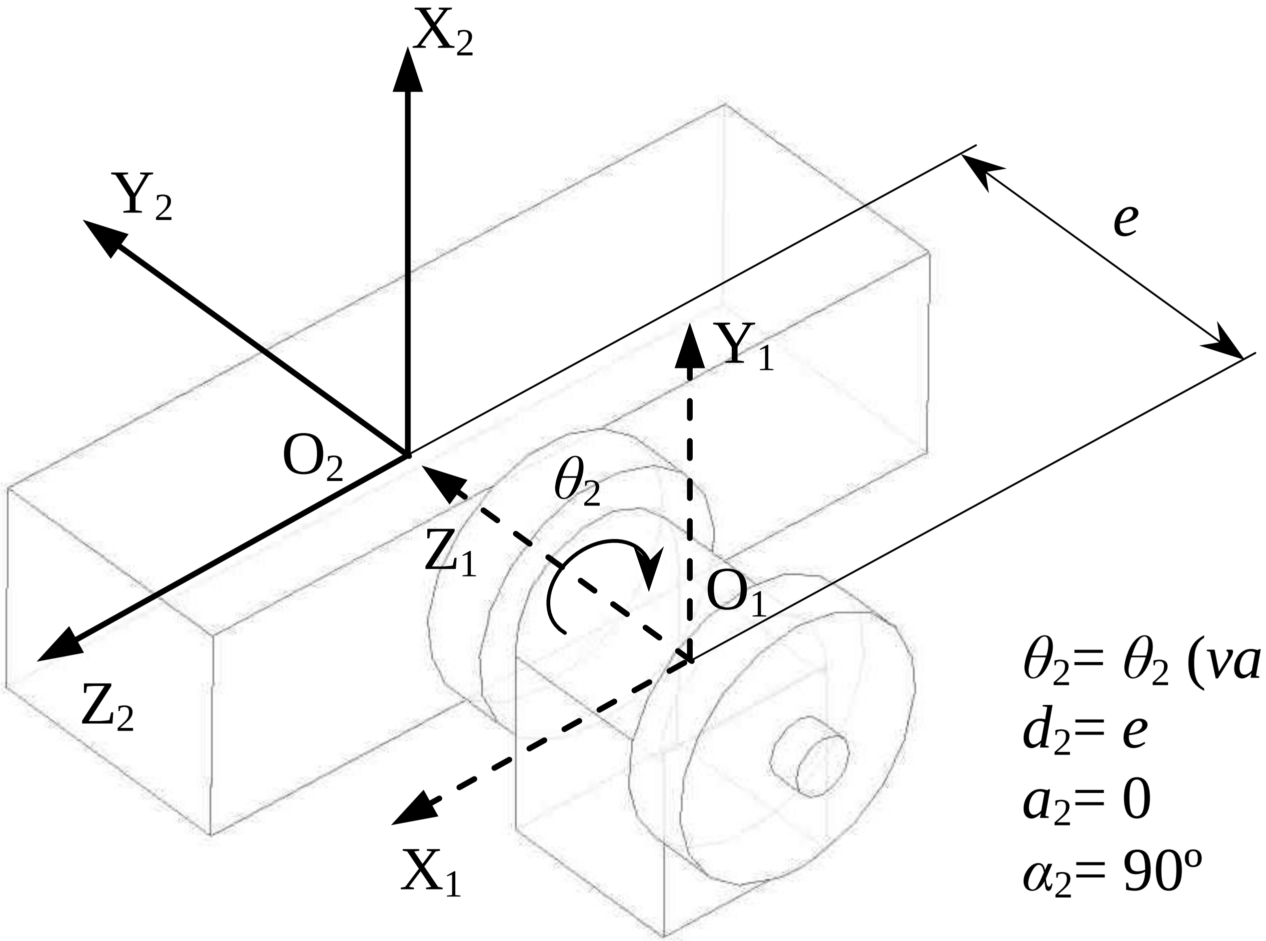
5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



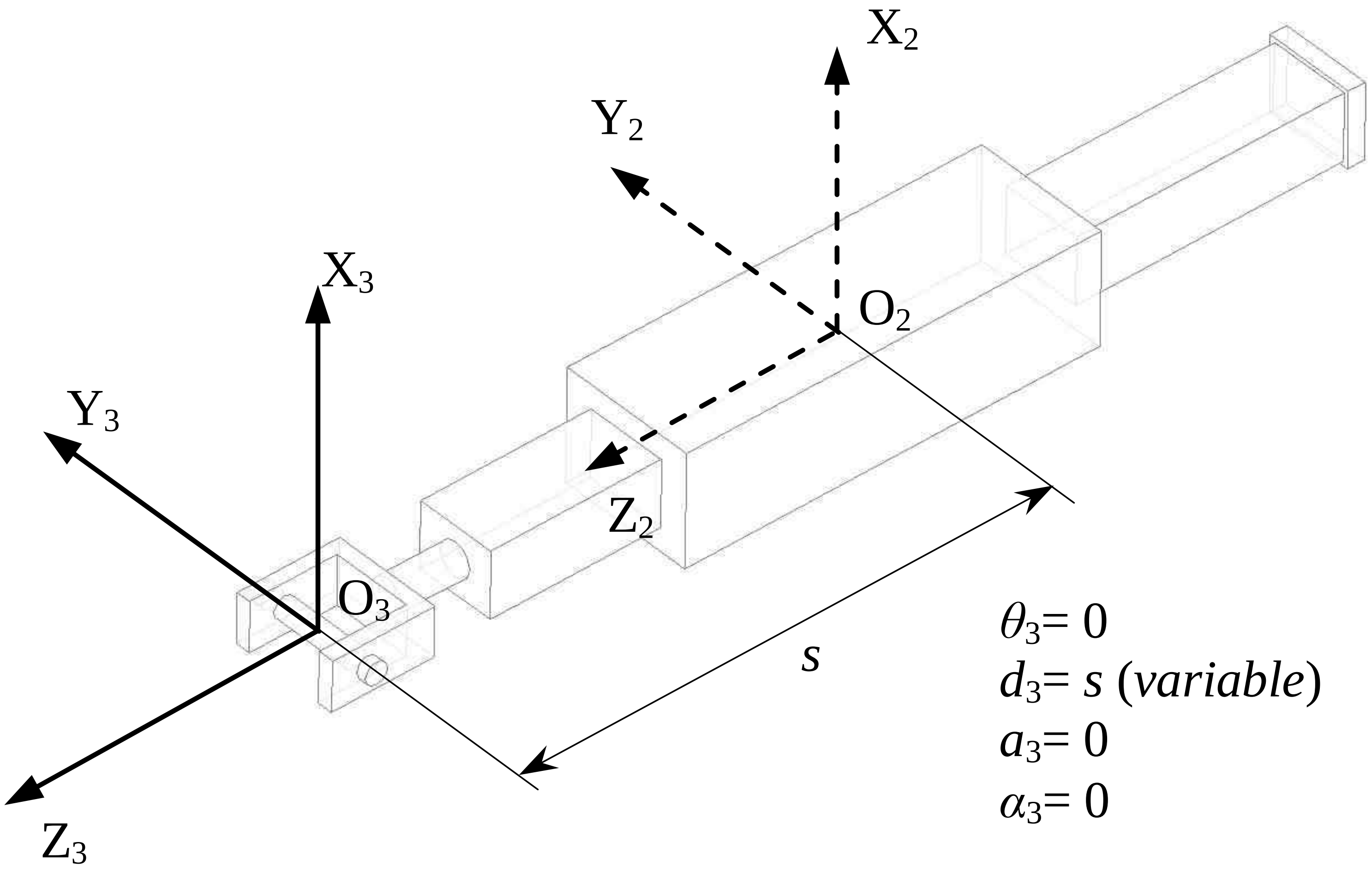
5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



$\theta_2 = \theta_2$ (*variable*)
$d_2 = e$
$a_2 = 0$
$\alpha_2 = 90º$

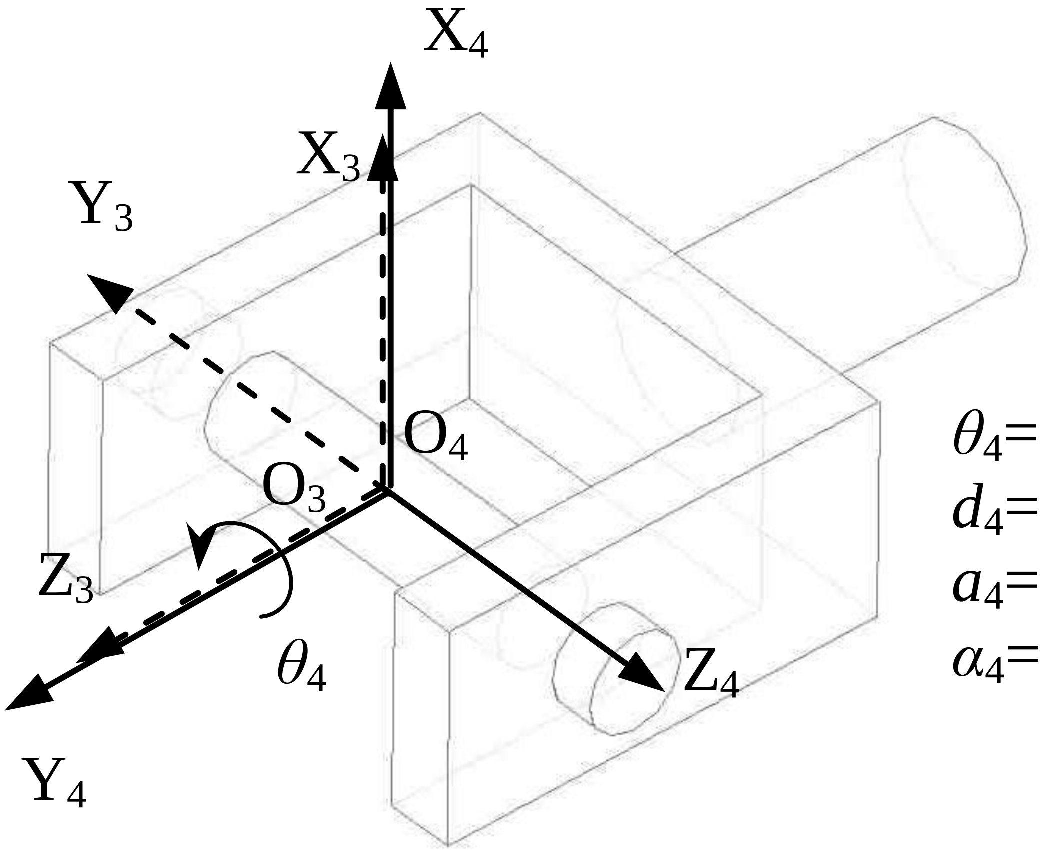
Erabilpen adibidea: Stanford errobota



$\theta_3 = 0$
$d_3 = s$ (*variable*)
$a_3 = 0$
$\alpha_3 = 0$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

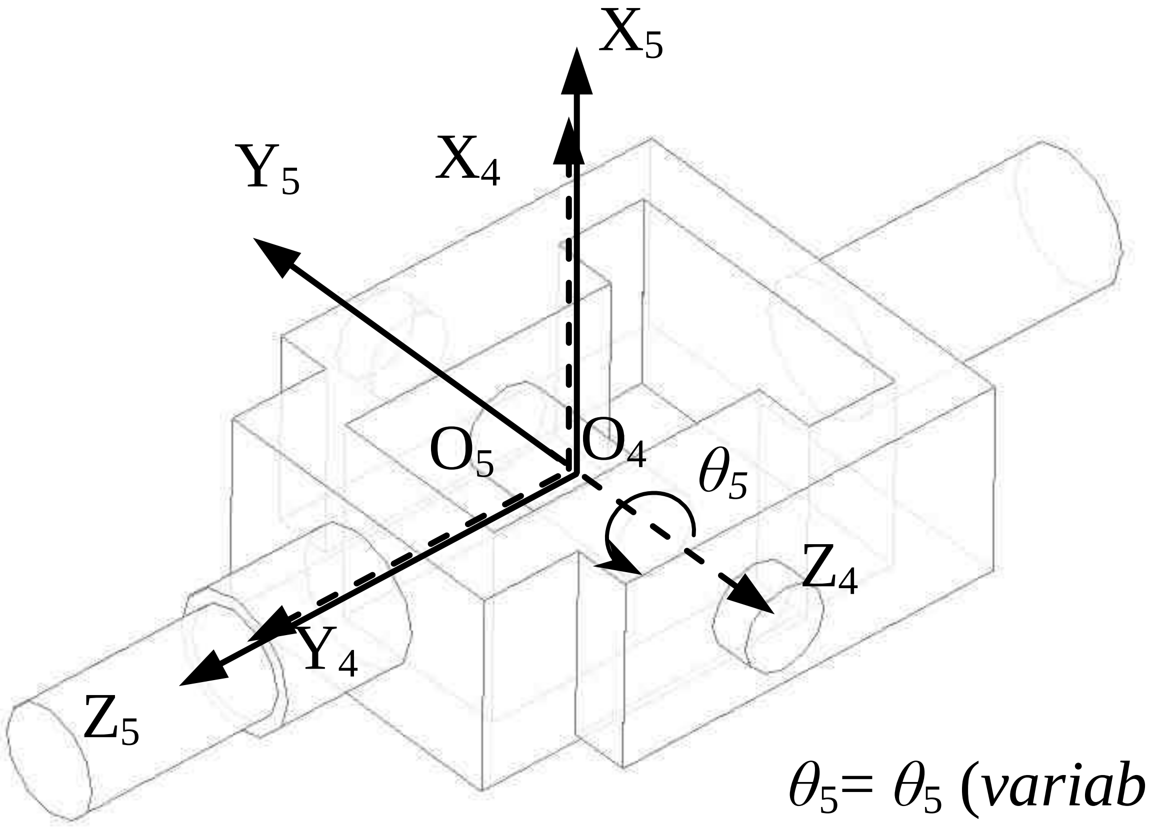
Erabilpen adibidea: Stanford errobota



$\theta_4 = \theta_4$ (*variable*)
$d_4 = 0$
$a_4 = 0$
$\alpha_4 = 90º$

5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



$\theta_5 = \theta_5$ (*variable*)

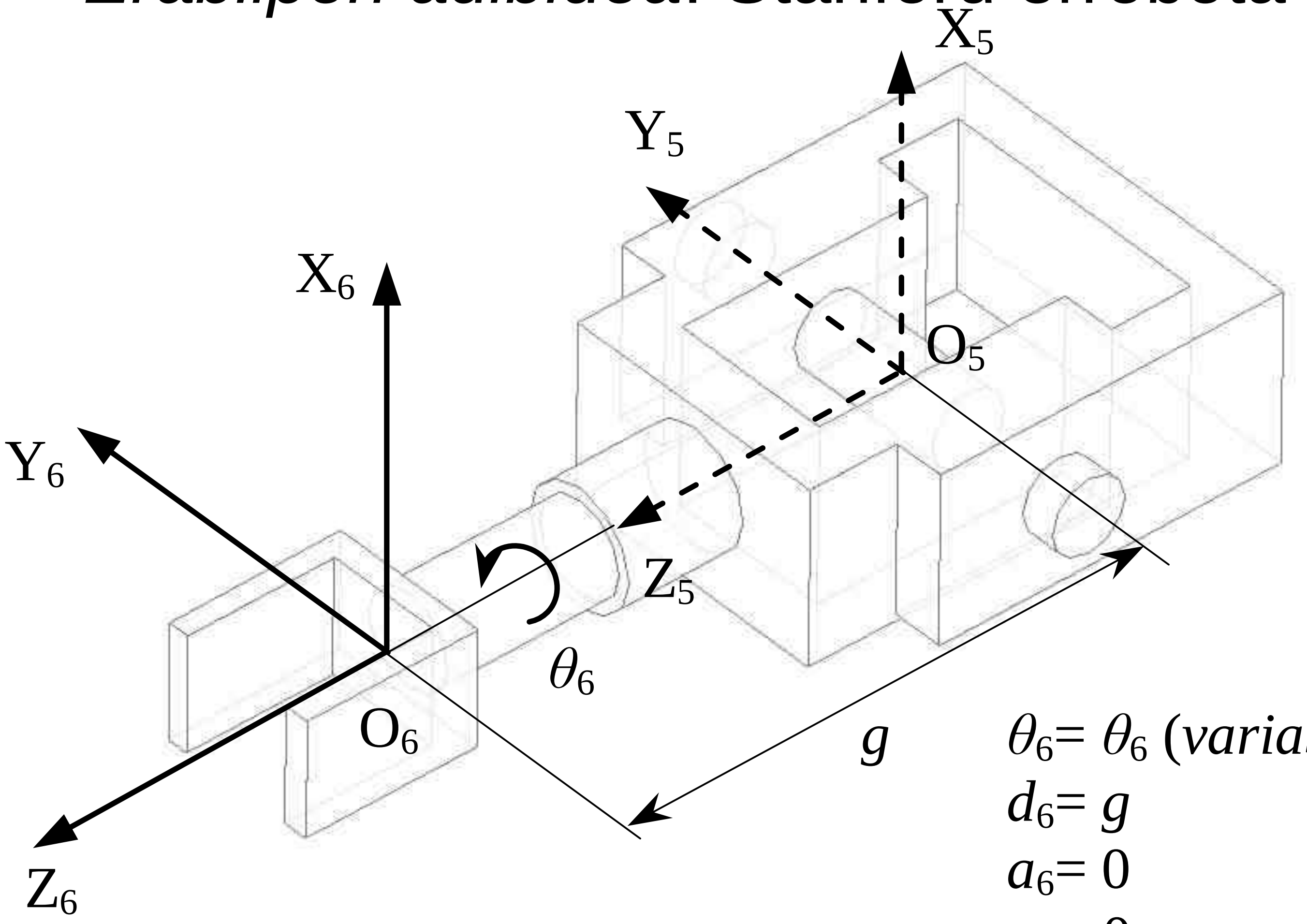
$d_5 = 0$

$a_5 = 0$

$\alpha_5 = 270º$

5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



$\theta_6 = \theta_6$ (*variable*)
$d_6 = g$
$a_6 = 0$
$\alpha_6 = 0$

5.5 Metodo matriziala

Transformaziozko matrize elementalak: Stanford errobota

D-H erabiliz, sistemen arteko matrizeak dira:

$$ {}^0_1\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 c90^o & s\theta_1 s90^o & 0\cdot c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 c90^o & -c\theta_1 s90^o & 0\cdot s\theta_1 \\ 0 & s90^o & c90^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_2\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 c90^o & s\theta_2 s90^o & 0\cdot c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 c90^o & -c\theta_2 s90^o & 0\cdot s\theta_2 \\ 0 & s90^o & c90^o & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c0^o & -s0^o c0^o & s0^o s0^o & 0\cdot c0^o \\ s0^o & c0^o c0^o & -c0^o s0^o & 0\cdot s0^o \\ 0 & s0^o & c0^o & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3_4\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 c90^o & s\theta_4 s90^o & 0\cdot c\theta_4 \\ s\theta_4 & c\theta_4 c90^o & -c\theta_4 s90^o & 0\cdot s\theta_4 \\ 0 & s90^o & c90^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

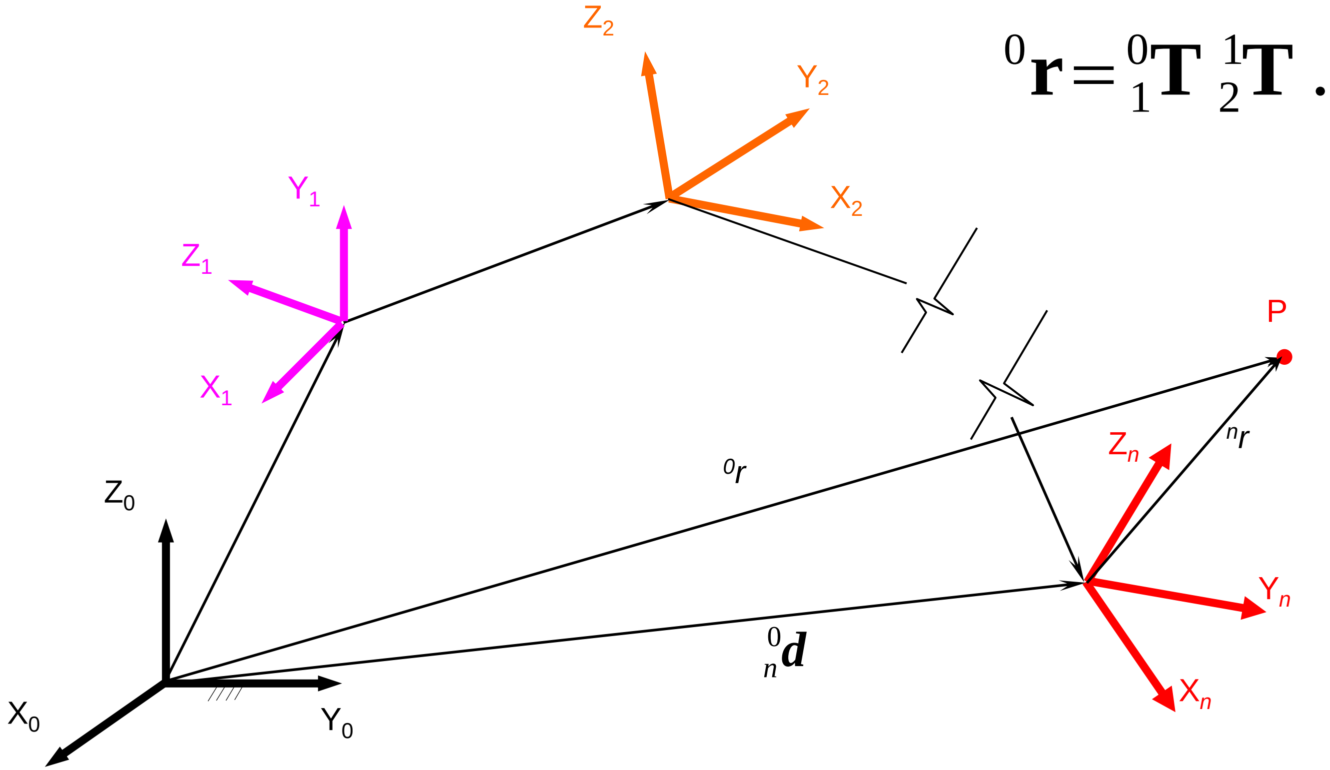
$$ {}^4_5\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 c270^o & s\theta_5 s270^o & 0\cdot c\theta_5 \\ s\theta_5 & c\theta_5 c270^o & -c\theta_5 s270^o & 0\cdot s\theta_5 \\ 0 & s270^o & c270^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^5_6\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 c0^o & s\theta_6 s0^o & 0\cdot c\theta_6 \\ s\theta_6 & c\theta_6 c0^o & -c\theta_6 s0^o & 0\cdot s\theta_6 \\ 0 & s0^o & c0^o & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

5.7 Kate irekiko mekanismoen kokapen analisia

Kate irekiko mekanismoak : Metodo matriziala

$$ {}^{0}\mathbf{r} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}\, {}^{1}_{2}\mathbf{T} \ldots {}^{n-2}_{n-1}\mathbf{T}\, {}^{n-1}_{n}\mathbf{T}\, {}^{n}\mathbf{r} $$



$$ {}^{0}_{n}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & d_x \\ u_y & v_y & w_y & d_y \\ u_z & v_z & w_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}_{n}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} $$

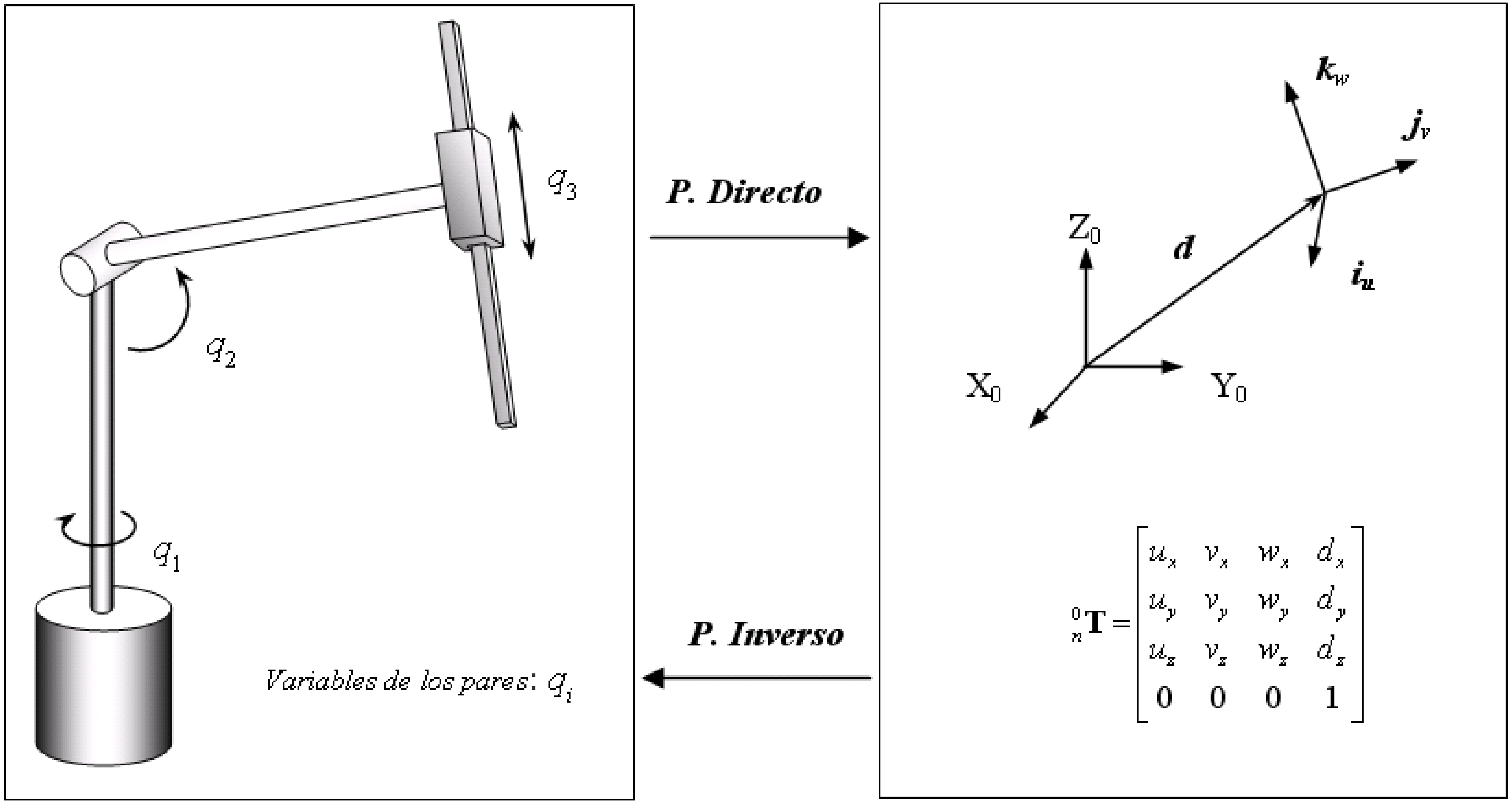
$$ {}^{0}_{n}\boldsymbol{d}^{T} = \begin{bmatrix} d_x & d_y & d_z \end{bmatrix} $$

$$ u_x = f_1(q_1 \ldots q_N) \qquad u_y = f_5(q_1 \ldots q_N) \qquad u_z = f_9(q_1 \ldots q_N) $$
$$ v_x = f_2(q_1 \ldots q_N) \qquad v_y = f_6(q_1 \ldots q_N) \qquad v_z = f_{10}(q_1 \ldots q_N) $$
$$ w_x = f_3(q_1 \ldots q_N) \qquad w_y = f_7(q_1 \ldots q_N) \qquad w_z = f_{11}(q_1 \ldots q_N) $$
$$ d_x = f_4(q_1 \ldots q_N) \qquad d_y = f_8(q_1 \ldots q_N) \qquad d_z = f_{12}(q_1 \ldots q_N) $$

5.7 Kate irekiko mekanismoen kokapen analisia

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica
Ingeniaritza Mekanikoa Saila

Kokapen arazo zuzena eta alderantzizkoa



$$ {}^{0}_{n}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & d_x \\ u_y & v_y & w_y & d_y \\ u_z & v_z & w_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

5.7 Kate irekiko mekanismoen kokapen analisia

Stanford errobota

Kokapen arazo zuzena eta alderantzizkoa

$$ {}^{0}_{6}\mathbf{T} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}\,{}^{1}_{2}\mathbf{T}\,{}^{2}_{3}\mathbf{T}\,{}^{3}_{4}\mathbf{T}\,{}^{4}_{5}\mathbf{T}\,{}^{5}_{6}\mathbf{T} $$

$ux = c\theta1c\theta2(c\theta4c\theta5c\theta6 - s\theta4s\theta6) + s\theta1(s\theta4c\theta5c\theta6+c\theta4s\theta6) + c\theta1s\theta2s\theta5c\theta6$

$uy = s\theta1c\theta2(c\theta4c\theta5c\theta6 - s\theta4s\theta6) - c\theta1(s\theta4c\theta5c\theta6 + c\theta4s\theta6) + s\theta1s\theta2s\theta5c\theta6$

$uz = s\theta2(c\theta4c\theta5c\theta6 - s\theta4s\theta6) - c\theta2s\theta5c\theta6$
$vx = - c\theta1c\theta2(c\theta4c\theta5s\theta6 + s\theta4c\theta6) + s\theta1(- s\theta4c\theta5s\theta6 + c\theta4c\theta6) - c\theta1s\theta2s\theta5s\theta6$
$vy = - s\theta1c\theta2(c\theta4c\theta5s\theta6 + s\theta4c\theta6) - c\theta1(- s\theta4c\theta5s\theta6 + c\theta4c\theta6) - s\theta1s\theta2s\theta5s\theta6$
$vz = - s\theta2(c\theta4c\theta5s\theta6 + s\theta4c\theta6) + c\theta2s\theta5s\theta6$
$wx = - c\theta1c\theta2c\theta4s\theta5 - s\theta1s\theta4s\theta5 + c\theta1s\theta2c\theta5$
$wy = - s\theta1c\theta2c\theta4s\theta5 + c\theta1s\theta4s\theta5 + s\theta1s\theta2c\theta5$
$wz = s\theta2c\theta4s\theta5 - c\theta2c\theta5$
$dx = - g\cdot c\theta1c\theta2c\theta4s\theta5 - g\cdot s\theta1s\theta4s\theta5 + g\cdot c\theta1s\theta2c\theta5 + s\cdot c\theta1s\theta2 + e\cdot s\theta1$
$dy = - g\cdot s\theta1c\theta2c\theta4c\theta5 + g\cdot c\theta1s\theta4s\theta5 + g\cdot s\theta1s\theta2c\theta5 + s\cdot s\theta1s\theta2 - e\cdot c\theta1$
$dz = - g\cdot s\theta2c\theta4s\theta5 - g\cdot c\theta2c\theta5 - s\cdot c\theta2$

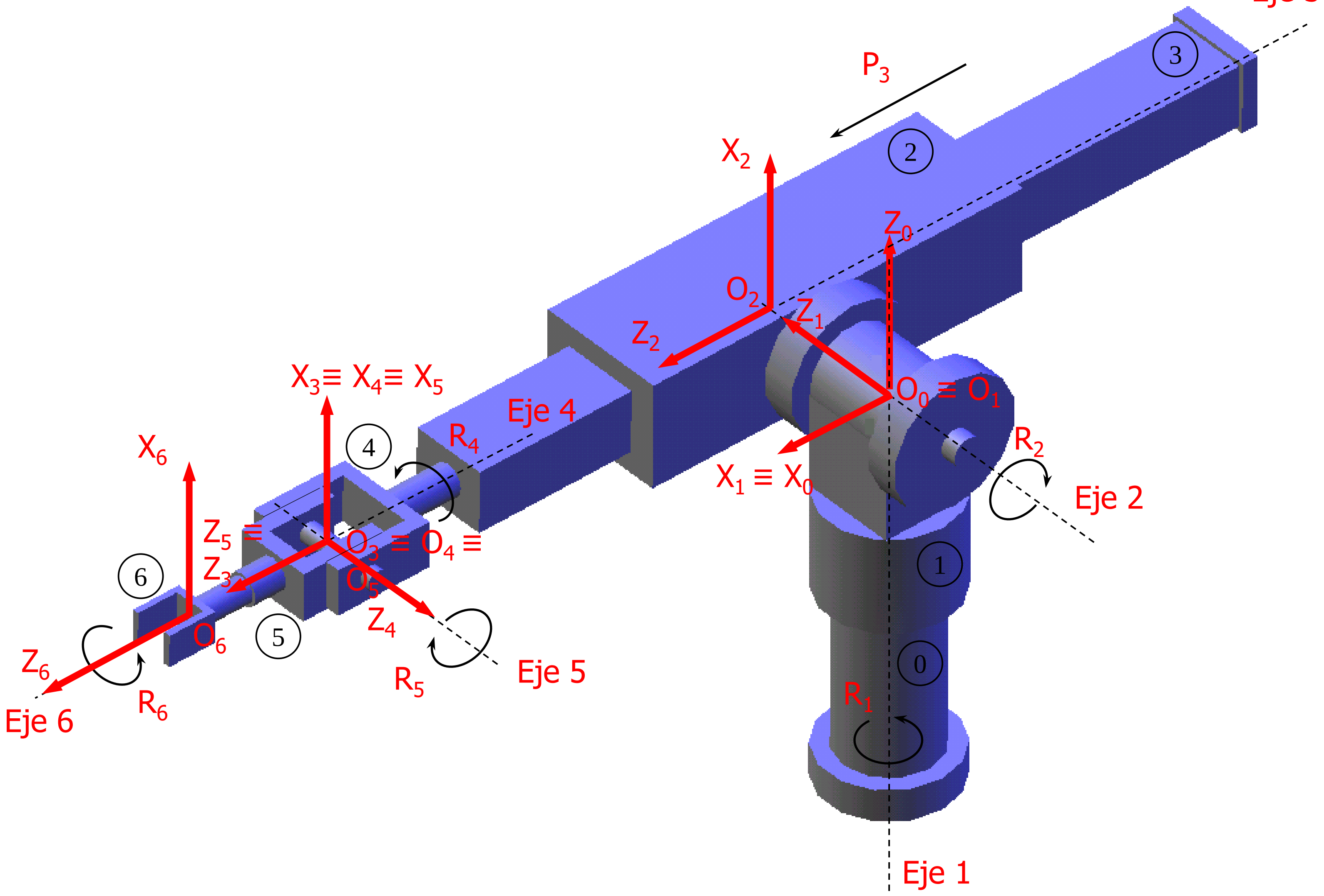
5.7 Kate irekiko mekanismoen kokapen analisia

Kokapen arazo zuzena eta alderantzizkoa

- Metodo analitikoak (emaitza guztiak):
  - Ebazpen itxia
    - 6 a.g.-tako errobotak R loturekin:
      - Baldintza nahikoa (**Pieper**): jarraian dauden 3 ardatz puntu batean moztu.
      - Hiru ardatzak eskumuturrekoak baldin badira, kokapena eta orientazioa desakoplatzen dira.
  - Jarraipen polinomialeko metodoak
- Metodo numerikoak (emaitza bakar bat): denbora errealan aplikatzeko aukera

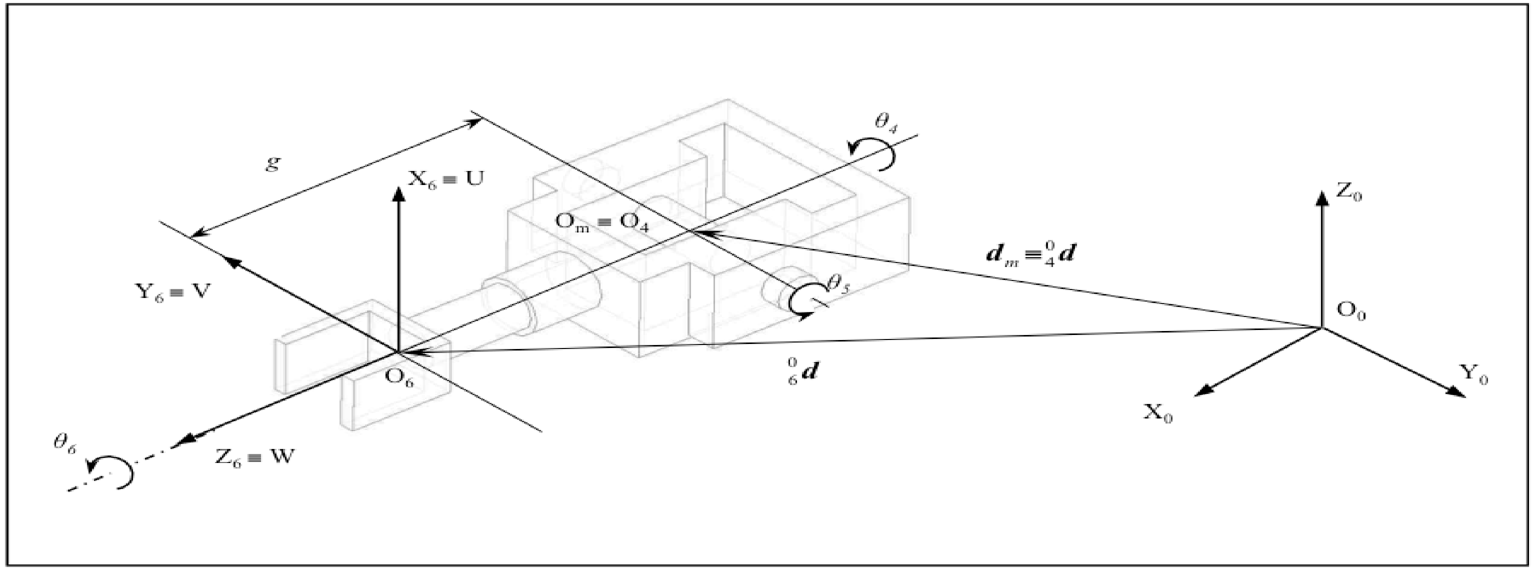
5.5 Metodo matriziala

Erabilpen adibidea: Stanford errobota



5.7 Kate irekiko mekanismoen kokapen analisia

Alderantzizko arazoaren ebazpena



Pieper Metodoa

1. Eskumuturraren kokapena:

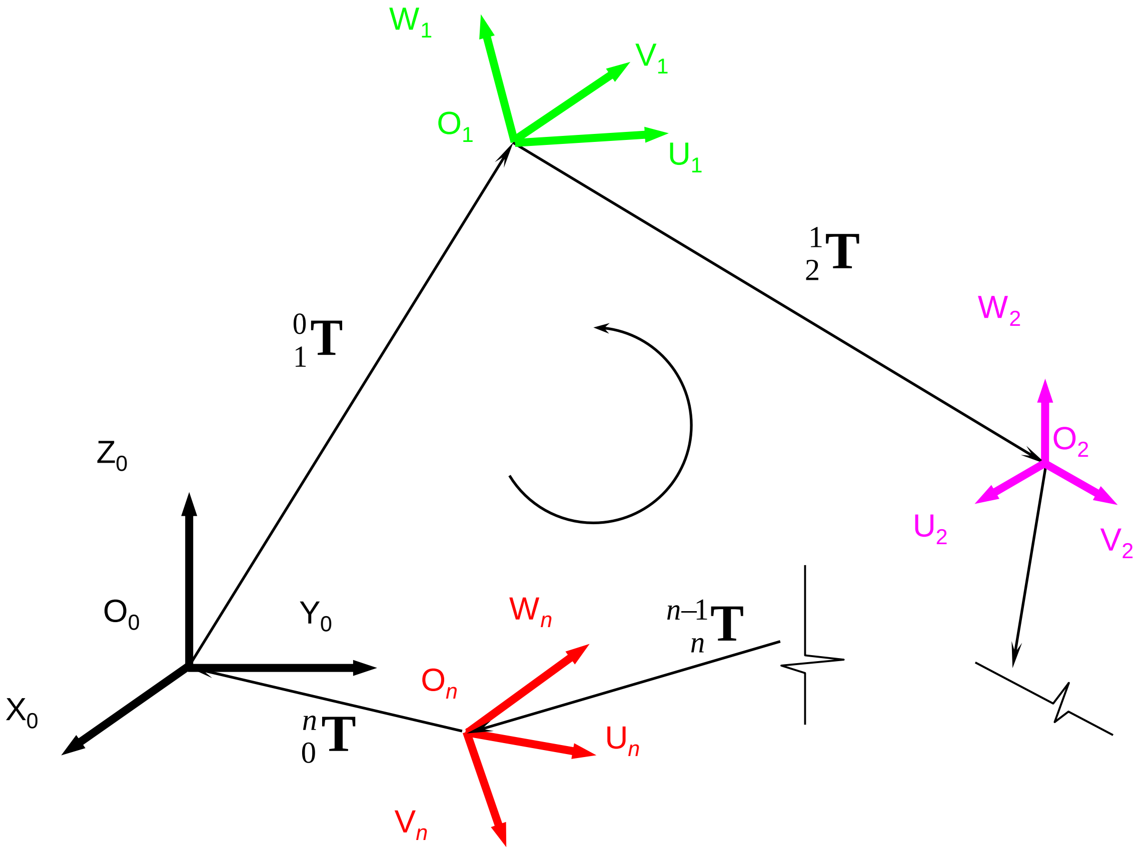
$$d_{mx} = d_x - g\ w_x$$
$$d_{my} = d_y - g\ w_y$$
$$d_{mz} = d_z - g\ w_z$$
$$\downarrow$$
$${}^0_4\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d_m}$$
$$\downarrow$$
$$q_1, q_2, q_3$$

2. Gakoaren orientazioa:

$${}^0_6\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$${}^3_6\mathbf{R} = \left({}^0_3\mathbf{R}\right)^{-1} {}^0_6\mathbf{R}$$
$$\downarrow$$
$$q_4, q_5, q_6$$

5.7 Kate itxitako mekanismoen kokapen analisia

Kate itxitako mekanismoak: Metodo matriziala



$$^{0}_{1}\mathbf{T}\,^{1}_{2}\mathbf{T}\,^{2}_{3}\mathbf{T}\ldots\,^{n-1}_{n}\mathbf{T}\,^{n}_{0}\mathbf{T}=\mathbf{I}$$

5.8 Abiaduren eta azelerazioen analisia

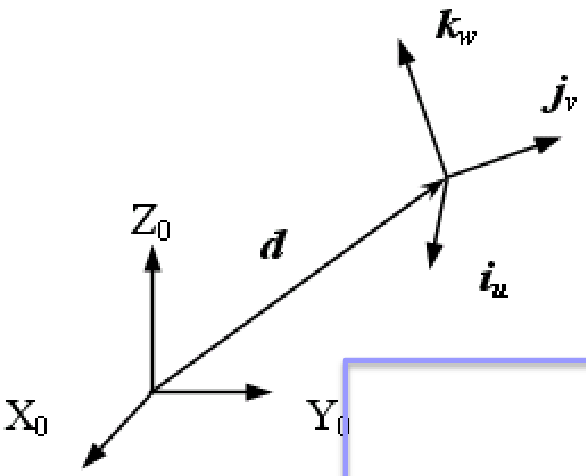
Kate irekiko mekanismoak

$$\begin{aligned} d_x &= f_x(q_1,\ldots\ldots,q_6) \\ d_y &= f_y(q_1,\ldots\ldots,q_6) \\ d_z &= f_z(q_1,\ldots\ldots,q_6) \\ \phi &= f_\phi(q_1,\ldots\ldots,q_6) \\ \theta &= f_\theta(q_1,\ldots\ldots,q_6) \\ \psi &= f_\psi(q_1,\ldots\ldots,q_6) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{J}_S\,\dot{\boldsymbol{s}} = -\boldsymbol{J}_E\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{d}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \frac{\partial f_x}{\partial q_3} & \frac{\partial f_x}{\partial q_4} & \frac{\partial f_x}{\partial q_5} & \frac{\partial f_x}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \frac{\partial f_y}{\partial q_3} & \frac{\partial f_y}{\partial q_4} & \frac{\partial f_y}{\partial q_5} & \frac{\partial f_y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \frac{\partial f_z}{\partial q_3} & \frac{\partial f_z}{\partial q_4} & \frac{\partial f_z}{\partial q_5} & \frac{\partial f_z}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\phi}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_6} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{J}]} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{Bmatrix}$$

- Abiaduraren arazo zuzena
- Abiaduraren alderantzizko arazoa



$$ {}^{0}_{n}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & d_x \\ u_y & v_y & w_y & d_y \\ u_z & v_z & w_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

"n" erreferentzi sistemaren orientazioa sistema finkoarekiko

"n" erreferentzi sistemaren kokapena (On oinarri puntua) sistema finkoarekiko

Abiadura angeluarra: $\omega_n = \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i z_{i-1}$ non: $z_{i-1} = {}^{0}_{i-1}\mathbf{R} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Abiadura lineala: $v_n = \begin{Bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{d}_z \end{Bmatrix}$