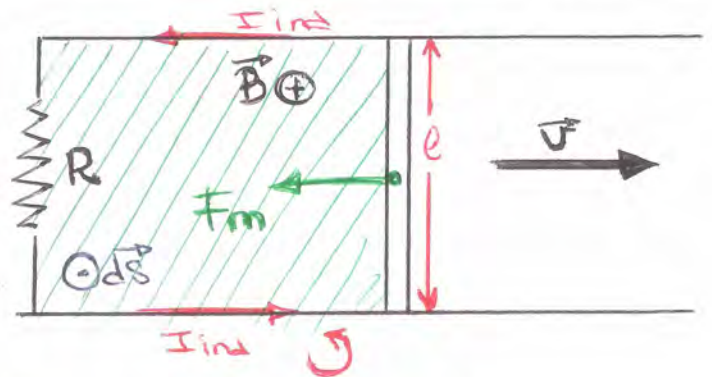


T.5 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

1. Una barra metálica de masa m desliza sin rozamiento sobre dos rieles conductores paralelos separados a una distancia l , con una resistencia R que conecta ambos rieles y un campo \vec{B} homogéneo y cte, \perp al plano.

a. Si la barra se mueve hacia la derecha con velocidad v , ¿cuál es la I y en que sentido circula?



$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot \iint_S ds \cdot \cos 180 = -B \cdot S = -B \cdot l \cdot x$$

↑
Área

$$\mathcal{E} = \frac{-d\Phi}{dt} = -(-B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt}) = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

↓
positivo antihorario

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B l v}{R} = I$$

FÓRMULAS

b) F_m sobre la barra, dirección y sentido.

$$d\vec{F} = I_{ind} \cdot d\vec{e} \times \vec{B}$$

$$dF = I \cdot dl \cdot B \Rightarrow dF_m = \frac{B l v}{R} \cdot dl \cdot B$$

$$F_m = \frac{B^2 l v}{R} \int dl = \frac{B^2 v l^2}{R}$$

$$F_m = - \frac{B^2 l^2 \vec{v}}{R}$$

F_m es para la inercia porque se opone al cambio.

* S aumenta $\rightarrow \Phi$ aumenta

Ley de Faraday $\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$

c) Si la barra parte con v_0 en $t=0$, ¿cuál es su velocidad en el instante t ? $v(t)=?$

$$F = m \cdot a$$

$$\frac{B^2 \cdot e^2 \cdot v}{R} = m \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^t - \frac{B^2 e^2}{m R} dt = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \ln v(t) - \ln(v_0) =$$
$$= \ln \frac{v(t)}{v_0} = \text{se iguala} = \frac{-B^2 e^2}{m R} t$$

$$v(t) = v_0 \cdot e^{\frac{-B^2 e^2}{m R} t}$$

d) Demostrar que $\Delta E_m = E_{\text{disp}}$ en t
en barra en resistencia

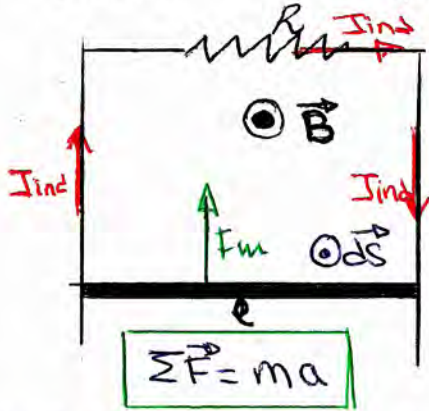
$$\Delta E_m = E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [v(t)^2 - v_0^2] =$$
$$= \frac{1}{2} m v_0^2 \left[e^{\frac{-2B^2 e^2}{m R} t} - 1 \right] = \Delta E_m$$

$$P_{\text{disp resistencia}} = R \cdot I_{\text{ind}}^2 = R \left(\frac{B e v}{R} \right)^2 = \frac{B^2 e^2 v^2}{R}$$

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow dW = P \cdot dt = \frac{B^2 e^2 v^2}{R} dt = \frac{B^2 e^2}{R} v_0^2 \int_0^t e^{\frac{-2B^2 e^2}{m R} t} \cdot dt$$

$$\Rightarrow W = \frac{B^2 e^2}{R} v_0^2 \left[e^{\frac{-2B^2 e^2}{m R} t} - 1 \right]$$

2. Un conductor puede deslizar por un par de guías metálicas verticales conectadas a una resistencia R como se indica en la figura. El conjunto está inmerso en un campo $\vec{B} \perp$ al plano, ¿qué v_{limite} alcanzará el conductor bajo la acción del campo gravitatorio?



$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_i$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow d\Phi = Bv dt \cdot l \cos 0$$

$$\mathcal{E}_i = -Bv$$

$$I = \frac{Bv}{R} \quad (\text{no se puede poner nunca signo})$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$mg - F_m = ma \rightarrow mg - \frac{B^2 l^2 v}{R} = m \cdot a$$

Velocidad límite será la que haga que la aceleración sea cero $a=0$

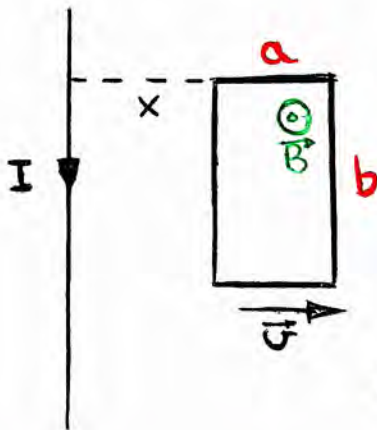
$$mg = \frac{B^2 l^2 v}{R} \rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \text{ m/s}$$

$$F_m = I \cdot l \times B$$

$$F_m = \frac{Bv}{R} \cdot l \cdot B$$

$$F_m = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

3. La espira \square y el alambre se encuentran sobre un plano horizontal sin rozamiento. El alambre transporta una corriente cte I y la espira tiene una resistencia R , calcular la fuerza para mover la espira con $v = \text{cte}$.



Ley de Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{enc}}$

$$B 2\pi x = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

• Si I cambia, \vec{B} cambia en el tiempo

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{x(t)}^{x(t)+a} \int_{x(t)}^{x(t)+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{b \cdot dx \cdot dy}{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \cdot L \left(\frac{x+a}{x} \right)$$

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot L \left(\frac{x+a}{x} \right) \right) = \frac{-\mu_0 I b}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left(L \frac{x+a}{x} \right) =$$

$$= + \frac{\mu_0 a b I v}{2\pi x(x+a)}$$

$$\frac{d}{dt} \left(L \frac{x+a}{x} \right) = \frac{d}{dt} \left(L(x+a) - L(x) \right) = \frac{d}{dt} m(x+a) - \frac{d}{dt} Lx =$$

$$= \frac{1}{x+a} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{v_x - v_x - v_a}{x(x+a)}$$

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{\mu_0 a b I v}{2\pi x(x+a)R}$$

$$|F_{m1}| = I_{ind} \cdot b \cdot B_1 = I_{ind} \cdot b \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$|F_{m2}| = I_{ind} \cdot b \cdot B_2 = I_{ind} \cdot b \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}$$

$$F_m = F_{m2} - F_{m1}$$

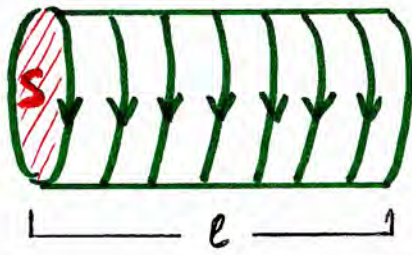
$$F_m = I_{ind} \cdot b \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \frac{-\mu_0 a b I v}{2\pi x(x+a)R} \cdot \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \cdot \left(\frac{a}{x(x+a)} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{m \text{ TOTAL}} = - \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a b}{x(x+a)} \right)^2 \frac{\vec{v}}{R}$$

• Nosotros tenemos que hacer una fuerza externa igual pero de sentido contrario.

4. a) Calcular el coeficiente de autoinducción de un solenoide ideal de n espiras por unidad de longitud, sección S y $\text{long} = \ell$.



FÓRMULAS

$$B = \mu_0 n I$$

$$\Phi = B \cdot S = \mu_0 n I S N = \mu_0 n I S n \ell = \mu_0 n^2 I S \ell$$

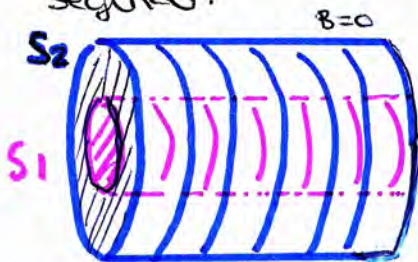
$$\Phi = L \cdot I \Rightarrow L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 n^2 I S \ell}{I} = \mu_0 n^2 S \ell = L$$

↑
coef. autoinducción

$$n = \frac{N}{\ell} \Rightarrow N = n \cdot \ell$$

↓ número de vueltas

b) Calcular el coeficiente de inducción mutua entre dos solenoides ideales coaxiales de n_1 y n_2 espiras por unidad de longitud, secciones S_1 y S_2 , $\text{long} = \ell$, estando el primero en el interior del segundo.



$$\Phi_{21} = M_{2-1} \cdot I_2$$

superficie que atraviesa al Δ

$$\Phi = B S = \mu_0 n_2 \cdot I_2 \cdot N_1 S_1$$

$$\mu_0 \cdot n_2 \cdot I_2 \cdot N_1 S_1 = M_{2-1} \cdot I_2$$

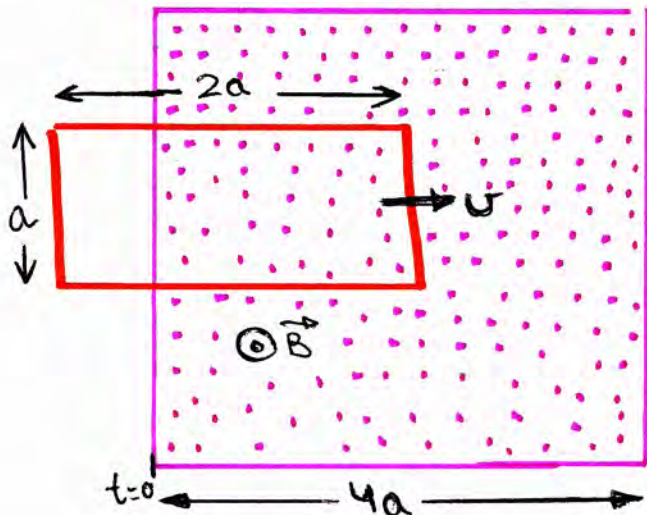
$$M_{2-1} = \mu_0 \cdot n_2 \cdot n_1 \cdot \ell \cdot S_1$$

$$\frac{N_1}{\ell} = n_1 \Rightarrow N_1 = n_1 \ell$$

haciendo $\Phi_{1-2} = M_{1-2} \cdot I_1 = B S = \mu_0 n_1 I_1 \cdot N_2 S_2$ • Da lo mismo

5. a) Calcular el flujo que atraviesa la espira en función del tiempo desde $t=0$ hasta que sale completamente de él.

FÓRMULA $s = ut \rightarrow t = s/u$



- ① $0 \leq t \leq \frac{2a}{u}$ → desde el borde, hasta que está dentro
- ② $\frac{2a}{u} \leq t \leq \frac{4a}{u}$ → desde que está dentro en un extremo al otro.
- ③ $\frac{4a}{u} \leq t \leq \frac{6a}{u}$

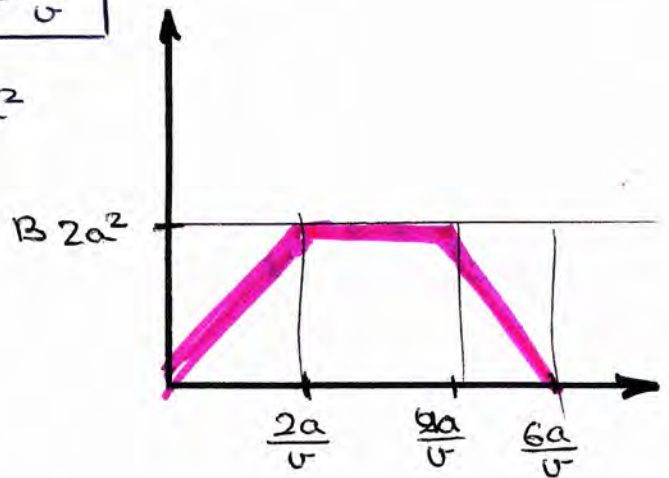
↑ desde el extremo derecho, que está dentro entero, hasta que sale entero ($6a$)

$$1. 0 \leq t \leq \frac{2a}{v}$$

$$2. \frac{2a}{v} \leq t \leq \frac{4a}{v}$$

$$\Phi = BS = B \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = B \cdot 2a \cdot a = B \cdot 2at$$

$$\Phi = BS = B \cdot 2a^2$$



$$3. \frac{4a}{v} \leq t \leq \frac{6a}{v}$$

$$\Phi = A - B \cdot \text{v} \cdot t$$

$$0 = A - B \cdot v \cdot a \cdot \frac{6a}{v} \Rightarrow A = B \cdot 6a^2$$

$$\Phi = B \cdot 6a^2 - B \cdot v \cdot t$$

b) Fuerza electromotriz e intensidad de corriente inducidas en la espira en función del tiempo.

$$1. \mathcal{E} = - \frac{d(B \cdot 2at)}{dt} = \mathcal{E} = -B \cdot 2a \rightarrow I = \frac{B \cdot 2a}{R}$$

$$2. \mathcal{E} = 0 \rightarrow I = 0$$

$$3. \mathcal{E} = - \frac{d(+B \cdot 6a^2 - B \cdot v \cdot t)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = +B \cdot 2a \rightarrow I = \frac{B \cdot 2a}{R}$$

c) Valor de la fuerza que hay que aplicar en la espira para mantener su movimiento durante la travesía.

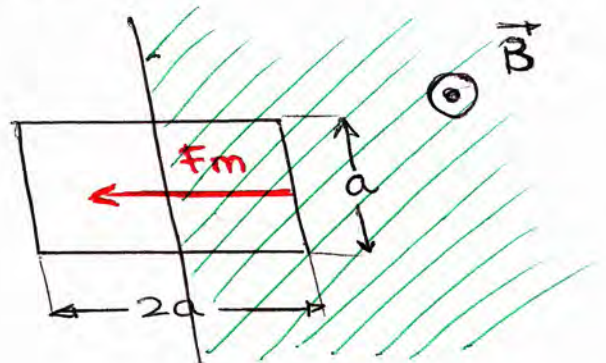
Fórmula

$$d\vec{F} = I d\vec{e} \times \vec{B}$$

$$dF = I d\vec{e} \cdot B \cdot \sin 90 = I d\vec{e} B$$

$$F_m = I \cdot B \int d\vec{e} = I B a$$

$$F_m = \frac{B \cdot 2a}{R} = \frac{B^2 a^2}{R} v$$



$$\vec{F}_m = - \frac{B^2 a^2 \cdot \vec{v}}{R} \hat{i}$$

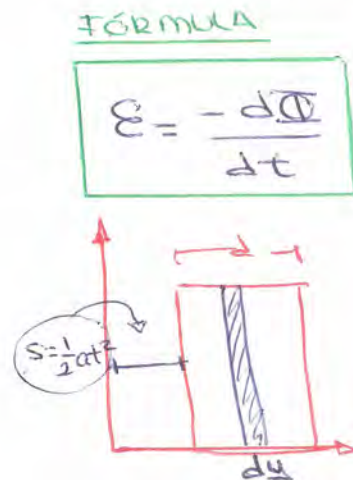
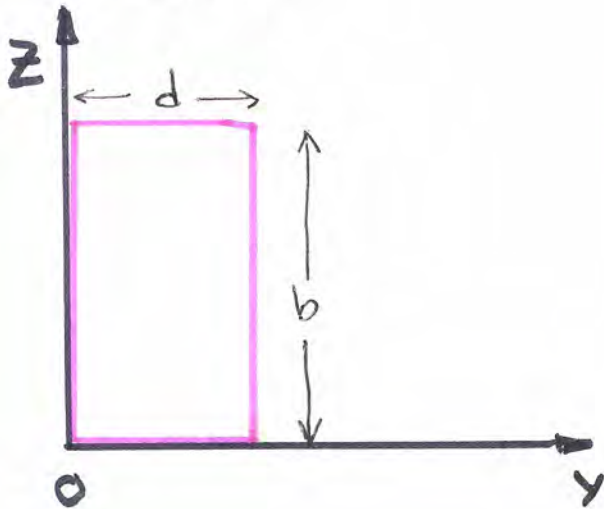
→ va a ser igual al entrar que al salir. !!

6. Una espira rectangular se mueve en un campo magnético externo dado por $\vec{B} = (6 - y)\hat{i}$ T. Halla la fuerza electromotriz inducida de la espira como función del tiempo si parte del reposo y se mueve en dirección positiva OY con

$$a = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$d = 0.2 \text{ m}$$

$$b = 0.5 \text{ m}$$



$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = (6 - y)\hat{i} \cdot 0.5 \, dy \hat{i} = 0.5 (6 - y) \, dy$$

$$\Phi = 0.5 \int_{\frac{1}{2}at^2}^{\frac{1}{2}at^2 + 0.2} (6 - y) \, dy = 0.5 \left\{ 6 \left[\frac{1}{2}at^2 + 0.2 - \frac{1}{2}at^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}at^2 + 0.2 \right)^2 - \left(\frac{1}{2}at^2 \right)^2 \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \Phi = 0.5 \cdot 1.2 - 0.5 \left[\frac{1}{2} (0.2at^2 + 0.04) \right] =$$

$$= 0.6 - 0.125 [0.4t^2 + 0.02] = 0.6 - 0.005 - 0.14t^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{-d\Phi}{dt} = \frac{-d(0.6 - 0.005 - 0.14t^2)}{dt} = -(-2 \cdot 0.14t) =$$

$$\mathcal{E} = 0.28t$$

7. Una espira se introduce en una región con campo magnético. En el momento en que empieza a introducirse la espira tiene $v=0$. Calcular en función de t y mientras la espira entra en la región:

a) La fuerza electromotriz inducida en la espira

FÓRMULA

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad \Phi = \vec{B} \cdot \vec{\Delta S} = B \frac{1}{2} A t^2 \cdot a$$

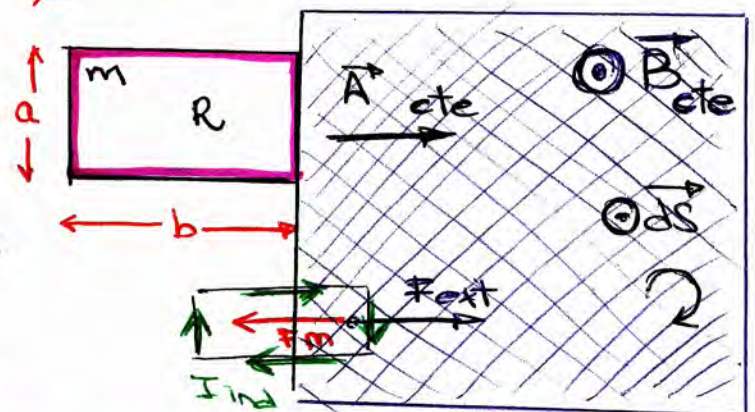
$$\mathcal{E}_i = \frac{-d(B \frac{1}{2} \cdot A \cdot t^2 \cdot a)}{dt} = -B \cancel{t} \cdot \frac{1}{2} \Delta t a = -B A t a$$

quiero decir que es en el sentido horario.

$$\boxed{\mathcal{E}_i = B A t a \quad \curvearrowright}$$

b) Intensidad que circulará por ella

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{B A t a}{R}} \quad \curvearrowright$$



SENTIDO HORARIO, PERO NUNCA PONER EL SIGNO.

c) La F_m sobre la espira

FÓRMULA

$$\boxed{d\vec{F}_m = I \cdot d\vec{e} \times \vec{B}} \Rightarrow |F_m| = I \cdot L \cdot B \cdot \sin 90 = I L B = \frac{B^2 \cdot A \cdot a^2}{R}$$

$$\boxed{\vec{F}_m = -\frac{B^2 a^2 t A}{R} \hat{i}}$$

d) Fuerza externa para mantener el movimiento de la espira

$$\vec{F}_{ext} + \frac{(-B^2 a^2 t A)}{R} = m \vec{A} \quad \text{FORMULA} \quad \sum \vec{F} = m \vec{A}$$

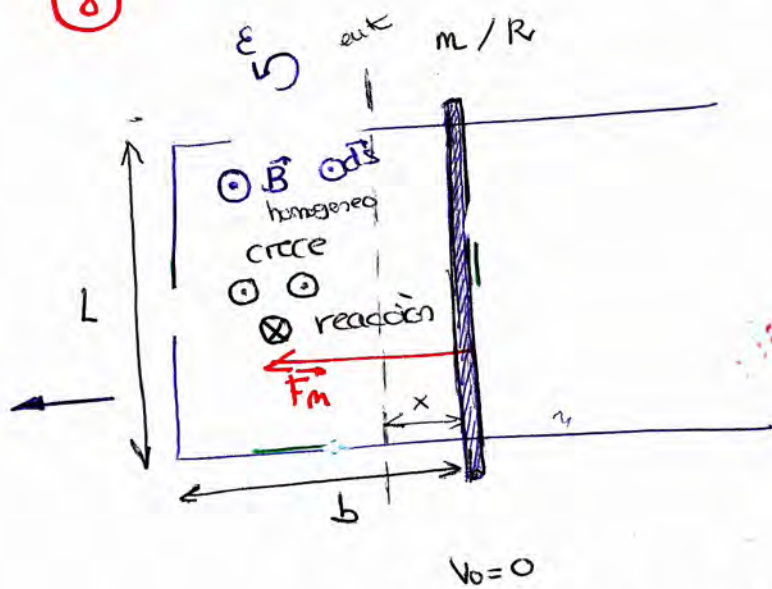
$$F_{ext} - F_m = m A$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = \left(\frac{B^2 a^2 A t}{R} + m A \right) \hat{i}}$$

→ A favor del movimiento de la espira.

$$B = 2\left(\frac{t}{5}\right) = At$$

8



\vec{B} = crece con el tiempo según:

$$\vec{B} = 2t$$

a) Se mueva la barra?
Si es así, en que sentido lo hará?
Razonar.

b) Φ en cada instante que atraviesa el circuito

c) Intensidad

d) Fuerza para que se mueva con \vec{v} .

a) Si se moverá, por un efecto de inducción electromagnética.
 ε $t=0 \Rightarrow v=0$ pero luego empezará a moverse.

b) El flujo crece así que el sistema tiende a que decrezca reduciendo el área

$$\Phi = B \cdot L \cdot (b - x(t)) = 2t \cdot L \cdot (b - x(t))$$

$$c) \boxed{I = \frac{\varepsilon_i}{R}}$$

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d(2t)L(b-x(t))}{dt} = -[2L(b-x(t)) - 2Lt \dot{x}(t)]$$

$$= 2t \cdot L \cdot x^2 - 2L(b-x) = -[AL(b-x) + ALt \cdot (-v(t))] =$$

$$= -AL[b - x(t) - t v(t)]$$

no es en ese sentido, es contrario

$$I = \frac{2L}{R} [x \dot{t} - b + x] \curvearrowright$$

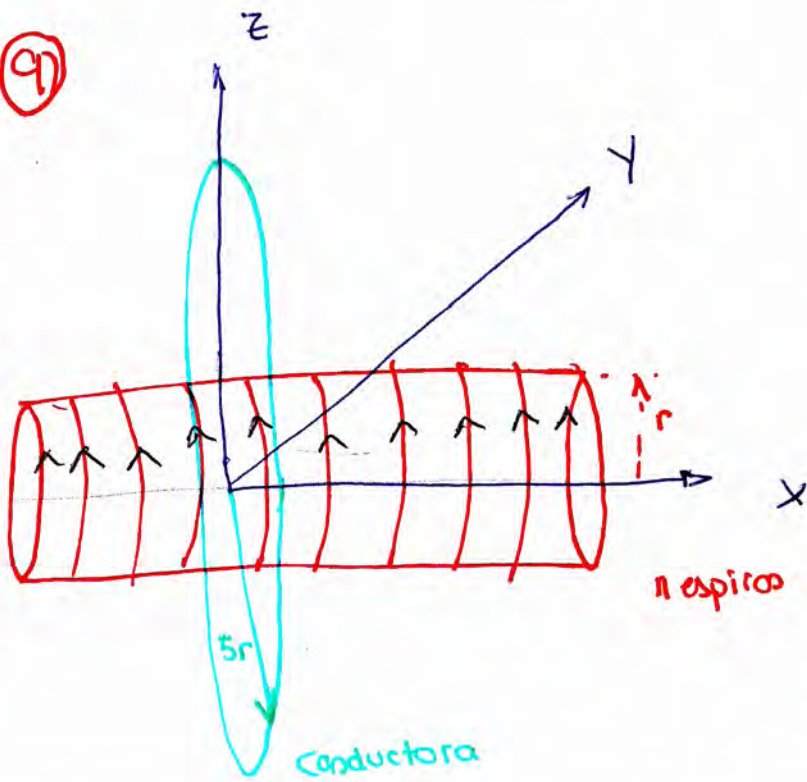
$|F_{ext}| = |F_m|$ pero opuestas.

$$d) F_m = I \cdot d\vec{x} \times \vec{B} = I \cdot L \cdot B = I \cdot L \cdot B = \frac{2L^2}{R} (x \dot{t} - b + x) B =$$

$$= \frac{2L^2}{R} (x \dot{t} - b + x) \cdot 2t$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{2L^2}{R} (x \dot{t} - b + x) 2t \hat{i}}$$

9)



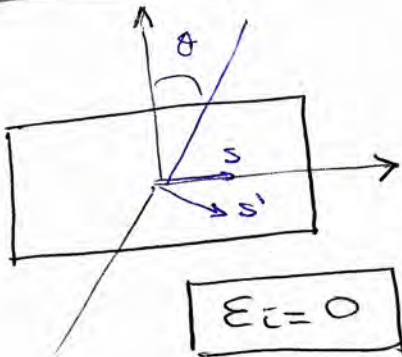
\mathcal{E}_i ? Si:
 a) Espira rota alrededor de x con ω de
 b) plano de la espira oscila en torno a z segun:
 $\theta(t) = 0.3 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{20} t \right) \text{ rad}$
 ↑ ángulo entre plano espira e yz .

c) $V(t) = 3t$
 d) $V(t) = 3t, I(t) = 3 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{20} t \right)$

a) $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$

⇔ porque $\Phi = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \pi r^2$, no depende de t

b)



$\Phi_{\text{antes}} = B \cdot S$

$\Phi_{\text{despues}} = B \cdot S \cos \theta = B \cdot S$

$\mathcal{E}_i = 0$

c) $I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, d\Phi = B \cdot S$

no hay D porque no cambia B ni S .

$\mathcal{E} = 0$

d) $B = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \cdot n \cdot 3 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{20} t \right)$

$\Phi = \left(\mu_0 \cdot n \cdot 3 \text{ sen} \frac{\pi}{20} t \right) \cdot \pi r^2$

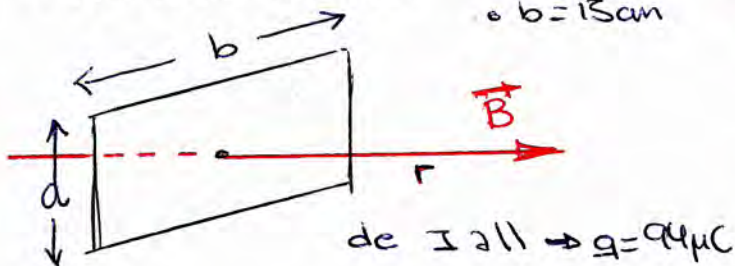
$\mathcal{E} = -\frac{d \left(\mu_0 \cdot n \cdot 3 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{20} t \right) \cdot \pi r^2 \right)}{dt}$

↻ va en sentido horario

$\mathcal{E}_i = -\frac{3}{20} \mu_0 \cdot n \cdot r^2 \cdot \pi^2 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{20} t \right)$

10. Una bobina se conecta a un integrador de corrientes. La resistencia total es de $20\ \Omega$. Tras girar 90° la bobina, la carga total que ha pasado por el integrador es igual a $9.4\ \mu\text{C}$. Calcula el valor del campo magnético en el punto:

- $N = 300$ vueltas
- $a = 5\text{cm}$
- $b = 15\text{cm}$



FÓRMULA

$$q = \int I(t) dt \rightarrow dq = I(t) dt$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{dq}{dt}$$

$$I = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{1}{R} = \frac{dq}{dt}$$

$$\int_1^2 dq = \int_1^2 \frac{1}{R} \cdot d\Phi \rightarrow q = 9.4\ \mu\text{C} = \frac{1}{R} (\Phi_{\text{fin}} - 0) = \frac{\Phi_{\text{MAX}}}{R} = 9.4\ \mu\text{C}$$

$$9.4\ \mu\text{C} = \frac{BabN}{R} \rightarrow \boxed{\vec{B} = 8.35 \cdot 10^5\ \text{T}}$$

11. Utilizando el mismo sistema que en el 10, lo ponemos en una disposición en la que no se acople \vec{B} con la bobina y después le acoplamos un electroimán que produce $\vec{B} = 1\ \text{T} \downarrow$. ¿Qué carga medirá ahora el integrador de corriente?

- Usamos el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior, solo que ahora $\vec{B} = 1\ \text{T}$ del electroimán.

Por lo tanto:

$$q = \frac{BabN}{R} = \frac{1 \cdot 0.05 \cdot 0.15 \cdot 300}{20} \Rightarrow \boxed{q = 0.1125\ \text{C}}$$

13. Un motor eléctrico es diseñado para ser alimentado a 240 V y para que su $\omega_{\text{MAX}} = 50$ r.p.s. Calcule la constante de flujo del motor. Si su resistencia eléctrica es de 2Ω , calcule el par motor \rightarrow momento de fuerza, y la potencia mecánica que suministra cuando trabaja a 45 r.p.s.

$$\omega_{\text{MAX}} = 2\pi f \rightarrow \omega_{\text{MAX}} = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \Phi \cdot \omega_{\text{MAX}} \rightarrow \Phi = \frac{240}{100\pi} = 0.76 \text{ Wb} = \Phi$$

\uparrow flujo motor

$$\rightarrow f = 45 \text{ r.p.s} \rightarrow \omega = 2\pi \cdot 45 = 90\pi \text{ rad/s} = \omega$$

$$M = \frac{\Phi}{R} (\varepsilon - \Phi \omega) = \frac{0.76}{2} (240 - 0.76 \cdot 90\pi) = 9.5 \text{ Nm}$$

$$P_{\text{mec}} = M\omega = 9.5 \cdot 90\pi \rightarrow P_{\text{mec}} = 2.686 \text{ kW}$$

14. Para el motor del ejercicio anterior \uparrow y alimentado con la misma tensión. Calcule para 50, 45, 25 y 0 r.p.s. de frecuencia de revolución: ε_{ind} , M , P_{mec} , y $E_{\text{energética}}$ del motor.

$$50 \text{ r.p.s}$$

DATO:

$$\Phi = 0.75 \text{ Wb}$$

$$\text{Para } f = 50 \text{ r.p.s} \rightarrow \omega = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon_{\text{com}} = \varepsilon_{\text{ind}} = \Phi \omega = 0.75 \cdot 100\pi = 240 \text{ V} = \varepsilon_{\text{ext}}$$

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\text{ind}}}{R} = \frac{240 - 240}{R} = 0$$

$$\eta = \frac{P_{\text{mec}}}{P_{\text{fuente}}} = 0$$

$$M = \frac{\Phi}{R} (\varepsilon - \Phi \omega) = 0$$

$$P_{\text{mec}} = M\omega = 0$$

0 r.p.s.

Para $f = 0 \text{ rad/s} \rightarrow \omega = 0 \text{ rad/s}$

$$\boxed{I} = \frac{\varepsilon - \varepsilon \sin \alpha}{R} = \frac{240 - 0}{2} = \boxed{120 \text{ A}}$$

$$\boxed{M} = \frac{\Phi}{R} (\varepsilon - \Phi \omega) = \frac{0.76}{2} (240 - 0) = \boxed{91.2 \text{ Nm}}$$

$$P_{mec} = M \cdot \omega = 0 \quad \eta = \frac{0}{240 - 120} = 0 \quad \boxed{\eta = 0\%}$$

$$\eta = \frac{P_{mec}}{P_{fuente}} = \frac{0}{\varepsilon I}$$