1. **Ariketa**

   Kontsideratu $X_1, X_2, ..., X_n$ hurrengo banaketatik ateratako l.a.b. bat:

   $f(x) = 3\theta^3/x^4, x \geq \theta$.

   Aurreko banaketaren batezbestekoa eta bariantza $m = 4\theta/3$ eta $\sigma^2 = 2\theta^2/9$ dira.

   a) Kalkula ezazu θ parametroaren momentuen bidezko estimatzailea.

   b) $\hat{\theta}_M$ estimatzailea alboragabea al da? Zein da bere batezbesteko errore koadratikoa?

   c) $\hat{\theta}_M$ estimatzailea tinkoa al da? Kalkula ezazu $P(|\hat{\theta}_M - \theta| < \epsilon)$ probabilitatearen limitea, $\epsilon > 0$ eta $n \to \infty$ direnean.

   d) Zein da θ parametroaren egiantz handieneko estimatzailea?

   e) Kontsideratu hurrengo l.a.b. hau: $\vec{x} = \{1, 3, 2\}$, kalkula itzazu momentuen bidezko estimazioa eta egiantz handieneko estimazioa. Kasu honetan, zein da hoberena?

2. **Ariketa**

   θ parametro batentzat, bi estimatzaile desberdin ditugu, $\hat{\theta}_1$ eta $\hat{\theta}_2$, eta n tamainako lagin aleatorio bakun bat erabiltzen dugunean, hurrengo hau betetzen dute:

   $$E[\hat{\theta}_1] = 0{,}95\theta, \quad E[\hat{\theta}_2] = \theta$$

   $$Bar(\hat{\theta}_1) = 5/n, \quad Bar(\hat{\theta}_2) = 8/n$$

   a) $\hat{\theta}_2$ alboragabea al da? Asintotikoki alboragabea al da? Eta $\hat{\theta}_1$ alboragabea al da?

   b) $\hat{\theta}_2$ estimatzailea $\hat{\theta}_1$ estimatzailea baino hobea al da, batezbesteko errore koadratikoaren arabera ($E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$)?

   c) $\hat{\theta}_1$ eta $\hat{\theta}_2$ tinkoak al dira?

3. **Ariketa**

   g pisua duen objektu bat pisatzen dugu, balantza elektroniko baten bidez. Balantzak ematen duen pisua gehienetan X da, non $X \sim N(g, \sigma^2)$ den. Baina batzuetan (p probalilitate txiki batekin) blokeatzen da eta pisuaren neurketa finko bat, $X = 5$, ematen du. Objektua n bider pisatzen baldin badugu, $\hat{g} = \overline{X}$ izango da g benetako pisuaren estimatzaile bat. Estimatzaile hau, $\hat{g}$, alboratua al da?

4. **Ariketa**

Demagun X aldagai aleatorio diskretua dela hurrengo zenbatasun funtzioarekin:

$$P(-1) = \lambda \qquad P(0) = 1 - 2\lambda \quad \text{eta} \quad P(1) = \lambda.$$

a) Aurreko aldagaiarentzat, zeintzuk izango dira lehenengo eta bigarren momentuak α_1 eta α_2 (λ-ren menpe idatzita), hurrenez hurren?

b) X aldagaiaren hurrengo lagin aleatorio bakun hau daukagu: $\{1, 1, -1, 0, 0, -1, 1\}$. Zein izango da λ parametroaren momentuen bidezko estimazioa?

c) Aurreko lagin aleatorio bakuna berriro erabiltzen badugu, zein izango da egiantz handieneko funtzioa?

d) Aurreko lagin aleatorio bakuna berriro erabiltzen badugu, zein izango da λ parametroaren egiantz handieneko estimazioa (EH)?

5. **Ariketa**

Kontsideratu hurrengo funtzio hau:

$$P(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

non r zenbaki osoa, positiboa eta finkoa den eta x-en balioak $r, r+1, r+2, \ldots$ izan ahal diren. "Aurpegia" lortzeko p probabilitatea duen txanpon bat airera botatzen baldin badugu, $P(x)$ funtzioak ematen digu zein den r "aurpegi" lortzeko x botaldi behar izateko probabilitatea. Baldin eta $r = 5$ "aurpegi" lortzeko, txanpona 15 alditan airera bota baldin badugu,

a) zein da p parametroaren egiantz handieneko funtzioaren logaritmoa?

b) zein da p parametroaren egiantz handieneko estimatzailea?

6. **Ariketa**

Demagun X aldagai aleatorioak Poissonen banaketa jarraitzen duela, hurrengo zenbatasun funtzioa duelarik:

$$P(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

n tamainako l.a.b. batentzat, zein da estatistiko nahiko bat λ estimatzeko? (laguntza: faktorizazioaren teorema erabil dezakezu).

7. **Ariketa**

Hurrengo dentsitate funtzioa daukan banaketari Rayleighen banaketa deritzo:

$$f_X(x) = \frac{x}{\theta} e^{-x^2/2\theta}$$

baldin $x > 0$. Aurreko banaketaren parametro bakarra θ da.

a) Lagin bat hartuta, eta Neyman-Fisherren faktorizazioaren teorema erabiliz, kalkula ezazu estatistiko nahiko bat θ estimatzeko.

b) Kalkula ezazu θ parametroaren egiantz handieneko estimatzailea.

c) $E(X^2) = 2\theta$ betetzen dela kontuan hartuz, kalkula ezazu aurreko galderan aurkitutako egiantz handieneko estimatzailearen esperantza.

8. **Ariketa**

Suposatu $X_1, \ldots, X_n$ l.a.b. bat $N(0, \sigma^2)$ banaketatik ateratakoa. Badakigu laginaren bariantzak, $S^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2$, hurrengo hau betetzen duela:

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Orduan, S^2 estimatzailea alboratua al da σ^2 parametroarentzat? Zer gertatzen zaio alborapenari $n \to \infty$ doanean?

9. **Ariketa**

Banaketa konkretu baten θ parametroa estimatzeko n tamainako l.a.b. batekin, Cramer-Raoren kota $\theta(1-\theta)/8n$ da.

Badakigu $\hat{\theta}$ estimatzailearen bariantza $\theta(1-\theta)/8\sqrt{n}$ dela eta estimatzailea alboragabea dela.

a) $\hat{\theta}$ estimatzailea efizientea al da?

b) $\hat{\theta}$ estimatzailea tinkoa al da?

10. **Ariketa**

Kontsideratu $U(0, \theta)$ banaketa uniformea. Badakigu n tamainako l.a.b. batean oinarritutako θ parametroaren egiantz handieneko estimatzailea hauxe dela:

$\hat{\theta}_{EH} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Estimatzaile horri buruz badakigu gainera honako hau betetzen dela:

$$E(\hat{\theta}_{EH}) = \frac{n\theta}{n+1}$$

$$Bar(\hat{\theta}_{EH}) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

Orain beste estimatzaile berri bat eraiki dugu:

$$\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} \hat{\theta}_{EH}.$$

a) $\hat{\theta}$ estimatzailea alboragabea al da?

b) Zein da $\hat{\theta}$ estimatzailearen bariantza?

c) $\hat{\theta}$ estimatzailea tinkoa al da?

11. **Ariketa**

    Baldin eta $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ betetzen bada, $\hat{\theta}_n$ tinkoa al da?

12. **Ariketa**

    Kontsideratu X honako dentsitate-funtzioa duen aldagai aleatorioa:

$$f(x) = \frac{5}{\theta^5}x^4 \qquad x \in [0, \theta]$$

Ezaguna da X aldagaiaren bariantza hauxe dela: $\sigma^2 = \frac{5}{252}\theta^2$.

a) Zein da X aldagaiaren batezbestekoa?

b) θ parametroa estimatzeko n tamainako l.a.b. bat hartu dugu: $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Zein da Momentuen bidezko estimatzailea, $\hat{\theta}_M$?

c) Zein da aurreko estimatzailearen bariantza?

d) $\hat{\theta}_M$ estimatzailea alboragabea al da? tinkoa al da?

4. Gaiko problema eta galderen ebazpena

1. **Ariketa**:

   a) $\frac{3\overline{X}}{4}$.

   b) Alboragabea da. Batezbesteko errore koadratikoa $\frac{\theta^2}{8n}$ da.

   c) Tinkoa da. Limitea 1 da.

   d) $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

   e) $\hat{\theta}_M = 1{,}5$ eta $\hat{\theta}_{EH} = 1$. Egiantz handieneko estimatzailea zeren momentuen bidezkoa ez da konpatiblea laginarekin.

2. **Ariketa**:

   a) $\hat{\theta}_2$ alboragabea da eta asintotikoki alboragabea. $\hat{\theta}_1$ ez da alboragabea.

   b) Soilik baldin eta n handia bada.

   c) $\hat{\theta}_1$ ez da tinkoa eta $\hat{\theta}_2$ tinkoa da.

3. **Ariketa**: Alboratua da.

4. **Ariketa**:

   a) 0 eta 2λ.

   b) $\frac{5}{14}$.

   c) $\lambda^5(1-2\lambda)^2$.

   d) $\frac{5}{14}$.

5. **Ariketa**:

   a) $\log(\binom{15-1}{5-1}) + 5\log(p) + 10\log(1-p)$.

   b) $\frac{5}{15}$.

6. **Ariketa**: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

7. **Ariketa**:

   a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

   b) $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}$.

   c) θ.

8. **Ariketa**: S^2 estimatzaile alboratua da σ^2 parametroarentzat, baina bere alborapena zerora doa $n \to \infty$ doanean.

9. **Ariketa**:

   a) $\hat{\theta}$ estimatzailea ez da efizientea.

   b) $\hat{\theta}$ estimatzailea tinkoa da.

10. **Ariketa**:

    a) Bai, alboragabea da.

    b) $\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$.

    c) Bai, tinkoa da.

11. **Ariketa**: Bai, tinkoa da.

12. **Ariketa**:

    a) $5\theta/6$.

    b) $\frac{6\overline{X}}{5}$.

    c) $\dfrac{\theta^2}{35n}$.

    d) Alboragabea eta tinkoa.