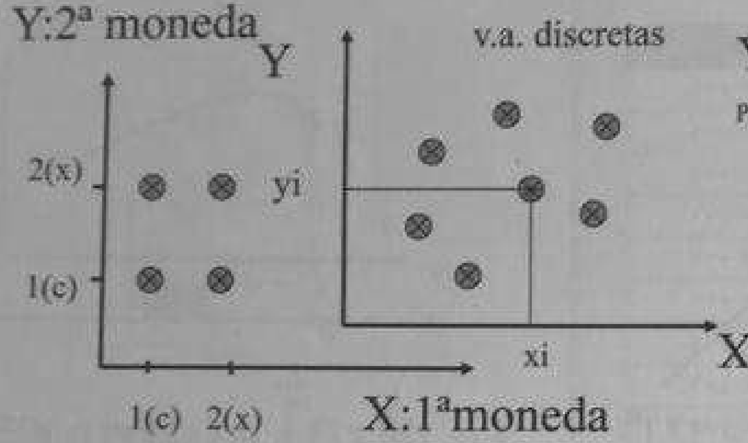
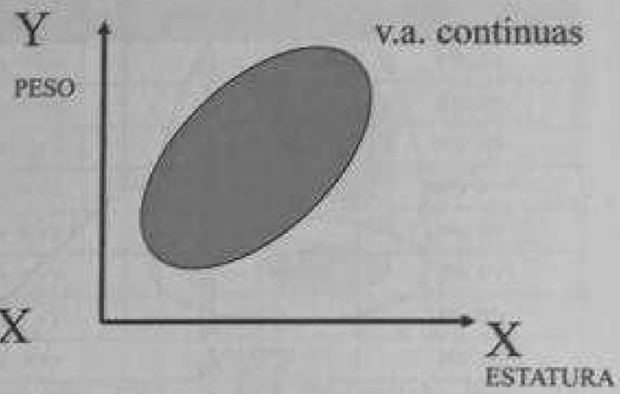
VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL XY

CONCEPTO:

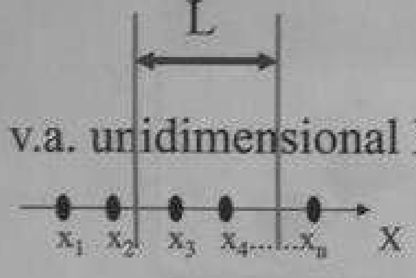
Se estudia el comportamiento conjunto de dos variables. Por ejemplo: Los resultados cjtos. en dos tiradas de moneda ,la estatura y peso de un individuo, la presión y temperatura de un determinado proceso , el valor de una señal en dos instantes de tiempo, el valor de dos señales en un instante de tiempo, etc.

Una v.a. bidimensional es una función que asigna a cada resultado de un experimento un punto en el plano real





DISTRIBUCIONES DISCRETAS CONJUNTAS XY

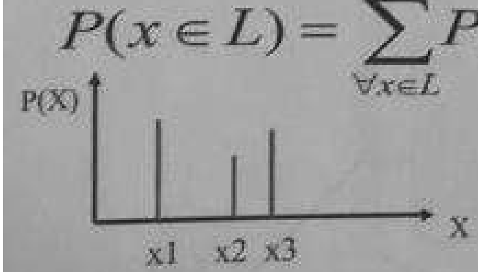


$$P(x)=P(X=x)$$

$$\sum_{\forall x} P(x)=1$$

$$P(x)\geq 0$$

$$P(x\in L)=\sum_{\forall x\in L} P(x)$$

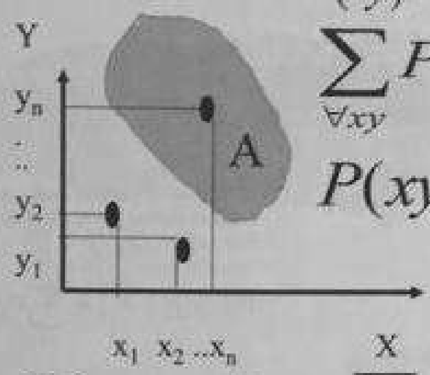


v.a. bidimensional XY

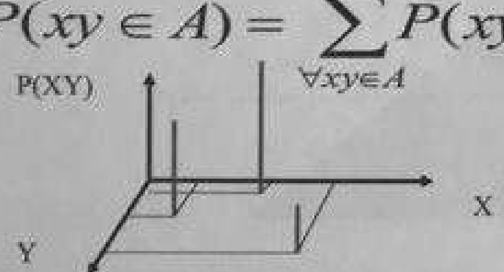
$$P(xy)=P(X=x\cap Y=y)$$

$$\sum_{\forall xy} P(xy)=1$$

$$P(xy)\geq 0$$



$$P(xy\in A)=\sum_{\forall xy\in A} P(xy)$$



DISTRIBUCIONES DISCRETAS CONJUNTAS XY

Ejemplo 1

De una caja que contiene 8 repuestos para un dispositivo, de los cuales 3 son de la marca A, 2 de la marca B y 3 de la marca C, extraemos 2. Sean X e Y el número de repuestos A y el número de repuestos B respectivamente en la pareja extraída. Hallar:

•La distribución conjunta

•P [(x,y) ∈ A] siendo A el recinto (x,y) tal que: $x + y \leq 1$

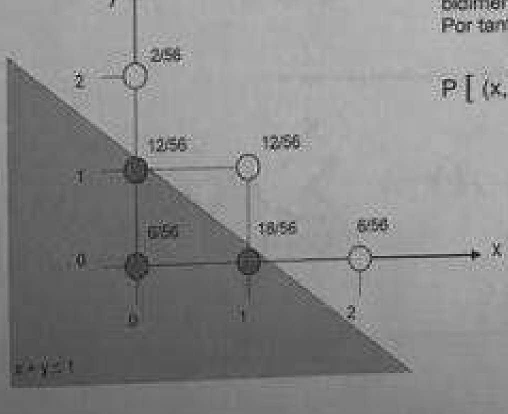
RESULTADOS POSIBLES	PROBABILIDAD	VALORES DE LAS VARIABLES
1ºA 2ºA	$\frac{3}{8}\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$	x = 2 y = 0
1ºA 2ºB	$\frac{3}{8}\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$	x = 1 y = 1
1ºA 2ºC	$\frac{3}{8}\frac{3}{7}=\frac{9}{56}$	x = 1 y = 0
1ºB 2ºA	$\frac{2}{8}\frac{3}{7}=\frac{6}{56}$	x = 1 y = 1
1ºB 2ºB	$\frac{2}{8}\frac{1}{7}=\frac{2}{56}$	x = 0 y = 2
1ºB 2ºC	$\frac{2}{8}\frac{3}{7}=\frac{6}{56}$	x = 0 y = 1
1ºC 2ºA	$\frac{3}{8}\frac{3}{7}=\frac{9}{56}$	x = 1 y = 0
1ºC 2ºB	$\frac{3}{8}\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$	x = 0 y = 1
1ºC 2ºC	$\frac{3}{8}\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$	x = 0 y = 0

DISTRIBUCIONES DISCRETAS CONJUNTAS XY

Ejemplo 1

En consecuencia la distribución de la variable bidimensional (X,Y) es:

Y \ X	0	1	2
2	$\frac{2}{56}$		
1	$\frac{12}{56}$	$\frac{12}{56}$	
0	$\frac{6}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{6}{56}$

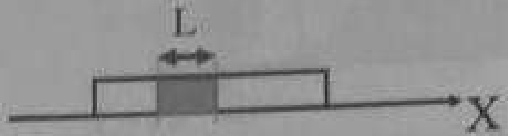


b) El recinto para el cual $x + y \leq 1$ es el recinto sombreado. La probabilidad de que la variable bidimensional tome valores en ese recinto es la suma de las masas contenidas en ese recinto. Por tanto:

$$P\left[(x,y) \in A \right] = \sum_{A} P(x,y) = P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = \frac{6}{56} + \frac{12}{56} + \frac{18}{56} = \frac{36}{56}$$

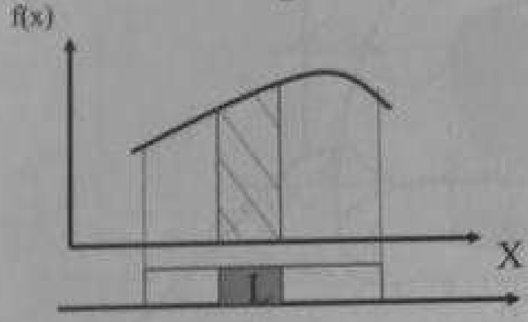
DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

v.a. unidimensional X



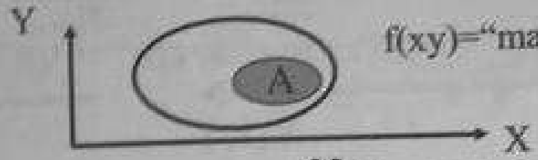
f(x)= " masa/longitud"

$$P(x \in L) = \int_L f(x)dx$$



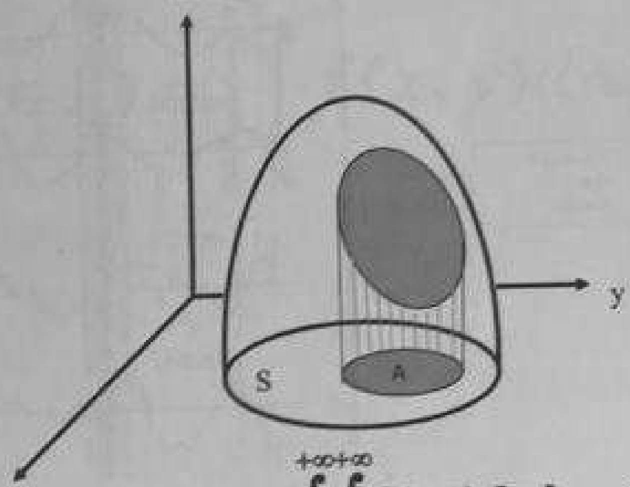
$$P(x \in recta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

v.a. bidimensional XY



f(xy)="masa/ superficie"

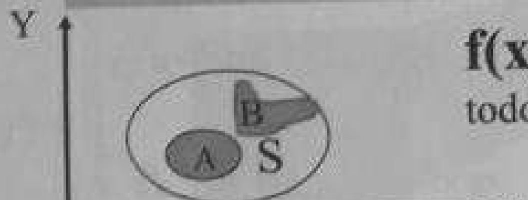
$$P(xy \in A) = \iint_A f(xy)dxdy$$



$$P(xy \in plano) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dxdy = 1$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

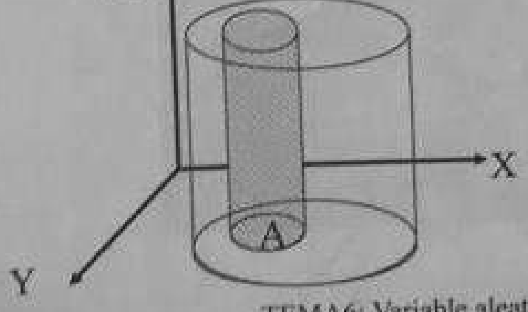
v.a. bidimensional XY uniforme

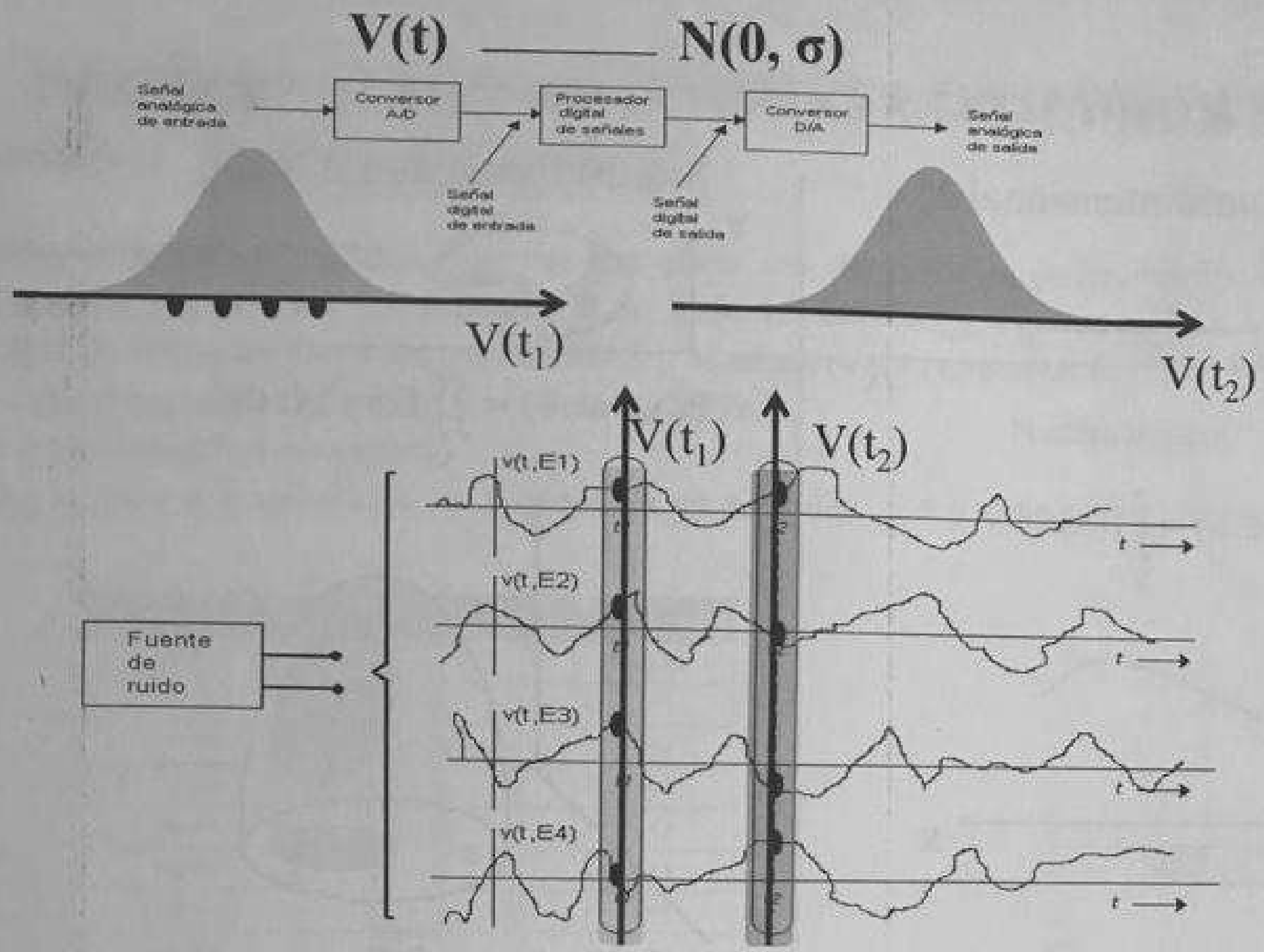


f(xy)="masa/ superficie"=**Cte=1/S** para todo xy que pertenece a S y 0 en otro caso

Si $S_A = S_B$ $P(xy \in A) = P(xy \in B)$

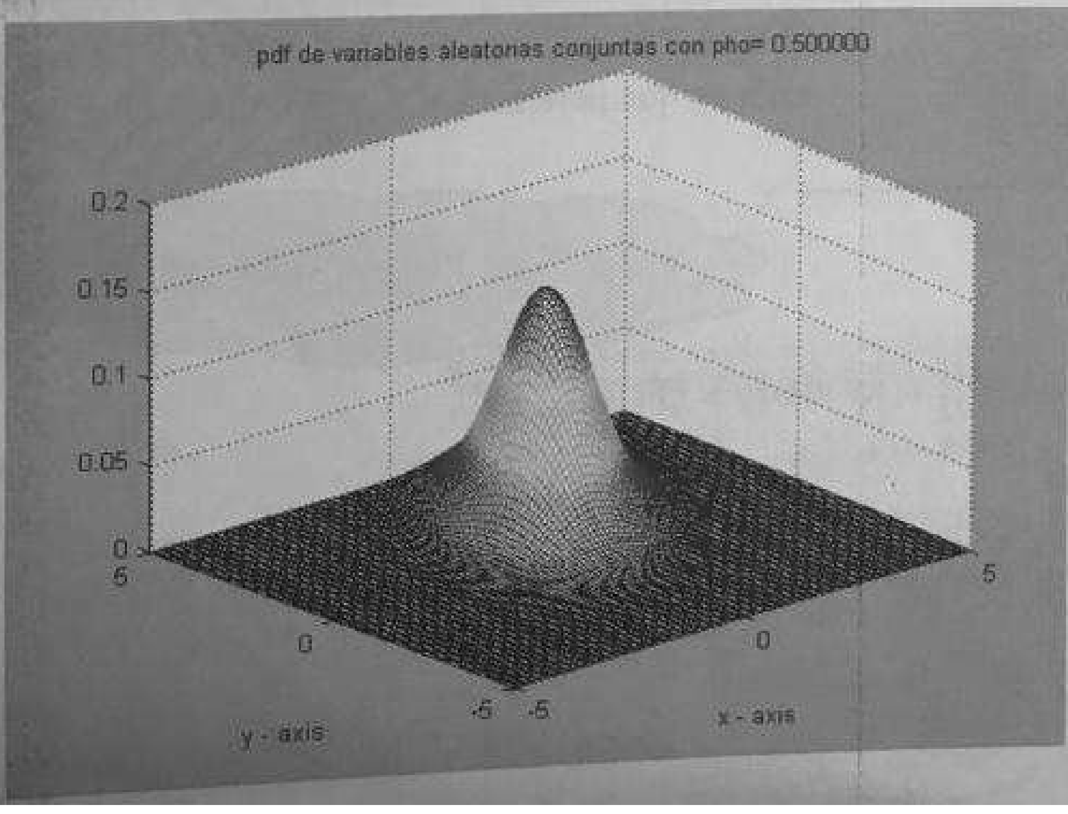
$$P(xy \in A) = \iint_A f(xy)dxdy = (1/S)S_A$$





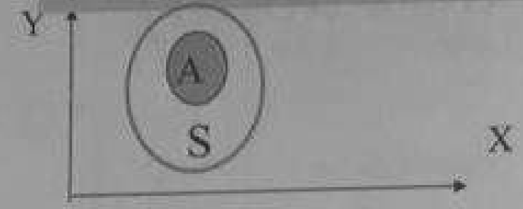
DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

Ejemplo : función de densidad del ruido térmico para dos instantes de tiempo

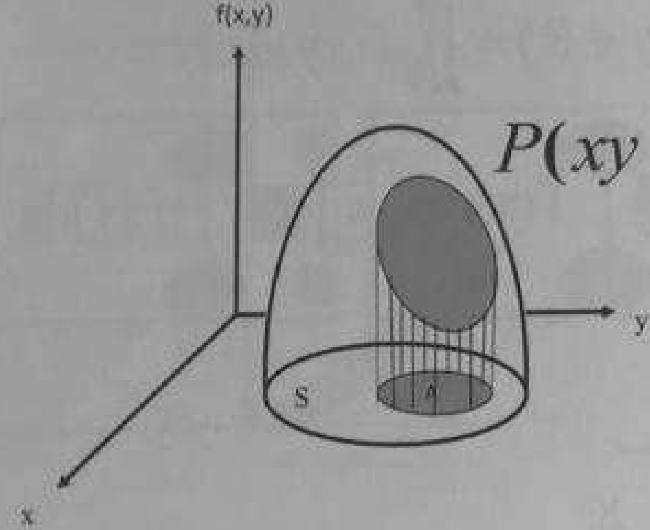


DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

v.a. bidimensional XY no uniforme



f(xy)="masa/ superficie"=φ(xy)



$$P(xy \in A) = \iint_A f(x,y)\,dxdy$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

Ejemplo 2:

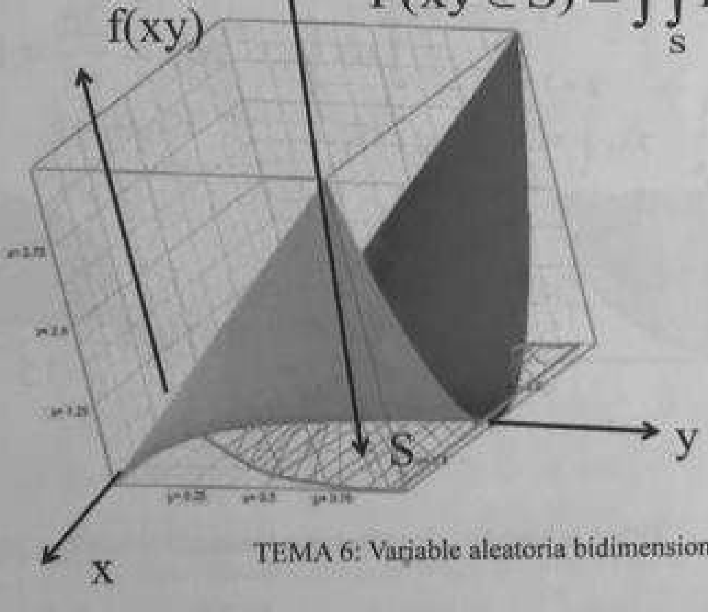
$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x^2\,y & \text{para } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Recinto S

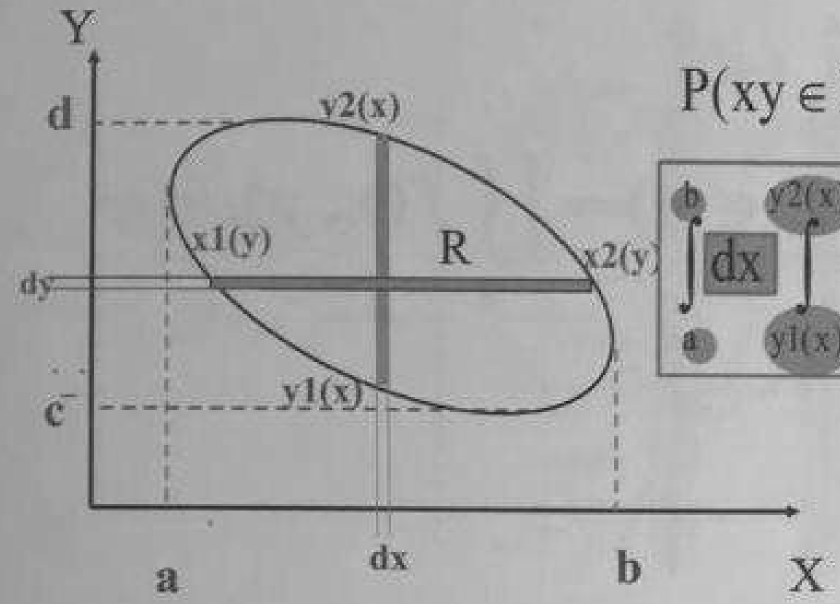
$$P(xy \in \text{plano}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)\,dxdy = 1$$

$$P(xy \in S) = \iint_S f(x,y)\,dxdy = 1$$

¿c ?



Recordatorio integrales dobles acotadas (Teorema de Fubini)



$$P(xy \in R) = \iint_R f(xy)\,dxdy =$$

$$\int_a^b \boxed{dx} \int_{y1(x)}^{y2(x)} f(xy)\,dy = \int_c^d \boxed{dy} \int_{x1(y)}^{x2(y)} f(xy)\,dx$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

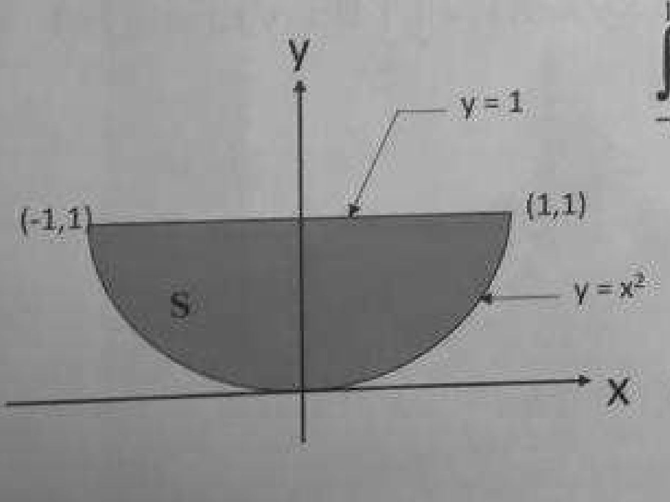
Ejemplo 2

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x^2 y & \text{para } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿c ?

$$P(xy \in S) = \int\int_S f(x,y)\,dxdy = 1$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} cx^2 y\,dy = \frac{2c}{15} = 1 \longrightarrow c = 15/2$$



$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} cx^2 y\,dx = \frac{2c}{15} = 1 \longrightarrow c = 15/2$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

Ejemplo 3

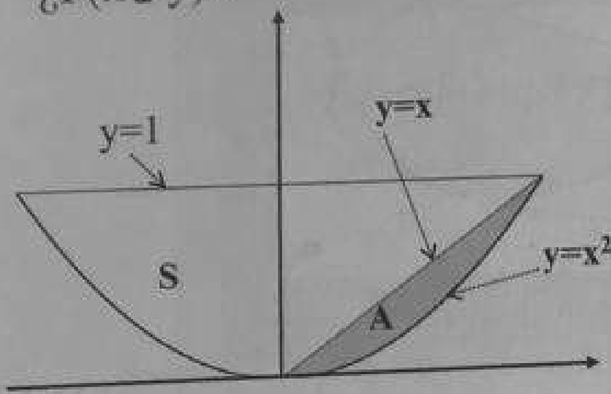
$$f(x,y) = \begin{cases} [15/2]\, x^2 y & \text{para } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿$P(x \geq y)$?

$$P(xy \in A) = \iint_A f(x,y)dxdy$$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \tfrac{15}{2} x^2 y dy = \frac{45}{112}$$

$$\int_0^1 dy \int_y^{+\sqrt{y}} cx^2 y dx = \frac{45}{112}$$



DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \begin{cases} k\, x^2 y & \text{para } x^2 + y^2 \le 1;\ y \ge 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

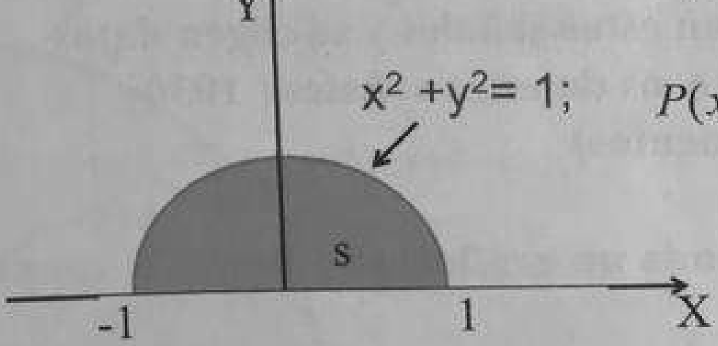
Recinto S

¿k ?

$$P(xy \in \text{plano}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dxdy = 1$$

$$P(xy \in S) = \iint_S f(x,y)dxdy = 1$$

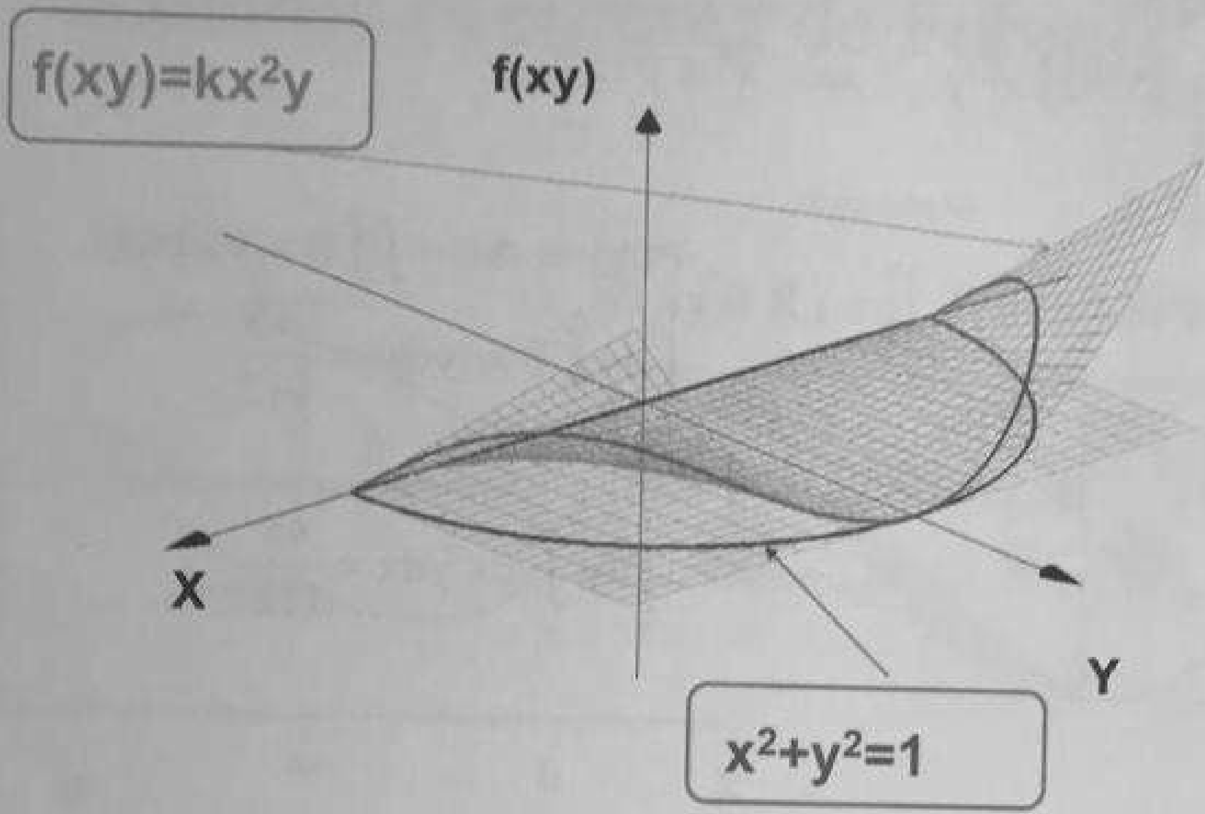
$$P(xy \in S) = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} kx^2 y dy = 1$$



K=15/2

DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

Ejemplo 4



DISTRIBUCIONES CONTINUAS CONJUNTAS XY

Ejemplo 5

	INSTANTE	X	Y
1	1	1,1817	,1941
2	2	,0187	1,8608
3	3	1,2695	1,0444
4	4	,2156	,7463
5	5	1,2784	,6933
6	6	,5413	,1606
7	7	,4915	1,8220
8	8	,5639	1,4215
9	9	,9571	1,3437
10	10	1,1047	1,5213
11	11	1,4596	,9375
12	12	,7382	,8365
13	13	1,0633	,4475
14	14	,6415	1,0894
15	15	1,1214	1,1344
16	16	1,4098	1,0222
17	17	,6880	,5377
18	18	,4383	,0460

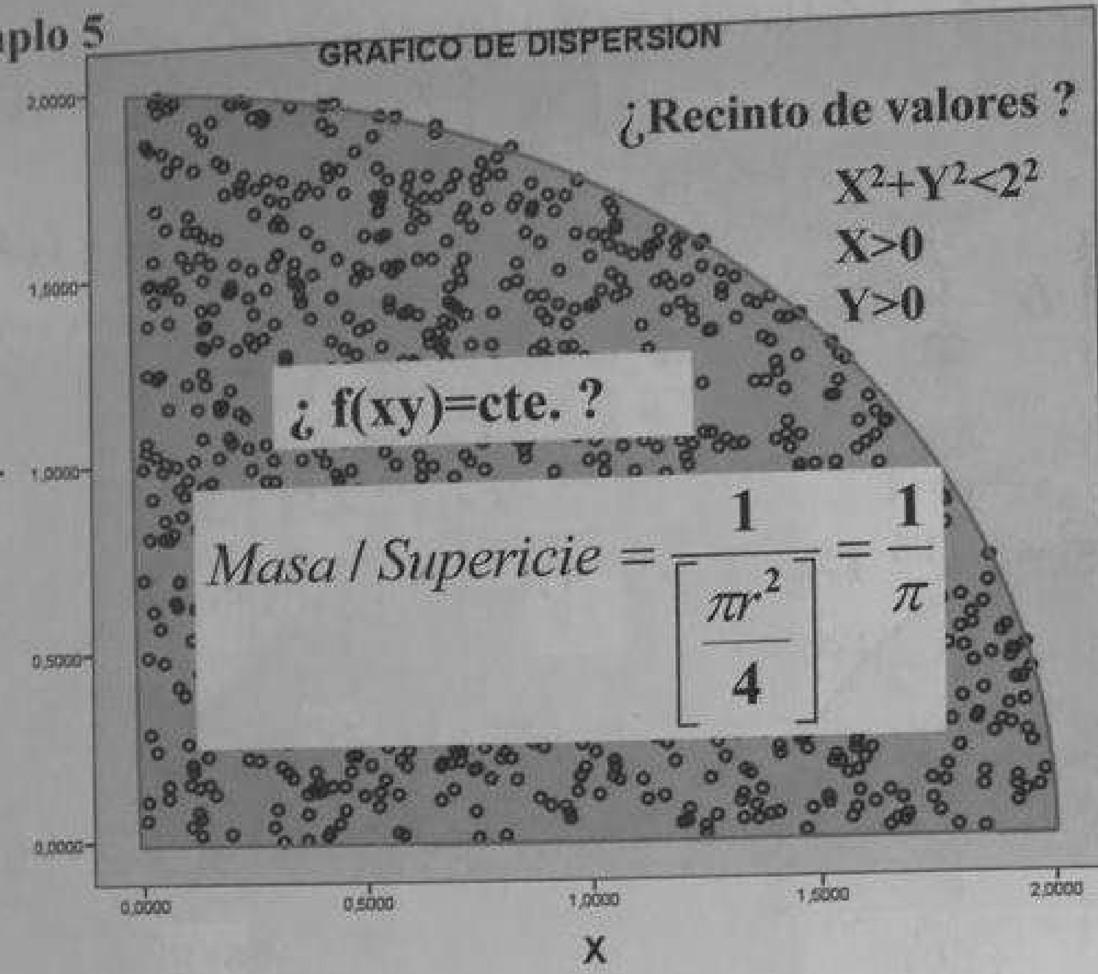
Estudiamos conjuntamente dos señales aleatorias continuas X eY que llegan simultáneamente a un sistema.

¿$P[(x-1)^2+y^2>1]$?

Se miden estas señales y se cogen datos simultáneos de estas señales (1030 experimentos)

Realizando un gráfico de dispersión simple:

Ejemplo 5



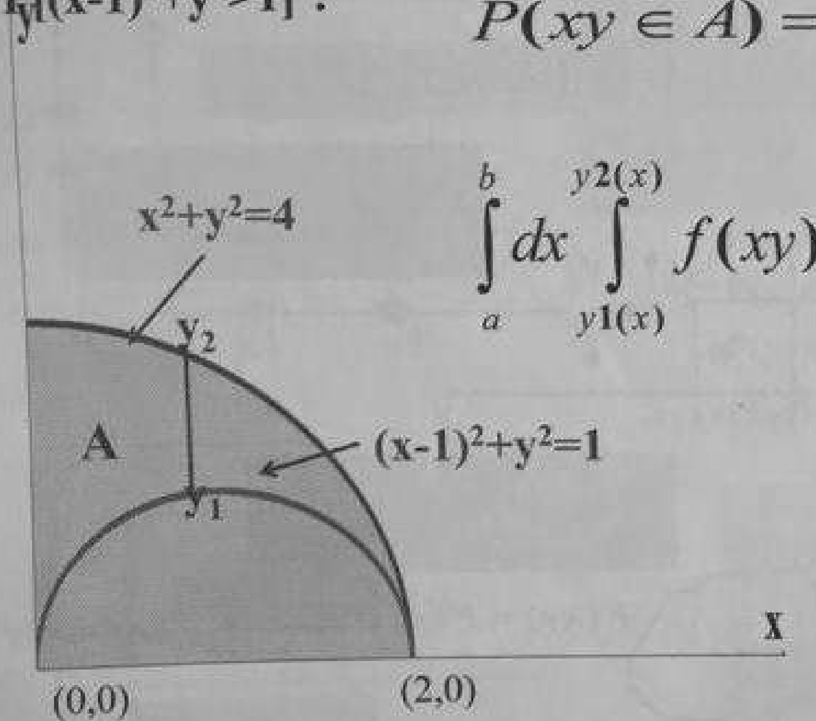
Ejemplo 5: $f(xy)= \; 1/\pi \quad x^2+y^2<2^2 ; x>0; y>0$

0 En otro caso

P[$(x-1)^2+y^2>1$] ?

$$P(xy \in A) = \iint_A f(x,y)\,dxdy$$

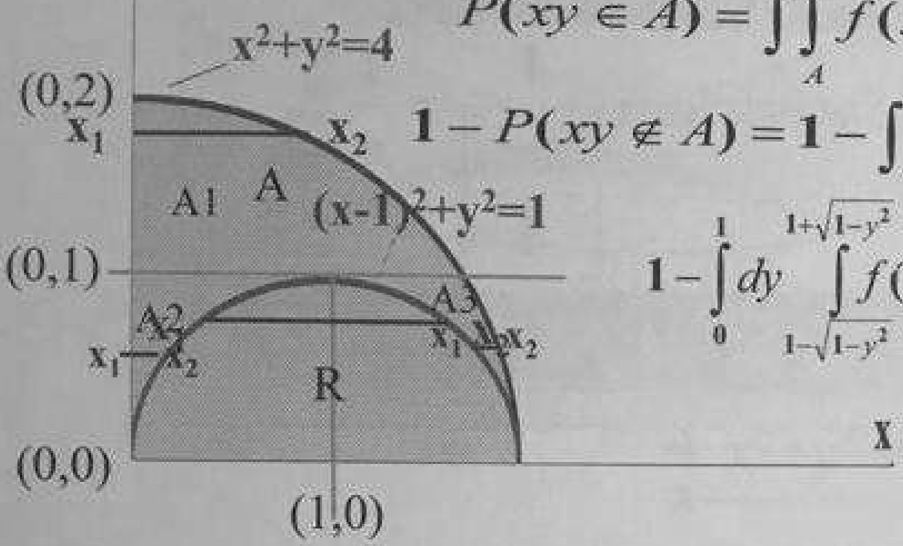
$$\int_a^b dx \int_{y1(x)}^{y2(x)} f(xy)dy = \int_0^2 dx \int_{+\sqrt{1-(x-1)^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(xy)dy$$



Ejemplo 5

$$\int_c^d dy \int_{x1(y)}^{x2(y)} f(xy)dx =$$

$$\int_1^2 dy \int_0^{+\sqrt{4-y^2}} f(xy)dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(xy)dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} f(xy)dx$$



$$P(xy \in A) = \iint_A f(x,y)dxdy =$$

$$1 - P(xy \notin A) = 1 - \iint_R f(x,y)dxdy =$$

$$1 - \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(xy)dx =$$

$$1 - f(xy)S_R = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)$$

$1/\pi$ $(\pi 1^2)/2$

FUNCION DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA F(XY)

v.a. unidimensional

$$F(x) = P(X \le x)$$

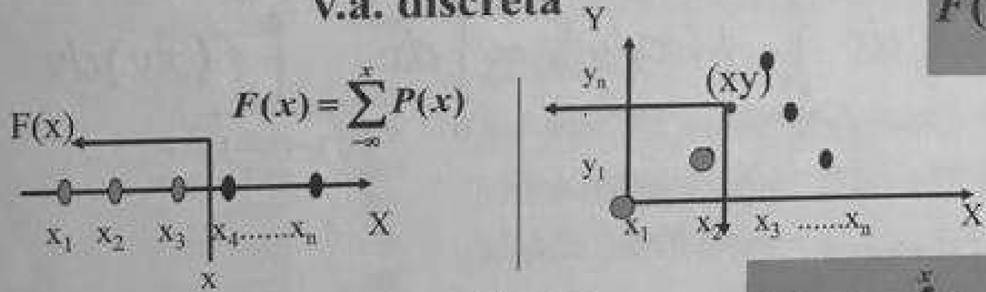
v.a. bidimensional XY

$$F(xy) = P(X \le x \cap Y \le y)$$

v.a. discreta

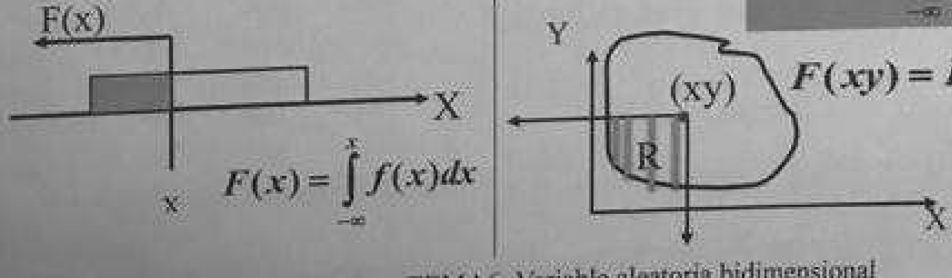
$$F(x) = \sum_{-\infty}^{x} P(x)$$

$$F(xy) = \sum_{-\infty}^{x}\sum_{-\infty}^{y} P(xy)$$



v.a. continua

$$F(xy) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} f(xy)dy$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

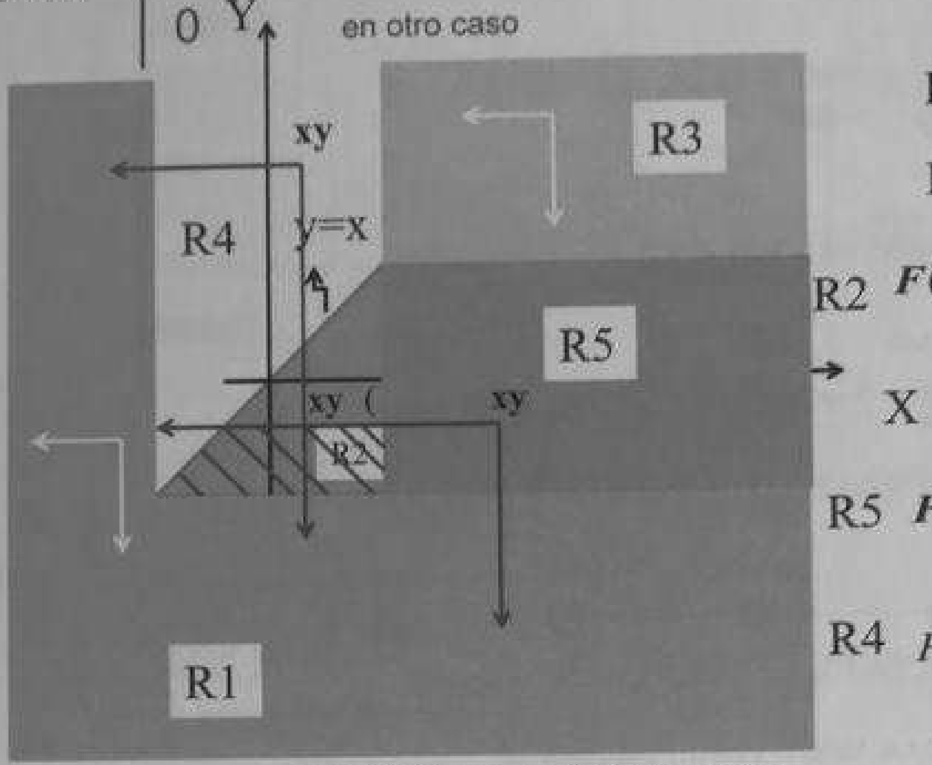
$$F(xy) = P(xy \in R) = \iint_R f(xy)dxdy$$

$$f(xy) = \frac{\partial^2 F(xy)}{\partial x \partial y}$$

FUNCION DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA F(XY)
Ejemplo 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} \text{ para } -1<y<x<1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

¿F(XY)?



R1 F(xy)=0

R3 F(xy)=1

R2 $F(xy) = \int_{-1}^{y} dy \int_{y}^{x} f(xy)dx$

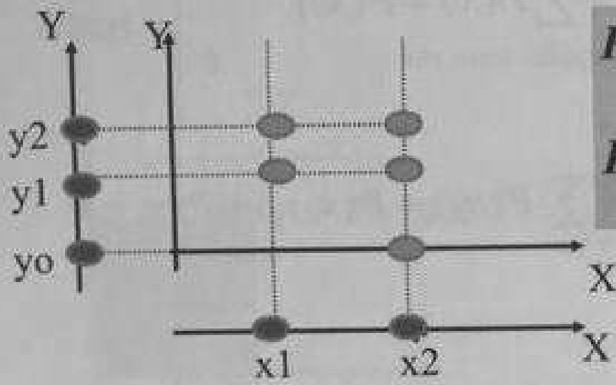
R5 $F(xy) = \int_{-1}^{y} dy \int_{y}^{1} f(xy)dy$

R4 $F(xy) = \int_{-1}^{x} dy \int_{y}^{x} f(xy)dx$

287

DISTRIBUCIONES MARGINALES

v.a. discretas



$$P(x) = P(X = x \cap Y_{CUALQUIERA}) = \sum_{\forall y} P(xy)$$

$$P(y) = P(Y = y \cap X_{CUALQUIERA}) = \sum_{\forall x} P(xy)$$

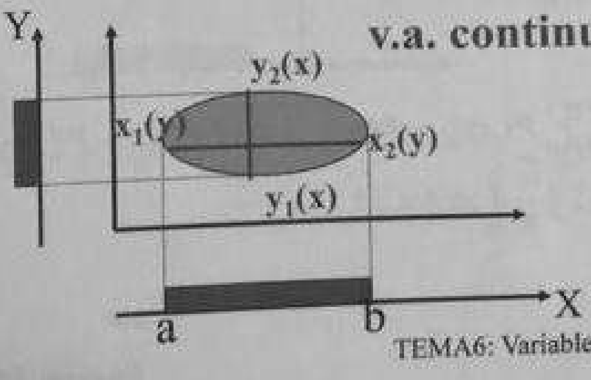
$P(x_1)=P(x_1y_1)+P(x_1y_2)$

$P(x_2)=P(x_2y_0)+P(x_2y_1)+P(x_2y_2)$

$P(y_0)=P(x_2y_0)$

$P(y_1)=P(x_1y_1)+P(x_2y_1)$

v.a. continuas

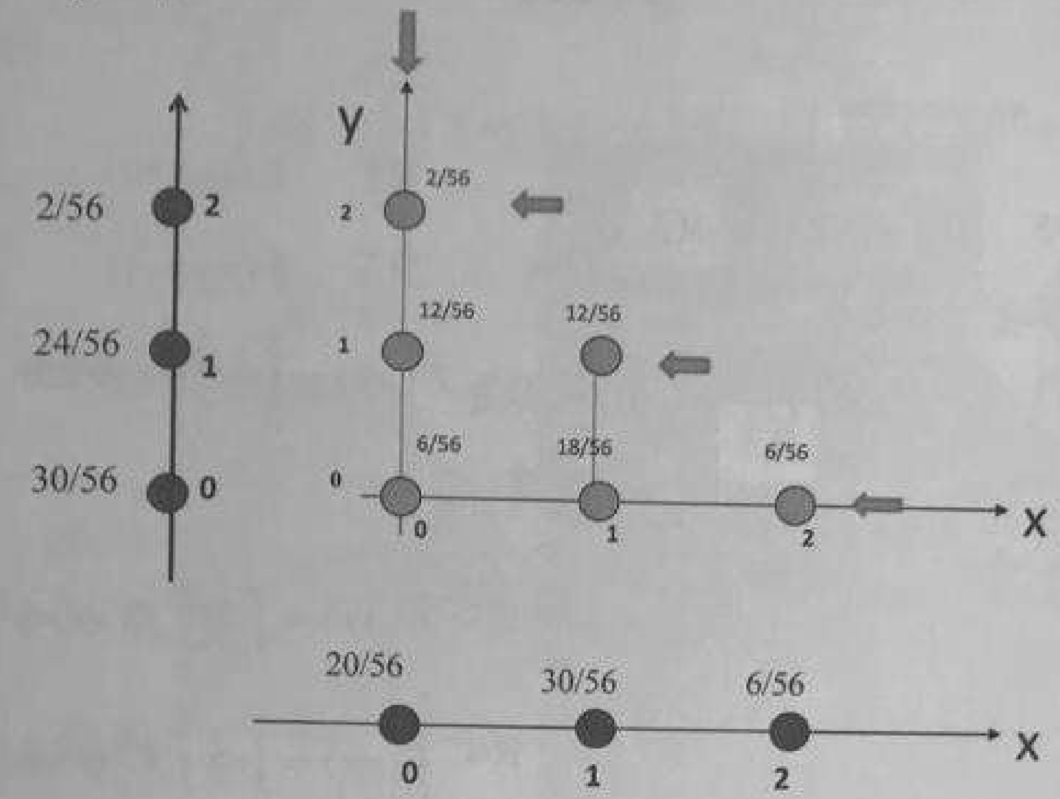


$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dy = \int_{y1(x)}^{y2(x)} f(xy)dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dx = \int_{x1(y)}^{x2(y)} f(xy)dx$$

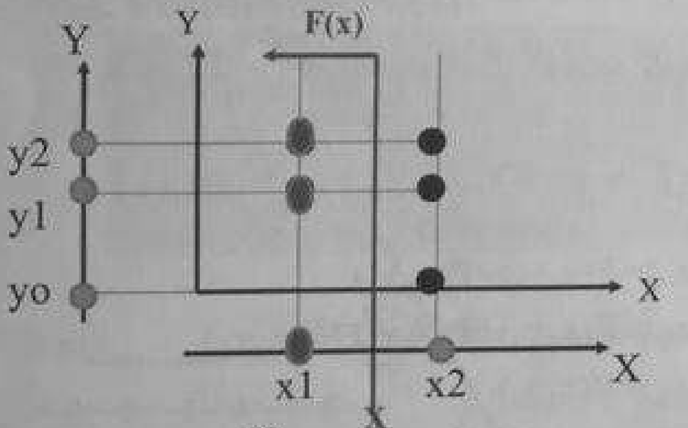
DISTRIBUCIONES MARGINALES DISCRETAS. P(x) Y P(y)

Ejemplo 7



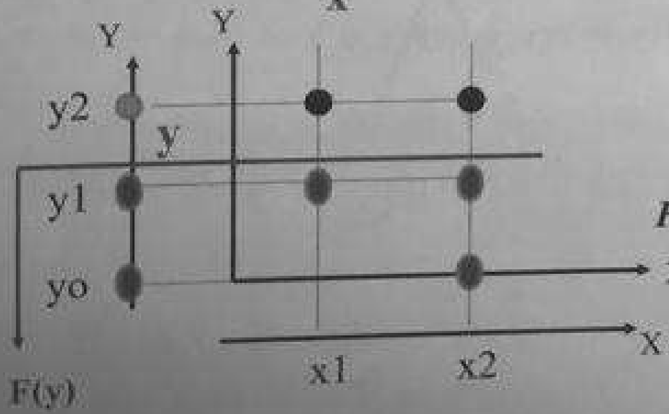
FUNCIONES DE DISTRIBUCION MARGINALES. F(x) Y F(y)

v.a. discretas



$$F(x)=\sum_{-\infty}^{x}P(x)=P(x_1)$$

$$F(x)=\sum_{-\infty}^{x}\sum_{\forall y}P(xy)=\overbrace{P(x_1y_1)+P(x_1y_2)}$$



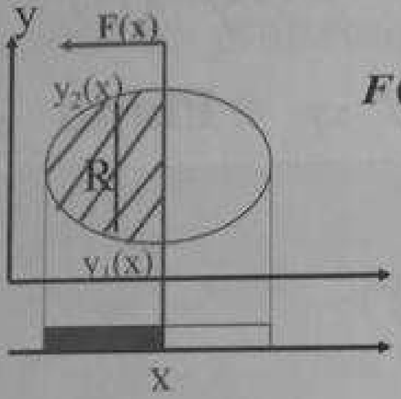
$$F(y)=\sum_{-\infty}^{y}P(y)=P(y_1)+P(y_0)$$

$$F(y)=\sum_{-\infty}^{y}\sum_{\forall x}P(xy)=\overbrace{P(x_1y_1)+P(x_2y_1)}+P(x_2y_0$$

FUNCIONES DE DISTRIBUCION MARGINALES. F(x) Y F(y)

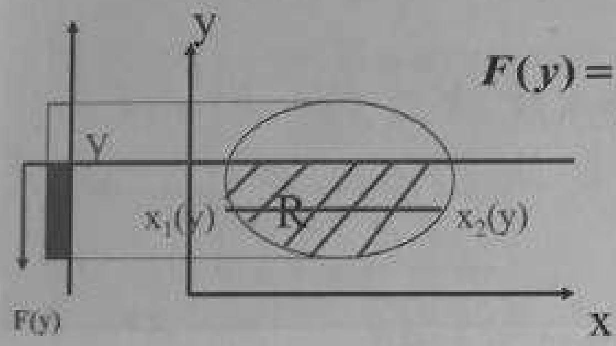
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

v.a. continuas



$$F(x)=\iint_R f(xy)dxdy=\int_{-\infty}^{x} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(xy)dy$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dy=\int_{y1(x)}^{y2(x)} f(xy)dy$$



$$F(y)=\int_{-\infty}^{y} f(y)dy=\iint_R f(xy)dxdy=\int_{-\infty}^{y} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(xy)dx$$

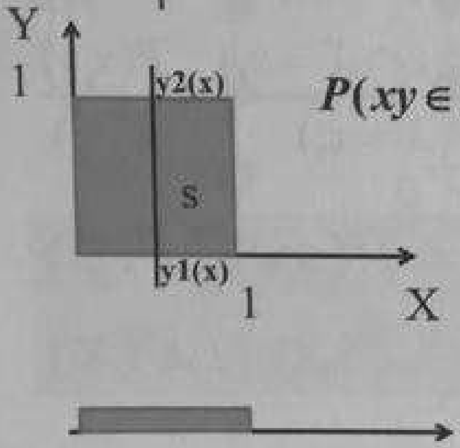
$$f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dx=\int_{x1(y)}^{x2(y)} f(xy)dx$$

DISTRIBUCIONES MARGINALES

Ejemplo 8

$$f(x,y)=\begin{cases} K(2x+3y) & \text{para } 0<x<1 \text{ y } 0<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a)Distribución marginal x
b)Distribución marginal y



$$P(xy\in S)=\iint_S f(xy)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 k(2x+3y)dy=1$$

k=2/5

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dy=\int_{y1(x)}^{y2(x)} f(xy)dy$$

$$f(x)=\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dy=\begin{cases} \dfrac{4x+3}{5} & 0<x<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

INDEPENDENCIA DE VARIABLES

Suceso A
Suceso B | A y B indep. $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

X e Y son INDEPENDIENTES si $\forall$ xy $\in$ Plano :

v.a. discretas

$$P(xy) = P(X = x \cap Y = y) = P(x)P(y)$$

v.a. discretas o v.a. continuas

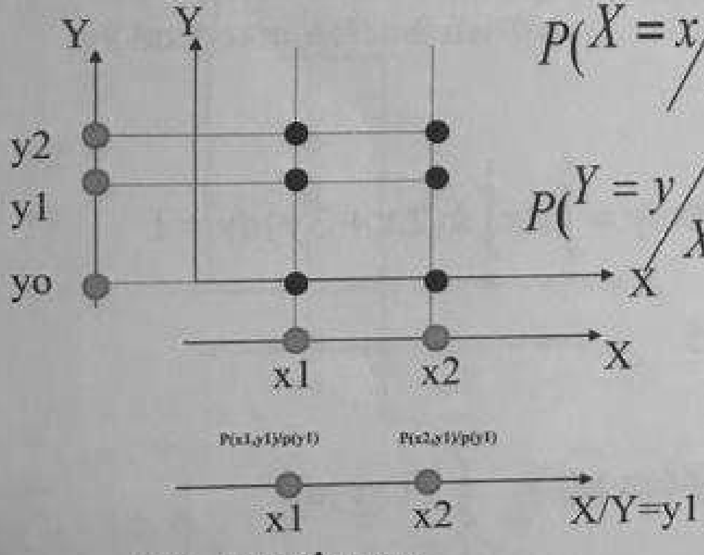
$$F(xy) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F(x)F(y)$$

v.a. continuas

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES X/Y Y/X

v.a. discretas



$$P\left(X = x \middle/ Y = y_1\right) = \frac{P(X = x \cap Y = y_1)}{P(Y = y_1)} = \frac{P(xy_1)}{P(y_1)}$$

$$P\left(Y = y \middle/ X = x_1\right) = \frac{P(Y = y \cap X = x_1)}{P(X = x_1)} = \frac{P(x_1 y)}{P(x_1)}$$

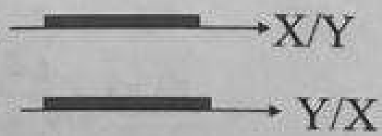
$$P(x/y) = P(xy)/P(y)$$

$$P(y/x) = P(xy)/P(x)$$

v.a. continuas

$$f(x/y) = f(xy)/f(y)$$

$$f(y/x) = f(xy)/f(x)$$



DISTRIBUCIONES CONDICIONALES X/Y Y/X

Ejemplo 9

La función de probabilidad conjunta de la variable XY es:

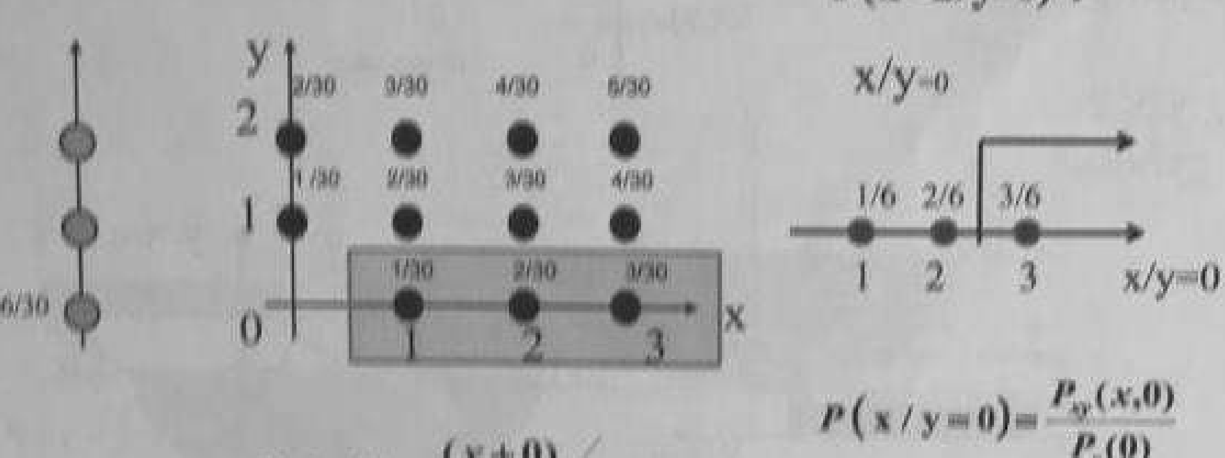
$P(x,y)=\frac{x+y}{30}$ para x = 0, 1, 2, 3   y = 0, 1, 2   siendo cero en otro caso.

Hallar la probabilidad de que x > 2 condicionada a y = 0
Hallar la función de distribución F(y / x=2)

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES X/Y Y/X

Ejemplo 9

P(x>2/y=0) ?



$$P(x/y=0)=\frac{P_{xy}(x,0)}{P_y(0)}$$

$$P(x/y=0)=\frac{P_{xy}(x,0)}{P_y(0)}=\frac{(x+0)/30}{6/30}=\frac{x}{6}$$ P(x>2/y=0) =3/6

$$P_y(0)=\sum_{\forall x}P_{xy}(x,0)=\sum_{x=0,1,2,3}\frac{x+0}{30}=\frac{0}{30}+\frac{1}{30}+\frac{2}{30}+\frac{3}{30}=\frac{6}{30}$$

INDEPENDENCIA DE VARIABLES

Suceso A
Suceso B | A y B indep. $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

X e Y son INDEPENDIENTES si $\forall$ xy $\in$ Plano :

v.a. discretas

$$P(xy) = P(X = x \cap Y = y) = P(x)P(y)$$

v.a. discretas o v.a. continuas

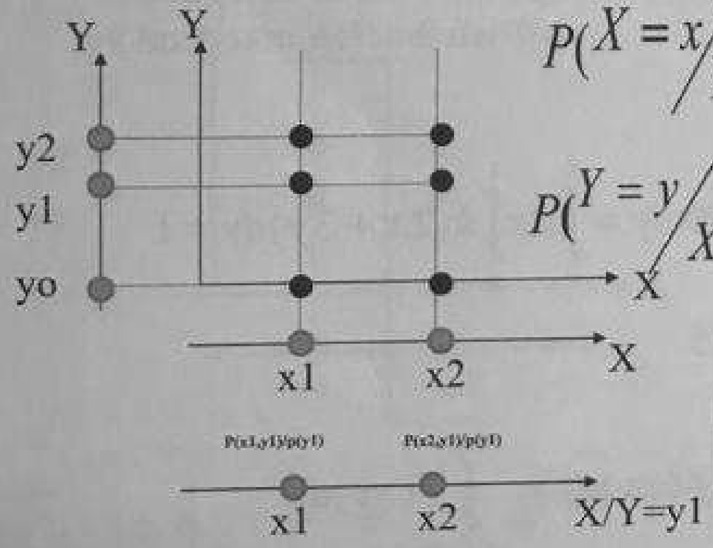
$$F(xy) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F(x)F(y)$$

v.a. continuas

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES X/Y Y/X

v.a. discretas



$$P\left(X = x \big/ Y = y_1\right) = \frac{P(X = x \cap Y = y_1)}{P(Y = y_1)} = \frac{P(xy_1)}{P(y_1)}$$

$$P\left(Y = y \big/ X = x_1\right) = \frac{P(Y = y \cap X = x_1)}{P(X = x_1)} = \frac{P(x_1 y)}{P(x_1)}$$

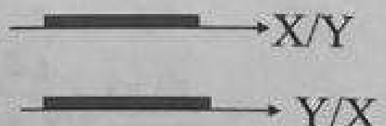
$$P(x/y) = P(xy)/P(y)$$

$$P(y/x) = P(xy)/P(x)$$

v.a. continuas

$$f(x/y) = f(xy)/f(y)$$

$$f(y/x) = f(xy)/f(x)$$



DISTRIBUCIONES CONDICIONALES X/Y Y/X

Ejemplo 9

La función de probabilidad conjunta de la variable XY es:

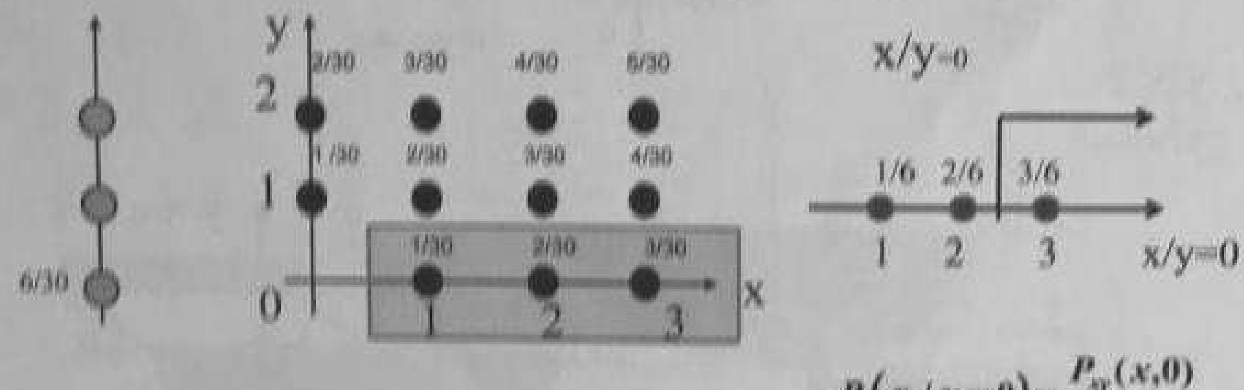
$P(x,y)=\frac{x+y}{30}$ para $x=0,1,2,3 \quad y=0,1,2$ siendo cero en otro caso.

Hallar la probabilidad de que x > 2 condicionada a y = 0
Hallar la función de distribución F(y / x=2)

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES X/Y Y/X

Ejemplo 9

P(x>2/y=0) ?



$$P(x/y=0)=\frac{P_{xy}(x,0)}{P_y(0)}$$

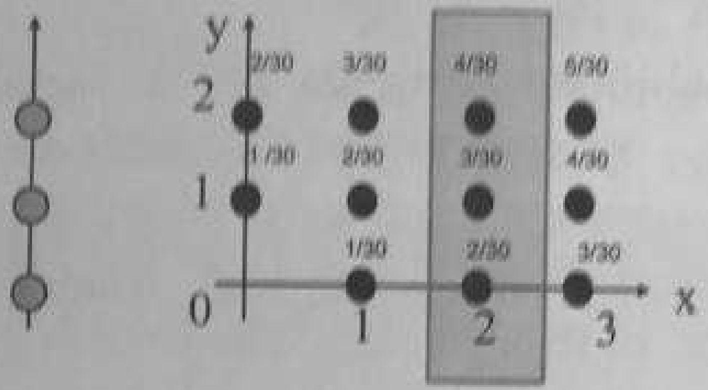
$$P(x/y=0)=\frac{P_{xy}(x,0)}{P_y(0)}=\frac{(x+0)/30}{6/30}=\frac{x}{6}$$

P(x>2/y=0) =3/6

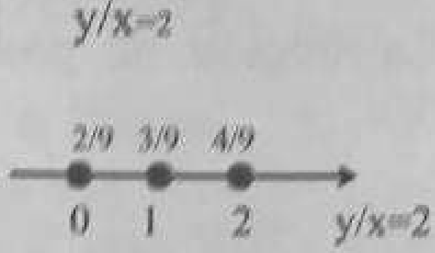
$$P_y(0)=\sum_{\forall x}P_{xy}(x,0)=\sum_{x=0,1,2,3}\frac{x+0}{30}=\frac{0}{30}+\frac{1}{30}+\frac{2}{30}+\frac{3}{30}=\frac{6}{30}$$

FUNCIONES DE DISTRIBUCION MARGINALES. F(x) Y F(y)

Ejemplo 9



F(y/x=2) ?



$$P(y/x=2)=\frac{P_{xy}(2,y)}{P_x(2)}$$

$$P(y/x=2)=\frac{P_{xy}(2,y)}{P_x(2)}=\frac{(2+y)/30}{9/30}=\frac{2+y}{9}$$

[-∞,0)--------> F(y/x=2)=0
[0, 1)--------> F(y/x=2)=2/9
[1, 2)--------> F(y/x=2)=5/9
[2,∞]--------> F(y/x=2)=1

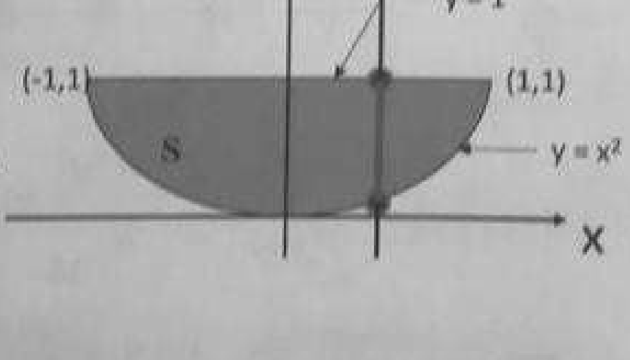
297

CONDICIONALES X/Y Y/X. Variables continuas

Ejemplo 10

$$f(x,y) = \begin{cases} [4/21]\, x^2 y & \text{para } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿ y/x ?
¿y/x=1/2 ?



298

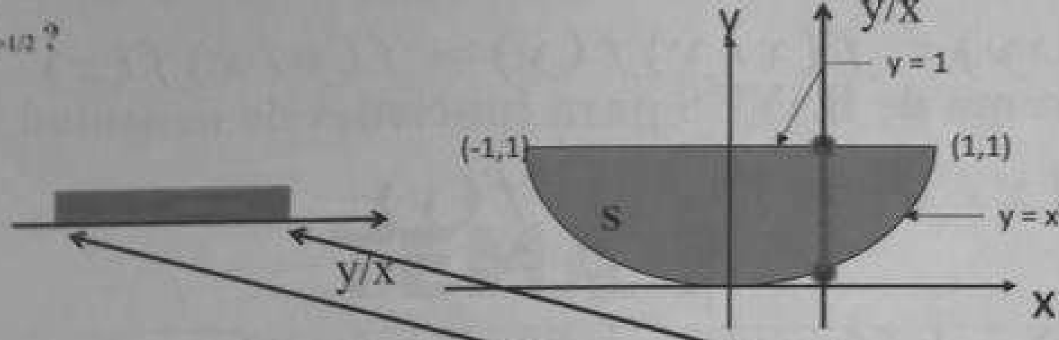
CONDICIONALES X/Y Y/X. Variables continuas

Ejemplo 10

$$f(x,y) = \begin{cases} [4/21]\, x^2 y & \text{para } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿ y/x ?

¿y/x=1/2 ?



$$f(y/x) = \frac{f(xy)}{f(x)} = \frac{\frac{4}{21}x^2y}{\int_{x^2}^{1}\frac{4}{21}x^2y\,dy} = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4} & x^2<y<1 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$f(y/x=1/2) = \frac{f(1/2,y)}{f(1/2)} = \frac{2y}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \begin{cases} \frac{32y}{15} & 1/4<y<1 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

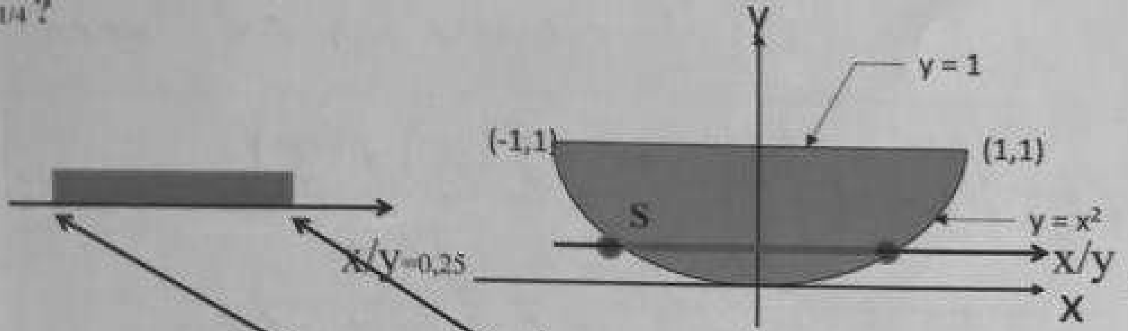
CONDICIONALES X/Y Y/X. Variables continuas

Ejemplo 10

$$f(x,y) = \begin{cases} [4/21]\, x^2 y & \text{para } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿ x/y ?

¿x/y=1/4 ?



$$f(x/y) = \frac{f(xy)}{f(y)} = \frac{\frac{4}{21}x^2y}{\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}\frac{4}{21}x^2y\,dx} = \begin{cases} \frac{3x^2}{2\left(\sqrt{y}\right)^3} & -\sqrt{y} < x < +\sqrt{y} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$f(x/y=1/4) = \frac{f(x,1/4)}{f_y(1/4)} = \frac{3x^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3} = \begin{cases} 12x^2 & -1/2<x<1/2 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Cálculo de la distribución cjta. conocidas las marginales y condicionadas

$$P(xy) = P(x/y)P(y) = P(y/x)P(x)$$

$$f(xy) = f(x/y)f(y) = f(y/x)f(x)$$

Teorema de BAYES para funciones de densidad

$$f(x/y) = f(xy)/f(y)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(xy)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)f(x)dx$$

$$f(x/y) = \frac{f(y/x)f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)f(x)dx}$$

301

Teorema de Bayes para funciones de densidad

Si X e Y son independientes f(xy)=f(x)f(y)

$$f(x/y) = \frac{f(y/x)f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)f(x)dx}$$

$$f(x/y) = \frac{f(xy)}{f(y)} = \frac{f(x)f(y)}{f(y)} = f(x)$$

$$f(y/x) = \frac{f(x/y)f(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)f(y)dy}$$

$$f(y/x) = \frac{f(xy)}{f(x)} = \frac{f(x)f(y)}{f(x)} = f(y)$$

302