# DESARROLLOS EN SERIE

**1.- Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\cdot\dfrac{1}{1-\mathrm{x}}$**, calculando el radio de convergencia. Septiembre 2006**

**2.-Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $f(x)=\mathrm{L}\left(4+x^4\right)$ **indicando dónde es válido. Febrero 2008**

**3.- Dada la función** $\boldsymbol{f}(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$**.**

**a) Representar aproximadamente *f*, calculando previamente su dominio, asíntotas y crecimiento.**

**b) Desarrollar *f*(*x*) en serie de potencias, indicando el campo de convergencia.**

**c) Calcular la suma de la serie** $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{10^{n-1}}\right]$**. Junio 2008**

**4.- Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $f(x)=x^2\cdot\mathrm{L}\left(e+x^2\right)$**, indicando dónde es válido. Febrero 2009**

**5.- Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $f(x)=\mathrm{L}\left(1+x^3\right)$**, indicando dónde es válido. Febrero 2010**

**---**

**6.- Dada la función** $y=f(x)$**, con derivadas continuas hasta grado 4 y cuyo polinomio de Mclaurin de grado 3 es** $P_3(x)=1-x+\dfrac{x^3}{3}$**:**

**a) Calcular, aproximadamente, el valor de *f* en el punto** $x=\dfrac{1}{10}$**.**

**b) Hallar** $f'(0)$ **y** $f''(0)$**.**

**c) Sabiendo que** $\left|f^{4)}(x)\right|<4 \quad \forall x\in[0,1]$**, acotar el error cometido en la aproximación realizada en el apartado a). Enero 2011)**

**7.- a) Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $f(x)=\arctan(5x)$ **indicando el intervalo en el que es válido.**

**b) Para cierto valor de la variable *x*, el desarrollo anterior se convierte en una serie numérica cuya suma es** $\dfrac{\pi}{4}$**. Determinar cuántos términos se deben tomar en dicha serie, para que al sumarlos obtengamos un valor aproximado de** $\dfrac{\pi}{4}$ **con un error menor que** $10^{-2}$**. Mayof 2011**

**8.- Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $f(x) = \mathrm{L}(2-x) + \dfrac{2x}{1+x}$**, indicando dónde es válido.** **Noviembre 2011**

**9.- a) Si el desarrollo en serie de potencias de una función *f* es** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (2n+1) \cdot x^{2n}$**, hallar** $f''(0)$**.**

**b) Dada una función** $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$**, tal que** $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{n)}(x) = e^x(1+n+x) \quad \forall n = 0,1,2,\ldots$ **(** $f^{0)}(x) = f(x)$ **), dar la expresión de** $p_2(x)$ **(polinomio de McLaurin de grado 2) y de** $r_2(x)$ **(su correspondiente resto de Lagrange).** **Noviembre 2011**

**10.- a) Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $f(x) = \mathrm{L}\left(1+x^4\right)$**, indicando dónde es válido.**

**b) Utilizando el desarrollo anterior, calcular cuántos términos se deben tomar para obtener el valor aproximado de** $\mathrm{L}2$**, con un error menor que** $\varepsilon = 0.01$**.**
**Enero 2013**

**11.- Desarrollar en serie de potencias la función** $f(x) = \arctan(x^2)$**, indicando dónde es válido dicho desarrollo.** **Julio 2014**

**12.- a) Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función** $f(x) = \dfrac{1}{4}\arctan(4x) + 3$ **indicando dónde es válido.**

**b) Calcular** $f^{51)}(0)$**.** **Enero 2015**

## DESARROLLOS EN SERIE: Soluciones

**1.-** $f(x) = e^x \cdot \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)x^n \quad \forall x \in (-1,1)$.

**2.-** $f(x) = L(4) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{4n+4}}{4^n(4n+4)} \qquad \forall x \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

**3.-.** a) dominio: $\mathbf{D_f} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$.

asíntotas: vertical: $x$=1;
horizontal: $y = 0$.

$f$ es creciente si $x$<1 y es decreciente si $x$>1.

.b) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right) \quad \forall x \in (-1,1)$.

$\forall x \in (-1,1)$.

c) Como $\dfrac{1}{10} \in (-1,1)$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{10^{n-1}}\right] = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{10}} = f\left(\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{10})^2} = \dfrac{100}{81}$.

**4.-** $f(x) = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+4}}{e^{n+1}(n+1)} \qquad \forall x \in \left[-\sqrt{e},\sqrt{e}\right]$.

**5.-** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \cdot x^{3n+3}}{n+1} \qquad \forall x \in (-1,1]$.

---

**6.-** a) $f\left(\dfrac{1}{10}\right) \approx p_3\left(\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{2701}{3000}$.

b) $f'(0) = -1$ y $f''(0) = 0$.

c) $r_3(x) = \dfrac{f^{4)}(\theta x)}{4!}x^4, \quad \theta \in (0,1)$, de donde $r_3\left(\dfrac{1}{10}\right) \leq \dfrac{1}{6 \cdot 10^4}$.

**7.-** a) $f(x) = \arctan(5x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (5x)^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in \left[\dfrac{-1}{5},\dfrac{1}{5}\right]$.

b) $\dfrac{\pi}{4} = \arctan(1) = \arctan(5 \cdot \dfrac{1}{5}) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left(5\frac{1}{5}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \dfrac{1}{5} \in \left[\dfrac{-1}{5},\dfrac{1}{5}\right]$, que es una serie alternada. Hay que coger 50 términos del desarrollo para obtener un valor aproximado de $\dfrac{\pi}{4} \approx 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - ... + \dfrac{(-1)^{51}}{99}$ con un error menor que $10^{-2}$.

**8.-** $f(x) = \underbrace{\mathrm{L}(2-x)}_{g(x)} + \underbrace{\frac{2x}{1+x}}_{h(x)} = L(2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{n+1} =$

$$= L(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( 2(-1)^n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right) x^{n+1} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

**9.-** a) $\frac{f''(0)}{2!} x^2 = -3x^2 \Rightarrow f''(0) = -6$.

b) El polinomio de Taylor de grado 2 es $p_2(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2$ y el resto de Lagrange es $r_2(x) = \frac{e^{\theta x}(1+3+\theta x)}{3!} x^3, \ \theta \in (0,1)$.

**10.-** a) $f(x) = \mathrm{L}\left(1+x^4\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+4}}{n+1} \qquad \forall x \in [-1,1]$.

b) Hemos de tomar los 99 primeros términos.

**11.-** $f(x) = arc\tan\left(x^2\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{4n+2} \qquad \forall x \in [-1,1]$.

**12.-** a) $f(x) = \frac{1}{4}\arctan(4x) + 3 = 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n} x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

b) $f^{51)}(0) = -4^{50} \cdot (50!)$.