AZTERKETA ARIKETAK – FOURIER SERIEAK
2015-2016 IKASTURTEA

1. ARIKETA

Bedi $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ Ch(x) & 0 \le x < \pi \end{cases}$ *eta* $\forall x \quad f(x+2\pi)=f(x)$

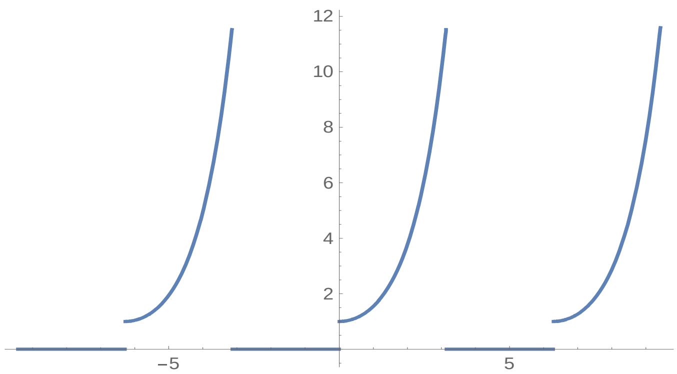
1) Marraztu f(x)-ren adierazpen grafikoa $[-3\pi, 3\pi]$ tartean.
2) Bete ezazu ondorengo balio-taula erantzunak arrazoituz:

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$f(x)$					
$\varphi(x)$					

3) Lor ezazu $\varphi(x)$, f(x) funtzioaren Fourier serie garapena era esponentzialean.
4) Zein motatakoak (errealak, konplexuak, irudikari hutsak...) dira aurreko garapenaren c_n koefizienteak? Erantzuna arrazoitu eta koefizienteen balioak lortu $n = 0, \pm 1, \pm 2$ balioetarako.

SOLUZIOA

1)



2)

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$f(x)$	0	0	1	$Ch(\pi/2)$	0
$\varphi(x)$	$\frac{Ch(\pi)}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$Ch(\pi/2)$	$\frac{Ch(\pi)}{2}$

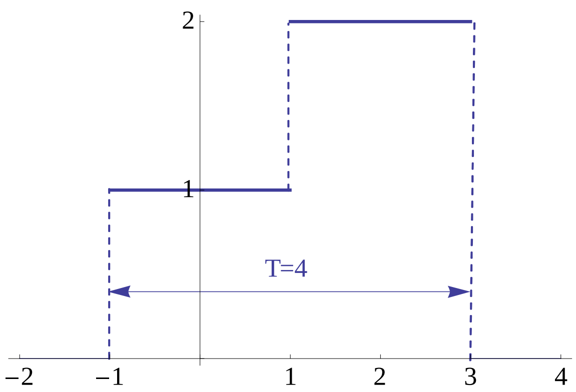
3) $\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot n \cdot x} \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi \cdot (n^2+1)} \cdot \left[e^{-i \cdot n \cdot \pi} \cdot (i \cdot n \cdot \cosh(\pi) + \sinh(\pi) - i \cdot n \right]$

4) c_0 erreala da eta gainerako koefizienteak, oro har, konplexuak dira.

2. ARIKETA

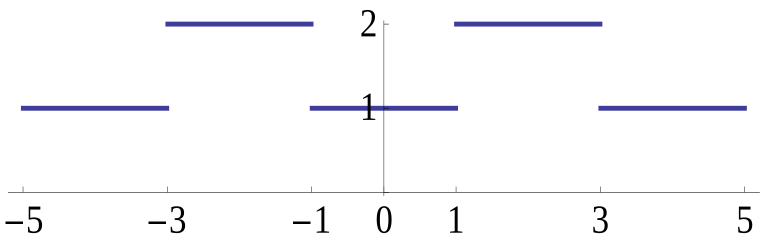
1) Grafikoan 4 periodoko funtzio periodiko baten uhina erakusten da. Irudikatu funtzioa [-5,5] tartean eta lortu bere Fourier serie garapena. Zein da seriearen balioa $t=2n$ eta $t=2n+1$ balioetarako, $n\in\mathbb{N}$ izanda?

2) Aurreko garapenetik abiatuz, kalkulatu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.



SOLUZIOA

1)



$$\phi(t)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot t}{2}\right)$$

$$\phi(2n)=\begin{cases}1 & n=2m\\ 2 & n=2m+1\end{cases}\quad,\ m\in\mathbb{N}.$$

$$\phi(2n+1)=\frac{1}{2}(1+2)=\frac{3}{2}$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

3. ARIKETA

Bedi $f(t)=\left|\cos(t)\right|$.

a) Adierazi grafikoki funtzioa. Inongo kalkulurik egin gabe, zer esan daiteke $f(t)$-ren Fourier serie garapenari buruz? Zein da bere funtsezko periodoa?

b) Lortu $f(t)$-ren Fourier serie garapena.

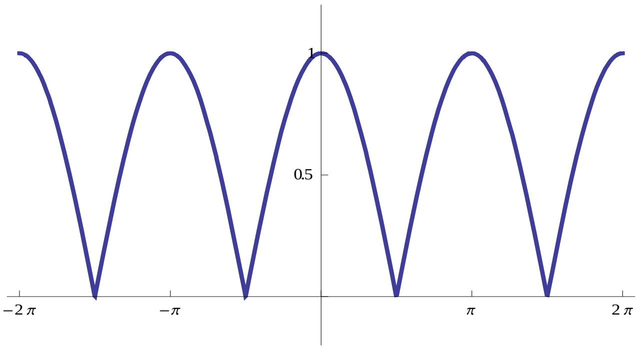
c) Kalkulatu seriearen lehenengo lau gaien batura partziala.

d) Irudikatu seriearen lehenengo bi gaiez osatuta dagoen batura partziala $[-\pi, \pi]$ tartean. Zein balio hartzen du serie horrek t=0 eta t=π/2 puntuetan?

e) Kalkulatu funtzioaren balioaren eta aurreko atalean lortutako batura partzialaren arteko kenketaren balio absolutua t = π puntuan.

SOLUZIOA

a)

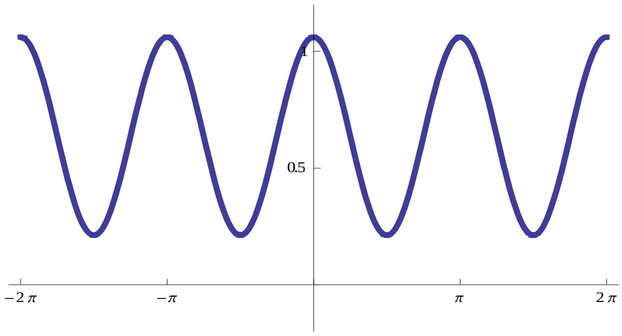


Funtsezko periodoa π da.

b) $S_F(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cdot \cos(2n \cdot t)$

c) $S_4(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(2t) - \frac{4}{15\pi} \cdot \cos(4t) + \frac{4}{35\pi} \cdot \cos(6t)$

d) $S_2(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(2t)$, $S_2(0) = \frac{10}{3\pi}$, $S_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3\pi}$



e)

$$\left| f(\pi) - S_2(\pi) \right| = \left| 1 - \frac{10}{3\pi} \right| = 0.061033$$

4. ARIKETA

Izan bedi $f(t) = [H(t) - H(t - 2\pi)] \cdot \cos(t/2)$, H(t) maila funtzioa izanik.

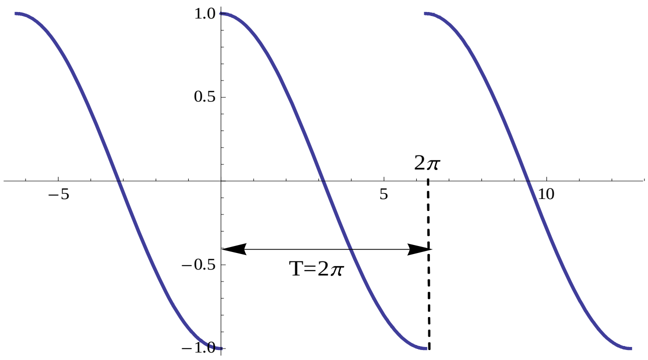
1) Adierazi grafikoki periodo minimoko luzapen periodiko bakoitia, f(t) funtzioarekin (0,2π) tartean bat datorrena.

2) Esan zein den funtsezko periodoa.

3) Planteatu Fourier serie garapena honen koefizientei dagozkien Eulerren integralak.

SOLUZIOA

1)



2) Funtsezko periodoa T = 2π da.

3) a_n koefizienteak nuluak dira funtzioa bikoitia izategatik.

$$b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(t/2\right)\cdot\sin\left(nt\right)dt$$

5. ARIKETA

Izan bedi [0, 1] tartean definitutako $y\left(x\right)=x+1$ funtzioa eta izan bedi $\varphi_1(x)$ funtzioa periodo minimoko funtzio periodikoa, y(x) funtzioarekin (0,1) tartean bat datorrena.

1) Beharrezkoa da Eulerren koefiziente guztiak kalkulatzea $\varphi_1(x)$ lortzeko? Beharrezkoa ez bada, beharrezkoak diren koefizienteak bakarrik kalkulatu, erantzuna arrazoituz.

2) Kalkulatu $\varphi_1(x)$ funtzioaren adierazpena.

Oharra:

$$\int t\cdot\cos\left(a\cdot t\right)dt = \frac{\cos\left(a\cdot t\right)}{a^2} + \frac{t\cdot\sin\left(a\cdot t\right)}{a}$$

$$\int t\cdot\sin\left(a\cdot t\right)dt = \frac{\sin\left(a\cdot t\right)}{a^2} - \frac{t\cdot\cos\left(a\cdot t\right)}{a}$$

3) Lortu garapen horren balioak ondoko x-ren balioetarako:

$$x=\frac{-125}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{125}{3}$$

4) Lortutako ematzetatik abiatuz, kalkulatu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$

5) Adierazi grafikoki $\varphi_1\left(x\right)$ garapena [-2,4] tartean, baita ondoko garapenak ere, kasu bakoitzean funtsezko periodoa identifikatuz:

(a) $\varphi_2\left(x\right)$ → y(x)-ri dagokion sinuen serie garapena

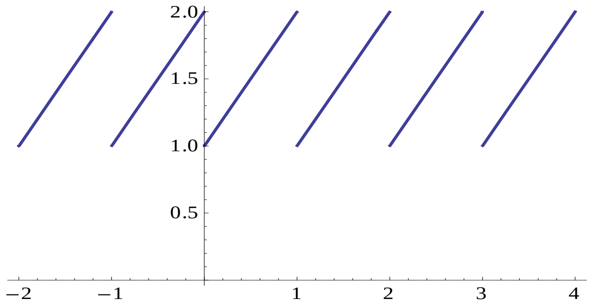
(b) $\varphi_3\left(x\right)$ → y(x)-ri dagokion kosinuen serie garapena

(c) $\varphi_4(x) \rightarrow g(x) = x - 2$ funtzioaren luzapen periodikoaren Fourier serie garapena (0, 1) tartean.

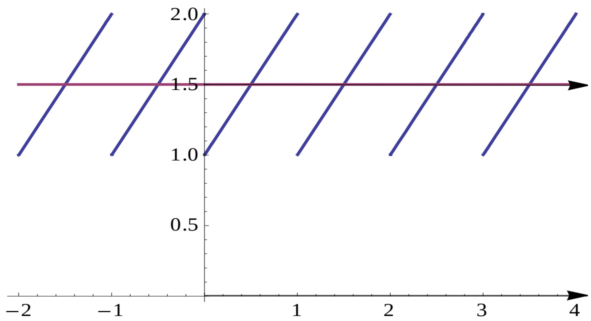
(d) Zein [-2, 2] tarteko puntutan $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ eta $\varphi_4(x)$ funtzioen garapenak $\varphi_1(x)$ funtzioarekin bat datoz?

SOLUZIOA

1)



Ardatz horizontala (0, 3/2) puntura desplazatuz, funtzioa bikoiti bat ardatz berriekiko lortzen da. Beraz, sinu gaien koefizienteak bakarrik kalkulatu behar dira → b_n.



$$\frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}, \quad b_n = \frac{4}{1}\int_0^{1/2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot \sin(2n\cdot\pi\cdot x)\,dx = \frac{-1}{n\cdot\pi}$$

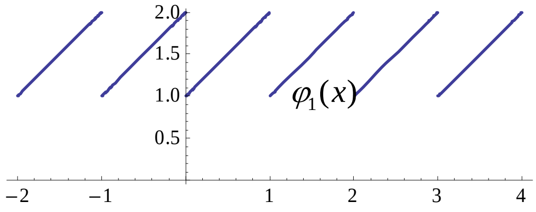
2) $$\varphi_1(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\cdot\pi\cdot x)}{n}$$

3) $$\varphi_1\left(\frac{-125}{3}\right) = \varphi_1\left(-42 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, \quad \varphi_1(0) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \quad \varphi_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4},$$

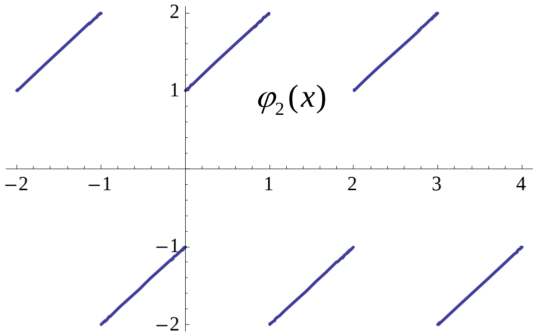
$$\varphi_1\left(\frac{125}{3}\right) = \varphi_1\left(41 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

4) $$S = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{3\pi - 8}{12}$$

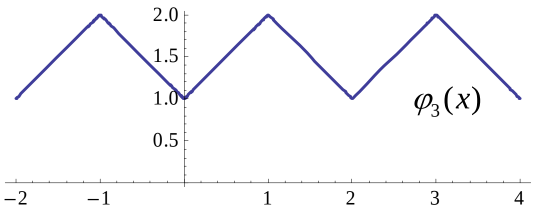
5) a)



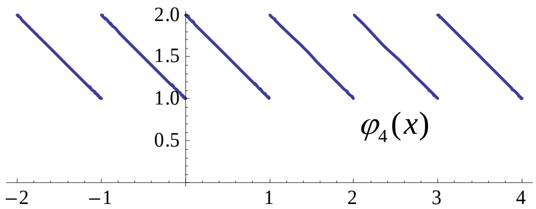
b)



c)



d)



$\varphi_2(x)$ funtzioa $\varphi_1(x)$ funtzioarekin $\forall x \in (-2,-1) \cup (0,1)$ bat dator.

$\varphi_3(x)$ funtzioa $\varphi_1(x)$ funtzioarekin $\forall x \in (-2,-1) \cup (0,1)$ bat dator.

$\varphi_4(x)$ funtzioa $\varphi_1(x)$ funtzioarekin $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ puntuetan bat dator.

6. ARIKETA

Izan bedi $f(x) = e^{-x}$ funtzioa.

1) Adieraz ezazu grafikoki [-8, 8] tartean periodo txikieneko sinu eta kosinuen $\varphi_1(x)$ garapena, f(x) funtzioarekin (0,2) tartean bat datorrena. Adierazi, kalkulurik egin gabe, garapenaren koefizienteak lortzeko beharrezkoak diren formula finalak.

2) Errepikatu a) atala $\varphi_2(x)$ sinuen serie garapenaren kasurako.

3) Idem $\varphi_3(x)$ kosinuen serie garapenerako.

4) Kalkulatu $\varphi_1(x)$.

5) Aurreko emaitzatik abiatuz, kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 \cdot \pi^2}$.

6) Bete ezazu honako taula hau:

	0	3	38
$\varphi_1(x)$			
$\varphi_2(x)$			
$\varphi_3(x)$			

Oharra:

$$\int e^{-x} \cdot \cos(a \cdot x) \cdot dx = \frac{e^{-x}}{1+a^2} \cdot \left(a \cdot \sin(a \cdot x) - \cos(a \cdot x)\right)$$

$$\int e^{-x} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot dx = -\frac{e^{-x}}{1+a^2} \cdot \left(a \cdot \cos(a \cdot x) + \sin(a \cdot x)\right)$$

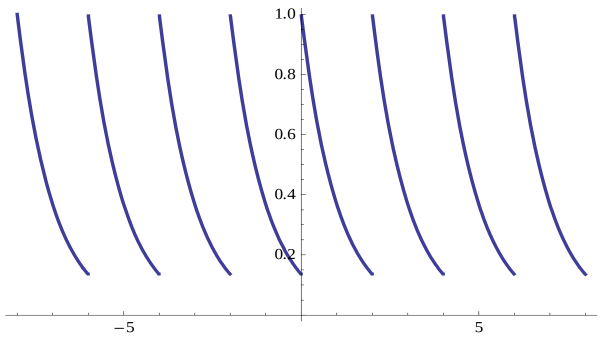
SOLUZIOA

1)

$\varphi_1(x)$:   T = 2

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 e^{-x} \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot x) \cdot dx \quad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 e^{-x} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot x) \cdot dx \quad n = 1,2\cdots$$

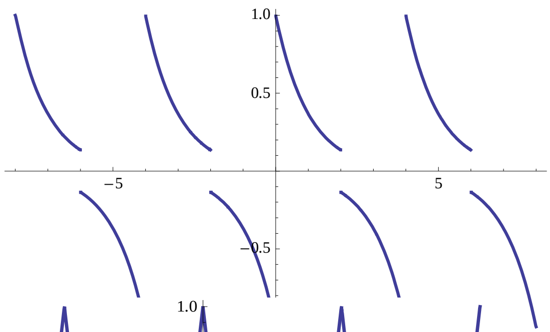


2)

$\varphi_2(x)$:   T = 4

$a_n = 0$, $n = 0,1,2\cdots$

$$b_n = \frac{4}{4}\int_0^2 e^{-x} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \quad n = 1,2\cdots$$

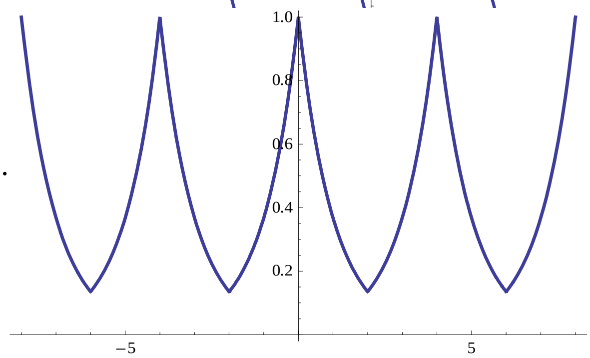


3)

$\varphi_3(x)$: T = 4

$$a_n = \frac{4}{4}\int_0^2 e^{-x} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{2}\right) dx, \ n = 0,1,2\cdots$$

$b_n = 0$, $n = 1,2\cdots$



4) $$\varphi_1(x) = (1-e^{-2})\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\cdot\pi\cdot x)}{1+n^2\cdot\pi^2}+\frac{n\cdot\pi\cdot\sin(n\cdot\pi\cdot x)}{1+n^2\cdot\pi^2}\right)$$

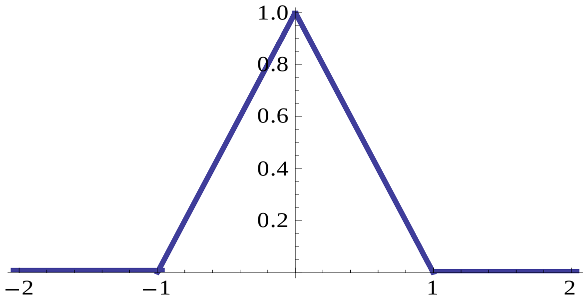
5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2\cdot\pi^2}=\frac{1}{e^2-1}$$

6)

	0	3	38
$\varphi_1(x)$	$\frac{1+e^{-2}}{2}$	e^{-1}	$\frac{1+e^{-2}}{2}$
$\varphi_2(x)$	0	$-e^{-1}$	0
$\varphi_3(x)$	1	e^{-1}	e^{-2}

7. ARIKETA

Bedi ondoko grafikoan adierazitako f(t) funtzioa:



1) Lortu f(t)-ren 4 periodoko luzapen periodikoaren Fourier serie garapena.
2) Zein balio eman behar diogu t parametroari lortutako seriean ondoko zenbakizko serie lortzeko?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2}$$ Kalkulatu serie horren balioa

SOLUZIOA

1)
$$\varphi(t)=\frac{1}{4}+\frac{2^2}{\pi^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\cos\left(\frac{(2n+1)\cdot\pi\cdot t}{2}\right)+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2}\cdot\cos\left(\frac{(4n+2)\cdot\pi\cdot t}{2}\right)\right]$$

2) $t=1$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2}=\frac{\pi^2}{2^5}$

8. ARIKETA

Izan bedi g(t) (0,2) tarteari dagokion f(t)=t funtzioaren luzapen periodikoa:
1) Lortu g(t)-ren Fourier serie garapena
2) Aurreko garapenetik abiatuz, lortu ondoko zenbakizko seriea:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$

3) Enuntziatu aurreko kalkulua justifikatzen duen teorema

Oharra: garapenaren kalkulua egitean, posibleak diren sinplifikazioen erabilera aintzat hartuko dira.

$$\int_a^b t\cdot\sin(\omega\cdot t)dt=\frac{a\cdot\omega\cdot\cos(a\cdot\omega)-b\cdot\omega\cdot\cos(b\cdot\omega)-\sin(a\cdot\omega)+\sin(b\cdot\omega)}{\omega^2}$$
$$\int_a^b t\cdot\cos(\omega\cdot t)dt=\frac{b\cdot\omega\cdot\sin(b\cdot\omega)-a\cdot\omega\cdot\sin(a\cdot\omega)-\cos(a\cdot\omega)+\cos(b\cdot\omega)}{\omega^2}$$

<u>*SOLUZIOA*</u>

1) $g(t)\sim 1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot\pi\cdot t)}{n}$

Izan bedi $\varphi(t)$ funtzioa $g(t)-1$ funtzioaren Fourier serie garapena,

$$b_n=\frac{4}{2}\int_0^1(t-1)\cdot\sin\left(\frac{2n\cdot\pi\cdot t}{2}\right)dt=\frac{-2}{n\cdot\pi}$$

$$\varphi(t)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot\pi\cdot t)}{n}\sim g(t)-1\Rightarrow g(t)\sim 1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot\pi\cdot t)}{n}$$

2) t=1/2 eginez,

$$\varphi(1/2)=\frac{1}{2}=1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi/2)}{1}+\frac{\sin(\pi)}{2}+\frac{\sin(3\pi/2)}{3}+\frac{\sin(2\pi)}{4}+\cdots\right)\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)\Rightarrow\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)=\frac{\pi}{4}$$

9. ARIKETA

Izan bitez $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$ *eta* $g(x)=\sin(x)\cdot f[\sin(x)]$.

1) Adierazi grafikoki $g(x)$ [-3π , 3π] tartean

2) Kalkulatu periodo txikieneko funtzio periodikoaren $\varphi_1(x)$ kosinuen serie garapena, g(x) funtzioarekin [0, π/2] tartean bat datorrena.

3) Kalkulatu periodo txikieneko funtzio periodikoaren $\varphi_2(x)$ sinuen serie garapena, g(x) funtzioarekin [0, π/2] tartean bat datorrena.

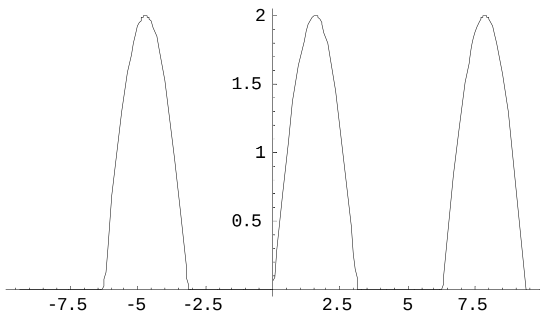
4) Bete ezazu honako taula hau:

x	0	π/2	725π/3	-1027π/4
$\varphi_1(x)$				
$\varphi_2(x)$				

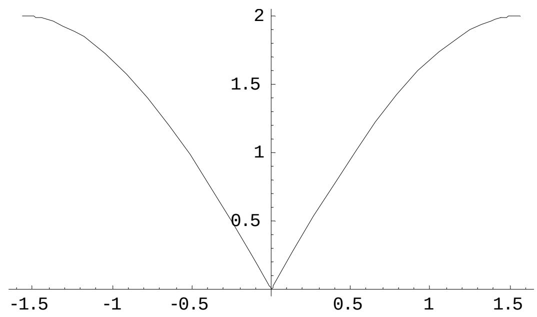
5) Kalkulatu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}$

SOLUZIOA

1) $g(x)=\sin(x)\cdot f\left[\sin(x)\right]$ funtzioaren adierazpen grafikoa horrela da:



2) g(x) funtzioarekin [0, π/2] tartean bat datorren periodo txikieneko funtzio periodikoaren uhin bat, zeinaren garapena kosinuen serie bat den, horrela da:



$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}2\sin(x)\cdot\cos(2n\cdot x)\,dx=\frac{8}{\pi\left(1-4n^2\right)}$$, eta $$\varphi_1(x)=\frac{4}{\pi}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\cdot x)}{1-4n^2}$$

3) g(x) funtzioarekin [0, π/2] tartean bat datorren periodo txikieneko sinuen serie garapenak $T=\pi$ periodoa du.

$$b_n=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}2\sin(x)\cdot\sin(2n\cdot x)\cdot dx=\frac{16n\cdot(-1)^n}{\pi\cdot(1-4n^2)}$$, eta

$$\varphi_2(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(2n\cdot x)}{1-4n^2}$$

4) Dirichleten Teorema eta $\varphi_1(x)$ eta $\varphi_2(x)$ funtzioek π periodoa dutela kontuan hartuz , taula ondoko eran betetzen da:

x	0	π/2	725π/3	-1027π/4
$\varphi_1(x)$	0	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
$\varphi_2(x)$	0	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$

5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}=-\frac{1}{2}$$

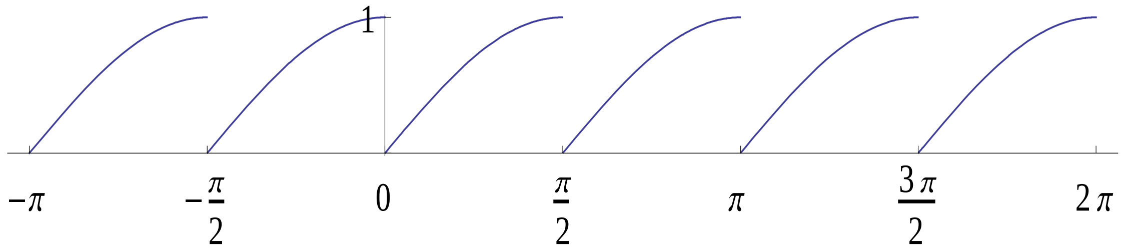
10. ARIKETA

1) Adierazi grafikoki $[-\pi, 2\pi]$ tartean $f(x) = \sin x$ funtzioarekin $(0, \pi/2)$ tartean bat datozen periodo txikieneko ondoko garapenak, kasu bakoitzean periodoa identifikatuz.
   a. $\varphi_1(x)$: sinuen eta kosinuen serie garapena
   b. $\varphi_2(x)$: kosinuen serie garapena
   c. $\varphi_3(x)$: sinuen serie garapena
2) Lortu $\varphi_3(x)$ funtzioari dagozkion Eulerren koefizienteak eta serie garapena.
3) Lortu $\varphi_2(x)$ funtzioari dagozkion Eulerren koefizienteak eta serie garapena.

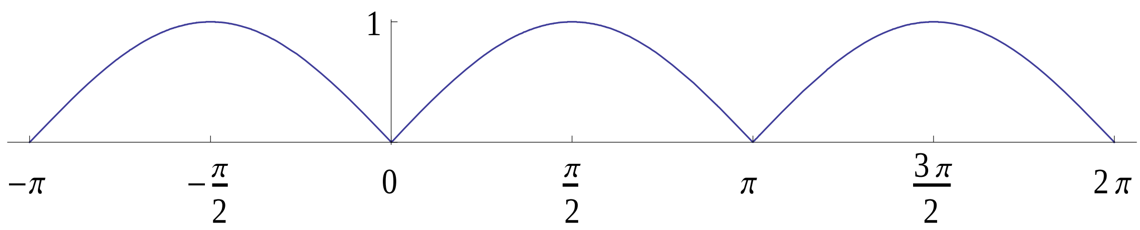
SOLUZIOA

1)

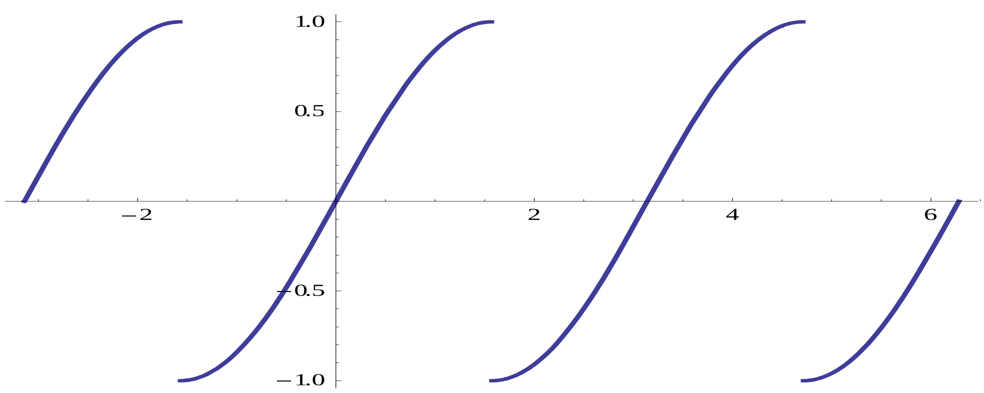
a. $\varphi_1(x)$: **sinuen eta kosinuen serie garapena**. $T = \pi/2$



b. $\varphi_2(x)$: **kosinuen serie garapena .** $T = \pi$



c. $\varphi_2(x)$: **sinuen serie garapena.** $T = \pi$



2)

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{2n \cdot \pi \cdot x}{T}\right) \cdot dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \sin(2n \cdot x) \cdot dx = \frac{8n \cdot (-1)^n}{\pi \cdot (1-4n^2)}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(1-4n^2)} \cdot \sin(2n \cdot x)$$

3)

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{2n \cdot \pi \cdot x}{T}\right) \cdot dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(2n \cdot x) \cdot dx = \frac{4}{\pi \cdot (1-4n^2)}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)} \cdot \cos(2n \cdot x)$$

11. ARIKETA

1) Adierazi grafikoki $[0, 2\pi]$ tartean $f(x) = \cos x$ funtzioarekin $(0, \pi/2)$ tartean bat datozen periodo txikieneko ondoko garapenak, kasu bakoitzean periodoa identifikatuz.
   i. $\varphi_1(x)$: sinuen eta kosinuen serie garapena
   ii. $\varphi_2(x)$: kosinuen serie garapena
   iii. $\varphi_3(x)$: sinuen serie garapena
2) Zein den f(x) funtzioarekin $[0, \pi/2]$ tartean bat datorren eta gai nulu gehiago duen Fourier serie garapena? Zein periodo baliozkoak dira garapen honetarako?

3) Kalkulatu $\varphi_2(x)$ funtzioari dagozkion Eulerren koefizienteak eta serie garapena

Oharra:

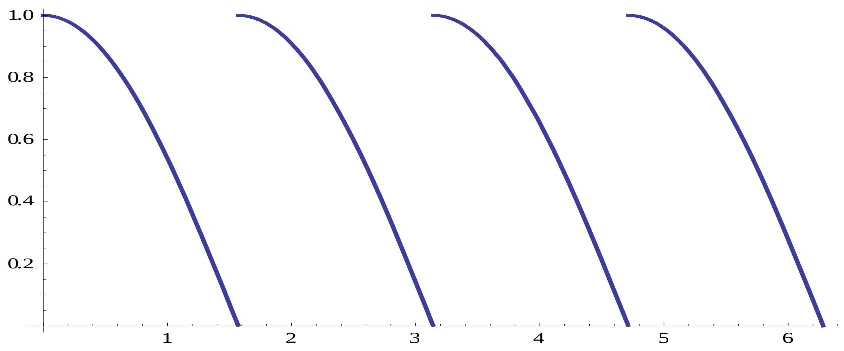
$$\int_0^a \cos x \cdot \cos(b \cdot x) dx = \frac{b \cdot \cos a \cdot \sin(b \cdot a) - \cos(b \cdot a) \cdot \sin a}{b^2 - 1}$$

$$\int_0^a \cos x \cdot \sin(b \cdot x) dx = \frac{b - b \cdot \cos a \cdot \cos(b \cdot a) - \sin(b \cdot a) \cdot \sin a}{b^2 - 1}$$

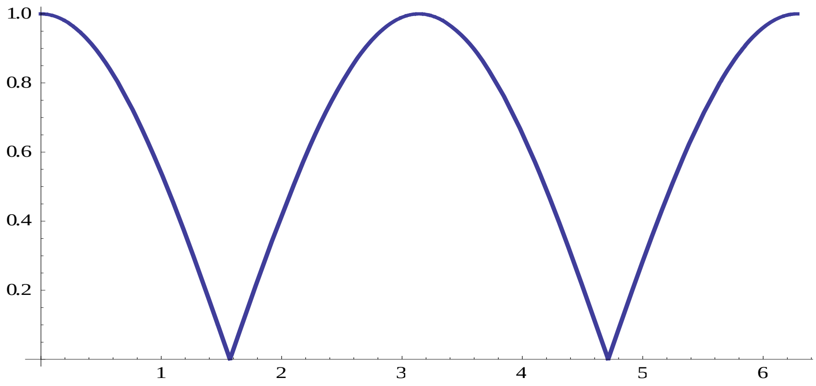
<u>SOLUZIOA</u>

1)

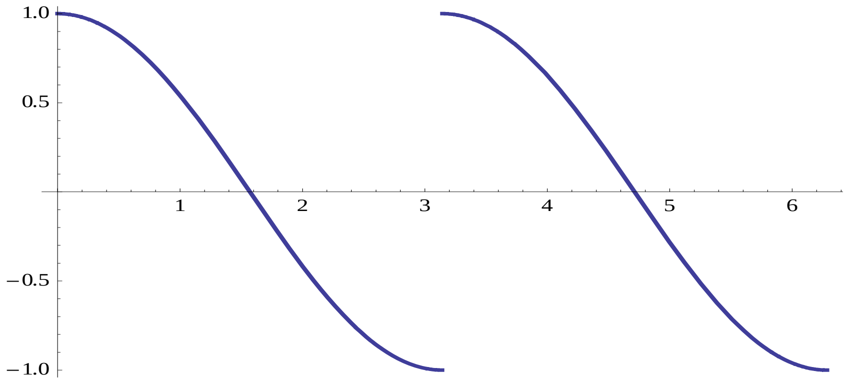
i.



ii.



iii.



2) f(x) funtzioarekin $\left[0,\pi/2\right]$ tartean bat datorren eta gai nulu gehiago duen Fourier serie garapena $\cos\left(x\right)$ da, non bere periodoa 2π den.

3) $$a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\left(x\right)\cdot\cos\left(\frac{2n\cdot\pi\cdot x}{T}\right)\cdot dx = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\left(x\right)\cdot\cos\left(2n\cdot x\right)\cdot dx = \frac{4(-1)^n}{\pi\cdot(1-4n^2)}$$

$$\varphi_2\left(x\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-4n^2)}\cdot\cos\left(2n\cdot x\right)$$

12. ARIKETA

Izan bedi $f\left(x\right)=x^2$ funtzioa.

A) Adierazi grafikoki $f(x)$ funtzioarekin $(0,\pi)$ tartean bat datozen periodo txikieneko ondoko garapenak.

i. $\varphi_1(x)$: sinuen eta kosinuen serie garapena

ii. $\varphi_2(x)$: sinuen serie garapena

iii. $\varphi_3(x)$: kosinuen serie garapena

Arroitu zein $\left[-\pi,5\pi\right]$ tarteko puntutan ondoko garapenek balio bera duten:

a) $\varphi_1(x)$ eta $\varphi_5(x)$. b) $\varphi_1(x)$ eta $\varphi_3(x)$. c) $\varphi_2(x)$ eta $\varphi_3(x)$.

B) Planteatu Eulerren formulak $\varphi_3(x)$ funtzioaren koefizienteak kalkulatzeko, inolako integralik ebatzi gabe.

C) Kalkulatu $\varphi_2(x)$.

D) Aurreko ematzetik abiatuz, eta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$ dela jakinda, kalkulatu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} .$$

Oharra:

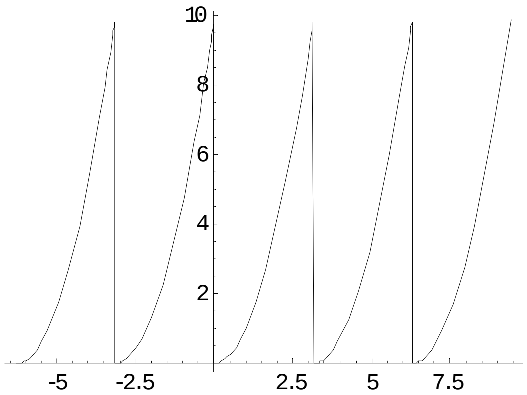
$$\int x^2 \cdot \cos(nx)dx = \frac{2x \cdot \cos(nx)}{n^2} + C$$

$$\int x^2 \cdot sen(nx)dx = \frac{(2-n^2x^2)\cdot \cos(nx)}{n^3} + C$$

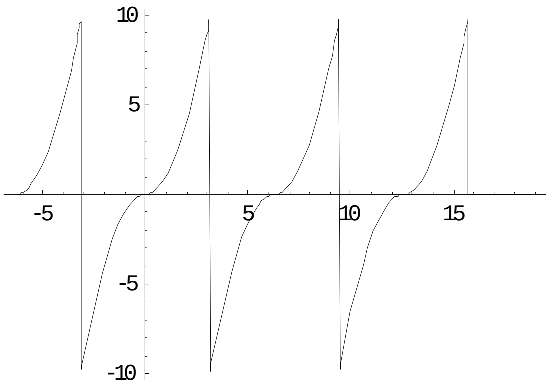
<u>*SOLUZIOA*</u>

A)

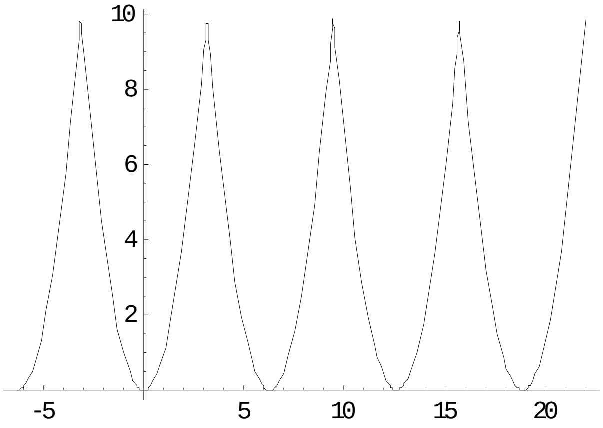
$\varphi_1(x)$



$\varphi_2(x)$



$\varphi_3(x)$



Grafikoen arabera eta Dirichleten teorema kontuan hartuz:

- $\varphi_1(x)$ eta $\varphi_2(x)$ garapenek balio bera dute ondoko eskualdeko puntuetan:

$$(0,\pi)\cup(2\pi,3\pi)\cup(4\pi,5\pi)$$

- $\varphi_1(x)$ eta $\varphi_3(x)$ garapenek balio bera dute ondoko eskualdeko puntuetan:

$$(0,\pi)\cup\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}\cup(2\pi,3\pi)\cup\left\{\frac{7\pi}{2}\right\}\cup(4\pi,5\pi)$$

- $\varphi_2(x)$ eta $\varphi_3(x)$ garapenek balio bera dute ondoko eskualdeko puntuetan:

$$[0,\pi)\cup[2\pi,3\pi)\cup[4\pi,5\pi)$$

B) $T=2\pi$, $b_n=0$, $a_n=\dfrac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(n\cdot x)\cdot dx$, $\varphi_3(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos(n\cdot x)$

C) $b_{2n}=-\dfrac{\pi}{n}$, $b_{2n+1}=\dfrac{2}{\pi}\cdot\left[\dfrac{-4}{(2n+1)^3}+\dfrac{\pi^2}{(2n+1)}\right]$

$$\varphi_2(x)=-\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\cdot x)}{n}+\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{(2n+1)^3}+\frac{\pi^2}{(2n+1)}\right)\cdot\sin((2n+1)\cdot x)$$

D) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$

13. ARIKETA

Bedi $f(x)=\begin{cases} sin(x) & 0<x\le\pi \\ 1 & \pi<x\le 2\pi\end{cases}$, eta bedi *g(x)* funtzioa bere luzapen periodikoa, 2π periodokoa. φ(x) funtzioa g(x)-ren Fourier serie garapena izanik:

1) Plantea itzazu φ(x) garapenaren a_n eta b_n koefizienteen kalkuluari dagozkion integralak, integrakizunen adierazpen analitikoa esplizituki adieraziz.

2) Lehen ataleko integralak kalkulatzeko *Mathematica* erabili da, ondorengo emaitzak lortuz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}+\frac{sin(2n\pi)-sin(n\pi)}{n}\right]\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(n\pi)}{1-n^2}+\frac{\cos(n\pi)-\cos(2n\pi)}{n}\right].$$

Lor ezazu φ(x) garapenaren adierazpenik sinpleena.

<u>*SOLUZIOA*</u>

1)
$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos(n\cdot x)\cdot dx\right)$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx+\int_{\pi}^{2\pi}\sin(n\cdot x)\cdot dx\right)$$

2) Emandako adierazpena sinplifikatuz, ondokoa lortzen da:

$$a_{2n+1}=0\,,n=1,2\cdots y\ a_{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4n^2}\,,n=1,2\cdots$$

$$b_{2n+1}=\frac{-2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1}\ ,\ n=1,2\cdots\ y\quad b_{2n}=0\ ,\ n=1,2\cdots$$

$$\frac{a_o}{2}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\ ,\ a_1=0\ ,\ b_1=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos(2n\cdot x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\right)\sin(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)\cdot x)$$

14. ARIKETA

A) Inolako integralik egin gabe, ondoko funtzioaren Fourier serie garapena lor ezazu:

$$f(x)=\sin^4(x)+\cos^2(x)$$

Zein da bere periodoa?

B) Bedi $f_T(x)$ ondoko funtzioaren T=4 periodoko luzapen periodikoa:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{2+x} & -2\le x\le -1\\ -e^{-x} & -1<x<0\\ e^{x} & 0\le x\le 1\\ e^{2-x} & 1<x<2\end{cases}$$

1) Adierazi grafikoki $f_T(x)$ [-4,4] tartean.

2) Berma al dezakegu, inolako kalkulurik egin gabe, Fourier serie garapenaren koefiziente batzuk nuluak direla? Zeintzuk? Arrazoitu erantzuna.

3) Bete ezazu ondoko taula, $\varphi_T(x)$ lortutako Fourier serie garapena izanik.

x	0	1	2	27	30	2006
$f_T(x)$						
$\varphi_T(x)$						

<u>*SOLUZIOA*</u>

A) $$f(x)=\sin^4(x)+\cos^2(x)=\left(\sin^2(x)\right)^2+\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)=\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)=$$

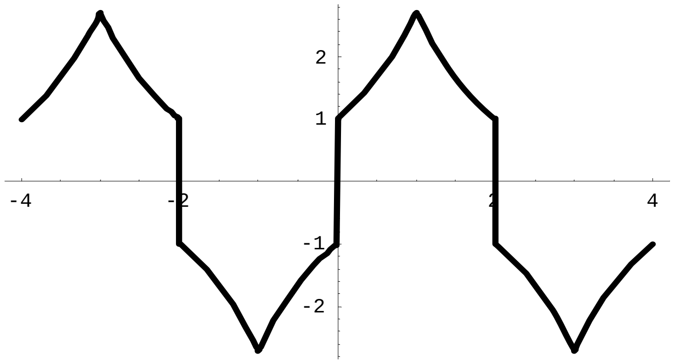
$$=\frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}+\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)=\frac{7}{8}+\frac{\cos(4x)}{8}$$

$$f(x)=\frac{7}{8}+\frac{\cos(4x)}{8}\begin{cases}a_0=7/8\\ a_1=1/8\end{cases}$$

$f(x)$ funtzioaren periodoa eta $\cos(4x)$ funtzioaren periodoa berdinak dira $\rightarrow T=\frac{\pi}{2}$.

B)

1)



2) Bai, funtzio bakoiti bat delako → Beraz, $a_n = 0$.

3) $f_T(x)$ funtzioaren balioetarako funtzioaren definizioa eta bere periodikotasuna kontuan hartzen da. $\varphi_T(x)$ funtziorako, Dirichleten teorema erabiltzen da:

x	0	1	2	27	2006
$f_T(x)$	1	e	-1	-e	-1
$\varphi_T(x)$	0	e	0	-e	0

15. ARIKETA

Adierazi grafikoki [-2π, 2π] tartean *f(x)*-ren 2π periodoko $f_T(x)$ luzapen periodikoa, non:

$$f(x) = \begin{cases} \pi \cdot x - x^2, & x \in [0, \pi) \\ x^2 - \pi \cdot x, & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Bedi $\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(nx)$ $f_T(x)$-ren Fourier serie garapena.

Kalkula ezazu φ(x)-ren kosinuen zatia eta lortutako ematzetik abiatuz, kalkula ezazu ondoko seriearen batura:

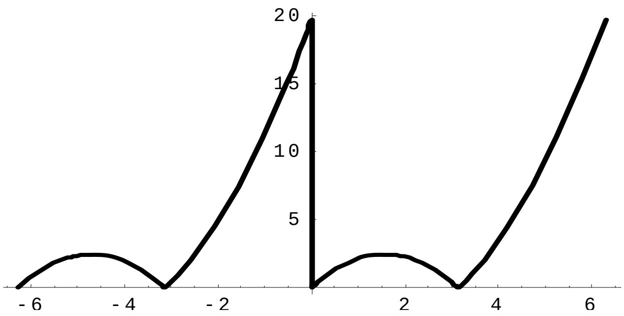
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Oharra:

$$\int x \cdot \cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot sin(ax)}{a} \quad ; \quad \int x^2 \cdot \cos(ax)dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \frac{(a^2 \cdot x^2 - 2) \cdot sin(ax)}{a^3}$$

$$\int x \cdot sin(ax)dx = \frac{sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a} \quad ; \quad \int x^2 \cdot sin(ax)dx = \frac{2x \cdot sin(ax)}{a^2} - \frac{(a^2 \cdot x^2 - 2) \cdot \cos(ax)}{a^3}$$

SOLUZIOA



$$a_n = \frac{2}{n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} n \ \ bikoitia \ bada \ \ a_{2n} = 0 \quad \forall n \neq 0 \\ n \ \ bakoitia \ bada \ \ a_{2n+1} = \dfrac{4}{(2n+1)^2} \quad , \ n = 0,1,2\cdots \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\cdot dx = \pi^2$$

$$\frac{\pi^2}{2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\left(2n+1\right)\cdot x\right)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{2} + 4\left(\cos\left(x\right) + \frac{\cos\left(3x\right)}{3^2} + \frac{\cos\left(5x\right)}{5^2} + \cdots\right)$$

f(x)-ren Fourier serie garapena ondokoa da:

$$\varphi(x) = \frac{\pi^2}{2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\left(2n+1\right)\cdot x\right)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(n\cdot x\right)$$

x=0 eginez eta Dirichleten teorema aplikatuz:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}\cdot\left(0 + 2\pi^2\right) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{2} + 4\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \Rightarrow$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{8}$$