Denbora: ordu 1 eta 45’
Arrazoitu erantzun guztiak

1.

a) Normaren definizioa.

b) Aztertu hurrengo aplikazioa R^3-an norma den:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to & \|x\| = \sum x_i \quad \forall i = 1,2,3 \end{array}$$

c) Idatzi R^3-an bektoreak neurtzeko erabiliko zenukeen norma bat.

puntu 1

2. Izan bedi $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektorialeko hurrengo aplikazioa. Aztertu biderkadura eskalarduna den:

$$\begin{array}{ccl} \langle\ ,\ \rangle : \mathbb{P}_2 \text{ x } \mathbb{P}_2 & \to & \mathbb{R} \\ (\text{p},\text{q}) & \to & \langle \text{p},\text{q} \rangle = \int_{-1}^{1} \text{p}(x)\text{q}(x)\text{d}x \end{array}$$

0.5 puntu

3. Izan bedi hurrengo aplikazioa:

$$\begin{array}{ccl} \langle , \rangle : \ \mathbb{R}^4 \text{x}\, \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \to & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \end{array}$$

non $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ eta $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

a) Kalkulatu $Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$-rekiko bektore ortogonal bat.

b) Gram-Schmidt metodoa erabiliz, kalkulatu oinarri ortonormatu bat, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$ oinarriarekin hasiz.

3 puntu

4.

a) Frogatu hurrengo baieztapenak egiazkoak ala gezurrezkoak diren:

- *i)* Baldin **u** eta **v** bektore birekiko **y** ortogonala bada, orduan **y** **u**+**v**-arekiko ortogonala da.
- *ii)* Baldin **u** eta **v** bektore birekiko **y** ortogonala bada, orduan **y** *Span*{**u**,**v**}-arekiko ortogonala da.

b) Arrazoitu hurrengo baieztapenak egiazkoak ala gezurrezkoak diren.

- *i)* Bektore linealki independentetako edozein multzo ortogonala da.
- *ii)* Bektore ortogonaletako edozein multzo linealki independentea da.
- *iii)* Baldin bektore ortogonaletako multzo bat normatzen bada, orduan ortogonalak izateari utzi ahal dira.
- *iv)* Zutabe ortonormatuak dauzkan matrizea ortogonala da.

1.5 puntu

5. Izan bedi hurrengo aplikazioa:

$$\begin{array}{llcl} f: & R^3 & \rightarrow & R^2 \\ & x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \rightarrow & f(x)=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Aztertu f lineala denentz.

Baldin bada:

b) Kalkulatu transformazioaren matrizea R^3 eta R^2-ko ohiko oinarriekikoa.

c) Kalkulatu aplikazioaren Huna eta Irudia azpiespazioen dimentsioa eta oinarri bat. Sailkatu aplikazioa.

d) Kalkulatu *f*(S)-ren oinarri bat, non S R^3-ko hurrengo azpiespazioa den:

$$S=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \,/\, \{x+y+z=0\}\right\}$$

e) Kalkulatu aplikazioaren adierazpen matriziala R^3 eta R^2-ko hurrengo oinarriekin: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ eta $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

2.5 puntu

6.

a) Aztertu ze *a*-ren baliotarako A matrizea diagonalgarria izango den.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

b) $a=0$ kasuan, kalkulatu D matrize diagonala, eta dagokion P matrizea. Idatzi D eta A-ren arteko antzekotasun erlazioa.

2.5 puntu

① a) Norma: TEORIA $\begin{cases} 1)\ i)\ \|\vec{x}\| \geq 0 \\ \quad ii)\ \|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \\ \quad iii)\ \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{x}\| = 0 \end{cases}$ 2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$

3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

b) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^{3} x_i$

1) i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ → beti ez da betetzen.

Aurkadibidea: $\vec{x} = (-1, 0, 0)$

↓

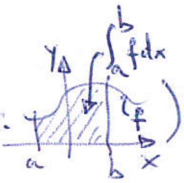
$\|\vec{x}\| = -1 < 0$

Beraz, $\boxed{\text{ez da norma}}$.

c) Adibidez, norma euklidearra: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$

② $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p \cdot q \cdot dx$

1) i) $\langle p, p \rangle \geq 0$; → beti ≥ 0 $\int_{-1}^{1} p^2 dx \geq 0$ ✓ (gogoratu: 

)

ii) $\langle p, p \rangle = 0 \Rightarrow p = 0 + 0x + 0x^2$; $\int_{-1}^{1} p^2 dx = 0 \Rightarrow p = 0$ ✓

iii) $p = 0 \Rightarrow \langle p, p \rangle = 0$; $\int_{-1}^{1} 0 dx = 0$ ✓

2) $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$; $\int_{-1}^{1} p \cdot q\, dx = \int_{-1}^{1} q \cdot p\, dx$ ✓

3) $\langle p, (\alpha q + \beta r) \rangle = \alpha \langle p, q \rangle + \beta \langle p, r \rangle$;

$\int_{-1}^{1} p(\alpha q + \beta r) dx = \int_{-1}^{1} \alpha p q\, dx + \int_{-1}^{1} \beta p r\, dx = \alpha \int_{-1}^{1} p q\, dx + \beta \int_{-1}^{1} p r\, dx$ ✓

Beraz, $\boxed{\text{biderkadura eskalarra da}}$.

③ $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

a) $\text{Span}\{\underbrace{(1,-1,0,0)}_{\vec{b}_1}, \underset{\vec{b}_2}{(0,1,-1,0)}, \underset{\vec{b}_3}{(0,0,1,-1)}\}$

$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle = 0 \ ; \quad x_1 - x_2 = 0 \\ \langle \vec{b}_2, \vec{v} \rangle = 0 \ ; \quad x_2 - x_3 = 0 \\ \langle \vec{b}_3, \vec{v} \rangle = 0 \ ; \quad x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \rightarrow \boxed{\vec{v} = (1,1,1,1)}$$

b) $B = \{\underset{\vec{e}_1}{(1,0,0,0)}, \underset{\vec{e}_2}{(1,1,0,0)}, \underset{\vec{e}_3}{(1,1,1,0)}, \underset{\vec{e}_4}{(0,0,0,1)}\}$

G-S: $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 = (1,0,0,0) \longrightarrow \|\vec{e}_1{}'\| = \sqrt{1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_2{}' = \vec{e}_2 + \alpha \vec{e}_1{}' = (1+\alpha, 1, 0, 0) \\ \quad \langle \vec{e}_2{}', \vec{e}_1{}' \rangle = 0 ; \ 1+\alpha = 0 \ ; \ \alpha = -1 \end{array}\right\} \vec{e}_2{}' = (0,1,0,0) \rightarrow \|\vec{e}_2{}'\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_3{}' = \vec{e}_3 + \beta \vec{e}_1{}' + \gamma \vec{e}_2{}' = (1+\beta, 1+\gamma, 1, 0) \\ \quad \langle \vec{e}_3{}', \vec{e}_1{}' \rangle = 0 ; \ 1+\beta = 0 \ ; \ \beta = -1 \\ \quad \langle \vec{e}_3{}', \vec{e}_2{}' \rangle = 0 ; \ 1+\gamma = 0 \ ; \ \gamma = -1 \end{array}\right\} \vec{e}_3{}' = (0,0,1,0) \longrightarrow \|\vec{e}_3{}'\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_4{}' = \vec{e}_4 + \delta \vec{e}_1{}' + \nu \vec{e}_2{}' + \mu \vec{e}_3{}' = (\delta, \nu, \mu, 1) \\ \quad \langle \vec{e}_4{}', \vec{e}_1{}' \rangle = 0 ; \ \delta = 0 \\ \quad \langle \vec{e}_4{}', \vec{e}_2{}' \rangle = 0 ; \ \nu = 0 \\ \quad \langle \vec{e}_4{}', \vec{e}_3{}' \rangle = 0 ; \ \mu = 0 \end{array}\right\} \vec{e}_4{}' = (0,0,0,1) \rightarrow \|\vec{e}_4{}'\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\boxed{B_{\text{ortonor}} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}}$$

④ a) i)

$$\left.\begin{array}{l}\langle\vec{u},\vec{y}\rangle=0\\ \langle\vec{v},\vec{y}\rangle=0\end{array}\right\}\rightarrow \underset{0}{\underset{\|}{\langle\vec{u},\vec{y}\rangle}}+\underset{0}{\underset{\|}{\langle\vec{v},\vec{y}\rangle}}\overset{\text{Bilinealtasuna}}{\overset{\downarrow}{=}}\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{y}\rangle=0$$ ✓

ii)

$$\left.\begin{array}{l}\langle\vec{u},\vec{y}\rangle=0\\ \langle\vec{v},\vec{y}\rangle=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Bilinealtasuna}}\langle\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{y}\rangle=0$$ ✓

$$\uparrow$$

$$\operatorname{Span}\{\vec{u},\vec{v}\}\xrightarrow{\text{adibidez}}\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

b) i) ✗ Aurkadibidea: $\left.\begin{array}{l}\vec{x}=(1,0)\\ \vec{y}=(1,1)\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{Bid. esk.}]{\text{ohiko}}\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=1\neq0$

ii) ✓ TEORIA

iii) ✗ Norma zenbakia da, beraz: $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$

$$\langle\alpha\vec{u},\beta\vec{v}\rangle=0$$

$$\alpha=\frac{1}{\|\vec{u}\|},\ \beta=\frac{1}{\|\vec{v}\|}$$

iv) ✓ Matrize ortogonala: $A\cdot A^t=I$

↑ diagonal nagusian → 1, beste osagaiak = 0

↑ Bere zutabeak: $z_1, z_2, \ldots$

$$z_i\cdot z_j=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{baldin } i=j\\ 0 & \text{〃}\quad i\neq j\end{array}\right\}\Leftrightarrow \text{zutabeak ortonormalak dira}$$

⑤ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3) \to f(x)=(x_1+x_2\,,\,x_1)$

a) i) $\left.\begin{array}{l}\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\\ \vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\end{array}\right\}\ f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})\,?$

$(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1\,,\,x_2+y_2\,,\,x_3+y_3) \to f(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1+x_2+y_2\,,\,x_1+y_1)=$

$=(x_1+x_2\,,\,x_1)+(y_1+y_2\,,\,y_1)=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ ✓

ii) $\alpha\in\mathbb{K}$

$f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})\,?$ $\quad(\alpha\vec{x})=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3) \to f(\alpha\vec{x})=(\alpha x_1+\alpha x_2\,,\,\alpha x_1)=$

$=(\alpha(x_1+x_2)\,,\,\alpha x_1)=\alpha(x_1+x_2\,,\,x_1)=\alpha f(\vec{x})$ ✓

$\boxed{f\ \text{A.L. da}}$

b) $B_{\mathbb{R}^3}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$f=(1,1) \quad f=(1,0) \quad f=(0,0) \quad \to \boxed{A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}}$

c) $h(A)=\boxed{2=\dim \mathrm{Im} f} \to \boxed{B_{\mathrm{Im}f}=\{(1,0),(1,1)\}}$

$\underset{3}{\underset{\parallel}{\dim}}\,\underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\parallel}{E}}=\dim \mathrm{Ker} f+\underset{2}{\underset{\parallel}{\dim \mathrm{Im} f}}\ ;\ \boxed{\dim \mathrm{Ker} f=1}$

$\hookrightarrow A\cdot\vec{x}_{\mathrm{Ker}f}=\vec{0}$

$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\ ;\ \left\{\begin{array}{l}x_2=0\\x_1=0\end{array}\right.\ \boxed{B_{\mathrm{Ker}f}=\{(0,0,1)\}}$

$\mathrm{Ker} f\neq\{\vec{0}\}$ $\boxed{\text{ez da injektiboa}} \to \boxed{\text{ez da bijektiboa}}$

$\dim \mathrm{Im} f=\dim \underset{F}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}^2}}$ $\boxed{\text{suprajektiboa da}}$

d) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=0\} \to B_S=\{\underset{\vec{s}_1}{\underset{\parallel}{(1,0,-1)}},\underset{\vec{s}_2}{\underset{\parallel}{(0,1,-1)}}\}$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{s}_1) &= (1,1) \\ f(\vec{s}_2) &= (1,0) \end{aligned}\right\} \boxed{B_{f(S)} = \{(1,0),(1,1)\}}$$

e) $B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\} \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B'_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1),(2,1)\} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2-E_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-E_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1-2E_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \underbrace{1 \quad -1}_{R^{-1}} \end{array}\right]$$

$$A_2 = R^{-1} \cdot A_1 \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Beste modu batean:

$$\begin{tikzcd} B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0), \arrow[d] & (1,1,0), \arrow[d] & (1,1,1)\} \arrow[d] \\ f=(1,1) \arrow[d, dash] & f=(2,1) \arrow[dl, dash] & f=(2,1) \arrow[dll, dash] \\ B'_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1), & (2,1)\} & \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow \boxed{A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$

⑥

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&-1&0\\0&1&-1&-a\end{bmatrix}$$

a) $$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&0\\0&1-\lambda&0&0\\0&2&-1-\lambda&0\\0&1&-1&-a-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&-1-\lambda&0\\1&-1&-a-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}-1-\lambda&0\\-1&-a-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)^2(-1-\lambda)\cdot(-a-\lambda)=0\quad\begin{cases}\lambda_1=-1 & m_1=1\\ \lambda_2=1 & m_2=2\\ \lambda_3=-a & m_3=1\end{cases}$$

Baldin $\underline{\underline{a=1}}$: $\begin{cases}\lambda_1=-1 & m_1=2\\ \lambda_2=1 & m_2=2\end{cases}$

$$(A-\lambda_1 I)=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&2&0&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}$$

$h=3 \rightarrow \dim V_{\lambda_1}=n-h=4-3=1=\underline{\mu_1<m_1} \rightarrow$ $\boxed{\text{ez da diagonalgarria } a=1}$

Baldin $\underline{\underline{a=-1}}$: $\begin{cases}\lambda_1=-1 & m_1=1\\ \lambda_2=1 & m_2=3\end{cases}$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&-2&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}$$

$h=1 \rightarrow \dim V_{\lambda_2}=4-1=3=\mu_2=m_2 \rightarrow$ $\boxed{\text{A diagonalgarria } a=-1}$

Baldin $\underline{\underline{a\neq 1 \wedge a\neq -1}}$: $\begin{cases}\lambda_1=-1 & m_1=1\\ \lambda_2=1 & m_2=2\\ \lambda_3=-a & m_3=1\end{cases}$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&-2&0\\0&1&-1&\underset{\neq 0}{-a-1}\end{bmatrix}$$

$h=2 \rightarrow \dim V_{\lambda_2}=4-2=2=\mu_2=m_2 \rightarrow$ $\boxed{\text{A diagonalgarria } a\neq 1 \wedge a\neq -1}$

Beraz, A diagonalgarria da $a\neq 1$ denean.

b) $\boxed{a=0}$

$$\hookrightarrow A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&-1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix} \qquad \left\{\begin{array}{ll}\lambda_1=-1 & m_1=1\\ \lambda_2=1 & m_2=2\\ \lambda_3=0 & m_3=1\end{array}\right.$$

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&2&0&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=0\\x_4=x_3\end{array}\right. \longrightarrow B_{V_{\lambda_1}}=\{(0,0,1,1)\}$$

$h=3 \longrightarrow 3$ baldintza

$$(A-\lambda_2 I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&-2&0\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l}x_3=x_2\\x_4=0\end{array}\right. \longrightarrow B_{V_{\lambda_2}}=\{(1,0,0,0),(0,1,1,0)\}$$

$h=2$

$$(A-\lambda_3 I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&-1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{array}\right. \longrightarrow B_{V_{\lambda_3}}=\{(0,0,0,1)\}$$

$h=3$

$$\boxed{D=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{D=P^{-1}\cdot A\cdot P}$$