INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

MAIATZEKO DEIALDIA (2018)

Ohar orokorrak:

Ariketaren iraupena: *3 ordu eta 30 minutu.*
EMAITZEN ARGITALPEN-DATA: 2018ko maiatzaren 28an (17:00etan, G.A.U.R. aplikazioan)
AZTERKETAREN BERRIKUSKETA-DATA: 2018ko maiatzaren 31an (11:00etan, 7I1, 7. solairuan Matematika Aplikatua Saileko Laborategian)

1. ARIKETA

Taldeka jokatzen den joko batean, begiak estalita dituen jokalari batek zazpi aukeratik (aukera hauetatik hiru adituak eta lau ez-adituak izanik) hiru lagun aukeratu behar ditu berarekin jokatzeko. Ondorengo gertaeren probabilitateak kalkulatu:

Esperimentua zazpi pertsonatatik hiru lagun aukeratzean datza, hiru adituak eta lau ez-adituak izanik. Izan bedi X "zazpi lagunetatik aukeratutako jokalari (aditu/ez-aditu, atalaren arabera)" zorizko aldagaia.

Hautaketa itzulerarik gabe egiten denez, X zorizko aldagaiak banaketa hipergeometrikoa $X \sim \mathrm{H}\left(N,n,p\right)$ jarraitzen du eta aldagai diskretua da. Ondoren agertzen diren atalak bi era desberdinetara ebatzi dira, zorizko aldagaiaren kontzeptua eta probabilitatea erabiliz. Bestalde atal bakoitzean kasu bakoitzari dagozkion parametroak zehazten dira.

(1) Soilik bi jokalari adituak izatea (2⁵ puntu);

$$X \sim \mathrm{H}\left(N=3+4=7, \mathrm{n}=3, \mathrm{p}=\frac{3}{7}=0.4286\right)$$

$$\mathrm{P}\left(X=2\right)=\frac{\binom{pN}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{3}{2}\binom{7-3}{3-2}}{\binom{7}{3}}=\frac{3\times 4}{35}=0.3429$$

$$\mathrm{P}\left(X=2\right)=\binom{3}{2}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5}=0.3429$$

(2) Gutxienez jokalari bat aditua izatea (2⁵ puntu);

$$X \sim \mathrm{H}\left(N=3+4=7, \mathrm{n}=3, \mathrm{p}=\frac{3}{7}=0.4286\right)$$

$$\mathrm{P}\left(X\geq 1\right)=\sum_{k=1}^{3}\mathrm{P}\left(X=k\right)=1-\mathrm{P}\left(X=0\right)=1-\frac{\binom{3}{0}\binom{7-3}{3-0}}{\binom{7}{3}}=1-\frac{\binom{3}{0}\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=1-\frac{1\times 4}{35}=0.8857$$

$$\mathrm{P}\left(X\geq 1\right)=1-\mathrm{P}\left(X=0\right)=1-\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}=0.8857$$

(3) Askoz jota jokalari bat ez-aditua izatea (2⁵ puntu);

$$X \sim \mathrm{H}\left(N=3+4=7, \mathrm{n}=3, \mathrm{p}=\frac{4}{7}=0.5714\right)$$

$$\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=\sum_{k=0}^{1}\frac{\binom{4}{k}\binom{7-4}{3-k}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{\binom{7}{3}}\sum_{k=0}^{1}\binom{4}{k}\binom{3}{3-k}=$$

$$\frac{1}{\binom{7}{3}}\sum_{k=0}^{1}\binom{4}{k}\binom{3}{3-k}=\frac{1}{\binom{7}{3}}\left[\binom{4}{0}\binom{3}{3}+\binom{4}{1}\binom{3}{2}\right]=\frac{1+4\times 3}{35}=\frac{13}{35}=0.371429$$

$$\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}+\binom{3}{2}\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}=0.371429$$

(4) Kalkulatu itxaropena eta desbiderazio tipikoa jokalari ez-adituen kasurako. (2^{5} puntu).

Balio hauek zorizko aldagaiaren itxaropenaren eta desbiderazio tipikoaren formulak aplikatuz kalkula daitezke. X_{EA} jokalari ez-adituekin erlazionatutako zorizko aldagaiarekin elkartutako probabilitateak ondorengoak dira:

$$\mathrm{P}(X_{EA}=0)=\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5};\ \mathrm{P}(X_{EA}=1)=\binom{3}{2}\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5};\ \mathrm{P}(X_{EA}=2)=\binom{3}{2}\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{3}{5};\ \mathrm{P}(X_{EA}=3)=\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}$$

$$X \sim \mathrm{H}\left(N=3+4=7, \mathrm{n}=3, \mathrm{p}=\frac{4}{7}=0.5714\right)$$

Hortaz, aldagai hipergeometrikoaren formulak aplikatuz:

$$\mu_X=E[X]=np=3\tfrac{4}{7}=1.7143 \text{ pertsona}$$

$$\sigma_X=\sqrt{np(1-p)\frac{N-n}{N-1}}=\sqrt{3\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{7-3}{7-1}}=\sqrt{\frac{4^2\times 3^2}{7^2\times 6}}=0.6999 \text{ pertsona}$$

Kasu honetan, itxaropen matematikoa ondorengoa aplikatuz lortzen da

$$\mu_{X=EA}=E[X_{EA}]=\sum_{k=0}^{3}x_{EA,i}\mathrm{P}(X=x_{EA,i})=0\frac{6}{7\cdot 6\cdot 5}+1\frac{3\cdot 4\cdot 6}{7\cdot 6\cdot 5}+2\frac{3\cdot 12\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 5}+3\frac{4\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5}=\frac{12}{7}=1.7143$$

Era berean, formula aplikatuz aldagaiaren bariantza lor daiteke:

$$\sigma^2_{X=EA}=\alpha^2-\alpha_1^2=E[X^2_{EA}]-\mu^2_{X=EA}=\sum_{k=0}^{3}x^2_{EA,i}\mathrm{P}(X=x_{EA,i})-\left(\frac{12}{7}\right)^2=$$

$$=\left(0\frac{3\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5}+1\frac{3\cdot 4\cdot 6}{7\cdot 6\cdot 5}+2^2\frac{3\cdot 12\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 5}+3^2\frac{4\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5}\right)-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{120}{35}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=0.489795$$

$$\sigma_{X=EA}=\sqrt{0.489795}=0.6999$$

2. ARIKETA

Makina batek 3 osagai ditu, osagai bakoitzaren bizi-iraupenek (ordutan neurtuak) $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ a\,e^{-t/500} & t\ge 0\end{cases}$ dentsitate funtzioa duen banaketa jarraitzen dute. Makinaren diseinuaren ondorioz, osagaiek era independentean lan egiten dute eta makinak era egokian lan egiteko hiru osagaiek era egokian lan egin behar dute. Mantentze-politika 700 orduro osagai guztien aldibereko ordezkapenean oinarritzen da.

Oharra: *Erantzun guztiak zenbakizko balioa izan behar dute.*

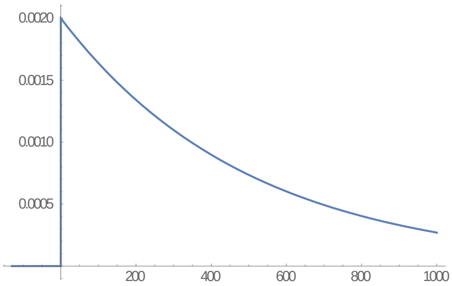
f(t) dentsitate-funtzioa izateko ondorengo bete behar da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} a\,e^{-t/500}dt = 500a\left(-e^{-t/500}\right)\Big|_{0}^{\infty} \underset{\text{Barrow-en erregela}}{=} 500a\left(-e^{-\infty/500}+e^{0}\right) =$$

$$500a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{500} = 0.002$$

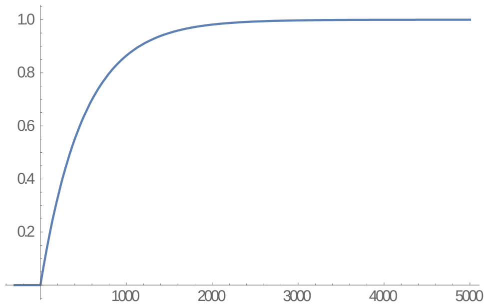
ondorioz:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{500}e^{-t/500} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Banaketa funtzioa ondorengoa izanik:

$$F(t) @ \mathrm{P}(t \leq \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f(t)\,dt = \begin{cases} 1-e^{-\tau/500} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



(1) Zein da makina bi berriketen arteko denbora-tartean matxuratzeko probabilitatea? (2^{5} puntu).

Izan bedi S "makina bi berriketen artean matxuratu da" gertaera. S gertaeraren probabilitatea, makina 700 ordu igaro baino lehen matxuratzeko probabilitatea da. Bestalde, osagairen bat 700 ordu igaro baino lehen matxuratzeko probabilitatea hurrengoa da:

$$\mathrm{P}(osagai\,bat\,matxuratzea) = \mathrm{P}(t<700) = F(t=700) = \int_0^{700} f(t)\,dt = \int_0^{700} \tfrac{1}{500} e^{-t/500}\,dt =$$

$$\left(-e^{-t/500}\right|_0^{700} = 1-e^{-7/5} = 0.7534$$

Makinak era egokian lan egiteko hiru osagaiek era egokian lan egin behar dutenez, makina matxuratzeko probabilitatea osagairen bat matxuratzeko probabilitatea da:

$$\mathrm{P}(S) = 1-\left[1-\mathrm{P}(t<700)\right]^3 = 1-0.2466^3 = 1-0.0149973 = 0.9850027$$

(2) Osagai guztiak berritu ziren azken alditik 500 ordu igaro badira eta makinak era egokian lanean jarraitzen badu, zein da makina hurrengo berriketa baino lehen era egokian lanean egoteko probabilitatea? (2^5 puntu).

Hurrengo berriketara arte era egokian lan egiteko probabilitatea hurrengoa da:

$$\mathrm{P}(t>700|t>500) = \frac{\mathrm{P}[(t>700)\cap(t>500)]}{\mathrm{P}(t>500)} = \frac{\mathrm{P}(t>700)}{\mathrm{P}(t>500)} = \frac{1-F(700)}{1-F(500)} = \frac{e^{-700/500}}{e^{-500/500}} = e^{-200/500} = F(t>200)$$

$$F(t>200) = 0.6703$$

Ondorioz, makinak 700 ordu era egokian lan egiteko probabilitatea, jadanik 500 ordu era egokian lan egin badu:

$$\mathrm{P}(700\ ordu\,igaro\,ondoren\,era\,egokian\,lan\,egiteko\,probabilitatea\ 500\ orduz\,era\,egokian\,lan\,egin\,badu) =$$

$$(0.6703)^3 = 0.3012$$

da.

Makinak ekoizten dituen piezen luzerak 32 mm-ko batezbestekoa eta 0.3 mm-ko desbiderazio tipikoa dituen zorizko aldagai normala jarraitzen dute. (31.1 mm; 32.6 mm) tartean dauden neurriak dituzten piezak onargarriak kontsideratzen dira.

(3) Zein da 500 piezen artean 15 pieza baino gehiago akastunak izateko probabilitatea? (2^5 puntu).

X-k, piezen luzera neurtzen duen zorizko aldagaiak, $X \sim \mathrm{N}(\mu = 32\,mm, \sigma = 0.3\,mm)$ banaketa jarraitzen du. Ondorioz, pieza bat onargarria izateko probabilitatea:

$$\mathrm{P}(31.1\,mm \le X \le 32.6\,mm) \underset{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}}{=} \mathrm{P}\left(z_1 = \frac{31.1-32}{0.3} = -3 \le X \le z_1 = \frac{32.6-32}{0.3} = 2\right) =$$

$$\underset{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}}{=} \mathrm{P}\left(z_1 = \frac{31.1-32}{0.3} = -3 \le X \le z_1 = \frac{32.6-32}{0.3} = 2\right) = F(Z=2) - F(Z=-3) = 0.9759 \text{ da.}$$

Pieza akastuna izateko probabilitatea $p = 1-0.9759 = 0.0241$ izanik.

Bestalde, Y-k, 500 pieza dituen sorta batetik akastunak diren pieza kopurua neurtzen duen zorizko aldagaiak, banaketa binomiala du.

$$Y \sim \mathrm{B}\left(n=500,\, p=0.0241\right) \underset{\substack{np=12.05>5 \\ nq=487.95>5}}{\longrightarrow} \mathrm{N}\left(\mu = np = 12.05, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3.4292\right)$$

Eta eskatutako probabilitatea, jarraitutasun-zuzenketa aplikatuz

$$\mathrm{P}(Y>15) = 1 - F_{\mathrm{B}}(15) \underset{(1)}{=} 1 - F_{\mathrm{N}}(15.5) = 1 - \mathrm{P}\left(Z \le z_1 = \frac{15.5-12.05}{3.4292} = 1.00607\right) = 0.1571909 \text{ da.}$$

Bestalde, fabrikan berdin-berdinak diren hiru makina daude, txanda bakoitzean 500, 600 eta 700 pieza ekoizten dituztenak hurrenez hurren, txanda bakoitzaren bukaeran pieza guztiak nahastu egiten direlarik. Egun bateko sortatik pieza bat ateratzen bada eta pieza akastuna bada, (4) zein da hirugarren makinak ekoiztutakoa ez izateko probabilitatea? (2[5] puntu).

Pieza bat akastuna izateko probabilitatea (probabilitate-osoaren teorema erabiliz) ondokoa da:

$$\mathrm{P}(\textit{pieza akastuna}) = \left(\frac{500}{1800} + \frac{600}{1800} + \frac{700}{1800}\right) 0.0241 = 0.0241$$

Hiru makinak gertaera bateraezinak direnez, Bayes-en teorema aplikatuz:

$$\mathrm{P}(\textit{pieza lehenengo edo bigarren makinek ekoiztutakoa da}) = \frac{\frac{500}{1800}0.0241}{0.0241} + \frac{\frac{600}{1800}0.0241}{0.0241} = \frac{\left(\frac{500}{1800} + \frac{600}{1800}\right)0.0241}{0.0241} = \frac{5}{18} + \frac{1}{3} = 0.6111$$

Hiru makinek akastuna den pieza bat ekoizteko probabilitatea berdina denez, galdera hau ondorengo erara erantzun daiteke

$$\mathrm{P}(\textit{pieza lehenengo edo bigarren makinek ekoiztutakoa da}) = \frac{500+600}{1800} = 0.6111$$

3. ARIKETA

Fabrika industrial batean elkarren segidan ohikoa den (A) metodoa erabiliz produktu kimiko baten 10 sorten lorpenean eta aldatutako (B) metodoa erabiliz beste 10 sorten lorpenean oinarritzen den esperimentua egin da. Ondorengo taulan emaitzak laburbiltzen dira:

ORDENA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
METODOA	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
ERRENDIMENDUA	89.7	81.4	84.5	84.8	87.3	79.7	85.1	81.7	83.7	84.5

ORDENA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
METODOA	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
ERRENDIMENDUA	84.7	86.1	83.2	91.9	86.3	79.3	82.6	89.1	83.7	88.5

Populazioak normalak direla suposatuz:

Matematika Aplikatua Saila
Rafael Moreno "Pitxitxi" 3 Pasealekua
48013 Bilbao

Ariketa honetan erabili behar diren lagineko balioak ondokoak dira:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{10} x_{Ai} = 842.4 & \sum_{i=1}^{10}\left(x_{Ai}-\overline{x}_A\right)^2 = 75.784 \\ \sum_{i=1}^{10} x_{Bi} = 855.4 & \sum_{i=1}^{10}\left(x_{Bi}-\overline{x}_B\right)^2 = 119.924 \end{array} ; \quad \begin{array}{ll} \overline{x}_A = 84.24 & \overline{x}_B = 85.54 \\ \hat{s}_A = 2.9018 & \hat{s}_B = 3.6503 \\ \hat{s}_A^2 = 8.4204 & \hat{s}_B^2 = 13.3249 \\ s_A = 2.7529 & s_B = 3.4630 \end{array}$$

(1) Zein metodok du errendimenduan aldakortasun handiagoa %1 adierazgarritasun-mailaz? (2 puntu).

Bi populazioen (bi lagin daudelako) bariantzen arteko kontrastea da, hortaz Fisher-Snedecor-en banaketa aplikatu behar da, hipotesiak hurrengoak izanik:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_{A,0}^2 = \sigma_{B,0}^2 \\ H_a: & \begin{cases} (1)\ \sigma_A^2 < \sigma_B^2 \\ (2)\ \sigma_A^2 > \sigma_B^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \sigma_{A,0}^2 / \sigma_{B,0}^2 = 1 \\ H_a: & \begin{cases} (1)\ \sigma_A^2 / \sigma_B^2 < 1 \\ (2)\ \sigma_A^2 / \sigma_B^2 > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Zein metodok aldakortasun handiagoa duen erabaki behar denez, alde-bakarreko kontrastea egin behar da, populazioko batezbestekoak ezezagunak direnez, kontrasterako estatistikoa ondorengoa izanik.

$$F_c = \frac{\chi_B^2 / \nu_B}{\chi_A^2 / \nu_A} = \frac{\cancel{\sigma_A^2}}{\cancel{\sigma_B^2}} \frac{\hat{s}_B^2}{\hat{s}_A^2} = \frac{\hat{s}_B^2}{\hat{s}_A^2} = \frac{13.3249}{8.4204} = 1.5825\left(1.5825^{-1} = 0.6319\right)$$

Onarpen-eremua mugatzen duen balio kritikoa %1eko adierazgarritasun-mailaz

$$F_1 = \begin{cases} F_1 = F_{1\%,\,\nu_1=9\,gdl,\,\nu_2=9\,gdl} = 0.1868675 \\ F_2 = F_{99\%,\,\nu_1=9\,gdl,\,\nu_2=9\,gdl} = F^{-1}_{1\%,\,\nu_1=9\,gdl,\,\nu_2=9\,gdl} = 5.35138634 \end{cases}$$

da.

Ondorioz, $F_1 < F(1)$ (era berean $F < F_2(2)$) denez, enuntziatuan emandako laginak erabiliz, metodo baten aldakortasuna bestearena baino handiagoa dela suposatzeko ebidentziarik ez dagoela ondoriozta daiteke. Beste era batera esanda, ez dago ebidentziarik populazioko bariantzak desberdinak direla onartzeko, %1eko adierazgarritasun mailaz.

(2) Datuek B metodoak A metodoak baino errendimendu altuagoa duela adierazten al dute $\alpha = \%5$ adierazgarritasun-mailaz?, eta %1 adierazgarritasun-mailaz? Behatutako desberdintasunak arrazoitu. (2[5] puntu).

Bi populazioen (lagin independenteak) batezbestekoen arteko alde-bakarreko kontrastea da, hipotesi-kontrastea ondorengo izanik:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_{A,0} = \mu_{B,0} \\ H_a: & \mu_A < \mu_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \mu_{A,0} - \mu_{B,0} = 0 \\ H_a: & \mu_A - \mu_B < 0 \end{cases}$$

Kontuan izan beharreko banaketa Student-en t banaketa da. Enuntziatuan emandako datuak erabiliz errore estandarra edo estimatzailearen desbiderazio tipikoa hurrengoa da:

$$\sigma_{\bar{\mu}_A-\mu_B}=\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}=\sqrt{\frac{75.784+119.924}{10+10-2}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}=$$
$$\sqrt{\frac{195.708}{18}}\sqrt{\frac{1}{5}}=3.2974\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{10.8726667}{5}}=1.4746299$$

Kontrasterako estatistikoa

$$t_c=\frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_A)-(\mu_A-\mu_B)}{\sigma_{\bar{\mu}_A-\mu_B}}=\frac{84.24-85.54}{1.4746299}=\frac{-1.3}{1.4746299}=-0.88157714 \text{ da}$$

Eskualde-kritikoa eta onarpen eremua mugatzen dituen balio kritikoa

$$t_1=-t_{\alpha=\begin{cases}(1)5\%\\(2)1\%\end{cases},\nu=18\,gdl}=\begin{cases}\text{-}1.734064\\\text{-}2.55238\end{cases} \text{ da}$$

$t_1=-t_{\alpha=\begin{cases}(1)5\%\\(2)1\%\end{cases},\nu=18\,gdl}=\begin{cases}\text{-}1.734064\\\text{-}2.55238\end{cases}<t=-0.88157714$ betetzen da, hortaz, enuntziatuan emandako laginak erabiliz, $\alpha=\%5,\%1$ adierazgarritasun-mailaz B metodoak A metodoak baino errendimendu altuagoa duela ondorioztatzeko ebidentziarik ez dagoela esan daiteke.

(3) Zein da kontrasteko p-balioa? (1[5] puntu).

Aurreko ataleko emaitzak erabiliz kontrasteko p-balioa ondorengoa dela ondoriozta daiteke:

$$t_{p-balioa,\,\nu=18\,gdl}=-0.88157714 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(t\le t_c=-0.88157714\right)=p-balioa=0.194807$$

(4) Zehaztu estimazio baten konfiantza-maila, **estimazioaren errorea** %95eko konfiantza-maila duen tarte-estimazioa egitean lortutako estimazioaren heinaren erdia bada (2 puntu).

Konfiantza-tartearen definizioa $[l,\mathrm{L}]=\bar{\mu}_A-\mu_B\pm t_{\alpha,\nu}\sigma_{\bar{\mu}_A-\mu_B}$ denez konfiantza-maila edozein izanik, eta tartearen heina $R=\mathrm{L}-l$ denez, eskatutako adierazgarritasun-maila $\alpha=95\,\%$ dela ondoriozta daiteke.

(5) Kalkulatu II motako errorea B metodoaren errendimendua A metodoaren errendimendua baino %6 altuagoa bada. (2 puntu).

$$\beta=\mathrm{P}\left(II\ motako\,errorea\right)=\mathrm{P}\left(H_0\ onartu\,|\,H_0\ gezurra\right)=$$
$$\mathrm{P}\left(t\le t_{p,18\,gdl}=\frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_A)-(\mu_A-\mu_B)}{\sigma_{\bar{\mu}_A-\mu_B}}=\frac{84.24-85.54+6}{1.4746299}=\frac{4.7}{1.4746299}=3.249674\right)=0.9977757$$

(6) Demagun goian aipatutako sortak A eta B metodoak erabiliz aldi berean lortzen direla. Zein izango litzateke egindako errore estandarra? Lortutako balioa (2) ataleko emaitzarekin konparatu eta dagozkion ondorioak arrazoitu. (1^5 puntu).

Datu parekatuak edo lagin ez-independenteak direnez kasu honetako errore estandarra:

$$\sigma_{\bar{\mu}_A-\mu_B}=\frac{\hat{s}_d}{\sqrt{n}}=\frac{4.2224269}{\sqrt{10}}=1.33524862\left(s_d=4.0057\right) \text{ da}$$

Errore hori ondorengo desbideratzeak $d_i = x_{A,i} - x_{B,i}$ erabiliz kalkulatu da:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A	89,7	81,4	84,5	84,8	87,3	79,7	85,1	81,7	83,7	84,5	
B	84,7	86,1	83,2	91,9	86,3	79,3	82,6	89,1	83,7	88,5	
d_i	5	-4,7	1,3	-7,1	1	0,4	2,5	-7,4	0	-4	-1,3
											4,2224269

Balio hau, (2) atalean lortutako errore estandarra ($\sigma_{\bar{\mu}_A-\mu_B}=1.4746299$) baino txikiagoa da, datuak parekatuak direnez informazio gehiago baitugu. Honen ondorioz, populazioko parametroa estimatzean lortutako tarte-estimazioa txikiagoa izango da, nahiz eta askatasun gradu txikiagoa izan (lehen $v_{(2)}=18\,askatasun\,gradu$ eta orain $v_{(6)}=9\,askatasun\,gradu$)

(7) Baldintza hauetan, zein izan beharko litzateke lagineko tamaina errorea %10^{-3} baino txikiagoa izan dadin? (0.5 puntu).

$$\sigma_{\bar{\mu}_A-\mu_B}=\frac{\hat{s}_d}{\sqrt{n}}=\frac{4.2224}{\sqrt{n}}\leq e_{\max}=10^{-1}\Leftrightarrow n\geq\left(\frac{4.2224}{e_{\max}}\right)^2=\left(\frac{4.2224}{10^{-1}}\right)^2=1782.8661.$$

Ondorioz, n = 1783 gutxienez.

4. ARIKETA

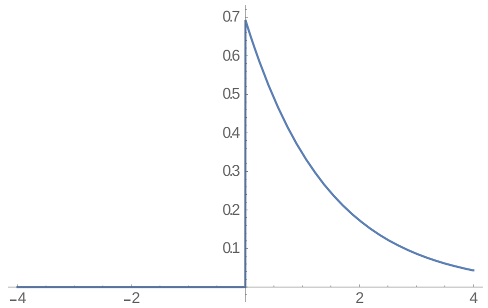
Denda desberdinetan egindako azterketa baten arabera, produktu esklusibo baten X eskariak $f_X(x)=2^{-x}\cdot\ln 2,\ x>0$ dentsitate funtzioa duen zorizko aldagaia jarraitzen duela jakin da. "x" unitate saltzeak "*a·x*" irabazia ematen du, eta saldu ez den "y" soberakinak "*b·y*" galera (hau da, irabazi negatiboa) sortzen du, "*a*" eta "*b*" konstante positiboak izanik. Stock-ean "*c*" unitate erabilgarri badaude, kalkula ezazu:

(1) $F_X(x)$, X eskariaren banaketa funtzioa. (2 puntu).

Lehenengo eta behin, $f_X(x)=2^{-x}\cdot\ln 2,\ x>0$ dentsitate-funtzioa dela frogatzen da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_0^{\infty}2^{-x}\cdot\ln 2\,dx=-\lim_{x\to\infty}\left(2^{-x}\Big|_0^x\right)=-\lim_{x\to\infty}\left(2^{-x}-1\right)=1$$

Adierazpen grafikoa ondokoa izanik:



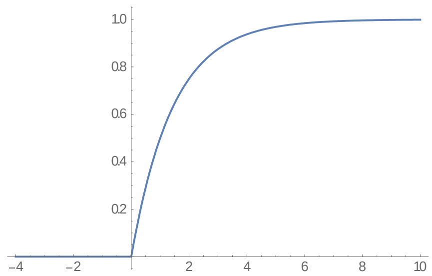
Banaketa funtzioa berriz hurrengoa da:

$$F_X\left(x\right) @ \mathrm{P}\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} f_X\left(x\right)dx = \int_0^x 2^{-\tau}\cdot \ln 2\, d\tau = -\left(2^{-\tau}\right|_0^x = 1-2^{-x}$$

Ondorioz,

$$F_X\left(x\right) @ \begin{cases} 1-2^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

Grafikoki:



(2) Eskariak eskuragarri dagoen stock-a gainditzeko probabilitatea. (2 puntu).

$$\mathrm{P}\left(X>c\right) = 1-\mathrm{P}\left(X\le c\right) = 1-F\left(c\right) = 1-\left(1-2^{-c}\right) = 2^{-c} \ \forall c>0$$

(3) Estatistikan oso trebea ez den dendari batek, eskariaren banaketa funtzioa aztertu ondoren hurrengoa ondorioztatu du:
"*stock-ean eskuragarri unitate asko izateak (c handia izateak), unitate guztiak salduko dituela ziurtatzen du, izan ere* $F_X\left(c\right)\approx 1$ *da. Hau da, denak saltzeko probabilitatea ia erabatekoa da.*". Azaldu, labur eta argi zein den dendariak egiten duen errore estatistikoa. (2 puntu).

Banaketaren funtzioaren definizioa $F_X\left(x_0\right) @ \mathrm{P}\left(X\le x_0\right)$ da. Gainera, kasu honetan $F_X\left(c\right) @ \mathrm{P}\left(X\le c\right)\approx 1$ betetzen da. Banaketa funtzioa denez (hau da, probabilitate metatua denez), "c" baino txikiagoak edo berdinak diren balio guztiak kontuan hartzen dira.

Inork egindako errorea azaldu baino lehen, dendariak, "c", stock-ean eskuragarri egongo den unitate-kopurua oso handia lortu du, bere ustez, horrela eskariak stock-a gainditzeko probabilitatea mespretxagarria eginik.

(4) Adiera kasu honetan G dendariaren irabazia X eskariaren eta stock-ean erabilgarri dauden unitateen menpe. (2 puntu).

Eskariak lortutako stock-a inoiz gaindituko ez duela suposatuz:

$$G(x) = ax - by = ax - b(c - x) = (a + b)x - bc$$

(5) Zein da G_e espero den irabazia? (2 puntu).

$$G_e = E[G(x)] = E[(a+b)x - bc] = (a+b)E[x] - bc = (a+b)\frac{1}{\ln 2} - bc = \frac{a}{\ln 2} + b\left(\frac{1}{\ln 2} - c\right)$$

Izan ere

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \ln 2\, x\, 2^{-x}\, dx \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \ln 2\, 2^{-x}\, dx \Rightarrow v = -2^{-x} \end{array} \right\} = \left(-x\, 2^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2^{-x}\, dx = \left[-2^{-x}\left(x + \frac{1}{\ln 2}\right)\right]_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{u \to \infty}\left[-2^{-u}\left(x + \frac{1}{\ln 2}\right) + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$ da.