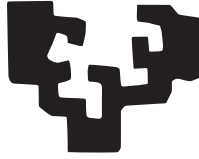


eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

JARRAIBIDEAK

1. Azterketak bi zati ditu, lehenengoak 30 galdera ditu, kodifikazio orri laranjan erantzun beharrekoak. Bigarren zatiak hiru problema ditu, 1, 2 eta 3, hauek orden horretan erantzun behar dira eta bakoitza orrialde ezberdin batean. Galdeketa eta problemak ordenean batuko dira: lehenik, galdeketa batuko da; gero 1. problema, ondoren 2. problema, eta azkenik 3. problema.
2. Galdeketa bukatzen denean, $N(0,1)$ banaketaren taula aurkituko duzu.
3. Ez ezazu ahaztu zure N.A.N. ondo idatzi behar duzula, bai orrialde laranjan eta baita entregatuko dituzun problemen orrialde bakoitzean ere.
4. Galdeketa ondo erantzundako galderak puntu 1 balio dute eta txarto erantzundakoek 0,20 puntuko penalizazioa dute. Galdera bakoitzak erantzun zuzen bakarra du.
5. Galdeketa 30 puntu balio du eta problemek beste 30 puntu. Galdeketa 30 puntutik 11 puntu edo gehiago lortu behar dira problemak zuzentzeko.
6. Ebaluazio jarraitua egin behar ez duten ikasleentzat (onartu zaielako), azterketa honen notak irakasgaiaren nota finalaren %100 balio du. Beste guztientzat, azterketa honen notak irakasgaiaren nota finalaren %70 balio du, eta ebaluazio jarraituko notak beste %30. Hala ere, azterketa honetan 10 puntutik gutxienez 4 puntu ateratzea beharrezkoa da ebaluazio jarraituaren nota batu ahal izateko.

Irakasleak abisatu arte ez ikusi hurrengo orrialdea!

Estatistika eta Datu-Analisia

2018ko Urtarrila,

Test-iraupena: Ordu bat eta 30 minutu, Mota: 1

Deiturak: _____

Izena: _____

NAN: _____

Taldea: _____

Irakaslea: _____

Aukera anitzeko galderak (10 puntu)

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun, EAEko 20 eskualdeetarako, X dela Ikasketa Profesionalak dituen populazio-portzentajea, eta Y dela Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajea. 2015 urtean, bi aldagai horien arteko korrelazioa $r_{xy} = -0.636$ izan da.

1. Amaitu hurrengo esaldia modu egokian: *Kolektibo horretan, Ikasketa Profesionalak dituen populazio-portzentajearen igoera bat, honako honekin lotuta doa, oro har:*

- (a) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen %63.6ko jeitsiera bat*
- (b) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen %63.6ko igoera bat*
- (c) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen jeitsiera bat*
- (d) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen igoera bat*
- (e) Dena faltsua

2. Bi aldagai horiek, ehunekoan adierazi ordez, batekoan adierazten baditugu, euren arteko korrelazioa:

- (a) Ez da aldatuko
- (b) Zatituko da zati 100
- (c) Biderkatuko da bider 100
- (d) Zeinuz aldatuko da
- (e) Dena faltsua

3. Hurrengo berdintzetatik: zein da egiazkoa?

- (a) $S_{xy} = -0.636S_xS_y$
- (b) $S_{xy} = 0.636S_xS_y$
- (c) $S_xS_y = -0.636S_{xy}$
- (d) $S_xS_y = 0.636S_{xy}$
- (e) Dena faltsua

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

4. Demagun X a.a.-ren banaketa ezezaguna dela, bere batezbestekoa 5 dela, eta bere bariantza 9 dela. $(-1, 11)$ tartearen probabilitatea gutxienez honako hau da:

- (a) 0,45
- (b) 0,30
- (c) 0,75
- (d) 0,55
- (e) 0,25

5. X aldagai aleatorio baten bariantza, zein momentu-mota da?

- (a) 1. ordenako momentu arrunta
- (b) 1. ordenako momentu zentrala
- (c) 2. ordenako momentu arrunta
- (d) 2. ordenako momentu zentrala
- (e) Dena faltsua

6. 2014 urtean oinarritutako indize baten 2015 urteko balioa, Laspeyres-en indize modura kalkulatuta 112.7 da, eta Fisher-ren indize modura 108.3 da. Paasche-ren indizearen arabera: zenbat igo dira prezioak 2014tik 2015era?

- (a) %10.48
- (b) %4.07
- (c) %8.30
- (d) %12.70
- (e) %4.40

7. Enpresa batean 100 langile daude, eta horietatik 60 gizonak dira. Bi kategoria profesional daude: zuzendariak eta langile xeheak. Zuzendariak 20 gizon eta 5 emakume dira. Baldin enpresa horretako emakumeen artean aukeratzen badugu bat aleatorioki, emakume hori zuzendaria izateko probabilitatea hau da:

- (a) 0.050
- (b) 0.020
- (c) 0.080
- (d) 0.250
- (e) 0.125

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun A eta B bi gertaera direla, non A gertatzeko probabilitatea 0.4 den, B gertatzeko probabilitatea 0.3 den, eta $P(A|B) = 0.5$ den.

8. Bi gertaera horiek batera gertatzeko probabilitatea hau da:

- (a) 0.15
- (b) 0.12
- (c) 0.55
- (d) 0.70
- (e) 0.20

9. Bi gertaera horietatik, bat ere ez gertatzeko probabilitatea hau da:

- (a) 0.30
- (b) 0.42
- (c) 0.85
- (d) 0.55
- (e) 0.45

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun X a.a zeinen banaketa $N(1, \sigma^2 = 4)$ den.

10. Zein da k -ren balioa non $P(X > k) = 0.025$ den?

- (a) 1.96
- (b) 0.83
- (c) 0.44
- (d) 4.92
- (e) 3.30

11. Demagun $Y = 6X$ aldagai aleatorioa. Y -ren banaketa hau da:

- (a) $N(6, \sigma^2 = 144)$
- (b) $N(6, \sigma^2 = 4)$
- (c) $N(6, \sigma^2 = 24)$
- (d) $N(1, \sigma^2 = 4)$
- (e) Dena faltsua

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

12. Demagun X eta Y bi aldagai estatistiko independente. Orduan, honako hau ziurta dezakegu:

- (a) $S_{xy} = 0$
- (b) $S_{xy} = 1$
- (c) $S_{xy} = -1$
- (d) $S_x^2 = 0$
- (e) $S_y^2 = 0$

13. Baldin 1986 eta 2015 urteen artean Ikaske-
ta Unibertsitarioak dituzten pertsonen kopurua
%44.5 igo bada, orduan tarte horretan aldagai
horren urteko batezbesteko hazkunde-tasa me-
takorra hauxe izan da, gutxi gorabehera:

- (a) %0.445
- (b) %0.555
- (c) %1.277
- (d) %1.534
- (e) %3.708

14. Badakigu A hiriko esne-kontsumoaren batez-
bestekoa B-ren batezbestekoaren doblea dela,
eta A-ren esne-kontsumoaren bariantza B-ren
bariantza baino lau aldiz handiagoa dela. Bi
hirietatik, zeinek dauka esne-kontsumoaren ba-
tezbesteke errepresentatiboagoa (adierazgarria-
goa)?

- (a) A
- (b) B
- (c) Bien batezbesteko kontsumoa berdin
errerepresentatiboa da
- (d) Ez dugu nahiko informaziorik galdera
horri erantzuteko
- (e) Dena faltsua

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden
galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun (X, Y) a.a. zeinen probabilitate-
banaketa hauxe den:

$$P(0, 0) = P(0, 1) = P(0, 2) = P(1, 0) = P(1, 1) = 0.2$$

15. $F(0, 5; 1)$ -ren balioa hauxe da:

- (a) 0.2
- (b) 1
- (c) 0.6
- (d) 0.4
- (e) 0.8

16. X -en zenbatasun-funtzio baldintzatuak, $Y = 0$
denean, honako hau da:

- (a) $P_{X|Y=0}(0) = 0.5; P_{X|Y=0}(1) = 0.5$
- (b) $P_{X|Y=0}(0) = 0.4; P_{X|Y=0}(1) = 0.6$
- (c) $P_{X|Y=0}(0) = 0.4; P_{X|Y=0}(1) = 0.4;$
 $P_{X|Y=0}(2) = 0.2$
- (d) $P_{X|Y=0}(0) = 0.2; P_{X|Y=0}(1) = 0.4;$
 $P_{X|Y=0}(2) = 0.4$
- (e) Dena faltsua

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

17. Jakinik denda baten ilaran itxaron behar den
denbora (minututan) a.a. bat dela, zeinen ba-
naketa esponenziala den, eta zeinen batezbes-
tekoa 25 den; hau da: $f(x) = \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{25}x}$ eta
 $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{25}x}$, non $x \geq 0$. Zein da 30 minutu
baino gehiago itxaroteko probabilitatea?

- (a) 0.5430
- (b) 0.9994
- (c) 0.0006
- (d) 0.3012
- (e) 0.6988

18. X aldagaiak enpresa batzuen irabaziak adieraz-
ten ditu, mila eurotan. Jakinik $2X - 3.4$ trans-
formazioak X aldagaia tipifikatzen duela: zein
izango da enpresa horien batezbesteko iraba-
zia?

- (a) 2
- (b) 1.7
- (c) 3.4
- (d) 6.8
- (e) 0.5

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden
galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Medikamentu batek 100 gaixotatik 8tan bigarren
mailako ondorioak sortzen ditu. Aleatorioki aukera-
tu dira 5 gaixo, elkarren artean independenteak, eta
medikamendu hori hartu dute.

19. Bigarren mailako ondorioak gaixo batek ere ez izateko probabilitatea hauxe da:

- (a) 0.92^5
- (b) 0.08^5
- (c) $0.08 \cdot 0.92$
- (d) 0
- (e) $0.92^5 \cdot 0.08^5$

20. Gutxienez bi gaixok bigarren mailako ondorioak izateko probabilitatea hauxe da, gutxi gora-behera:

- (a) 0.32
- (b) 0.05
- (c) 0.14
- (d) 0.01
- (e) 0.25

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

23. $E(Y)$ -ren balioa hauxe da:

- (a) $\frac{1}{4}$
- (b) 1
- (c) 2
- (d) $\frac{1}{8}$
- (e) 3

24. $E(XY)$ -ren balioa hauxe da:

- (a) $\frac{1}{4}$
- (b) 1
- (c) 2
- (d) $\frac{1}{8}$
- (e) 3

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

21. Demagun aldagai estatistiko baten lehenengo kuartilaren balioa 15 dela. Hurrengo aukeretatik, zein **ezin** da gertatu inoiz ere?

- (a) 10. pertzentila 7 da
- (b) bigarren dezila 13 da
- (c) 90. pertzentila 55 da
- (d) hirugarren dezila 14 da
- (e) mediana 30 da

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

X aldagai estatistikoaren banaketa hauxe da:

x_i	f_i	q_i	F_i	Q_i
15	0.4	0.285	0.4	0.285
22.5	0.4	0.430	0.8	0.715
30	0.2	0.285	1	1

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun (X, Y) a.a. bikoitz uniforme, zeinen dentsitate-funtzioa $f(x, y) = k$ den, non $x \in [0, 2]$ eta $y \in [0, 4]$.

22. k -ren balioa hauxe da:

- (a) $\frac{1}{2}$
- (b) $\frac{1}{4}$
- (c) 8
- (d) $\frac{1}{8}$
- (e) 1

25. Banaketa horri dagokion Lorenz-en kurbaren puntu bat hauxe da:

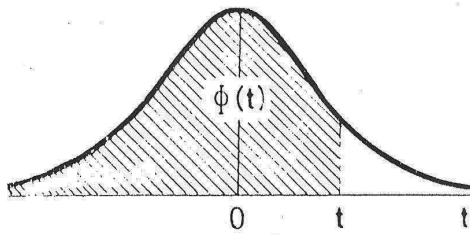
- (a) (0.285; 0.4)
- (b) (0.4; 0.430)
- (c) (0.2; 0.285)
- (d) (0.8; 0.715)
- (e) Dena faltsua

26. X -en Giniren indizearen balioa hauxe da:

- (a) 0.143
- (b) 0.572
- (c) 0.486
- (d) 0.314
- (e) 0.257

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

27. Demagun X a.a. zeinen banaketa jarraitua den, eta zeinen batezbestekoa, m , negatiboa den. Honako hau beteko da:
- (a) $E(X - m) < 0$
 - (b) $\sigma^2 > \alpha_2$
 - (c) $\sigma^2 = \alpha_2$
 - (d) X ez dago zentratua
 - (e) Dena faltsua
28. Demagun X a.a bat banaketa normala duena, zeinen batezbestekoa 100 den, eta zeinen bariantza 25 den. Orduan $Y = 2X$ a.a.-ren balioa 200 baino txikiago izateko probabilitatea hau da:
- (a) 1
 - (b) 0,40
 - (c) 0,50
 - (d) 0,80
 - (e) 0,25
29. Demagun X a.a. zeinen banaketa $N(0, \sigma^2)$ den. Orduan, honako hau zierda dezakegu:
- (a) $\sigma^2 = 1$
 - (b) $P(X > 1.2) > P(X < -1.2)$
 - (c) $P(X < -1) = P(X < 1)$
 - (d) $P(1 < X < 2) > P(4 < X < 5)$
 - (e) $\sigma^2 < 1$
30. Dado erregular bat bi alditan jaurtiz, bi aldagai aleatorio definitu ditugu. X a.a. lehenengo jaurtiketaren emaitzarekin lotu dugu: 0 balioa hartzen du baldin dadoaren emaitza 1 bada; 1 balioa hartzen du baldin dadoaren emaitza 2, 3 edo 4 bada; eta 2 balioa hartzen du baldin dadoaren emaitza 5 edo 6 bada. Bestalde, Y a.a. bigarren jaurtiketaren emaitzarekin lotu dugu: 0 balioa hartzen du dadoaren emaitza bikoitia bada, eta 1 balioa baldin emaitza bakoitia bada. Orduan, $E(X|Y = 0)$ -ren balioa hau da, gutxi gorabehera:
- (a) 0.50
 - (b) 0.33
 - (c) 3.50
 - (d) 1.17
 - (e) 0.08



DISTRIBUCION N (0; 1)

t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)
0,00	0,5000	0,80	0,7881	1,60	0,9452	2,40	0,9918
0,02	0,5080	0,82	0,7939	1,62	0,9474	2,42	0,9922
0,04	0,5160	0,84	0,7995	1,64	0,9495	2,44	0,9927
0,06	0,5239	0,86	0,8051	1,66	0,9515	2,46	0,9931
0,08	0,5319	0,88	0,8106	1,68	0,9535	2,48	0,9934
0,10	0,5398	0,90	0,8159	1,70	0,9554	2,50	0,9938
0,12	0,5478	0,92	0,8212	1,72	0,9573	2,52	0,9941
0,14	0,5557	0,94	0,8264	1,74	0,9591	2,54	0,9945
0,16	0,5636	0,96	0,8315	1,76	0,9608	2,56	0,9948
0,18	0,5714	0,98	0,8365	1,78	0,9625	2,58	0,9951
0,20	0,5793	1,00	0,8413	1,80	0,9641	2,60	0,9953
0,22	0,5871	1,02	0,8461	1,82	0,9656	2,62	0,9956
0,24	0,5948	1,04	0,8508	1,84	0,9671	2,64	0,9959
0,26	0,6026	1,06	0,8554	1,86	0,9686	2,66	0,9961
0,28	0,6103	1,08	0,8599	1,88	0,9699	2,68	0,9963
0,30	0,6179	1,10	0,8643	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,32	0,6255	1,12	0,8686	1,92	0,9726	2,72	0,9967
0,34	0,6331	1,14	0,8729	1,94	0,9738	2,74	0,9969
0,36	0,6406	1,16	0,8770	1,96	0,9750	2,76	0,9971
0,38	0,6480	1,18	0,8810	1,98	0,9761	2,78	0,9973
0,40	0,6554	1,20	0,8849	2,00	0,9772	2,80	0,9974
0,42	0,6628	1,22	0,8888	2,02	0,9783	2,82	0,9976
0,44	0,6700	1,24	0,8925	2,04	0,9793	2,84	0,9977
0,46	0,6772	1,26	0,8962	2,06	0,9803	2,86	0,9979
0,48	0,6844	1,28	0,8997	2,08	0,9812	2,88	0,9980
0,50	0,6915	1,30	0,9032	2,10	0,9821	2,90	0,9981
0,52	0,6985	1,32	0,9066	2,12	0,9830	2,92	0,9982
0,54	0,7054	1,34	0,9099	2,14	0,9838	2,94	0,9984
0,56	0,7123	1,36	0,9131	2,16	0,9846	2,96	0,9985
0,58	0,7190	1,38	0,9162	2,18	0,9854	2,98	0,9986
0,60	0,7257	1,40	0,9192	2,20	0,9861	3,00	0,99865
0,62	0,7324	1,42	0,9222	2,22	0,9868	3,10	0,99904
0,64	0,7389	1,44	0,9251	2,24	0,9875	3,20	0,99931
0,66	0,7454	1,46	0,9279	2,26	0,9881	3,30	0,99952
0,68	0,7517	1,48	0,9306	2,28	0,9887	3,40	0,99966
0,70	0,7580	1,50	0,9332	2,30	0,9893	3,50	0,99976
0,72	0,7642	1,52	0,9357	2,32	0,9898	3,60	0,99984
0,74	0,7703	1,54	0,9382	2,34	0,9904	3,80	0,99993
0,76	0,7764	1,56	0,9406	2,36	0,9909	4,00	0,99997
0,78	0,7823	1,58	0,9429	2,38	0,9913	4,50	0,999997

$$\Phi(0,80) = 0,7881$$

$$\Phi(-0,80) = 1 - 0,7881 = 0,2119$$

$$\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\sigma}{2}$$

1. DEITURA: _____ 2. DEITURA: _____

IZENA: _____ NAN: _____ Azterketa-mota: 1

1. Problema (10 puntu, 25 minutu)

Hurrengo taulan agertzen da Euskal Autonomia-Erkidegoaren (EAEaren) 20 eskualdeen banaketa X aldagaiaren arabera, non X den: Ikasketa Unibertsitarioak dituen populazio-portzentajea (Iturria: *Hezkuntzaren Udal Estatistika, 2015*, EUSTAT):

X	Eskualde-kopurua
[10, 20)	8
[20, 25)	8
[25, 35)	4

1. Adierazi banaketa hori dagokion grafikoarekin, eta idatzi zein tartetan dagoen X -en maizen gertatzen den balioa.
2. Bat al datoz banaketa horren batezbestekoa eta mediana? Kalkulatu bi balio tipiko horiek eta interpreta itzazu.
3. Datu horien arabera, adierazgarria (errepresentagarria) al da EAEn Ikasketa unibertsitarioak dituen populazio-portzentajearen batezbesteko hori? Zure erantzuna justifikatzeko, kalkulatu egokia den balio tipikoa.
4. Baldin eskualde guztietan X -en balioa 5 puntutan igoko balitz, nola aldatuko litzateke banaketaren batezbestekoa eta bere adierazgarritasuna? Arrazoitu zure erantzuna.

1. DEITURA: _____ 2. DEITURA: _____

IZENA: _____ NAN: _____ Azterketa-mota: 1

2. Problema (10 puntu, 25 minutu)

Enpresa batek bi produktu esportatzen ditu: A eta B. Gainera, X eta Y aldagai aleatorioek adierazten dituzte, hurrenez hurren, enpresa horrek A eta B produktuetan esportatzen dituen kantitateak (milioitan). (X, Y) -ren dentsitate-funtzio bateratua hau da:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y^2 & \text{balain } x \in (0, 1) \text{ eta } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{bestela.} \end{cases}$$

1. Kalkulatu A produktuan esportatutako unitateak B produktuan esportatutakoak baino gehiago izateko probabilitatea.
2. Kalkulatu X -en bazter dentsitate-funtzioa.
3. Kalkulatu A produktuan esportatutako unitateak 600.000 edo gutxiago izateko probabilitatea.
4. Y -ren bazter dentsitate-funtzioa hau da: $f_Y(y) = \frac{1}{3} + 2y^2$ non $y \in (0, 1)$ den. Kalkulatu A-ren batezbesteko esportazioak, balain B-ren esportazioak milioi 1 unitate badira; hau da, kalkulatu $E(X|Y = 1)$.

1. DEITURA: _____ 2. DEITURA: _____

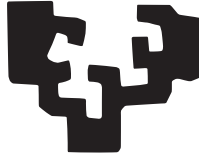
IZENA: _____ NAN: _____ Azterketa-mota: 1

3. Problema (*10 puntu, 25 minutu*)

Makina batek produzitzen dituen piezak 0.1 probabilitatea dute akastunak izateko, independenteki pieza bakoitzean.

1. Proposa ezazu banaketa bat X aldagai aleatorio batentzat, errepresentatuz saio aleatorio hau: aurreko makinarekin produzitzen da pieza bat, zein, behin aztertuta, izan ahal den akastuna ($X = 1$) ala ez ($X = 0$). Kalkulatu X -en momentuen funtzio sortzailea eta, funtzio horretatik abiatuz, kalkulatu X -en batezbestekoa eta bariantza.
2. Proposa ezazu banaketa bat Y aldagai aleatorio batentzat, zeinek adierazten duen zenbat pieza akastun produzituko diren baldin independenteki 20 pieza produzitzen badira (goiko makinarekin). Deduzitu Y -ren momentuen funtzio sortzailea, aurreko atalean lortutako funtzio sortzaile horretatik abiatuta.
3. Proposa ezazu banaketa aproxiatu bat Z aldagai aleatorio batentzat, zeinek adierazten duen zenbat pieza akastun produzituko diren baldin 1000 pieza produzitzen badira independenteki (goiko makinarekin), jakinik Z -ren batezbestekoa 100 dela, eta bere bariantza 90 dela. Azaldu zure erantzuna. Kalkulatu 80 pieza akastun baino gehiago produzitzeko gutxi gorabeherako probabilitatea.

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

JARRAIBIDEAK

1. Azterketak bi zati ditu, lehenengoak 30 galdera ditu, kodifikazio orri laranjan erantzun beharrekoak. Bigarren zatiak hiru problema ditu, 1, 2 eta 3, hauek orden horretan erantzun behar dira eta bakoitza orrialde ezberdin batean. Galdeketa eta problemak ordenean batuko dira: lehenik, galdeketa batuko da; gero 1. problema, ondoren 2. problema, eta azkenik 3. problema.
2. Galdeketa bukatzen denean, $N(0,1)$ banaketaren taula aurkituko duzu.
3. Ez ezazu ahaztu zure N.A.N. ondo idatzi behar duzula, bai orrialde laranjan eta baita entregatuko dituzun problemen orrialde bakoitzean ere.
4. Galdeketan ondo erantzundako galderak puntu 1 balio dute eta txarto erantzundakoek 0,20 puntuko penalizazioa dute. Galdera bakoitzak erantzun zuzen bakarra du.
5. Galdeketak 30 puntu balio du eta problemek beste 30 puntu. Galdeketan 30 puntutik 11 puntu edo gehiago lortu behar dira problemak zuzentzeko.
6. Ebaluazio jarraitua egin behar ez duten ikasleentzat (onartu zaielako), azterketa honen notak irakasgaiaren nota finalaren %100 balio du. Beste guztientzat, azterketa honen notak irakasgaiaren nota finalaren %70 balio du, eta ebaluazio jarraituko notak beste %30. Hala ere, azterketa honetan 10 puntutik gutxienez 4 puntu ateratzea beharrezkoa da ebaluazio jarraituaren nota batu ahal izateko.

Irakasleak abisatu arte ez ikusi hurrengo orrialdea!

1-Motako azterketaren erantzunak

Aukera anitzeko galderak (10 puntu)

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun, EAEko 20 eskualdeetarako, X dela Ikasketa Profesionalak dituen populazio-portzentajea, eta Y dela Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajea. 2015 urtean, bi aldagai horien arteko korrelazioa $r_{xy} = -0.636$ izan da.

1. Amaitu hurrengo esaldia modu egokian: *Kolektibo horretan, Ikasketa Profesionalak dituen populazio-portzentajearen igoera bat, honako honekin lotuta doa, oro har:*

- (a) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen %63.6ko jeitsiera bat*
- (b) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen %63.6ko igoera bat*
- (c) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen jeitsiera bat*
- (d) *Bigarren Hezkuntza dutenen portzentajearen igoera bat*
- (e) Dena faltsua

2. Bi aldagai horiek, ehunekoan adierazi ordez, batekoan adierazten baditugu, euren arteko korrelazioa:

- (a) **Ez da aldatuko**
- (b) Zatituko da zati 100
- (c) Biderkatuko da bider 100
- (d) Zeinuz aldatuko da
- (e) Dena faltsua

3. Hurrengo berdintzetatik: zein da egiazkoa?

- (a) $S_{xy} = -0.636S_xS_y$
- (b) $S_{xy} = 0.636S_xS_y$
- (c) $S_xS_y = -0.636S_{xy}$
- (d) $S_xS_y = 0.636S_{xy}$
- (e) Dena faltsua

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

4. Demagun X a.a.-ren banaketa ezezaguna dela, bere batezbestekoa 5 dela, eta bere bariantza 9 dela. $(-1, 11)$ tartearen probabilitatea gutxienez honako hau da:

- (a) 0,45
- (b) 0,30
- (c) 0,75
- (d) 0,55
- (e) 0,25

5. X aldagai aleatorio baten bariantza, zein momentu-mota da?

- (a) 1. ordenako momentu arrunta
- (b) 1. ordenako momentu zentrala
- (c) 2. ordenako momentu arrunta
- (d) **2. ordenako momentu zentrala**
- (e) Dena faltsua

6. 2014 urtean oinarritutako indize baten 2015 urteko balioa, Laspeyres-en indize modura kalkulatuta 112.7 da, eta Fisher-ren indize modura 108.3 da. Paasche-ren indizearen arabera: zenbat igo dira prezioak 2014tik 2015era?

- (a) %10.48
- (b) %4.07
- (c) %8.30
- (d) %12.70
- (e) %4.40

7. Enpresa batean 100 langile daude, eta horietatik 60 gizonak dira. Bi kategoria profesional daude: zuzendariak eta langile xeheak. Zuzendariak 20 gizon eta 5 emakume dira. Baldin enpresa horretako emakumeen artean aukeratzen badugu bat aleatorioki, emakume hori zuzendaria izateko probabilitatea hau da:

- (a) 0.050
- (b) 0.020
- (c) 0.080
- (d) 0.250
- (e) 0.125

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun A eta B bi gertaera direla, non A gertatzeko probabilitatea 0.4 den, B gertatzeko probabilitatea 0.3 den, eta $P(A|B) = 0.5$ den.

8. Bi gertaera horiek batera gertatzeko probabilitatea hau da:

- (a) 0.15
- (b) 0.12
- (c) 0.55
- (d) 0.70
- (e) 0.20

9. Bi gertaera horietatik, bat ere ez gertatzeko probabilitatea hau da:

- (a) 0.30
- (b) 0.42
- (c) 0.85
- (d) 0.55
- (e) 0.45

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun X a.a zeinen banaketa $N(1, \sigma^2 = 4)$ den.

10. Zein da k -ren balioa non $P(X > k) = 0.025$ den?

- (a) 1.96
- (b) 0.83
- (c) 0.44
- (d) 4.92
- (e) 3.30

11. Demagun $Y = 6X$ aldagai aleatorioa. Y -ren banaketa hau da:

- (a) $N(6, \sigma^2 = 144)$
- (b) $N(6, \sigma^2 = 4)$
- (c) $N(6, \sigma^2 = 24)$
- (d) $N(1, \sigma^2 = 4)$
- (e) Dena faltsua

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

12. Demagun X eta Y bi aldagai estatistiko independente. Orduan, honako hau ziurta dezakegu:

- (a) $S_{xy} = 0$
- (b) $S_{xy} = 1$
- (c) $S_{xy} = -1$
- (d) $S_x^2 = 0$
- (e) $S_y^2 = 0$

13. Baldin 1986 eta 2015 urteen artean Ikasgaita Unibertsitarioak dituzten pertsonen kopurua %44.5 igo bada, orduan tarte horretan aldagai horren urteko batezbesteko hazkunde-tasa metakorra hau da, gutxi gorabehera:

- (a) %0.445
- (b) %0.555
- (c) %1.277
- (d) %1.534
- (e) %3.708

14. Badakigu A hiriko esne-kontsumoaren batezbestekoa B-ren batezbestekoaren doblea dela, eta A-ren esne-kontsumoaren bariantza B-ren bariantza baino lau aldiz handiagoa dela. Bi hirietatik, zeinek dauka esne-kontsumoaren batezbesteko errepresentatiboagoa (adierazgarriagoa)?
- (a) A
 (b) B
 (c) **Bien batezbesteko kontsumoa berdin errepresentatiboa da**
 (d) Ez dugu nahiko informaziorik galdera horri erantzuteko
 (e) Dena faltsua
17. Jakinik denda baten ilaran itxaron behar den denbora (minututan) a.a. bat dela, zeinen banaketa esponentziala den, eta zeinen batezbestekoa 25 den; hau da: $f(x) = \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{25}x}$ eta $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{25}x}$, non $x \geq 0$. Zein da 30 minutu baino gehiago itxaroteko probabilitatea?
- (a) 0.5430
 (b) 0.9994
 (c) 0.0006
 (d) 0.3012
 (e) 0.6988
18. X aldagaiak enpresa batzuen irabaziak adierazten ditu, mila eurotan. Jakinik $2X - 3.4$ transformazioak X aldagaia tipifikatzen duela: zein izango da enpresa horien batezbesteko irabazia?
- (a) 2
 (b) 1.7
 (c) 3.4
 (d) 6.8
 (e) 0.5

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun (X, Y) a.a. zeinen probabilitate-banaketa hauxe den:

$$P(0, 0) = P(0, 1) = P(0, 2) = P(1, 0) = P(1, 1) = 0.2$$

15. $F(0, 5; 1)$ -ren balioa hauxe da:

- (a) 0.2
 (b) 1
 (c) 0.6
 (d) 0.4
 (e) 0.8

16. X -en zenbatasun-funtzio baldintzatua, $Y = 0$ denean, honako hau da:

- (a) $P_{X|Y=0}(0) = 0.5; P_{X|Y=0}(1) = 0.5$
 (b) $P_{X|Y=0}(0) = 0.4; P_{X|Y=0}(1) = 0.6$
 (c) $P_{X|Y=0}(0) = 0.4; P_{X|Y=0}(1) = 0.4; P_{X|Y=0}(2) = 0.2$
 (d) $P_{X|Y=0}(0) = 0.2; P_{X|Y=0}(1) = 0.4; P_{X|Y=0}(2) = 0.4$
 (e) Dena faltsua

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galderak, honako enuntziatuari dagozkio.

Medikamentu batek 100 gaixotatik 8tan bigarren mailako ondorioak sortzen ditu. Aleatorioki aukeratu dira 5 gaixo, elkarren artean independenteak, eta medikamendu hori hartu dute.

19. Bigarren mailako ondorioak gaixo batek ere ez izateko probabilitatea hauxe da:

- (a) 0.92^5
 (b) 0.08^5
 (c) $0.08 \cdot 0.92$
 (d) 0
 (e) $0.92^5 \cdot 0.08^5$

20. Gutxienez bi gaixok bigarren mailako ondo-
orioak izateko probabilitatea hauxe da, gutxi go-
rabehera:

- (a) 0.32
- (b) 0.05**
- (c) 0.14
- (d) 0.01
- (e) 0.25

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

21. Demagun aldagai estatistiko baten lehenengo
kuartilaren balioa 15 dela. Hurrengo aukere-
tatik, zein **ezin** da gertatu inoiz ere?

- (a) 10. pertzentila 7 da
- (b) bigarren dezila 13 da
- (c) 90. pertzentila 55 da
- (d) hirugarren dezila 14 da**
- (e) mediana 30 da

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galde-
rak, honako enuntziatuari dagozkio.

Demagun (X, Y) a.a. bikoitz uniforme, zeinen
dentsitate-funtzioa $f(x, y) = k$ den, non $x \in [0, 2]$
eta $y \in [0, 4]$.

22. k -ren balioa hauxe da:

- (a) $\frac{1}{2}$
- (b) $\frac{1}{4}$
- (c) 8
- (d) $\frac{1}{8}$**
- (e) 1

23. $E(Y)$ -ren balioa hauxe da:

- (a) $\frac{1}{4}$
- (b) 1
- (c) 2**
- (d) $\frac{1}{8}$
- (e) 3

24. $E(XY)$ -ren balioa hauxe da:

- (a) $\frac{1}{4}$
- (b) 1
- (c) 2**
- (d) $\frac{1}{8}$
- (e) 3

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

GALDERA MULTZO BATEN HASIERA

Hurrengo lerro horizontalaren aurretik dauden galde-
rak, honako enuntziatuari dagozkio.

X aldagai estatistikoaren banaketa hauxe da:

x_i	f_i	q_i	F_i	Q_i
15	0.4	0.285	0.4	0.285
22.5	0.4	0.430	0.8	0.715
30	0.2	0.285	1	1

25. Banaketa horri dagokion Lorenz-en kurbaren
puntu bat hauxe da:

- (a) (0.285; 0.4)
- (b) (0.4; 0.430)
- (c) (0.2; 0.285)
- (d) (0.8; 0.715)**
- (e) Dena faltsua

26. X -en Giniren indizearen balioa hauxe da:

- (a) 0.143**
- (b) 0.572
- (c) 0.486
- (d) 0.314
- (e) 0.257

GALDERA MULTZO BATEN AMAIERA

27. Demagun X a.a. zeinen banaketa jarraitua den,
eta zeinen batezbestekoa, m , negatiboa den.
Honako hau beteko da:

- (a) $E(X - m) < 0$
- (b) $\sigma^2 > \alpha_2$
- (c) $\sigma^2 = \alpha_2$
- (d) X ez dago zentratua**
- (e) Dena faltsua

28. Demagun X a.a bat banaketa normala duena, zeinen batezbestekoa 100 den, eta zeinen bariantza 25 den. Orduan $Y = 2X$ a.a.-ren balioa 200 baino txikiago izateko probabilitatea hau da:
- (a) 1
 - (b) 0,40
 - (c) 0,50
 - (d) 0,80
 - (e) 0,25
29. Demagun X a.a. zeinen banaketa $N(0, \sigma^2)$ den. Orduan, honako hau zierda dezakegu:
- (a) $\sigma^2 = 1$
 - (b) $P(X > 1.2) > P(X < -1.2)$
 - (c) $P(X < -1) = P(X < 1)$
 - (d) $P(1 < X < 2) > P(4 < X < 5)$
 - (e) $\sigma^2 < 1$
30. Dado erregular bat bi alditan jaurtiz, bi aldagai aleatorio definitu ditugu. X a.a. lehenengo jaurtiketaren emaitzarekin lotu dugu: 0 balioa hartzen du baldin dadoaren emaitza 1 bada; 1 balioa hartzen du baldin dadoaren emaitza 2, 3 edo 4 bada; eta 2 balioa hartzen du baldin dadoaren emaitza 5 edo 6 bada. Bestalde, Y a.a. bigarren jaurtiketaren emaitzarekin lotu dugu: 0 balioa hartzen du dadoaren emaitza bikoitia bada, eta 1 balioa baldin emaitza bakoitia bada. Orduan, $E(X|Y = 0)$ -ren balioa hau da, gutxi gorabehera:
- (a) 0.50
 - (b) 0.33
 - (c) 3.50
 - (d) 1.17
 - (e) 0.08

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

1. Problema (10 puntu, 25 minutu)

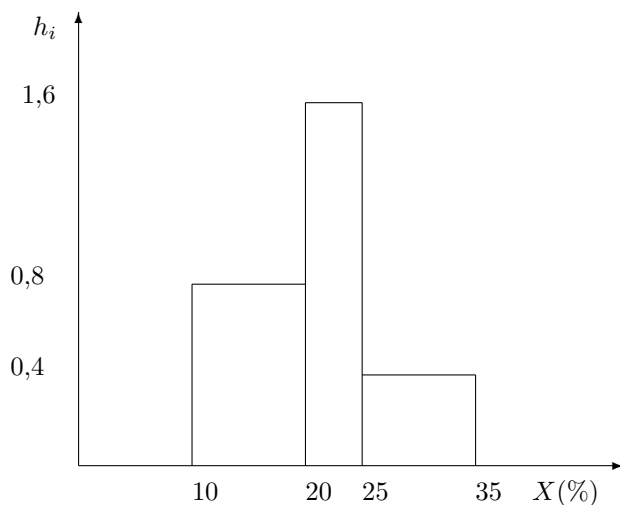
Hurrengo taulan agertzen da Euskal Autonomia-Erkidegoaren (EAEaren) 20 eskualdeen banaketa X aldagaiaren arabera, non X den: Ikasketa Unibertsitarioak dituen populazio-portzentajea (Iturria: *Hezkuntzaren Udal Estatistika, 2015*, EUSTAT):

X	Eskualde-kopurua
[10, 20)	8
[20, 25)	8
[25, 35)	4

1. Adierazi banaketa hori dagokion grafikoarekin, eta idatzi zein tartetan dagoen X -en maizen gertatzen den balioa.

Erantzuna:

X	Eskualde-kopurua	c_i	h_i	Klase-marka(x_i)	N_i
[10, 20)	8	10	0,8	15	8
[20, 25)	8	5	1,6	22,5	16
[25, 35)	4	10	0,4	30	20



Maizen agertzen den balioa, tarte modalean dago, hau da [20, 25) tartean.

2. Bat al datoz banaketa horren batezbestekoa eta mediana? Kalkulatu bi balio tipiko horiek eta interpreta itzazu.

Erantzuna:

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_i x_i n_i = 21\%$$

$$\text{Me} = 20 + \frac{10 - 8}{16 - 8} 5 = 21.25\%$$

Ez datoz bat.

EAEko eskualdeetan ikasketa unibertsitarioak diuen batezbesteko portzentajea %21 da. Eskualdeen erdiak dauka ikasketa unibertsitarioak dituen populazio-portzentajea berdin edo txikiago %21,25.

3. Datu horien arabera, adierazgarria (errepresentagarria) al da EAEn Ikasketa unibertsitarioak dituen populazio-portzentajearen batezbesteko hori? Zure erantzuna justifikatzeko, kalkulatu egokia den balio tipikoa.

Erantzuna:

$$a_2 = \frac{1}{20} \sum_i x_i^2 n_i = 472,5$$

$$S_x^2 = a_2 - \bar{x}^2 = 472,5 - 21^2 = 31,5$$

$$g_o = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{31,5}}{21} = 0,267$$

Aldakuntz-koefizientea 1 baino txikiagoa denez, ondorioztatu ahal dugu batezbesteko portzentajea adierazgarria dela.

4. Baldin eskualde guztietan X -en balioa 5 puntutan igoko balitz, nola aldatuko litzateke banaketaren batezbestekoa eta bere adierazgarritasuna? Arrazoitu zure erantzuna.

Erantzuna:

Baldin eskualde guztietan X -en balioa 5 puntutan igoko balitz, orduan aldagai berria, Y , hauke litzateke: $Y = X + 5$.

Orduan, $\bar{y} = \bar{x} + 5$, eta $S_y = S_x$.

Beraz,

$$g_0(Y) = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{S_x}{\bar{x} + 5} < \frac{S_x}{\bar{x}} = g_0(X)$$

Hau da, orain batezbestekoa adierazgarriagoa da.

2. Problema (10 puntu, 25 minutu)

Enpresa batek bi produktu esportatzen ditu: A eta B. Gainera, X eta Y aldagai aleatorioek adierazten dituzte, hurrenez hurren, enpresa horrek A eta B produktuetan esportatzen dituen kantitateak (milioitan). (X, Y) -ren dentsitate-funtzio bateratua hauke da:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y^2 & \text{baldin } x \in (0, 1) \text{ eta } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{bestela.} \end{cases}$$

1. Kalkulatu A produktuan esportatutako unitateak B produktuan esportatutakoak baino gehiago izateko probabilitatea.

Erantzuna:

$$P(X > Y) = \int_0^1 \int_y^1 (x^2 + 2y^2) dx dy = \frac{5}{12}$$

2. Kalkulatu X -en bazter dentsitate-funtzioa.

Erantzuna:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x^2 + 2y^2) dy = x^2 + \frac{2}{3}, \text{ non } x \in (0, 1)$$

3. Kalkulatu A produktuan esportatutako unitateak 600.000 edo gutxiago izateko probabilitatea.

Erantzuna:

$$P(X \leq 0.6) = \int_0^{0.6} (x^2 + \frac{2}{3}) dx = 0.472$$

4. Y -ren bazter dentsitate-funtzioa hauke da: $f_Y(y) = \frac{1}{3} + 2y^2$ non $y \in (0, 1)$ den. Kalkulatu A-ren batezbesteko esportazioak, baldin B-ren esportazioak milioi 1 unitate badira; hau da, kalkulatu $E(X|Y = 1)$.

Erantzuna:

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f(x, 1)}{f_Y(1)} = \frac{3}{7}(x^2 + 2), \text{ para } x \in (0, 1)$$

$$E(X|Y = 1) = \int_0^1 x \frac{3}{7}(x^2 + 2) dx = 0.5357$$

3. Problema (10 puntu, 25 minutu)

Makina batek produzitzen dituen pieza 0.1 probabilitatea dute akastunak izateko, independenteki pieza bakoitzean.

1. Proposa ezazu banaketa bat X aldagai aleatorio batentzat, errepresentatuz saio aleatorio hau: aurreko makinarekin produzitzen da pieza bat, zein, behin aztertuta, izan ahal den akastuna ($X = 1$) ala ez ($X = 0$). Kalkulatu X -en momentuen funtzio sortzailea eta, funtzio horretatik abiatuz, kalkulatu X -en batezbestekoa eta bariantza. **Erantzuna:**

Banaketa hori da banaketa binarioa $p = 0, 1$ parametroa duena; hau da, a.a. bat, 0 eta 1 balioak hartzen dituen eta Probabilitate hauek dituen: $P(0) = 0, 9$ y $P(1) = 0, 1$.

Bere momentuen funtzio sortailea hau izango da:

$$\alpha_X(u) = E(e^{ux}) = 0,9e^0 + 0,1e^u = 0,9 + 0,1e^u$$

Momentuen funtzio sortaile horretatik abiatuz, X -en batezbestekoa eta bariantza kalkulatzeko, honako erlazio hau erabiliko dugu: $\alpha^{(k)}(u=0) = \alpha_k$.

Horrela,

$$\alpha'(u) = 0,1e^u \Rightarrow m = \alpha_1 = \alpha'(u=0) = 0,1$$

Beste alde batetik,

$$\alpha''(u) = 0,1e^u \Rightarrow \alpha_2 = \alpha''(u=0) = 0,1 \Rightarrow \sigma^2 = \alpha_2 - m^2 = 0,1 - 0,1^2 = 0,09$$

2. Proposa ezazu banaketa bat Y aldagai aleatorio batentzat, zeinek adierazten duen zenbat pieza akastun produzituko diren baldin independenteki 20 pieza produzitzen badira (goiko makinarekin). Deduzitu Y -ren momentuen funtzio sortailea, aurreko atalean lortutako funtzio sortaile horretatik abiatuta.

Erantzuna:

Y a.a. lortzen da batuz 20 a.a. independente, non 20 a.a. horietako bakoitza $b(p=0,1)$ den (problema honen lehenengo ataleko banaketa). Beraz, Y -ren banaketa izango da honako binomial hau: $b(p=0,1; n=20)$.

Y -ren momentuen funtzio sortailea lortuko da honako propietate hau erabiliz: baldin X_1, X_2, \dots, X_n elkarren artean a.a. independenteak badira, eta $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, orduan beteko da hau:

$$\alpha_Y(u) = \alpha_{X_1}(u) \bullet \alpha_{X_2}(u) \bullet \dots \bullet \alpha_{X_n}(u)$$

Eta kontuan hartuta gure kasu honetan X_i aldagai guztiak funtzio sortaile bera dutela,

$$\alpha_Y(u) = \alpha_{X_i}(u)^{20} = (0,9 + 0,1e^u)^{20}$$

3. Proposa ezazu banaketa aproximatu bat Z aldagai aleatorio batentzat, zeinek adierazten duen zenbat pieza akastun produzituko diren baldin 1000 pieza produzitzen badira independenteki (goiko makinarekin), jakinik Z -ren batezbestekoa 100 dela, eta bere bariantza 90 dela. Azaldu zure erantzuna. Kalkulatu 80 pieza akastun baino gehiago produzitzeko gutxi gorabeherako probabilitatea. **Erantzuna:**

Z a.a. lortzen da batuz 100 a.a. independente, non 100 a.a. horietako bakoitza $b(p=0,1)$ den (problema honen lehenengo ataleko banaketa).

Nola batutako a.a.-en kopurua oso handia den, Limitearen Teorema Zentrala aplikatuz, honako hau beteko da:

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000} \sim AN(100, \sigma^2 = 90)$$

$$P(Z > 80) = 1 - F(80) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{80 - 100}{\sqrt{90}}\right) = 1 - \Phi(-2,108) \simeq \Phi(2,10) = 0,9821$$