TRATAMIENTO DE SEÑALES: PRIMER PARCIAL

La puntuación total del examen es de 30 puntos divididos en:

Problema 1: 10 puntos. Todas las cuestiones tienen el mismo peso.

Problema 2: 10 puntos.

Problema 3: 10 puntos.

El tiempo estimado para resolver el examen es de dos horas.

PROBLEMA 1 (10 puntos, 40 minutos)

1. Analiza si el siguiente sistema es lineal y/o invariante en tiempo. En caso afirmativo calcular su respuesta impulsional. En cualquier caso, analizar también si es causal y/o estable.

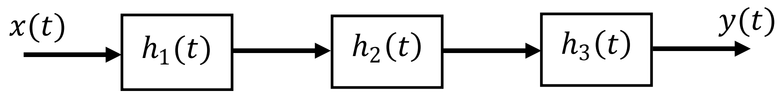
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+2} x(\tau)d\tau$$

1. Sea las señal $x(t) = 220 + A_1 \cos(2\pi 50t) + A_7 \cos(2\pi 350t)$ que se muestrea a f_s=1250 Hz para obtener la señal discreta x[n]. Analizar si ambas señales son periódicas, y en caso afirmativo calcular su periodo fundamental (en segundos o en muestras según corresponda).

2. Calcular y representar la señal y[n]=x[n]*x[n], siendo x[n]=a^n u[n] con |a|<1.

PROBLEMA 2 (10 puntos, 40 minutos)

A partir del esquema de la figura:



Donde: $h_1(t) = \delta(t-1)$, $h_2(t) = \Pi\left(\frac{t-4}{2}\right)$, $h_3(t) = \Pi\left(\frac{t+3}{2}\right)$

a) Analizar la causalidad y estabilidad de cada uno de los sistemas, $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$. (2 p)

b) Calcular y dibujar la respuesta impulsional del sistema completo, $h_T(t)$. (4 p)

c) Analizar la causalidad y estabilidad de $h_T(t)$. (1 p)

d) Calcular y dibujar la salida del sistema para $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k3)$. (3 p)

PROBLEMA 3 (10 puntos, 40 minutos)

Sea el sistema discreto cuya ecuación en diferencias viene dado por:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] + ay[n-1]$$

Se pide:

a) Indicar tipo de sistema y orden. (1 p)

b) La implementación mediante diagrama de bloques en la forma directa II. (2 p)

c) Calcular la respuesta impulsional del sistema en función de a. Indicar la condición que debe de cumplir a para que el sistema sea estable. (3 p)

d) Para $a = \frac{1}{2}$ calcular la respuesta del sistema al escalón unidad. (3 p)

e) Filtrar la señal de entrada x[n]={ $\underline{1}$, 0, -1, 1 }. (1 p)

SEINALEEN PROZESATZEA: LEHEN PARTZIALA

Azterketak 3 ariketa ditu. Ariketa bakoitzak 10 puntu balio ditu, eta 1. ariketako galdera guztiek pisu berdina dute. Bi ordu dituzue.

1. ARIKETA (10 puntu, 40 minutu)

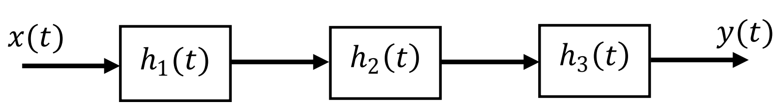
1. Aztertu honako sistema lineala edota denboran aldaezina den. LTI sistema denean kalkultatu bere pultsu erantzuna, h(t). Edonola ere, aztertu kausala edota egonkorra den.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+2} x(\tau)d\tau$$

2. Izen bedi $x(t) = 220 + A_1 \cos(2\pi 50t) + A_7 \cos(2\pi 350t)$ seinalea, f_s=1250 Hz maiztasunarekin lagintzen dena x[n] lortzeko. Aztertu bi seinaleak periodikoak diren, eta baiezkoetan kalkulatu bere oinarrizko periodoa (segundotan edo laginetan, dagokien arabera).
3. Kalkulatu eta irudikatu honako seinalea: y[n]=x[n]*x[n], non $x[n]=a^n u[n]$ eta |a|<1.

2. Ariketa (10 puntu, 40 minutu)

Aztertu irudiko sistema, non $h_1(t) = \delta(t-1)$, $h_2(t) = \Pi\left(\frac{t-4}{2}\right)$ eta $h_3(t) = \Pi\left(\frac{t+3}{2}\right)$



Honakoak eskatzen dira:

a) Aztertu sistema bakoitzaren kausalitatea eta egonkortasuna, $h_1(t)$, $h_2(t)$ eta $h_3(t)$ sistemena, alegia. (2 p)
b) Kalkulatu eta irudikatu sistema osoaren pultsu-erantzuna, $h_T(t)$. (4 p)
c) Aztertu $h_T(t)$-ren kausalitatea eta egonkortasuna. (1 p)
d) Kalkulatu eta irudikatu sistemaren irteera honako sarrera-seinalearentzat: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$. (3 p)

3. Ariketa (10 puntu, 40 minutu)

Izan bedi honako diferentzia-ekuazioaren bidez deskribatzen den sistema:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] + a\,y[n-1]$$

Honakoak eskatzen dira:

a) Azaldu zein motatako eta ordenako sistema den. (1 p)

b) Irudikatu sistemaren bloke-diagrama II. era zuzeneko egituran inplementatuz. (2 p)

c) Kalkulatu sistemaren pultsu-erantzuna a-ren menpe. Zein balditza bete behar du a-k sistema egonkorra izateko ? (3 p)

d) Hartu $a = \frac{1}{2}$ eta kalkulatu sistemaren erantzuna unitate-maila sekuentziari. (3 p)

e) Iragazi sarrera-seinale hau: x[n]={ $\underline{1}$, 0, -1, 1 }. (1 p)

$\boxed{1}$ $y(t) = \int_{-\infty}^{t+2} x(\tau)\, d\tau = S\{x(t)\}$

- LINEALA ?

$S\{a x_1(t) + b x_2(t)\} \stackrel{?}{=} a\, S\{x_1(t)\} + b\, S\{x_2(t)\}$ BAI. LINEALA

$S\{a x_1(t) + b x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{t+2} [a x_1(\tau) + b x_2(\tau)]\, d\tau = a \int_{-\infty}^{t+2} x_1(\tau)\, d\tau + b \int_{-\infty}^{t+2} x_2(\tau)\, d\tau$

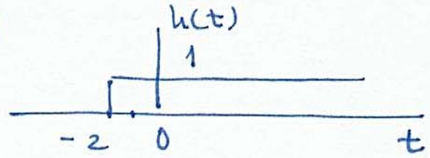
- ALDAEZINA ?

$S\{x(t-t_0)\} \stackrel{?}{=} y(t-t_0)$ SI. INVARIANTE

BAI. ALDAEZINA

$S\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{t+2} x(\tau - t_0)\, d\tau = \{\tau - t_0 = \tau'\} = \int_{-\infty}^{t-t_0+2} x(\tau')\, d\tau' = y(t-t_0)$

- $h(t) = S\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{t+2} \delta(\tau)\, d\tau = u(t+2)$



- EZ-KAUSALA $h(t) \neq \emptyset \;\; \forall t < \emptyset$

- EZEGONKORRA $\int |h(t)|\, dt = \infty$

$\boxed{2}$ $x(t) = 220 + A_1 \cos(2\pi 50 t) + A_2 \cos(2\pi \cdot 350 t)$ = suma de dos cos, ambos periódicos, T_1 y T_2

$T_1 = 1/50\ s$, $\omega_1 = 2\pi 50$

$T_2 = \frac{1}{350}\ s$, $\omega_2 = 2\pi \cdot 350$

$\Big\rangle \;\; \frac{T_1}{T_2} = \frac{350}{50}$ = arrazionala $\Rightarrow$

x(t) PERIODIKOA da

$T_0 = mkt(1/50, 1/350) = \frac{1}{50}\ s = 0'02\ s.$

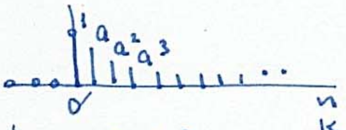
$x[n] = x(t = n/f_s) = 220 + A_1 \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi 50 n}{1250}}_{\Omega_1}\right) + A_2 \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi \cdot 350\, n}{1250}}_{\Omega_2}\right)$

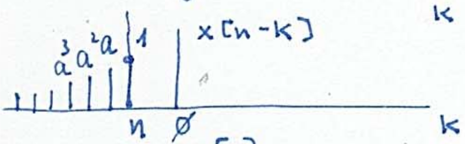
$\Omega_1 = \frac{2\pi}{25} \rightarrow N_1 = 25$ periodikoa

$\Omega_2 = \frac{2\pi \cdot 7}{25} \rightarrow N_2 = 25$ periodikoa

x[n], periodikoa, $N_0 = 25$ lagin (muestras)

$\boxed{3}$ $x[n] = a^n u[n]$





$y[n] = x[n] * x[n] = \sum_k x[k]\, x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k} =$ ($n \geq 0$)

$= a^n \sum_{k=\emptyset}^{n} a^k a^{-k} = a^n \cdot (n+1)$

$y[n] = a^n (n+1)\, u[n]$

Beste era bat (otra forma):

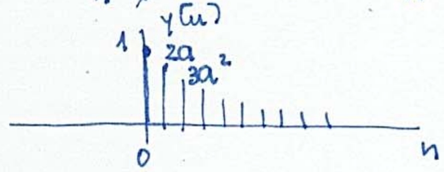
$y[n] = \emptyset \;\; \forall n < \emptyset \qquad y[\emptyset] = 1$

$y[1] = a + a = 2a$

$y[2] = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$

$y[3] = a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3 \ldots$

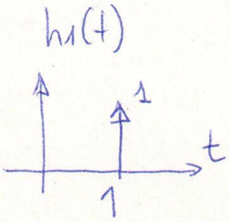
$y[n] = (n+1)\, a^n \;\; \forall n \geq \emptyset$



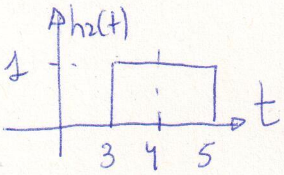
$\boxed{2}$ $h_1(t) = \delta(t-1)$; $h_2(t) = \Pi\left(\frac{t-4}{2}\right)$; $h_3(t) = \Pi\left(\frac{t+3}{2}\right)$

a) Causal si $h(t) = 0 \;\; \forall t < 0$

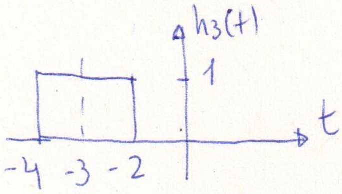
Estable si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$



- Causal
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)\, dt = 1 \Rightarrow$ Estable



- Causal
- $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-4}{2}\right) dt = \int_{3}^{5} 1\, dt = 2 \Rightarrow$ Estable

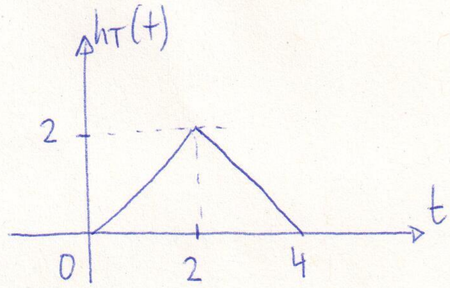


- No causal
- $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t+3}{2}\right) dt = \int_{-4}^{-2} 1\, dt = 2 \Rightarrow$ Estable

b) Conexión en serie $\Rightarrow$ $h_T(t) = \underbrace{h_1(t) * h_2(t)}_{①} * h_3(t)$

① $\delta(t-1) * \Pi\left(\frac{t-4}{2}\right) = \Pi\left(\frac{t-5}{2}\right)$

$\| \; x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \; \|$



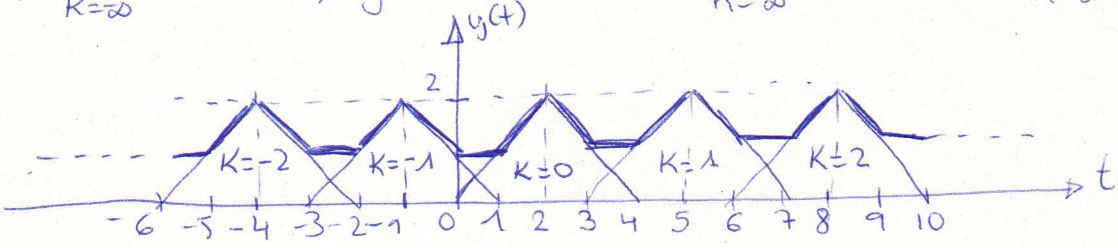
$\left[h_T(t) = \Pi\left(\frac{t-5}{2}\right) * \Pi\left(\frac{t+3}{2}\right) = 2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) \right]$

$$\left\| \begin{array}{l} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = T\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \\ x(t-t_0) * x(t-t_1) = y(t-(t_0+t_1)) \end{array} \right\|$$

c) $h_T(t)$ causal.

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{0}^{4} |h(t)|\, dt = 4 \Rightarrow$ Estable

d) $x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t-3K)$; $y(t) = x(t) * h_T(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} h_T(t-3K) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2\Lambda\left(\frac{t-2-3K}{2}\right)$

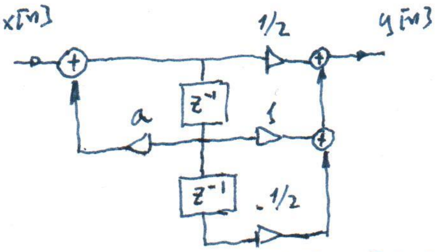


PROBLEMA 3

$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] + a\,y[n-1]$

$\boxed{a}$ Sistema recurrente IIR (aparece $y[n-1]$) de orden 2 (diferencia de mayor orden $x[n-2]$)

$\boxed{b}$



$\boxed{c}$ $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2] + a\,h[n-1] \longrightarrow$

$n=0 \to h[0] = 1/2$

$n=1 \to h[1] = 1 + a/2$

$n=2 \to h[2] = -\frac{1}{2} + a + \frac{a^2}{2}$

$n=3 \to h[3] = -\frac{a}{2} + a^2 + \frac{a^3}{2}$

$\vdots$

$\Rightarrow$

$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \left(1+\frac{a}{2}\right)\delta[n-1] + a^{n-2}\left(-\frac{1}{2}+a+\frac{a^2}{2}\right)u[n-2]$

$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1/2 & n=0 \\ 1+\frac{a}{2} & n=1 \\ a^{n-2}\left(-\frac{1}{2}+a+\frac{a^2}{2}\right) & n\geq 2 \end{cases}$$

Para que $\sum_n |h[n]| < \infty \Rightarrow |a|<1$

$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \left(1+\frac{a}{2}\right)\delta[n-1] + \sum_{k=2}^{\infty} a^{k-2}\left(-\frac{1}{2}+a+\frac{a^2}{2}\right)\delta[n-k]$

$\boxed{d}$ A partir de la ec. en diferencias: $y[n] = \frac{1}{2}u[n] + u[n-1] - \frac{1}{2}u[n-2] + \frac{1}{2}y[n-1]$

$n=0 \quad y[0] = 1/2$

$n=1 \quad y[1] = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = 7/4$

$n=2 \quad y[2] = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{7}{4} = \frac{15}{8}$

$n=3 \quad y[3] = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{8} = \frac{31}{16}$

$n=4 \quad y[4] = 1 + \frac{1}{2}\frac{31}{16} = \frac{63}{32}$

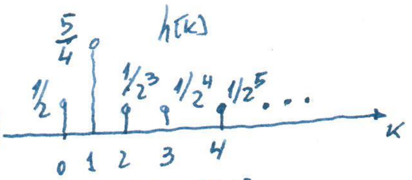
$\vdots$

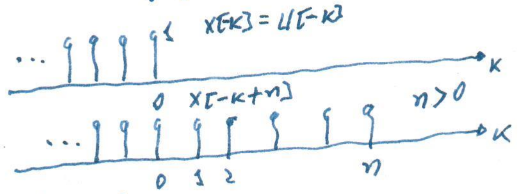
$$y[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1/2 & n=0 \\ \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}} & n\geq 1 \end{cases}$$

$y[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}u[n-1]$

$y[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}}\delta[n-k]$

Mediante convolución: $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k h[k]x[n-k]$





$n<0 \to y[n] = 0$

$n=0 \to y[0] = 1/2$

$n=1 \to y[1] = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} = 7/4$

$n\geq 2 \to y[n] = \frac{7}{4} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{7}{4} + \frac{\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-1/2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$y[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{7}{4}\delta[n-1] + \left(2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)u[n-2]$

También: $y[n] = u[n] * h[n] = u[n] * \left(\frac{1}{2}\delta[n] + \left(1+\frac{a}{2}\right)\delta[n-1] + \sum_{k=2}^{\infty} a^{k-2}\left(-\frac{1}{2}+a+\frac{a^2}{2}\right)\delta[n-k]\right)$ que para $a = \frac{1}{2}$

queda: $y[n] = \frac{1}{2}u[n] + \frac{5}{4}u[n-1] + \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-2}}u[n-k]$

$\boxed{e}$ $x[n] = \{1, 0, -1, 1\}$

$y[n] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{11}{16}\right\}$

$y[0] = \frac{1}{2}$

$y[1] = \frac{1}{2}x[1] + x[0] + \frac{1}{2}y[0] = 0 + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$y[2] = \frac{1}{2}x[2] + x[1] - \frac{1}{2}x[0] + \frac{1}{2}y[1] = -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{5}{4} = -\frac{3}{8}$

$y[3] = \frac{1}{2}x[3] + x[2] - \frac{1}{2}x[1] + a\,y[2] = \frac{1}{2} - 1 + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{16} = -\frac{11}{16}$

SEINALEEN PROZESATZEA: OHIKO DEIALDIA, 1. partziala

Azterketak 3 ariketa ditu. Ariketa bakoitzak 10 puntu balio ditu, eta 1. ariketako galdera guztiek pisu berdina dute. Ordu eta erdi duzue.

1. ARIKETA (10 puntu, 30 minutu)

1. Kalkulatu hurrengo sekuentzien batez besteko potentzia:

   a) $x[n] = 2$
   b) $x[n] = 2\, u[n]$
   c) $x[n] = 3\, e^{j\frac{2\pi}{5}n}$

2. Lortu analitikoki eta irudikatu y(t)=x(t)*h(t), non x(t)=u(t) eta $h(t)=e^{-t}\,u(t)$ diren.

3. Izen bedi $h[n]=\{\underline{1}, 0, 1/2\}$ pultsu-erantzuna duen sistema diskretua. Aztertu sistema kausala edota egonkorra den. Lortu sistemaren diferentzia-ekuazioa. Kalkulatu sistemaren erantzuna sarrera-seinalea x[n]=u[n] denean.

2. Ariketa (10 puntu, 30 minutu)

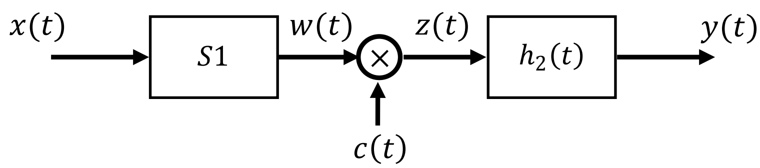
1. Izan bedi ondoko diferentzia-ekuazioa duen sistema (hasierako baldintzak nuluak dira):

$$y[n] - \alpha^2 y[n-3] = x[n]$$

   a. Adierazi zein sistema mota eta zein mailakoa den. Arrazoitu. (1p)
   b. Iragazi ondoko seinalea $x[n] = \{\underline{-1}, 0,1,0,3\}$. (3 p)
   c. Kalkulatu $h[n]$, sistemaren pultsu-erantzunaren adierazpide analitikoa. (3 p)
   d. Arrazoitu sistema kausala den, eta zehaztu α konstante errealak bete behar duen baldintza sistema egokorra izan dadin. (3 p)

3. Ariketa (10 puntu, 30 minutu)

Izan bedi $x(t) = 2\Lambda(t/2)$, irudiko sistemaren sarrera-seinalea:



Non:

- S1 sistema: $y(t) = x(t-2) - 0.5x(t-6)$ sarrera-irteera erlazioa duen sistema.
- $c(t) = \delta(t-2) + \delta(t-6)$
- $h_2(t) = u(t+2)$

Erantzun hurrengo galderak:

a. Aztertu S1 sistema lineala edota denboran aldaezina den. (2p)

b. Kalkulatu S1 sistemaren pultsu-erantzuna, $h_1(t)$. Kalkulatu $w(t)$ konboluzioa erabilita eta irudikatu $w(t)$. (2p)

c. Kalkulatu eta irudikatu $z(t)$. (2p)

d. Aztertu $h_2(t)$ pultsu-erantzuna duen sistema kausala edota egonkorra den. (2p)

e. Kalkulatu eta irudikatu $y(t)$. (2p)

TRATAMIENTO DE SEÑALES: Convocatoria ordinaria
Primer Parcial

El tiempo estimado para resolver el examen es de una hora y 30 minutos.
Las 3 cuestiones del problema 1 tienen el mismo valor.

PROBLEMA 1 (10 puntos, 30 minutos)

1. Calcular la potencia media de las siguientes secuencias:

   a) $x[n] = 2$
   b) $x[n] = 2\,u[n]$
   c) $x[n] = 3\,e^{j\frac{2\pi}{5}n}$

2. Obtener analíticamente y representar gráficamente y(t)=x(t)*h(t) para x(t)=u(t) y $h(t)=e^{-t}\,u(t)$.

3. Sea un sistema discreto cuya respuesta impulsional es $h[n]=\{\underline{1}, 0, 1/2\}$. Analizar la causalidad y estabilidad del sistema. Obtener la ecuación en diferencias del sistema. Calcular la respuesta del sistema cuando la entrada es x[n]=u[n].

PROBLEMA 2 (10 puntos, 30 minutos)

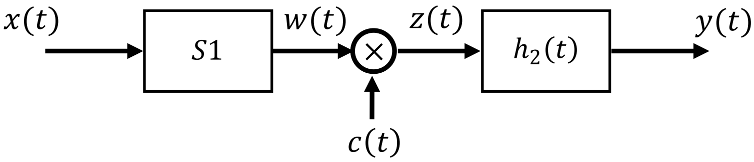
1. Sea el sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias (las condiciones iniciales son nulas):

$$y[n] - \alpha^2 y[n-3] = x[n]$$

   a. Especificar el tipo y orden del sistema. Justificar. (1p)
   b. Filtrar la siguiente señal $x[n] = \{\underline{-1}, 0,1,0,3\}$. (3 p)
   c. Calcular y expresar analíticamente $h[n]$, la respuesta impulsional del sistema. (3 p)
   d. Indicar si el sistema es causal (justificar) y determinar la condición que debe cumplir la constante α real para que el sistema sea estable. (3 p)

PROBLEMA 3 (10 puntos, 30 minutos)

Sea $x(t) = 2\wedge(t/2)$, la señal de entrada al sistema de la figura:



Donde:

- S1: sistema con la característica entrada-salida: $y(t) = x(t-2) - 0.5x(t-6)$
- $c(t) = \delta(t-2) + \delta(t-6)$
- $h_2(t) = u(t+2)$

Se pide:

a. Estudiar la linealidad y la invarianza temporal de S1. (2p)

b. Calcular $h_1(t)$ la respuesta impulsional de S1. Calcular $w(t)$ mediante convolución. Dibujar $w(t)$. (2p)

c. Calcular y dibujar $z(t)$. (2p)

d. Estudiar la causalidad y la estabilidad de $h_2(t)$. (2p)

e. Calcular y dibujar $y(t)$. (2p)

Probleme 1

1. $$P_T \overset{\text{real}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^2[n] \overset{\text{complejo}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

a) $$\sum_{n=-N}^{N} 2 = 2\cdot(2N+1) \leadsto \boxed{P_T = 2} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{2\cancel{(2N+1)}}{\cancel{2N+1}} = 2$$

b) $$\sum_{n=-N}^{N} 2\cdot u[n] = \sum_{n=0}^{N} 2 = 2\cdot(N+1)$$

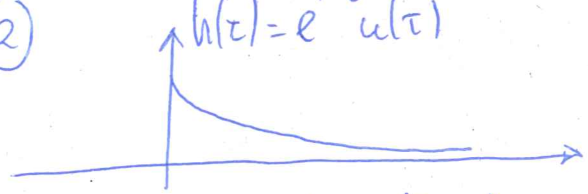
$$P_T = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\, 2\cdot(N+1) = \boxed{1 = P_T}$$

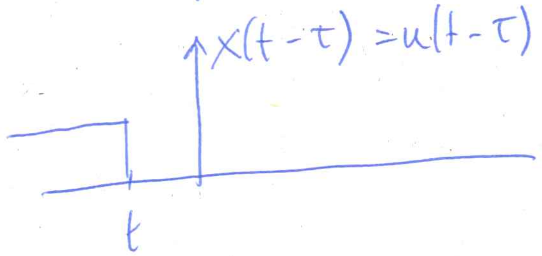
c) $$x[n] = 3e^{j\frac{2\pi}{5}n} \qquad |x[n]| = 3\cdot 1$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-N}^{N} 9 = 9(2N+1)$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{9\cancel{(2N+1)}}{\cancel{2N+1}} = 9 \qquad \boxed{P_T = 9}$$

2.





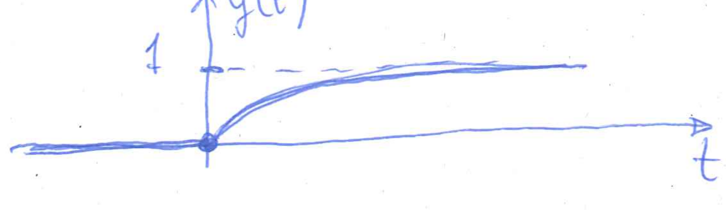
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

$t < \emptyset \qquad y(t) = \emptyset$ sinsolape

$$t \geq \emptyset \quad y(t) = \int_0^t e^{-\tau}\,d\tau =$$

$$= -e^{-\tau}\Big]_0^t = (1-e^{-t})$$

$$y(t) = (1-e^{-t})u(t)$$



(3) $h[n] = \{1, 0, \frac{1}{2}\} = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$

$h[n] = 0 \qquad n < 0$ kausala

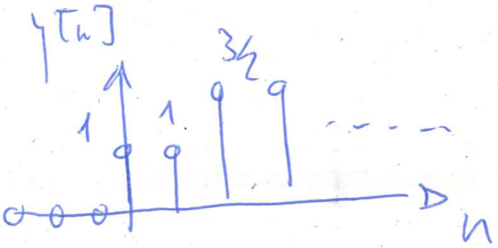
$\sum |h[n]| = \frac{3}{2} < \infty$ egonkorra

Diferentzia ekuazioa → FIR sistema

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} x[n-2]$$

$x[n] = u[n] \rightsquigarrow y[n] = u[n] + \frac{1}{2} u[n-2] =$

$= \delta[n] + \delta[n-1] + \frac{3}{2} u[n-2]$



② $y[n] - \alpha^2 y[n-3] = x[n] \Rightarrow y[n] = x[n] + \alpha^2 y[n-3]$

ⓐ Tipo IIR ya que es recursivo (término $y[n-3]$) si $\alpha \neq \emptyset$.

Orden $N=3$ el mayor retardo de la ec. en diferencias.

ⓑ $x[n] = \{\underline{-1}, 0, 1, 0, 3\}$

Condiciones iniciales nulas $y[n] = \emptyset \quad n < \emptyset$

$y[\emptyset] = x[\emptyset] = -1$

$y[1] = x[1] = \emptyset$

$y[2] = x[2] = 1$

$y[3] = x[3] + \alpha^2 y[\emptyset] = -\alpha^2$

$y[4] = x[4] + \alpha^2 y[1] = 3$

$y[n] = \{-1, 0, 1, -\alpha^2, 3\}$ las 5 primeras muestras.

ⓒ $h[n]$ la salida para $x[n] = \delta[n]$

$y[n] = \emptyset \quad n < \emptyset$ (cond iniciales nulas)

$y[\emptyset] = \delta[\emptyset] = 1$

$y[1] = y[2] = \emptyset$

$y[3] = \alpha^2 y[\emptyset] = \alpha^2$

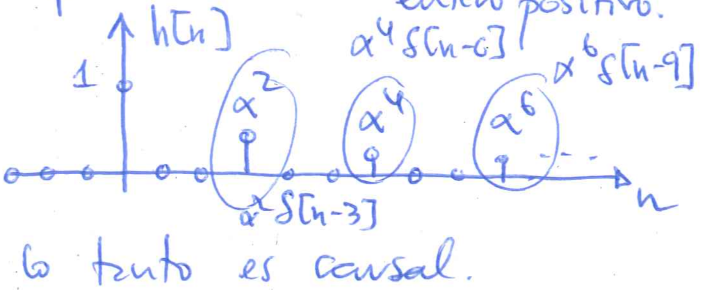
$y[4] = y[5] = \emptyset$

$y[6] = \alpha^2 \cdot y[3] = \alpha^4$

$$h[n] = \begin{cases} \emptyset & n \neq 3 \cdot k \\ \alpha^{2k} & n = 3 \cdot k \end{cases}$$

$$\boxed{h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} \delta[n-3k]}$$

$K = 0, 1, 2, \ldots$ entero positivo.



ⓓ $h[n] = \emptyset \quad n < \emptyset$ por lo tanto es causal.

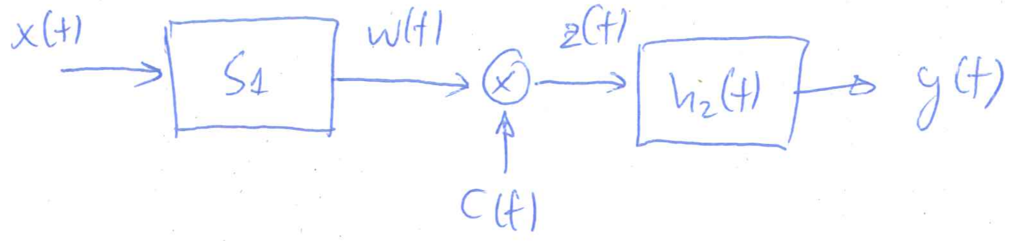
Se debe a que asumimos cond. iniciales nulas.

Estabilidad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 < \infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = 1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Serie geom}}}{=} \frac{1}{1-|\alpha|^2} \Rightarrow |\alpha|^2 < 1$$

$$\boxed{|\alpha| < 1}$$

③ $x(t) = 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$



ⓐ $y(t) = x(t-2) - 0'5\,x(t-6)$

Si $x(t-t_0)$ a la entrada:

tiempo-invariante

$$y_1(t) = x(t-t_0-2) - 0'5\,x(t-t_0-6) = y(t-t_0)$$

Si $a x_1(t) + b x_2(t)$ a la entrada

$$y_2(t) = a\,x_1(t-2) + b x_2(t-2) - 0'5\left(a\,x_1(t-6) + b\,x_2(t-6)\right)$$

$$= a\underbrace{\left[x_1(t-2) - 0'5\,x_1(t-2)\right]}_{y_1(t)} + b\,\underbrace{\left[x_2(t-2) - 0'5\,x_2(t-6)\right]}_{y_2(t)}$$

sistema lineal.

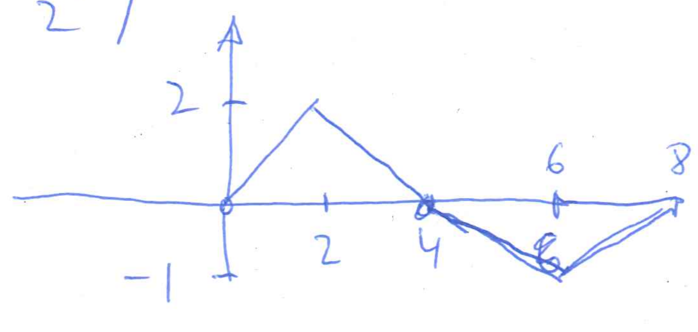
ⓑ Si $x(t) = \delta(t)$

$$y(t) = h(t) = \delta(t-2) - 0'5\,\delta(t-6)$$

$$w(t) = x(t) * h(t) = 2\Lambda\left(\tfrac{t}{2}\right) * \left[\delta(t-2) - 0'5\,\delta(t-6)\right]$$

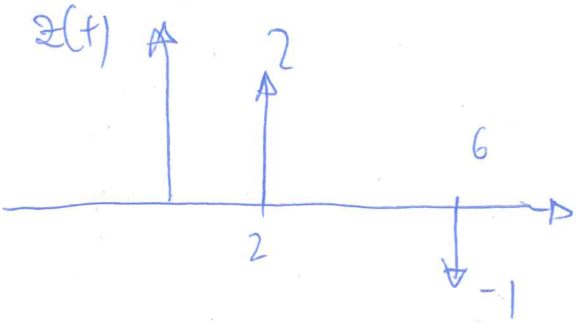
$$= 2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{t-6}{2}\right)$$

linealidad y desplaz.

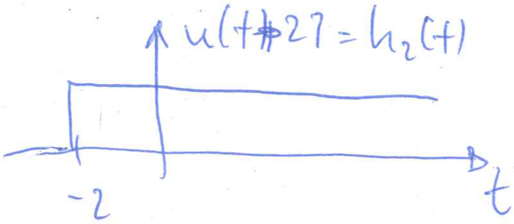


c) $z(t) = c(t) \cdot w(t) =$

$$= \left[\delta(t-2) + \delta(t-6)\right] \cdot w(t) = \overbrace{w(2)}^{2}\,\delta(t-2) + \overbrace{w(6)}^{-1}\,\delta(t-6)$$



d) $h_2(t) = u(t+2)$



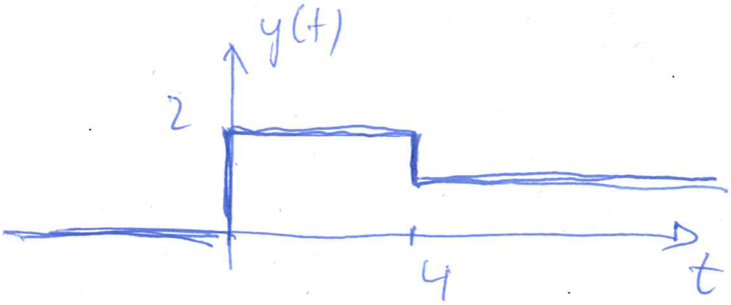
$h_2(t) \neq 0 \quad t < 0$

no es causal

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(t)|\, dt = \infty$ no es estable.

e) $y(t) = z(t) * h_2(t) = \left[2\delta(t-2) - \delta(t-6)\right] * u(t+2) \overset{\text{lineal y despl.}}{=}$

$$= 2u(t) - u(t-4)$$



SEINALEEN PROZESATZEA: OHIKO DEIALDIA, 2. partziala

Azterketak 3 ariketa ditu. Ariketa bakoitzak 10 puntu balio ditu, eta 1. ariketako galdera guztiek pisu berdina dute. Ordu eta erdi duzue.

1. ARIKETA (10 puntu, 30 minutu)

1. Lortu itzazu y(t) seinale periodikoaren Fourierren koefizienteak, x(t) seinalearen espektroaren menpe:

   $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT_0)$, non $x(t) = \prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$.

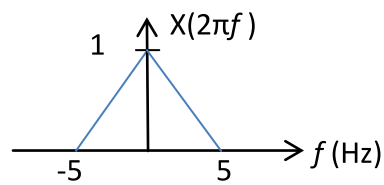
   Demagun $T_0 = 3T$ dela. Zein da a_k koefizienteen balioa k hiruren multiploa bada?

2. Izan bitez $x_1(t) = \frac{\text{sen}^2(\omega_c t)}{(\pi t)^2}$ eta $x_2(t) = \cos^2(\omega_0 t)$ seinaleak. Erantzun:

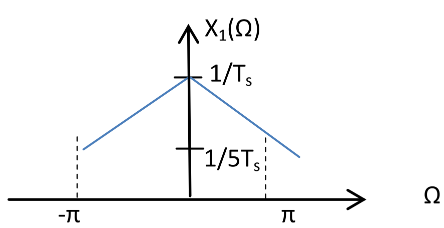
   a. Kalkulatu seinale bakoitzaren espektroa.

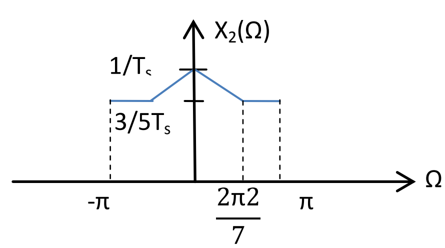
   b. Lortu laginketa-maiztasunak, f_s, bete behar duen baldintza seinale bakoitza aliasing-ik gabe lagindu ahal izateko.

2. Izan bedi x(t) seinalea, irudiko espektroa duena:



   Izan bitez x(t) seinalea baldintza desberdinetan laginduta lortutako $x_1[n]$ eta $x_2[n]$ seinaleak. Seinale horien espektroak $X_1(\Omega)$ eta $X_2(\Omega)$ dira eta irudian adierazi dira [-π, π] tartean:





   Arrazoitu eta erantzun honako galderei:

   a. Aliasingik ematen al da?

   b. Antialiasing iragazkia erabili al da lagindu aurretik?

   c. Zein da erabilitako laginketa-maiztasuna?

2. Ariketa (10 puntu, 30 minutu)

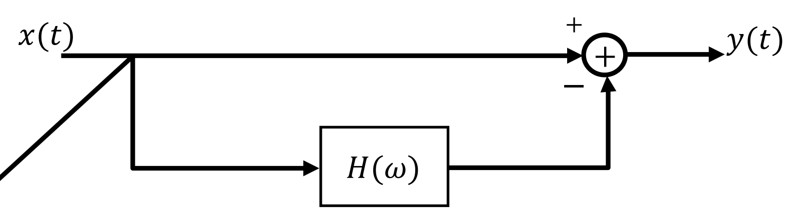
Izan bitez bi iragazki ideal, hurrengo maiztasun-erantzuna dutenak:

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases} \qquad H_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \ge \omega_2 \\ 0, & |\omega| < \omega_2 \end{cases}$$

non ω_1 eta ω_2 balioak nahieran doitu daitezkeen.

a) Irudikatu irudiko eskemako $H_T(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$, eta kalkulatu $h_t(t) = F^{-1}\{H_T(\omega)\}$ kasu hauetan:

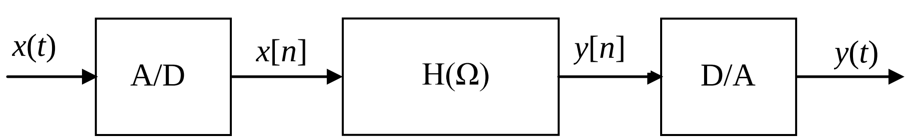
1) $H(\omega)=H_1(\omega)$ **(2p)**
2) $H(\omega)=H_2(\omega)$ **(2p)**



b) $H_1(\omega)$ eta $H_2(\omega)$-tik abiatuta banda-ezabatuko iragazkia lortu nahi dugu, $H_{be}(\omega)$. Irudikatu iragazkien konexio-eskema. Irudikatu $H_{be}(\omega)$, eta kalkulatu $h_{be}(t) = F^{-1}\{H_{be}(\omega)\}$. **(3p)**

c) $H_1(\omega)$ eta $H_2(\omega)$-tik abiatuta bandapaseko iragazkia lortu nahi dugu, $H_{bp}(\omega)$. Irudikatu iragazkien konexio-eskema. Irudikatu $H_{bp}(\omega)$, eta kalkulatu $h_{pb}(t) = F^{-1}\{H_{bp}(\omega)\}$. **(3p)**

3. Ariketa (10 puntu, 30 minutu)

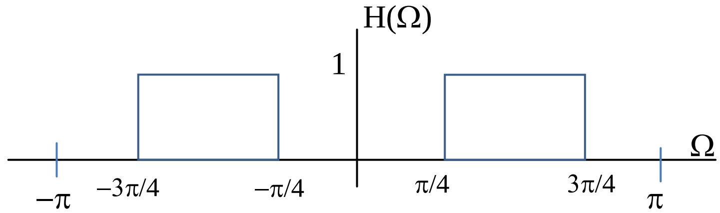


Izan bedi $x(t) = 2 + \cos(2\pi\, 20\, t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 125t + \pi/3)$ A/D bihurgailuaren sarrera-seinalea. Seinalea digitalizatzeko f_s=100 Hz laginketa-maiztasuna erabili da eta ez da antialiasing iragazkirik erabili. Honakoak eskatzen dira:

a) Kalkulatu lortutako seinale diskretua, x[n] . (1 p)

b) Esan x[n] periodikoa den, eta hala bada kalkulatu bere oinarrizko periodoa eta bere Fourierren koefizienteak. (3p)

c) x[n] seinalea irudiko H(Ω) iragazkiarekin iragazi da y[n] seinalea lortuz. Kalkulatu y[n] eta bere espektroa Y(Ω), eta irudikatu espektro hori. (3 p)



d) Kalkulatu y(t) D/A bihurgailuaren irteera-seinalea, D/A bihurgailuaren laginketa maiztasuna f_s=100 Hz bada. (2 p)

e) Alderatu y(t) eta x(t) seinaleak eta adierazi zein izan den A/D, D/A bihurketen eragina eta H(Ω) iragazkiaren eragina. (1 p)

TRATAMIENTO DE SEÑALES: Convocatoria ordinaria
Segundo Parcial

El tiempo estimado para resolver el examen es de una hora y 30 minutos.
Las 3 cuestiones del problema 1 tienen el mismo valor.

PROBLEMA 1 (10 puntos, 30 minutos)

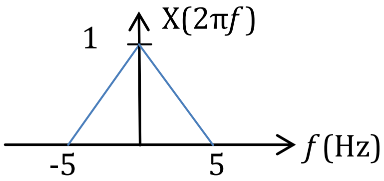
1. Obtener los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica

   $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0)$, con $x(t) = \prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, en función del espectro de x(t).

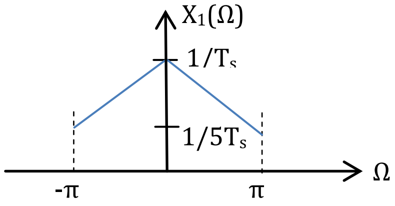
   Considerando, $T_0 = 3T$, ¿cuánto valen los coeficientes a_k para k múltiplo de 3?

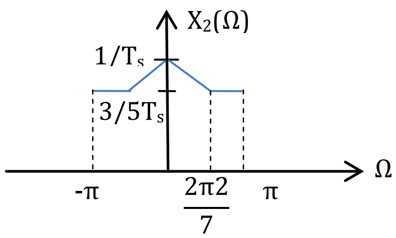
2. Sean las señales $x_1(t) = \frac{\text{sen}^2(\omega_c t)}{(\pi t)^2}$ y $x_2(t) = \cos^2(\omega_0 t)$. Se pide:
   a. Calcular el espectro de cada señal.
   b. Determinar la condición que tiene que cumplir la frecuencia de muestreo f_s para poder muestrear las señales sin aliasing.

3. Sea la señal x(t) cuyo espectro es:



Sean las señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ resultado de muestrear la señal x(t) bajo diferentes condiciones. Sus espectros $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$ se representan en el intervalo [-π, π]:





Para cada caso, responder de forma razonada a las siguientes preguntas:
   a. ¿Se observa aliasing?
   b. ¿Se ha aplicado un filtro antialiasing antes de muestrear?
   c. ¿Qué frecuencia de muestreo se ha utilizado?

PROBLEMA 2 (10 puntos, 30 minutos)

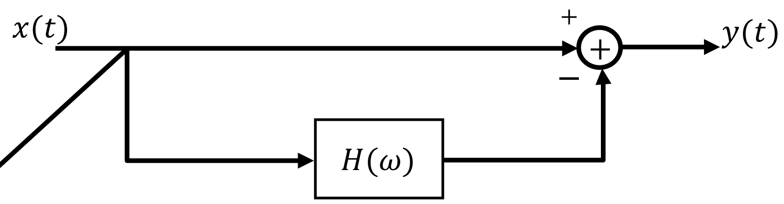
Sean dos filtros ideales de respuesta frecuencial:

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases} \qquad H_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq \omega_2 \\ 0, & |\omega| < \omega_2 \end{cases}$$

en los que los valores de ω_1 y ω_2 pueden ajustarse a conveniencia.

a) En el esquema de la figura dibuja $H_T(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ y calcula $h_t(t) = F^{-1}\{H_T(\omega)\}$ cuando:

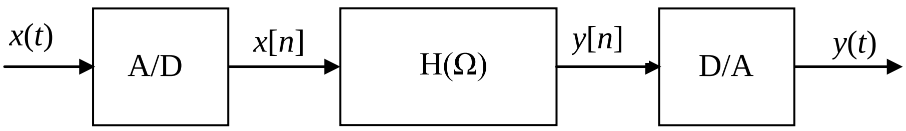
1) $H(\omega)=H_1(\omega)$ **(2p)**
2) $H(\omega)=H_2(\omega)$ **(2p)**



b) A partir de $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega)$ se quiere obtener un filtro banda eliminada, $H_{be}(\omega)$. Dibuja un esquema de conexión de los filtros. Dibuja $H_{be}(\omega)$ y calcula $h_{be}(t) = F^{-1}\{H_{be}(\omega)\}$. **(3p)**

c) A partir de $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega)$ se quiere obtener un filtro paso banda, $H_{pb}(\omega)$. Dibuja un esquema de conexión de los filtros. Dibuja $H_{pb}(\omega)$ y calcula $h_{pb}(t) = F^{-1}\{H_{pb}(\omega)\}$. **(3p)**

PROBLEMA 3 (10 puntos, 30 minutos)

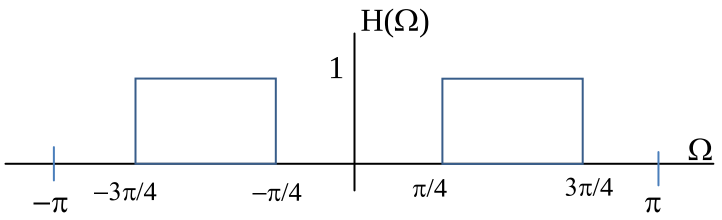


Sea $x(t) = 2 + \cos(2\pi\, 20\, t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 125 t + \pi/3)$ la señal de entrada del conversor Analógico/Digital (A/D) de la figura. La señal se digitaliza a la frecuencia de muestreo f_s=100 Hz sin ningún filtro antialiasing. Se pide:

a) Calcular la señal discreta x[n]. (1 p)

b) Indicar si x[n] es periódica, y en caso afirmativo calcular su periodo fundamental y los coeficientes de Fourier. (3p)

c) La señal x[n] es filtrada con el filtro H(Ω) de la figura. Calcular la señal obtenida, y[n], y representar su espectro Y(Ω). (3 p)



d) Calcular la señal y(t), salida del conversor Digital/Analógico (D/A) con frecuencia de muestreo f_s=100 Hz. (2 p)

e) Comparar las señales x(t) e y(t), e indicar el efecto de la conversión A/D, D/A y del filtro H(Ω). (1 p)

TdS OHIKOA - 2017-05-
1.P

Cuestión 1

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT_0) \qquad x(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$x_b = x(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \xrightarrow{F} X_b(\omega) = \frac{2\,\text{sen}\,\omega T/2}{\omega} \cdot e^{-j\omega T/2}$$

$$a_k = \left.\frac{X_b(\omega)}{T_0}\right|_{\omega=k\omega_0}$$

$$a_k = \left.\frac{2\,\text{sen}\,\omega T/2}{\omega T_0} e^{-j\omega T/2}\right|_{\omega=k\omega_0} = \frac{\cancel{2}\,\text{sen}\,k\frac{2\pi}{T_0}T/\cancel{2}}{k\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}\cdot \cancel{T_0}} e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}T/\cancel{2}}$$

$$\boxed{a_k = \frac{\text{sen}\,k\pi\frac{T}{T_0}}{k\pi} e^{-jk\pi\frac{T}{T_0}}}$$

$$T_0 = 3T \qquad a_k = \frac{\text{sen}\,k\pi\frac{\cancel{T}}{3\cancel{T}}}{k\pi} e^{-jk\pi\frac{\cancel{T}}{3\cancel{T}}}$$

$$a_k = \frac{\text{sen}\,\frac{k\pi}{3}}{k\pi} e^{-j\frac{k\pi}{3}} \qquad \dot{3} = p\cdot 3 \quad p = \text{entero}$$

$$k = \dot{3} \qquad a_{\dot{3}} = \frac{\text{sen}\,\frac{\dot{3}\pi}{3}}{k\pi} e^{-j\dot{3}\frac{\pi}{3}} = \frac{\text{sen}\,p\pi}{k\pi} e^{-jp\pi}$$

$$\boxed{a_{\dot{3}} = 0}$$

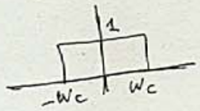
Cuestión 2

$$x_1(t) = \frac{\operatorname{sen}^2 w_c t}{(\pi t)^2}$$

$$x_1(t) = \underbrace{\frac{\operatorname{sen} w_c t}{\pi t}}_{x_3(t)} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} w_c t}{\pi t}}_{x_3(t)}$$

$$X_1(w) = \frac{1}{2\pi} X_3(w) * X_3(w)$$

$$x_3(t) = \frac{\operatorname{sen} w_c t}{\pi t} \xrightarrow{F^{-1}} X_3(w) = \Pi\left(\frac{w}{2w_c}\right)$$

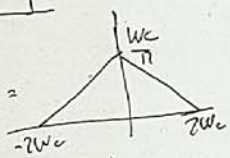


$$X_3(w) * X_3(w) = 2w_c \Lambda\left(\frac{w}{2w_c}\right)$$

$$X_1(w) = \frac{\cancel{2}w_c}{\cancel{2}\pi} \Lambda\left(\frac{w}{2w_c}\right)$$

$$\boxed{X_1(w) = \frac{w_c}{\pi} \Lambda\left(\frac{w}{2w_c}\right)}$$

$X_1(w) =$



Espectro limitado en banda.

$X_1(w) = 0 \quad \forall |w| \geq 2w_c$

$w_s \geq 2(2w_c)$

$w_s \geq 4w_c$

$$\boxed{f_s \geq 4 f_c}$$

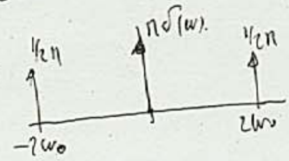
$$x_2(t) = \cos^2(w_0 t)$$

$$x_2(t) = \frac{1 + \cos 2w_0 t}{2}$$

$$\boxed{X_2(w) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi \delta(w) + \frac{1}{2}\pi\delta(w-2w_0) + \frac{1}{2}\pi\delta(w+2w_0)}$$

Espectro limitado en banda

$X_2(w)$

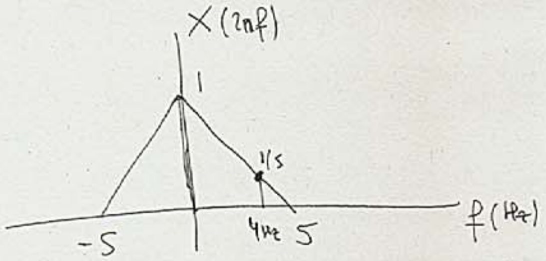


$X_2(w) = 0 \quad \forall |w| > 2w_0$

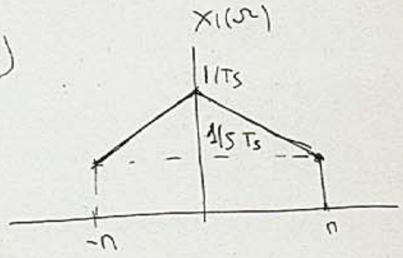
$w_s > 2 \cdot 2w_0$

$$\boxed{f_s > 4 f_0}$$

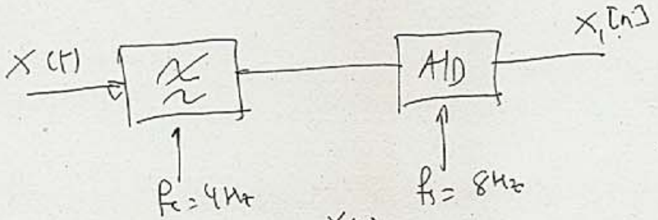
Cuestión 3

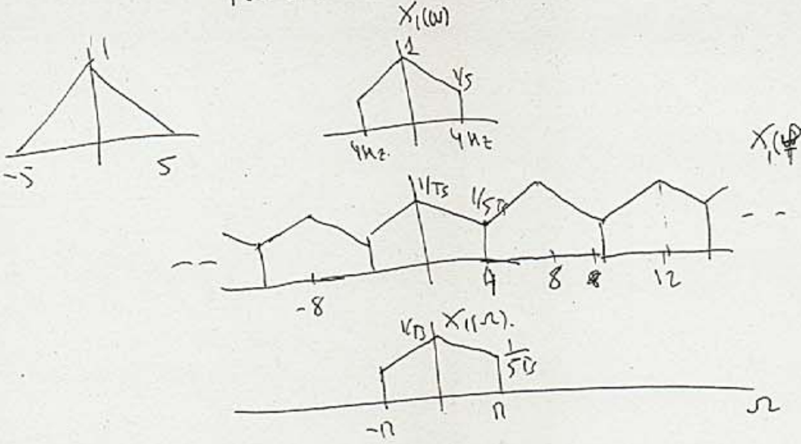


a)



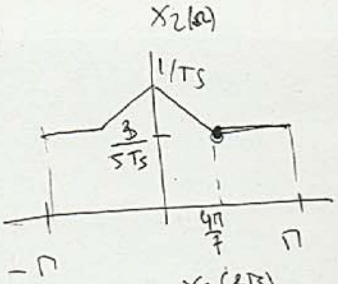
La frecuencia de muestreo es de 8 Hz y se ha utilizado filtro antialiasing de $f_c = 4$ Hz. <u>Por tanto no hay aliasing</u>

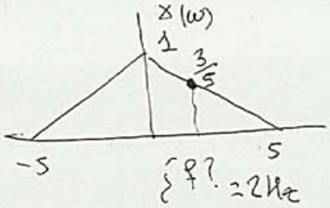


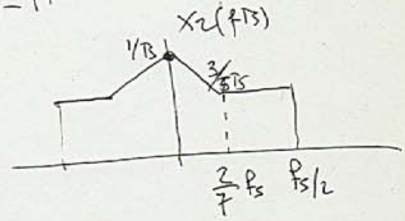


$$X_1(\Omega/T_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1(f - k f_s)$$

b)







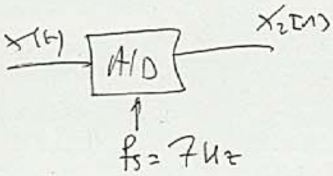
$$\pi \rightarrow f_s/2$$

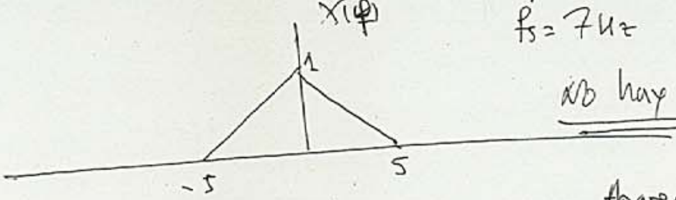
$$\frac{4\pi}{7} \rightarrow x \qquad x = \frac{\frac{4\pi}{7}\,\frac{f_s}{2}}{\pi}$$

$$x = \frac{2}{7} f_s$$

$$\frac{2}{7} f_s = 2\ \text{Hz}$$

$$\boxed{f_s = 7\ \text{Hz}}$$

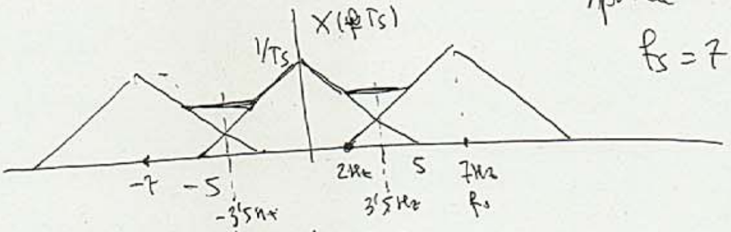


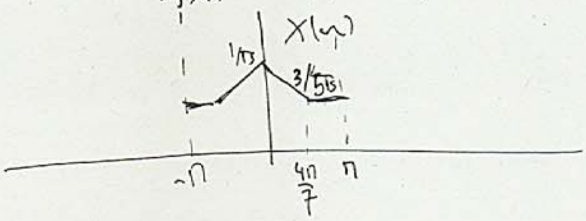


No hay filtro antialiasing

Aparece el aliasing.

$f_s = 7\ \text{Hz} < f_N = 10\ \text{Hz}$





P3. $x(t) = 2 + \cos(2\pi\cdot 20t) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\cdot 125t + \frac{\pi}{3}\right)$

a) $x[n] = 2 + \cos\left(\underbrace{2\pi\frac{20}{100}}_{\Omega_1} n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\underbrace{2\pi\cdot\frac{125}{100}}_{\Omega_2} n + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\Omega_1 = \frac{2\pi}{5}$ $\quad N_1 = 5$ $\quad N_0 = \text{mkt}(5,4) = 20$ Periodikoa da.

$\Omega_2 = \frac{2\pi\, 5}{4} = \frac{2\pi}{4}$ $\quad N_2 = 4$

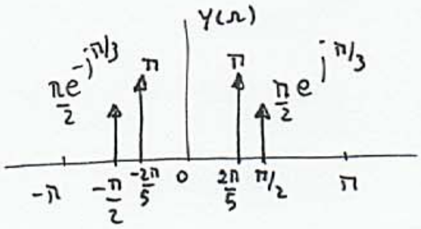
$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=\langle 20\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi kn}{20}}$$

$$x[n] = \underbrace{2}_{a_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_4} e^{j\frac{2\pi n}{5}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-4}} e^{-j\frac{2\pi n}{5}} + \underbrace{\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}}_{a_5} e^{j\frac{2\pi n}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4}e^{-j\pi/3}}_{a_{-5}} e^{-j\frac{2\pi n}{4}}$$

c) $$X(\Omega) = \underbrace{2\pi\delta(\Omega)}_{\text{no pasa}} + \underbrace{\pi\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{5}\right)}_{\text{pasa}} + \underbrace{\pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{5}\right)}_{\text{pasa}} + \underbrace{\frac{\pi}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{pasa}} + \underbrace{\frac{\pi}{2}e^{-j\pi/3}\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{pasa}}$$

$$Y(\Omega) = \pi\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{5}\right) + \frac{\pi}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}e^{-j\pi/3}\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)$$

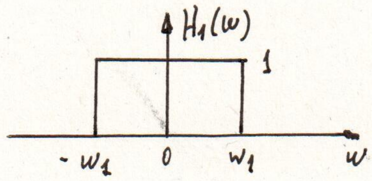
$$y[n] = \cos\frac{2\pi}{5}n + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

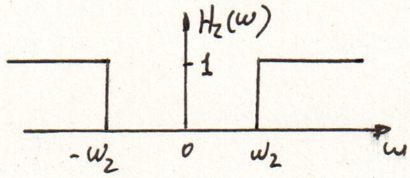


d) $y(t) = \cos 2\pi\cdot 20t + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\cdot 25t + \frac{\pi}{3}\right)$

e) Se elimina la componente continua de la señal $x(t)$ como consecuencia del filtro paso-banda.
Como consecuencia del aliasing en el muestreo, la componente de 125 Hz al recuperar aparece en 25 Hz. Se debe a que $f_s = 100 < 2\cdot f_{max}$ donde $f_{max} = 125$ Hz, y por tanto no satisface Nyquist.

PROBLEMA 2

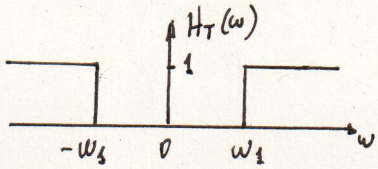




a)

$$y(t) = x(t) - x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = X(\omega) - X(\omega) \cdot H(\omega) \Rightarrow H_T(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = 1 - H(\omega)$$

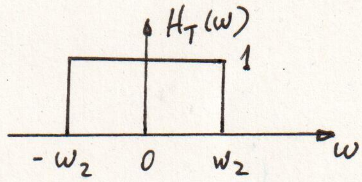
1) $H(\omega) = H_1(\omega) \Rightarrow H_T(\omega) = 1 - H_1(\omega)$



$$H_T(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \geq \omega_1 \\ 0 & |\omega| < \omega_1 \end{cases}$$

$$h_t(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_T(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 - \Pi(\tfrac{\omega}{2\omega_1})\} \Rightarrow h_t(t) = \delta(t) - \frac{\text{sen}(\omega_1 t)}{\pi t}$$

2) $H(\omega) = H_2(\omega) \Rightarrow H_T(\omega) = 1 - H_2(\omega)$

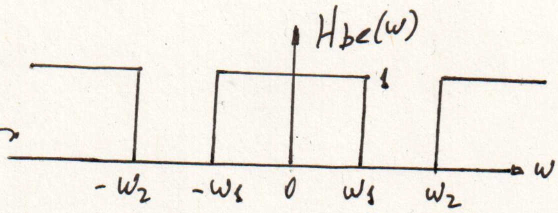


$$H_T(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_2}\right)$$

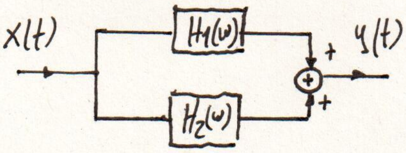
$$h_t(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_T(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\Pi(\tfrac{\omega}{2\omega_2})\} \Rightarrow h_t(t) = \frac{\text{sen}(\omega_2 t)}{\pi t}$$

b)

$H_{be}(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$ / $\omega_1 < \omega_2$ $\rightarrow$



?



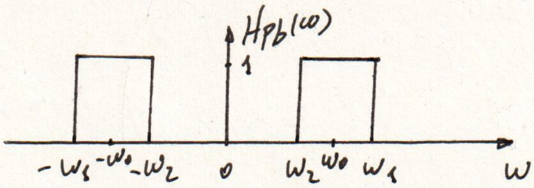
$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = X(\omega) \cdot H_1(\omega) + X(\omega) H_2(\omega)$$

$$H_{be}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H_1(\omega) + H_2(\omega)$$

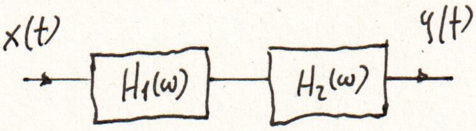
$$H_{be}(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_1}\right) + \left[1 - \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_2}\right)\right] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h_{be}(t) = \frac{\text{sen}(\omega_1 t)}{\pi t} + \delta(t) - \frac{\text{sen}(\omega_2 t)}{\pi t}$$

c)

$H_{pb}(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$ / $\omega_2 < \omega_1$ $\rightarrow$



?



$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = X(\omega) \cdot H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$$

$$H_{pb}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$$

$$H_{pb}(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_2}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + \omega_0}{\omega_1 - \omega_2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} h_{pb}(t) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}{\pi t} e^{j\omega_0 t} + \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}{\pi \cdot t} e^{-j\omega_0 t}$$

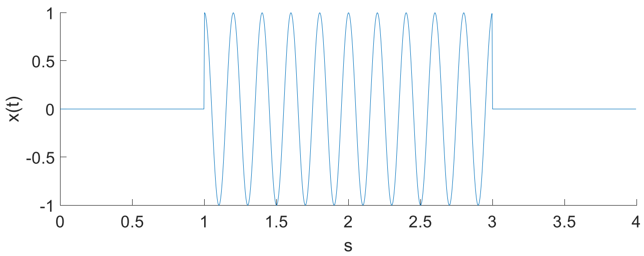
$$h_{pb}(t) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)}{\pi t} \cdot 2\cos(\omega_0 t) \quad / \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

TRATAMIENTO DE SEÑALES: Convocatoria extraordinaria

El tiempo estimado para resolver el examen es de dos horas.
Las 3 cuestiones del problema 1 tienen el mismo valor.

PROBLEMA 1 (10 puntos, 45 minutos)

1 . Calcular X(ω) el espectro de la señal de la figura x(t). Indicar las propiedades que se apliquen.



2. Sea un promediador de M muestras cuya ecuación en diferencias es la siguiente:

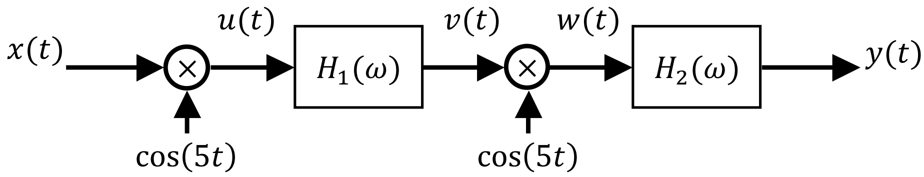
$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

Calcular la respuesta frecuencial del sistema, H(Ω) e indicar las frecuencias que anula.

3. Considera la señal $x(t) = \cos(2\pi 600t) + \cos(2\pi 2000t)$, que se convierte a digital, A/D con frecuencia de muestreo f_s = 1500 Hz. La señal discreta así obtenida, x[n], es reconvertida a analógica, D/A, utilizando la misma f_s. Calcular la señal analógica recuperada, $x_r(t)$,

PROBLEMA 2 (10 puntos, 30 minutos)

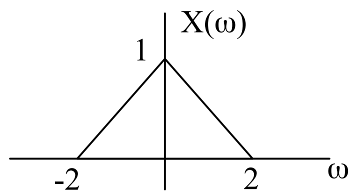
Sea el sistema de la figura, en el que las respuestas frecuenciales de los sistemas 1 y 2 son las indicadas.



$$H_1(\omega) = \begin{cases} 2, & 5 \le |\omega| \le 7 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \qquad H_2(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| \le 2 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$$

a. Dibuja $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega)$ (módulo y fase) e indica el tipo de filtro que es cada uno. **(2p)**

b. Dibuja el espectro de y(t) si el espectro de la señal de entrada es el de la figura. **(4p)**



c. Calcula la señal de salida si la entrada es: **(4p)**

$$x(t) = \cos(t) + \cos(4t)$$

PROBLEMA 3 (10 puntos, 45 minutos)

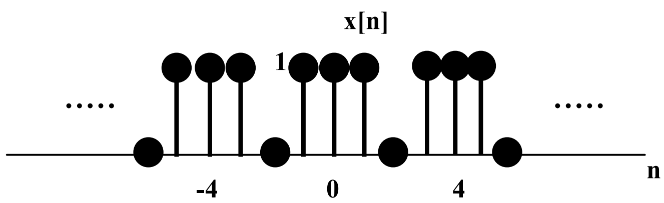
Sea un sistema con respuesta impulsional $h[n] = a^{|n|}$ con |a|<1

a) Analizar la causalidad y estabilidad del sistema. **(1p)**

b) Demostrar que su respuesta frecuencia es: $H(\Omega) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2\,a\,\cos(\Omega)}$. Comenta las propiedades de simetría de la transformada de Fourier que apliques. **(2p)**

c) Obtener la ecuación en diferencias del sistema. **(2p)**

Sea la secuencia x[n] de la figura la entrada al sistema anterior.



d) Calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de x[n] y dibujar su transformada de Fourier para $|\Omega| \le \pi$. **(3p)**

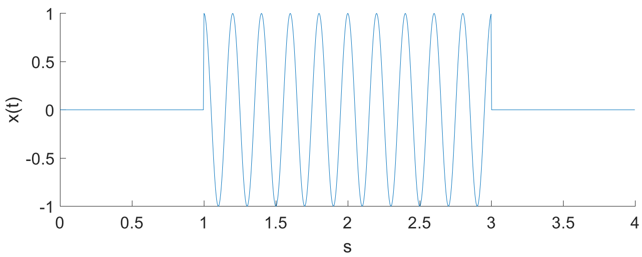
e) Obtener la respuesta del sistema en forma de suma de cosenos para a=1/2. **(2p)**

SEINALEEN PROZESATZEA: Ezohiko deialdia

Azterketak 3 ariketa ditu. Ariketa bakoitzak 10 puntu balio ditu, eta 1. ariketako galdera guztiek pisu berdina dute. Bi ordu dituzue.

1. ARIKETA (10 puntu, 45 minutu)

1 . Kalkulatu X(ω), irudiko x(t) seinalearen espektroa. Adierazi ze propietate erabiltzen duzun.



2. Izan bedi M lagineko batez-bestekoa egiteko sistema, ondoko diferentzia-ekuazioa duena:

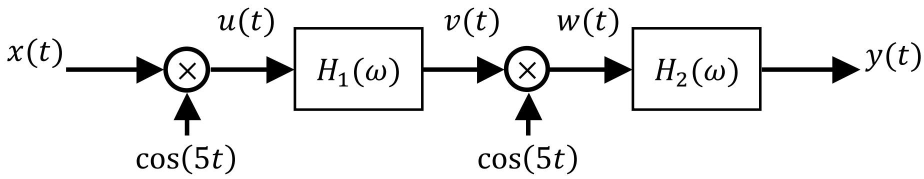
$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

Kalkulatu sistemaren maiztasun-erantzuna, H(Ω), eta adierazi ze maiztasunetan zero egiten den.

3. Izan bedi $x(t) = \cos(2\pi 600t) + \cos(2\pi 2000t)$ seinalea, digital bihurtzen dena A/D bihurgailuarekin laginketa-maiztasuna f_s = 1500 Hz delarik. Horrela lortutako seinale diskretua, x[n], analogikora bihurtzen da D/A bihurgailuarekin f_s berdinarekin. Kalkulatu berreskuratutako seinale analogikoa, $x_r(t)$,

2. ARIKETA (10 puntos, 30 minutu)

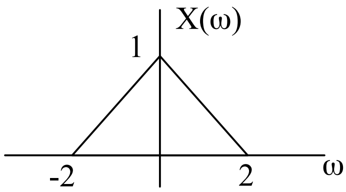
Izan bedi irudiko sistema, 1 eta 2 sistemen maiztasun-erantzunak adierazitakoak direlarik.



$$H_1(\omega) = \begin{cases} 2, & 5 \leq |\omega| \leq 7 \\ 0, & beste \end{cases} \qquad H_2(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| \leq 2 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$$

a. Irudikatu $H_1(\omega)$ eta $H_2(\omega)$ (modulo eta fasea) eta adierazi zer motatako iragazkia den sistema bakoitza. **(2p)**

b. Irudikatu y(t)-ren espektroa, sarrera-seinalearen espektroa irudikoa bada. **(4p)**



c. Kalkulatu irteera-seinalea, sarrera-seinalea ondokoa denean:

$$x(t) = \cos(t) + \cos(4t)$$ **(4p)**

3. ARIKETA (10 puntu, 45 minutu)

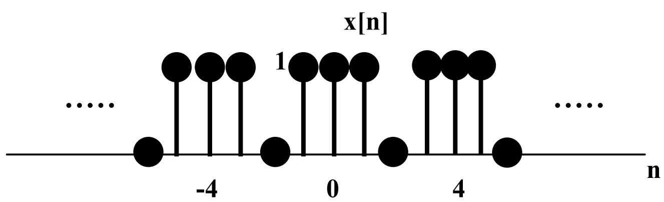
Izan bedi hurrengo pultsu-erantzuna duen sistema: $h[n] = a^{|n|}$ non |a|<1

a) Aztertu sistema kausala edota egonkorra den. **(1p)**

b) Frogatu sistemaren maiztasun-erantzuna hau dela: $H(\Omega) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2\,a\,\cos(\Omega)}$. Adierazi erabili dituzun Fourierren transformatuaren simetria propietateak. **(2p)**

c) Lortu sistemaren diferentzia-ekuazioa. **(2p)**

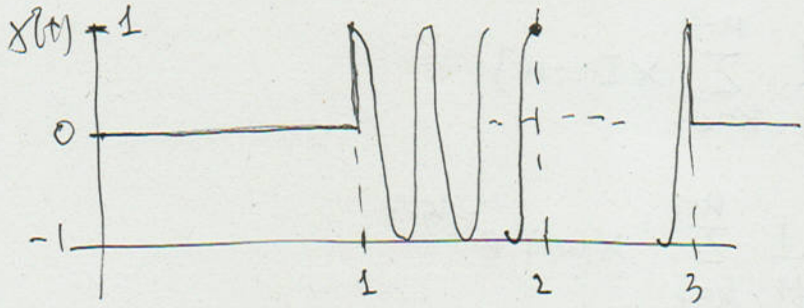
Izan bedi x[n] irudiko seinalea, sistemaren sarrera-seinalea.



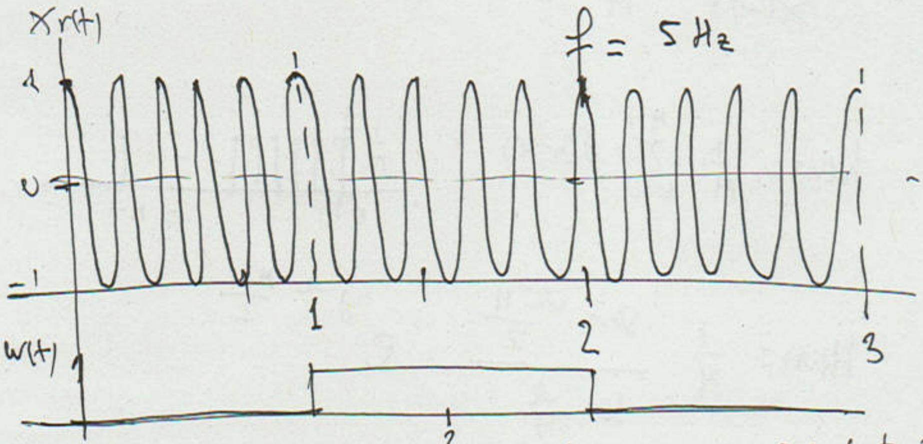
d) Kalkulatu x[n] Fourier serie bidezko garapenaren koefizienteak, eta irudikatu bere seinalearen Fourierren transformatua $|\Omega| \leq \pi$ tartean. **(3p)**

e) Lortu sistemaren irteera-seinalea eta adierazi kosinuen batuketa bezala a=1/2 denean. **(2p)**

CUESTION 1



Es un tono enventanado. En un segundo presenta 5 pulsaciones



$x_r(t) = 1 \cos(2\pi \cdot 5t)$ - - -

$w(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$

$x(t) = x_r(t) \cdot w(t) = 1 \cos(2\pi \cdot 5t) \cdot \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$

FF

$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_r(\omega) * W(\omega) = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\left(\underbrace{\cancel{\pi}\,\delta(\omega-10\pi) + \cancel{\pi}\,\delta(\omega-10\pi)}_{X_r(\omega)}\right) * \underbrace{\frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\,\omega\frac{2}{\cancel{2}}}{\omega} e^{-j\omega \cdot 2}}_{W(\omega)}$

$$\boxed{X(\omega) = \frac{\mathrm{sen}(\omega-10\pi)}{\omega-10\pi} e^{-j(\omega-10\pi)\cdot 2} + \frac{\mathrm{sen}(\omega+10\pi)}{\omega+10\pi} e^{-j(\omega+10\pi)\cdot 2}}$$

CUESTION 2

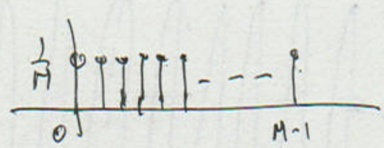
$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(\Omega) e^{-jk\Omega}$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-jk\Omega}$$

<u>otra forma:</u>

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$



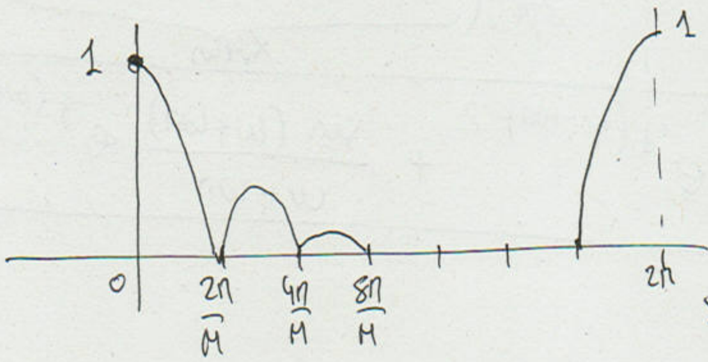
$$H(\Omega) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Omega M}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Omega}{2}} \cdot e^{-j\Omega \frac{M-1}{2}}$$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{M} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\Omega M}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Omega}{2}} \right| = 0 \qquad \operatorname{sen} \frac{\Omega M}{2} = 0$$

$$\frac{\Omega M}{2} = k\pi$$

$$\Omega M = 2k\pi$$

$$\Omega = \frac{2k\pi}{M}.$$



$$\operatorname{sen} \frac{\Omega}{2} = 0$$

$$\frac{\Omega}{2} = k\pi$$

$$\Omega = 2k\pi$$

en $\Omega = 0$, $\Omega = 2\pi$ indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\frac{1}{M} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\Omega M}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Omega}{2}} \right|_{\Omega=0} = 1$$

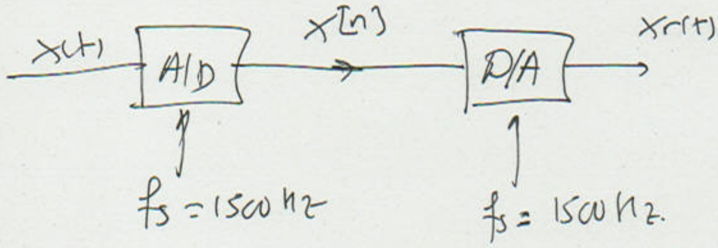
Anula las frecuencias

$\boxed{\Omega = \frac{2k\pi}{M} \text{ comprendidas entre } -\pi \text{ y } \pi \text{ excepto para } \Omega = 0}$

CUESTION 3

$$x(t) = \cos(2\pi\, 600t) + \cos(2\pi \cdot 2000\, t)$$

$f_s = 1500\ Hz$



$$x[n] = x(t)\Big|_{t=\frac{n}{f_s}} = \cos\left(2\pi\, 600\, \frac{n}{1500}\right) + \cos\left(2\pi \cdot 2000\, \frac{n}{1500}\right)$$

$$x[n] = \cos\left(2\pi \left(\frac{6}{15}\right) n\right) + \cos\left(2\pi \left(\frac{4}{3}\right) n\right)$$

$f_{d_1} = \frac{6}{15} < \frac{1}{2}$

$f_{d_2} = \frac{4}{3} > \frac{1}{2}$

$f_{d_2}' = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$

$$x[n] = \cos\left(2\pi\, \frac{6}{15} n\right) + \cos\left(2\pi\, \frac{1}{3} n\right)$$

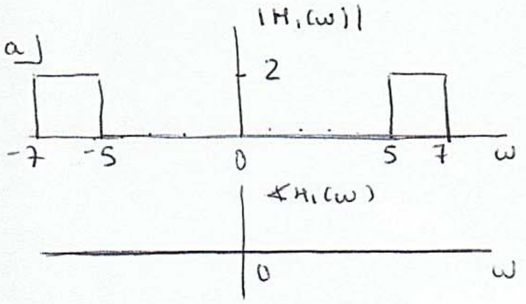
$$x_r(t) = x[n]\Big|_{n = f_s \cdot t} = \cos\left(2\pi\, \frac{6}{15}\, 1500\, t\right) + \cos\left(2\pi\, \frac{1}{3}\, 1500\, t\right)$$

$$\boxed{x_r(t) = \cos(2\pi\, 600\, t) + \cos(2\pi\, 500\, t)}$$

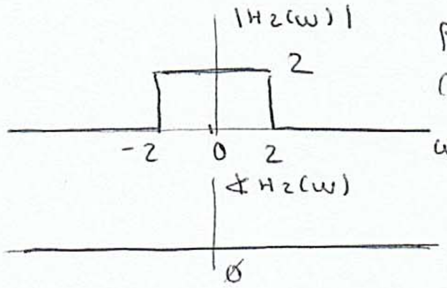
2017-06-23 Seinaleen Prozesatzea

2. ARIKETA

a)

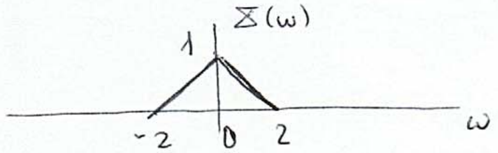


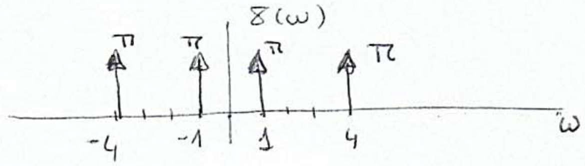
Banda Pasa
(Paso banda)



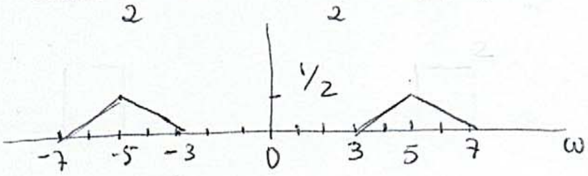
Behe Pasa
(Paso bajo)

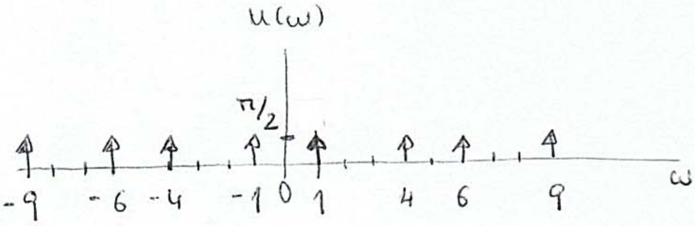
b)



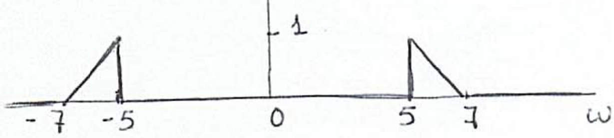


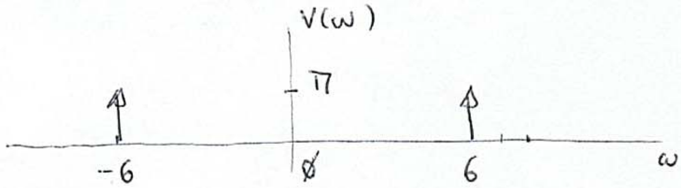
$U(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega-5) + \frac{1}{2}X(\omega+5)$



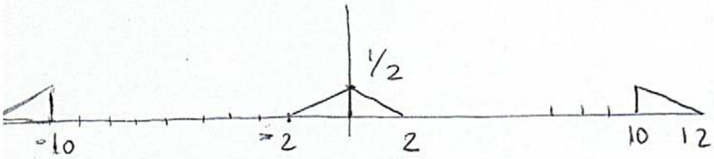


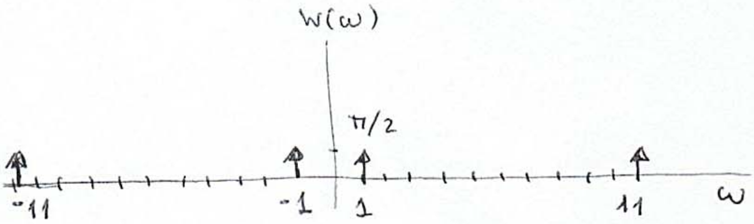
$V(\omega) = U(\omega)\cdot H_1(\omega)$



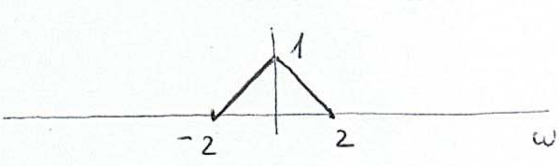


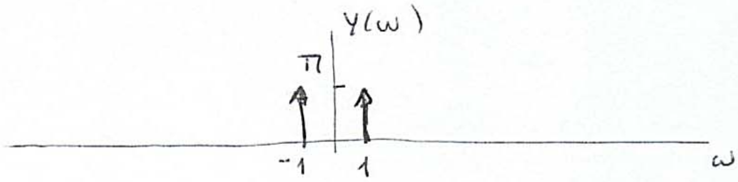
$W(\omega) = \frac{1}{2}V(\omega-5) + \frac{1}{2}V(\omega+5)$





$Y(\omega) = W(\omega)\cdot H_2(\omega)$



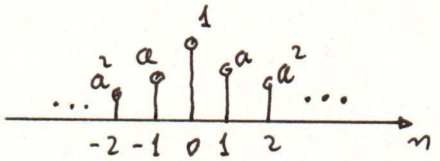


$Y(\omega) = \pi\left(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\right)$

$y(t) = \cos t$

PROBLEMA 3

[a] $h[n] = a^{|n|} \quad |a|<1$



No causal: $h[n] \neq 0 \quad n<0$

Estable: $\sum_n |h[n]| < \infty$

[b] $H(\Omega) = \sum_n x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n_1=1}^{\infty} a^{n_1} e^{j\Omega n_1} + \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \Rightarrow$

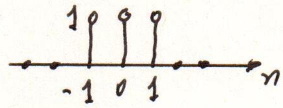
$\Rightarrow H(\Omega) = \frac{ae^{j\Omega}}{1-ae^{j\Omega}} + \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} = \frac{ae^{j\Omega} - a^2 + 1 - ae^{j\Omega}}{1-ae^{-j\Omega} - ae^{j\Omega} + a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(\Omega)}$

Simetrías: $h[n]$ real y par $\Rightarrow H(\Omega)$ real y par $(\cos(\Omega) = \cos(-\Omega))$

[c] $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \Rightarrow (1-a^2)X(\Omega) = Y(\Omega)(1+a^2-ae^{-j\Omega}+ae^{j\Omega}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-a^2)x[n] = (1+a^2)y[n] - a\,y[n-1] - a\,y[n+1] \Rightarrow y[n] = \frac{1-a^2}{1+a^2}x[n] + \frac{a}{1+a^2}y[n-1] + \frac{a}{1+a^2}y[n+1]$

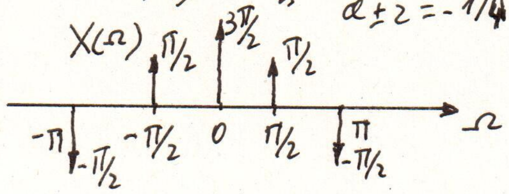
[d] $x[n]$ periódica de periodo fundamental $N_0=4$ y señal base $x_b[n]$:



$a_k = \frac{1}{N_0} X_b(\Omega)\Big|_{\Omega=k\Omega_0}$ siendo $X_b(\Omega) = \frac{\text{sen}(\Omega L/2)}{\text{sen}(\Omega/2)}$ con $L=3$, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$a_k = \frac{1}{4} \frac{\text{sen}(k\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{3}{2})}{\text{sen}(k\frac{2\pi}{4}/2)} = \frac{1}{4}\frac{\text{sen}(k\frac{3\pi}{4})}{\text{sen}(k\pi/4)}$ → $a_0 = 3/4$, $a_{\pm 1} = 1/4$, $a_{\pm 2} = -1/4$ $\quad -2 \leq k \leq 2$

$X(\Omega) = \sum_k 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$



[e] $y[n]$ periódica de periodo $N_0=4$ y C.D.S.F. $b_k = a_k H(k\cdot\Omega_0)$

$H(\Omega) = \frac{3/4}{5/4 - \cos(\Omega)}$ → $H(0) = 3$, $H(\pm\Omega_0) = \frac{3}{5}$, $H(\pm 2\Omega_0) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$

$b_0 = \frac{3}{4}\cdot 3 = \frac{9}{4}$

$b_{\pm 1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{20}$

$b_{\pm 2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

$y[n] = \sum_{k=-1}^{2} b_k e^{jk\Omega_0 n}$

$\Rightarrow y[n] = \frac{3}{20}e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \frac{3}{20}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{9}{4} - \frac{1}{12}e^{j\pi n} = \frac{3}{10}\cos(\frac{\pi}{2}n) + \frac{9}{4} - \frac{1}{12}(-1)^n$