eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

MATEMÁTICA APLICADA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK
EBALUAZIO JARRAITUA

EKAINEKO DEIALDIA (2017)

Ohar orokorrak:

*Iraupena: 2 ordu (**ebaluazio jarraitua**)/ 3 ordu (**azterketa finala**).*

KALIFIKAZIO DATA: 2017ko ekainak 26 (arratsaldeko 17:00etan, G.A.U.R.-en)

BERRIKUSPEN DATA: 2017ko ekainak 29 (goizeko 10:00etan,7I1 gelan, Matematika Aplikatua Laborategian)

Erantzunak lau hamartar esanguratsurekin adieraztea iradokitzen da eta kalkuluak egiteko gutxienez 6 hamartar erabiltzea gomendatzen da borobiltze erroreak saihesteko.

---

1. ARIKETA

Izan bedi X zorizko aldagaia, trokelgintza lantegi batean fabrikatutako zirrindola jakin batzuen barne diametroa, zentimetrotan neurtuta. X zorizko aldagaia honako dentsitate funtzioaren arabera banatzen da:

$$f(x)=\begin{cases} c(x-1)(3-x) & si\ x\in(1,3) \\ 0 & si\ x\notin(1,3) \end{cases}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA- E.U.I.T.I. BILBAO U.P.V. E.H.U. BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

(1.) Kalkulatu $c\in\mathbb{R}$ parametroaren balioa eta irudikatu $f(x)$ grafikoki (**4 puntu**).

Bete beharreko baldintza: $F(\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy=1$. Adierazpen honetan f(y) ordezkatzen badugu, eta integratu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy \underset{(1)}{=} \left(\int_{-\infty}^{1}+\int_{1}^{3}+\int_{3}^{+\infty}\right) f(y)\,dy \underset{(2)}{=} \int_{1}^{3} c(y-1)(3-y)\,dy \underset{(1)}{=} c\int_{1}^{3}\left(-y^2+4y^2-3\right)dy =$$

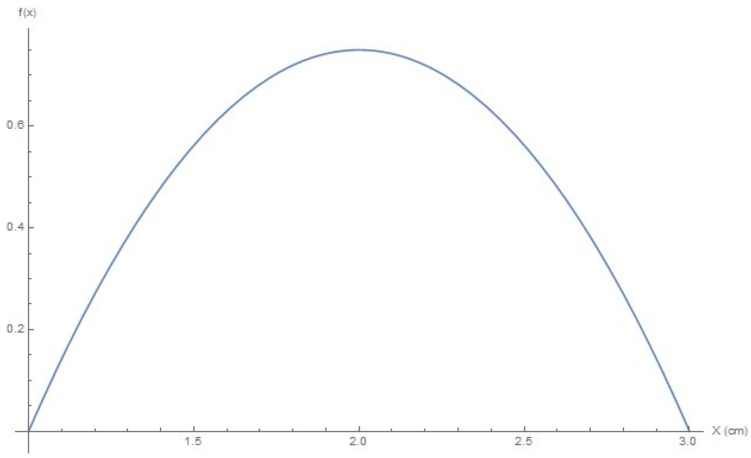
$$-\frac{c}{3}\left[y(y-3)^2\right]_1^3 \underset{(3)}{=} \frac{4c}{3}=1$$

(1): integral mugagabearen propietateak
(2): Probabilitateko dentsitate funtzioaren adierazpena aplikatuz
(3): Barrow-ren erregela aplikatuz

Beraz, $c=3/4\ unitate_1$. Honela, probabilitateko dentsitate funtzioa honakoa da:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}(x-1)(3-x) & si\ x\in(1,3) \\ 0 & si\ x\notin[1,3] \end{cases}$$

eta bere adierazpen grafikoa:



(2.) Lortu X zorizko aldagaiaren banaketa funtzioa eta irudikatu grafikoki (**4 puntu**).

Aurreko apartatuan jarraitutako pausu berdinak erabiliz, probabilitateko banaketa funtzioa:

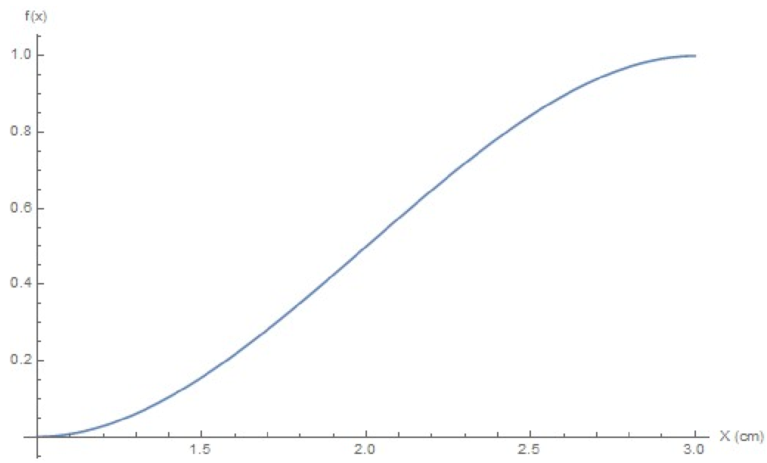
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi \underset{(1)}{=} \left(\int_{-\infty}^{1}+\int_{1}^{3}+\int_{3}^{x}\right) f(\xi)\,d\xi \underset{(2)}{=} \int_{1}^{y}\frac{3}{4}(\xi-1)(3-\xi)\,d\xi \underset{(1)}{=} \frac{3}{4}\int_{0}^{y}\left(-\xi^{2}+4\xi-3\right)d\xi =$$

$$-\frac{1}{4}\left[\xi(\xi-3)^{2}\right]_{1}^{x} \underset{(3)}{=} -\frac{1}{4}x^{3}+\frac{3}{2}x^{2}-\frac{9}{4}x+1$$

Beraz, probabilitateko banaketa funtzioa honela definituko da:

$$F(x):=\mathbb{P}(X\le x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ -\frac{1}{4}x^{3}+\frac{3}{2}x^{2}-\frac{9}{4}x+1 & si\; 1<y<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

Eta bere adierazpen grafikoa



(3.) Kalkulatu zirrindolen espero den diametroa eta desbiderazio tipikoa (**2 puntu**).

Itxarondako diametroa edo itxaropen matematikoa honela definitzen da:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx \underset{(1)}{=} \left(\int_{-\infty}^{1} + \int_{1}^{3} + \int_{3}^{+\infty}\right) x f(x)\,dx \underset{(2)}{=} \int_{1}^{3} \tfrac{3}{4} x(x-1)(3-x)\,dx \underset{(1)}{=}$$

$$\left(-\frac{3x^4}{16} + x^3 - \frac{9x^2}{8}\right|_1^3 = 2\ cm$$

Beste alde batetik, desbiderazio tipikoa honela definitzen da:
$\sigma[X] := \sqrt{E\left[(X-\mu_X)^2\right]} = \sqrt{E(X^2) - \mu_X^2}$. Adierazpen biak erabiliko ditugu eta emaitza berdina lortzen dela konprobatuko dugu.

$$\sigma[X] := \sqrt{E\left[(X-\mu_X)^2\right]} = \sqrt{\int_1^3 (x-2)^2\, \tfrac{3}{4}(x-1)(3-x)\,dx} = \sqrt{\int_1^3 \left(-\frac{3x^4}{4} + 6x^3 - \frac{69x^2}{4} + 21x - 9\right)dx} =$$

$$\sqrt{1/5} = \sqrt{0.2} = 0.4472\ cm$$

$$\sigma[X] = \sqrt{E(X^2) - \mu_\mu^2} = \sqrt{\int_1^3 x^2\,\frac{3}{4}(x-1)(3-x)\,dx - 2^2} = \sqrt{\int_1^3 \left(-\frac{3x^4}{4} + 3x^3 - \frac{9x^2}{4}\right)dx - 4} =$$

$$\sqrt{{}^{21}\!/_{5} - 4} = \sqrt{0.2} = 0.4472\ cm$$

2. ARIKETA

Bi jokalarik 4 aurpegi (tetraedro erregularra) dituen dado bana jaurtitzen dute. Lehenengoak A dadoa, orekatua dena, jaurtitzen du, eta bigarrenak honako probabilitateak dituen B dadoa jaurtitzen du:

$$P(1\,atera) = P(2\,atera) = \frac{1}{4} + \delta;$$

$$P(3\,atera) = P(4\,atera) = \frac{1}{4} - \delta,\ non\ 0 < \delta < 0{,}1$$

Apustu bat dado bakoitza baten botatzean datza. Apustua irabaziko du bi jokalarietatik puntuazio gehien lortzen duenak. Berdinketa badago ez dago irabazlerik.

Enuntziatuaren arabera, lagin espazioa honakoa litzateke:

		B			
		1	2	3	4
A	1	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [1]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [2]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [3]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [4]
	2	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [5]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [6]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [7]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [8]
	3	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [9]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [10]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [11]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [12]
	4	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [13]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$ [14]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [15]	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right)$ [16]

(1.) Zein jokalari da irabazle probableena, A dadoa jaurtitzen duen jokalaria ala B dadoa jaurtitzen duen jokalaria? (**4 puntu**).

Del espacio muestral anterior se tiene que

$$\mathbb{P}(A\,irabazi) = P([5],[9],[10],[13],[14],[15]) = 5\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right) + 1\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right) = \frac{6}{16} + \delta = 0.375 + \delta$$

$$\mathbb{P}(B\,irabazi) = P([2],[3],[4],[7],[8],[12]) = 1\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right) + 5\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right) = \frac{6}{16} - \delta = 0.375 - \delta$$

Como δ es positivo resulta más probable que gane A.

(2.) Zein da berdinketa egoteko probabilitatea? (**2 puntu**).

De la misma forma, del espacio muestral se deduce que

$$\mathbb{P}(empatar) = P([1],[6],[11],[16]) = 2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\delta\right) + 2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\delta\right) = \frac{4}{16} = 0.25$$

(3.) Sei apustu egiten badira, kalkulatu gutxienez bi berdinketa gertatzeko probabilitatea.

Horrelako sei apustutan oinarritutako lau jokaldi egiten badira, zein da horietako jokaldi bakoitzean gutxienez bi berdinketa gertatzeko probabilitatea? (**4 puntu**).

Izan bedi *X* zorizko aldagai binomiala

$$X = \text{"6 apustutan egindako berdinketa kopurua"};\ X \to B(6, 0.25)$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0} 0.25^0 0.75^6 - \binom{6}{1} 0.25^1 0.75^5 = 0.466$$

Sei apustutan egindako lau jokaldi egiten badira, lau jokaldi horiek independenteak dira, Beraz, eskatutako probabilitatea:

$$\mathbb{P} = 0.466^4 = 0.04715673$$

3. ARIKETA

Marka komertzial bateko muskuilu-latek beraien pisu meharra 250 g-koa dela zehazten dute. Hala ere, kontsumitzaile bat produktu horren batazbesteko pisu meharra baxuagoa dela konbentzituta dago. Pisu meharrak desbiderazio tipikoa 9 g dituen banaketa normala jarraitzen badu, eskatzen da:

(1.) Kontsumitzailearen zalantza egiaztatzeko, Kontsumitzaile Erakunde batek 100 tamaina duen zorizko aldagai bakuna hartu du. Lagin honen batazbesteko pisu meharra 245 g dira eta bere kuasibariantza 0.35 g^2. Adierazgarritasun maila % 3a bada, arrazoia al du kontsumitzaileak? (**3 puntu**).

Kontsidera dezagun X := "*muskuilu-latek beraien pisu meharra*" zorizko aldagaia. Populazio bateko batezbesteko aritmetikoaren alde bakarreko hipotesi kontrastea da. Populazioaren desbiderazio tipikoa ezaguna denez, definitutako zorizko aldagaiak honako banaketa jarraitzen du: $X \sim \mathcal{N}\left(\mu = 250\ g, \sigma_{\hat{\mu}} = \frac{9gr}{\sqrt{100}} = 0.9\ g\right)$. Beraz, errore probablea $\sigma_{\hat{\mu}} = \frac{9gr}{\sqrt{100}} = 0.9\ g$ da.

Ariketaren hipotesiak honakoak dira:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_0 = 250\ g \\ H_a: & \mu < 250\ g \end{cases}$$

Kontrastearen estatistikoa honakoa da

$$z_{KE} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma_{\hat{\mu}}} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\hat{\mu}}} = \frac{245 - 250}{0.9} = \frac{-5}{0.9} = -5.5556$$

Balio kritikoa (p-balioa) emandako adierazgarritasun maila erabiliz lortzen da:

$$z_1 = z_{\alpha=\%3} = -pnorm(\text{p} = 0.97, \text{mean} = 0, \text{sd} = 1) = -1.880794$$

$z_{KE} = -5.5556 < z_1 = -1.880794$ denez, enuntziatuan emandako lagina erabiliz, %3ko adierazgarritasun mailaz, hipotesi nulua errefusatzeko ebidentzia asko dago. Hau da, kontsumitzaileak arrazoia dauka marka komertzialak emandako informazioa zalantzan jartzean.

(2.) Kontraste horren p-balioa kalkulatu. Lortutako balioaren esanahia azaldu (**2 puntu**).

p-balioa, eskualde kritikoaren tamaina da kontrastearen estatistikoa bere balio kritikora eramaten denean:

$$p-balioa = \mathbb{P}\left(\overline{x} < 245\ g \mid H_0\ egia\right) = \mathbb{P}\left(\overline{x} < 245\ g \mid \hat{\mu} = \overline{x} \sim \mathcal{N}\left(250\ \ g, 0.9\ g\right)\right) \underset{tipifikatuz}{\Leftrightarrow}$$

$$p-valor = \left(Z < -5.5556 \mid Z \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)\right) = 1.383299 \times 10^{-8}$$

Hau da:

$$z_{p-balioa} = z_1\big|_{\alpha=p-balioa} = z_{KE} = -5.5556 \Rightarrow p-balioa = pnorm(\text{q} = -5.5556, \text{mean} = 0, \text{sd} = 1) =$$

$$= 1.383299 \times 10^{-8}$$

(3.) Zein izan behar da laginaren tamaina, %95-eko konfiantza mailaz, estimatutako errorea 0.5 g baino txikiagoa izateko? (**2 puntu**).

Populazioaren desbiderazio tipikoa ezaguna denez, errore-marjina honakoa da

$$EM = z_\alpha \sigma_{\hat{\mu}} = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left| z_{95\%} \right| \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.959964 \frac{9\ gr}{\sqrt{n}} \le \varepsilon_{\max} = 0.5\ g \Rightarrow$$

$$n \ge \left(\frac{9 \times 1.959964}{0.5} \right)^2 = 1244.63 \Rightarrow n_{\min} = 1245$$

(4.) II. motako errorea egiteko probabilitatea kalkulatu eta kontrastearen potentzia zehaztu. Atal hau egiteko II. motako errorearen definizioa betetzen duen balio bat erabili (**3 puntu**).

Bigarren motako errorea, hipotesi nulua gezurra izanik hipotesi nulua onartzeko probabilitatea da. Beraz, hipotesi nulua gezurra bada μ<250 g izan behar da. Enuntziatuak II. Motako errorearen definizioa betetzen duen balio bat erabiltzea eskatzen du. Hartuko dugun balioa $\zeta = 248.52\ g$ izango da.

$$\beta = \mathbb{P}\left(II\ motako\ errorea \right) = \mathbb{P}\left(H_0\ Onartu\ \middle|\ H_1\ egia \right) = \mathbb{P}\left(H_0\ Onartu\ \middle|\ H_0\ gezurra \right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\zeta \le \mu_0 \middle| H_1\ egia \right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\overline{x} \le 250\ g \middle| \mathcal{N}\left(\mu = 248.52\ g, \sigma = 0.9\ g \right) \right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{x} - \mu_0}{0.9} \le \frac{248.52 - \mu_0}{0.9} \right) = \mathbb{P}\left(Z \le \frac{248.52 - \mu_0}{0.9} \right)_{\mu \le 250\ g} =$$

$$\mathbb{P}\left(Z \le z = -1.6444 \right) = pnorm(q = -1.6444, mean = 0, sd = 1) = 0.0500468$$

Orduan, kontrastearen potentzia (1-β) honakoa izango da:

$$P\left(\mu \right) = \mathbb{P}\left(H_1\ Onartu \middle| H_1\ egia \right) = 1 - \beta = 1 - 0.0500468 = 0.9499532 \equiv \%\,94.99532$$