Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 18-11-2017
EXAMEN TEÓRICO. TIEMPO: 20‘

Catenaria:

A partir de la expresión cartesiana de las ecuaciones de equilibrio de un cable sometido a cargas verticales, deducir las expresiones matemáticas de: la forma de un cable homogéneo que soporta su propio peso dado como **q** Newtons por unidad de longitud; la longitud de cable; y la tensión del cable en cada punto. (7 puntos)

Si un cable homogéneo de peso **q** está suspendido de dos puntos A y B a la misma altura, y el punto C es el de máxima flecha. ¿Será posible colgar un cable con doble peso que pase por los mismos puntos A, B y C? ¿Tendrá la misma forma? ¿Cómo varían las tensiones del cable? (3 puntos)

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 18-11-2017
EXAMEN TEÓRICO. RESOLUCIÓN.

• Apartado 9.7 Páginas 213-215. Libro "Mecánica Aplicada: Estática y Cinemática".

La ecuación de una catenaria es:

$$y = \alpha \mathrm{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

en el sistema de referencia prefijado en la teoría. Donde la forma viene dada por el parámetro de la catenaria:

$$\alpha = \frac{T_o}{q}$$

donde To es la tensión horizontal del cable y q el peso por unidad de longitud.

Si el nuevo cable tiene doble peos propio 2q, y se desea que tenga la misma forma, es decir el mismo parámetro α, la tensión horizontal a aplicar debe ser el doble. En cuyo caso pasará por los mismos puntos y tendrá la misma forma geométrica.

La tensión en un punto cualquiera de la catenaria es:

$$T = qy$$

Así que todas las tensiónes del nuevo cable serán de valor doble, puesto que la coordenada y de cada punto se mantiene ero se dobla el valor de q.

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

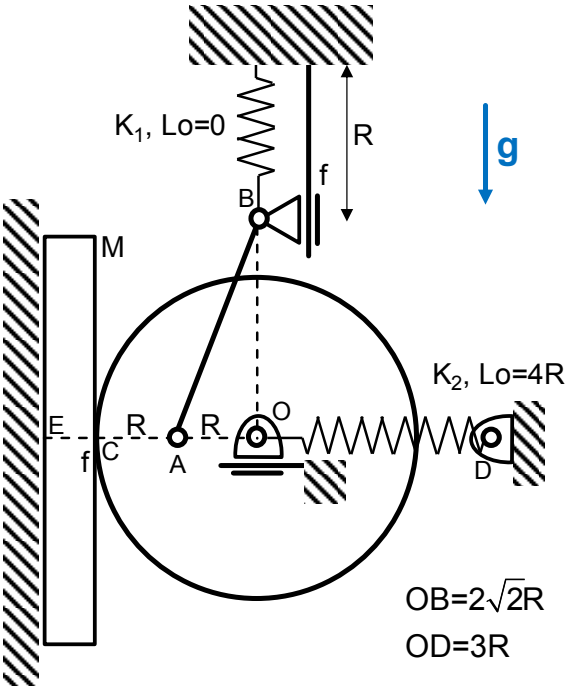
MECANICA. ESTÁTICA. 18-11-2017
EXAMEN PRÁCTICO 1. TIEMPO: 45‘

El sistema mecánico de la figura está compuesto por una barra AB de longitud 3R y de masa despreciable, cuyo extremo B está apoyado con rozamiento sobre una barra vertical y articulado a un muelle ideal de constante elástica K_1. El extremo A está articulado en la posición indicada a un disco de masa despreciable y radio 2R. En su punto central O, el disco está simplemente apoyado sobre una superficie sin rozamiento y unido a un muelle OD de constante elástica K_2 y longitud sin tensión 4R. En el punto C, el disco está en contacto con rozamiento con una placa de masa M y espesor despreciable que puede deslizar sin rozamiento sobre la superficie vertical de la figura.

El coeficiente de rozamiento en los dos contactos con rozamiento en B y C es $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Obtener:

1. Diagramas de sólido libre de la barra, disco y placa. (1 punto)
2. Posibles valores de la constante elástica K_1 para que el sistema esté en equilibrio en la posición de la figura. (3 puntos)
3. Valor mínimo de la constante elástica K_2 para garantizar la rodadura en C. (3 puntos)
4. Fuerzas de enlace en E, A y O. (3 puntos)



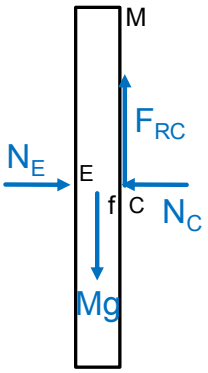
Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

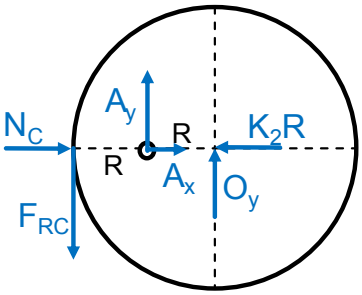
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 18-11-2017
EXAMEN PRÁCTICO 1. RESOLUCIÓN.

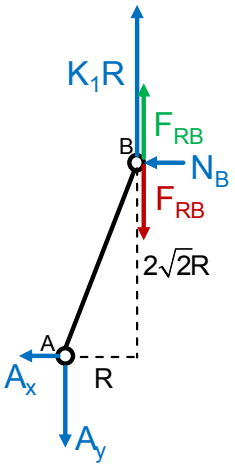
1.



x) $N_E=N_C$
y) $F_{RC}=Mg$



x) $N_C-K_2R+A_x=0$
y) $A_y-F_{RC}+O_y=0$
M_o) $2F_{RC}R-A_yR=0$



x) $-N_B-A_x=0$
y) $-A_y\pm F_{RB}+K_1R=0$
M_o) $A_yR-A_x2\sqrt{2}R=0$

1. En función del valor de la constante elástica el equilibrio puede romperse con el punto B ascendiendo o descendiendo, por lo que al invertir la dirección de la fuerza de rozamiento en B se obtienen los posibles valores de la constante elástica: $\frac{3Mg}{2R}<K_1<\frac{5Mg}{2R}$
2. Para que se garantice la rodadura es necesario que la fuerza de rozamiento en C sea inferior al producto del coeficiente de rozamiento por la normal en C. En el límite, el valor mínimo sería igual a dicha magnitud. De ahí se obtiene que $K_2>\frac{3\sqrt{2}Mg}{2R}$.
3. Resolviendo las ecuaciones:

$$N_C=\sqrt{2}Mg \quad O_y=-Mg \quad A_y=2Mg \quad A_x=\frac{\sqrt{2}Mg}{2}$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

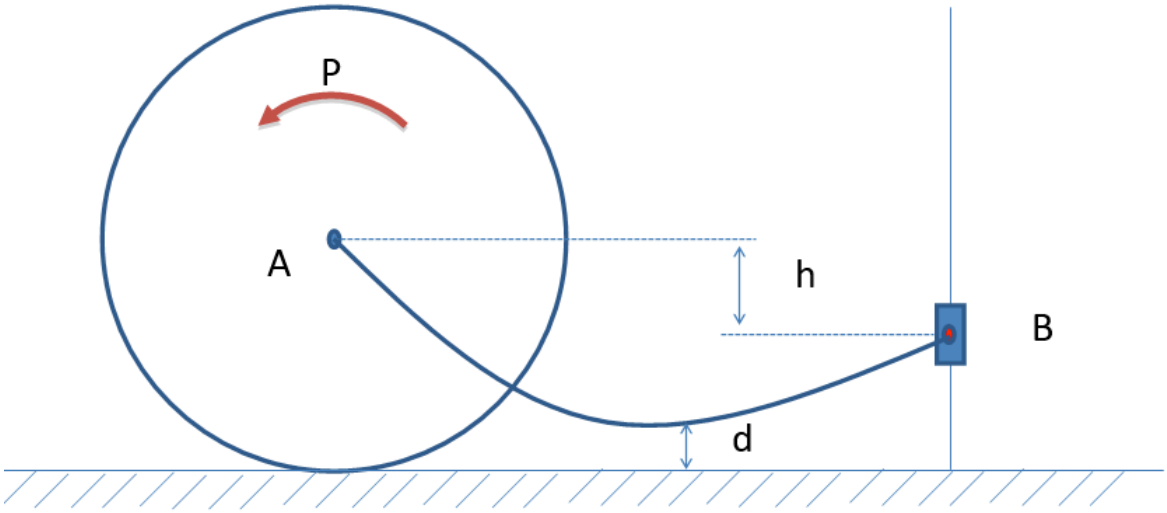
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 18-11-2017
EXAMEN PRÁCTICO 2. TIEMPO: 40‘

El sistema mecánico de la figura está formado por un disco de radio 2R y masa despreciable, que contacta con un plano horizontal sin deslizar en ningún momento. El disco lleva articulado en su centro A un cable de peso por unidad de longitud q = Mg/R y longitud 5R/2. El otro extremo del cable, B, está articulado a una deslizadera sin peso que tiene una guía vertical rugosa. Sobre el disco actúa un par motor constante de valor P = 2MgR. Si el coeficiente de rozamiento entre la deslizadera y la guía vertical vale 0.5, admitiendo que el cable no llega a tocar el plano horizontal, se pide calcular en la posición de equilibrio estricto:

1. Valor de la tensión horizontal (1p).
2. Parámetro de la catenaria (1p).
3. Tensiones en los extremos del cable (A y B) (3p).
4. Valor de “h” (2p).
5. Valor de “d” (3p).

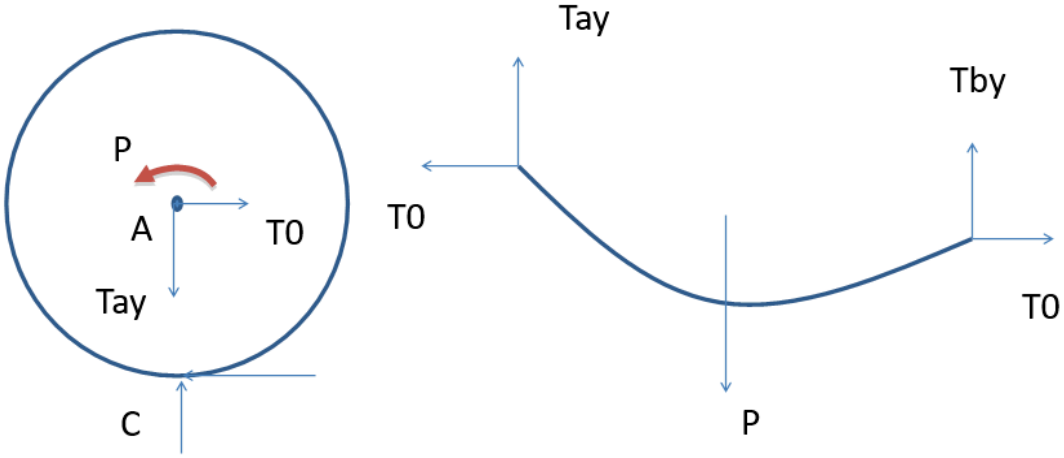


Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 18-11-2017
EXAMEN PRÁCTICO 2. RESOLUCIÓN.



Solución:

1.
$\sum M_C=0$
T0 x 2R = M
T0 = Mg
2.
α = T0 / q = **R**
3.
Apoyo B:
Tby = Fr = f N = 0.5 T0 = Mg/2
Catenaria:
Tay + Tby – P = 0
P = q 5R/2
Tay = 2Mg
TA = $\sqrt{(Mg)^2 + (2Mg)^2}$ = **Mg √5**
TB = $\sqrt{(Mg)^2 + (Mg/2)^2}$ = **Mg √5 / 2**
4.
h = yA – yB = TA/q – TB/q = **R √5 / 2**
5.
d = 2R – (yA – α) = **3R – R √5**

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

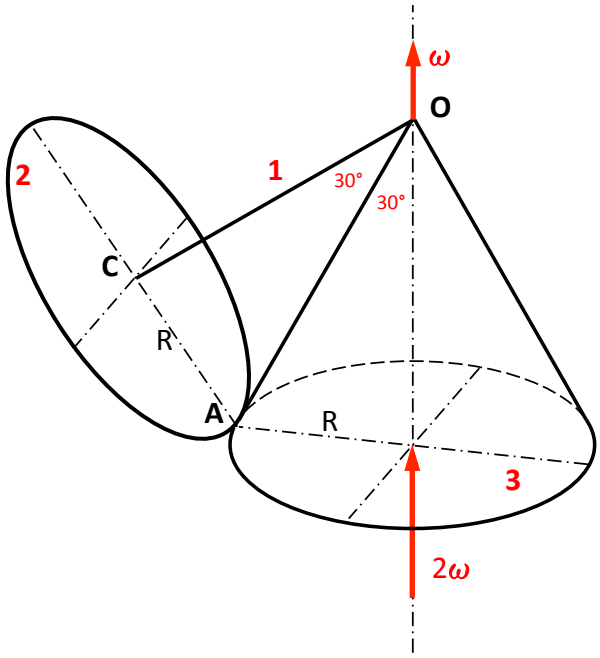
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

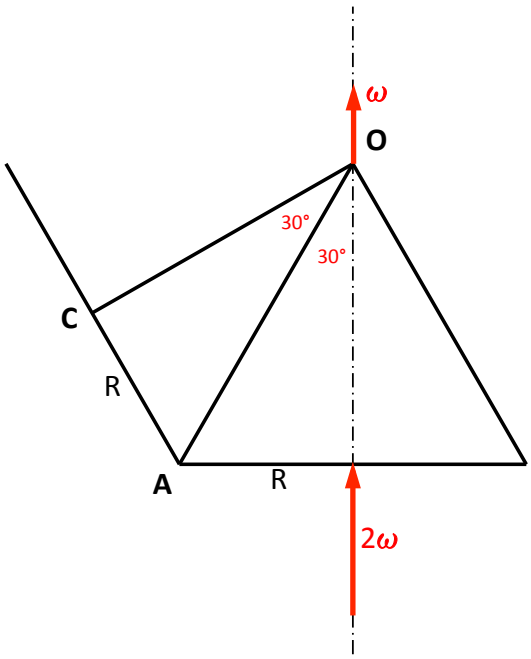
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. CINEMÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 1. TIEMPO: 45‘

El sistema mecánico de la figura está compuesto de tres sólidos. El sólido 1 es una barra que une el punto fijo O y el centro del disco C, tiene rotación conocida y constante alrededor del eje vertical fijo. El sólido 2 es un disco de centro C, radio R, perpendicular a la barra 1 en todo momento, y con un contacto en A con rodadura con el sólido 3. El sólido 3 es un cono, de dimensiones indicadas en la figura, que gira con velocidad angular conocida y constante alrededor del eje vertical fijo que pasa por O.
Se pide:

1. Dibujar los ejes instantáneos de rotación y deslizamiento de los sólidos y sus velocidades angulares, en el movimiento absoluto y en los movimientos relativos entre 2 y 1, y 2 y 3. (4 puntos)
2. Obtener la aceleración angular del sólido 2. (3 puntos)
3. Obtener la aceleración del punto A del sólido 2. (1 punto)
4. Obtener las componentes tangencial y normal de la aceleración de A. (2 puntos)





Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. CINEMÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 1. RESOLUCIÓN.

1.

- Los Ejes de rotación absolutos de 1 y 3 están sobre el eje vertical que pasa por O.
- El ejer relativo de 2 a 1, sobre OC.
- El ejer relativo de 2 a 3 sobre AO por existir rodadura en A.

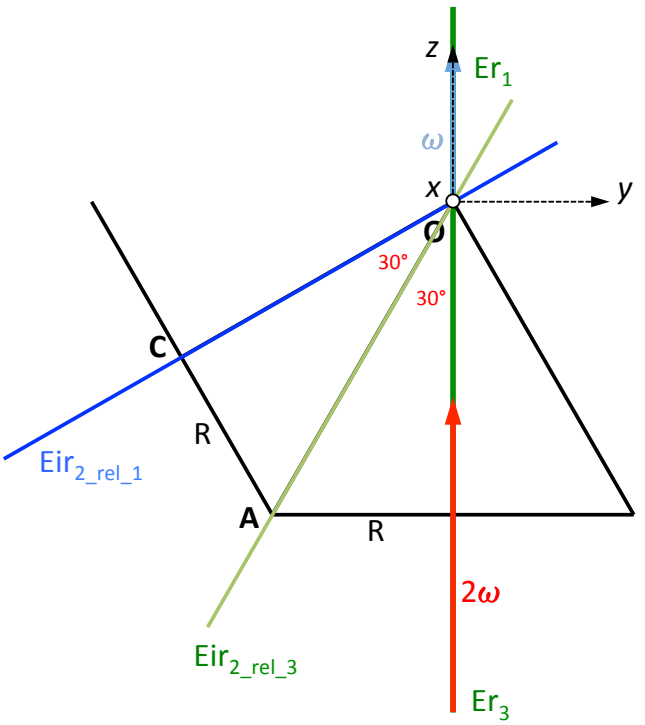
La construcción gráfica que proporciona la velocidad angular absoluta de 2, a través del sólido 1 y a través del sólido 3, proporciona:

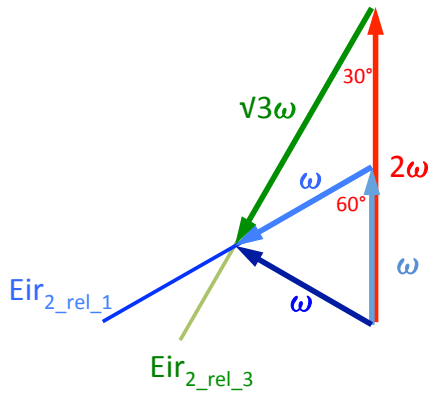
- Los valores de velocidades angulares relativas.

$$\overrightarrow{\Omega_{2\,rel\,3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\vec{e}_2 - \frac{3}{2}\omega\vec{e}_3 \qquad \overrightarrow{\Omega_{2\,rel\,1}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\omega\vec{e}_3$$

- El eje y velocidad angular absoluta de 2:

$$x = 0 \qquad \overrightarrow{\Omega_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\omega\vec{e}_3$$
$$\sqrt{3}z + y = 0$$





Alternativamente, se puede calcular la velocidad de tres puntos no alineados del sólido 2 para obtener su velocidad angular.

Así:
- el punto O pertenece también al sólido 2.

$$\overrightarrow{V_O} = \vec{0}$$

- el punto A del sólido 2 tienen la misma velocidad que el punto A del sólido 3 por haber rodadura:

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{\Omega_3} \times \overrightarrow{OA} = \vec{0} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -R & -\sqrt{3}R \end{vmatrix} = 2\omega R \overrightarrow{e_1}$$

- el punto C del sólido 1 coincide con el punto C del sólido 2:

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{\Omega_1} \times \overrightarrow{OC} = \vec{0} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\frac{3R}{2} & -\frac{\sqrt{3}R}{2} \end{vmatrix} = \frac{3\omega R}{2} \overrightarrow{e_1}$$

Ahora se pueden plantear los campos de velocidades en el sólido 2 con O, A y C:

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{\Omega_2} \times \overrightarrow{OA} = \vec{0} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & -R & -\sqrt{3}R \end{vmatrix} = R\left(-\Omega_y\sqrt{3} + \Omega_z\right)\overrightarrow{e_1} + R\left(\Omega_x\sqrt{3}\right)\overrightarrow{e_2} + R\left(-\Omega_x\right)\overrightarrow{e_3}$$

de donde:

$$-\Omega_y\sqrt{3} + \Omega_z = 2\omega$$

$$\Omega_x = 0$$

y:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_0 + \vec{\Omega}_2 \times \vec{OC} = \vec{0} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & -\frac{3R}{2} & -\frac{\sqrt{3}R}{2} \end{vmatrix} = R\left(-\Omega_y \frac{\sqrt{3}}{2} + \Omega_z \frac{3}{2}\right)\vec{e}_1$$

de donde:

$$-\Omega_y \frac{\sqrt{3}}{2} + \Omega_z \frac{3}{2} = \frac{3\omega}{2}$$

Resultando:

$$\Omega_x = 0$$

$$\Omega_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega \qquad \vec{\Omega}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\omega\vec{e}_3$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\omega$$

2. El sistema de referencia elegido es móvil con el plano que conteniendo a OC gira alrededor del eje fijo:

$$\vec{\Omega}_{xyz} = \vec{\Omega}_1 = \omega\vec{e}_3$$

$$\vec{\alpha}_2 = \frac{d\vec{\Omega}_2}{dt} = \left[\frac{d\vec{\Omega}_2}{dt}\right]_1 + \vec{\Omega}_{xyz} \times \vec{\Omega}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega & \frac{1}{2}\omega \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2\vec{e}_1$$

3.

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{\alpha_2} \times \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\Omega_2} \times \left(\overrightarrow{\Omega_2} \times \overrightarrow{OA} \right) =$$

$$= \vec{0} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -R & -\sqrt{3}R \end{vmatrix} + \overrightarrow{\Omega_2} \times \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega & \frac{1}{2}\omega \\ 0 & -R & -\sqrt{3}R \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{5}{2}\omega^2 R \overrightarrow{e_2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 R \overrightarrow{e_3}$$

4.

$$\overrightarrow{a_{A\,\text{tangencial}}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{a_{A\,\text{normal}}} = \frac{5}{2}\omega^2 R \overrightarrow{e_2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 R \overrightarrow{e_3}$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

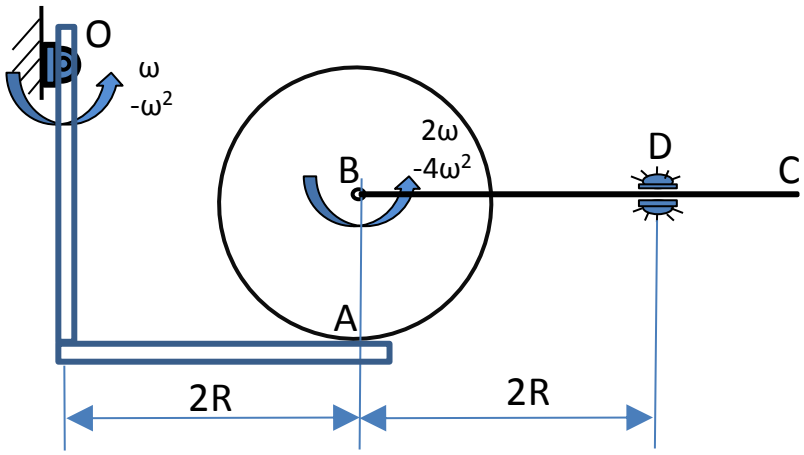
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. CINEMÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 2. TIEMPO: 45‘

El sistema de la figura está formado por una escuadra (en L) articulada a un punto fijo O. La escuadra gira con una velocidad angular ω, y una aceleración angular $-\omega^2$ conocidas, sobre ella en A rueda sin deslizar un disco de radio R. La velocidad y la aceleración angulares absolutas del disco son conocidas, de valores 2ω y $-4\omega^2$, respectivamente. En B, centro del disco, está articulada una barra BC que pasa por una articulación en el punto fijo D, a una distancia 4R horizontal y -R vertical desde el punto O. Se pide para la posición de la figura:

1. La velocidad del punto A (0,5 puntos).
2. La velocidad del punto B (0,5 puntos).
3. El centro instantáneo de rotación del disco (1 punto).
4. La velocidad angular de la barra BC (1 punto).
5. La velocidad relativa de D respecto de la barra (1 punto).
6. La aceleración del punto A de la escuadra (1 punto).
7. La aceleración del punto B del disco (2 punto).
8. La aceleración angular de la barra BC (3 puntos).



Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. CINEMÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 2. RESOLUCIÓN

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OA} = \underline{2\omega R(\vec{i} + \vec{j})}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} = 2\omega R(\vec{i} + \vec{j}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = \underline{2\omega R\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{IA} \perp \vec{V}_A$$

$$\overrightarrow{IB} \perp \vec{V}_B \longrightarrow \underline{\overrightarrow{OI} = (R, -R)}$$

$$\vec{V}_D = \vec{0}$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_{Darr/BC} + \vec{V}_{Drel/BC}$$

$$\vec{V}_{Darr/BC} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BD} = 2\omega R\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega R\vec{j} + 2\omega_{BC} R\vec{j}$$

$$\vec{V}_{Drel/BC} = V_{Drel/BC} \cdot \vec{i} \longrightarrow \vec{\omega}_{BC} = \underline{-\omega\vec{k}}$$

$$\vec{V}_{Drel/BC} = \underline{\vec{0}}$$

$$\vec{a}_{A1} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA} - \vec{\omega}_1^2 \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega^2 \\ 2R & -2R & 0 \end{vmatrix} - \omega^2(2R\vec{i} - 2R\vec{j}) = \underline{-4\omega^2 R\vec{i}}$$

$$\vec{a}_{A2rel/1} = \vec{V}_{A2rel/1} \times \vec{\omega}_{2rel/1} = \frac{(2\omega - \omega)}{1/\infty - 1/R}\vec{i} \times (2\omega - \omega)\vec{k} = \omega^2 R\vec{j}$$

$$\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A1} + \vec{a}_{A2rel/1} + \vec{a}_{A2cor/1} = -4\omega^2 R\vec{i} + \omega^2 R\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{AB} - \vec{\omega}_2^2 \cdot \overrightarrow{AB} = (-4\omega^2 R\vec{i} + \omega^2 R\vec{j}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} - 4\omega^2 \cdot (R\vec{j}) = \underline{-3\omega^2 R\vec{j}}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

$$\vec{a}_D = \vec{0}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{Darr/BC} + \vec{a}_{Drel/BC} + \vec{a}_{Dcor/BC}$$

$$\vec{a}_{Darr/BC} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \times \overrightarrow{BD} - \vec{\omega}_{BC}^2 \cdot \overrightarrow{BD} = -3\omega^2 R\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{BC} \\ 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \cdot 2R\vec{i}$$

$$\vec{a}_D = -2\omega^2 R\vec{i} - 3\omega^2 R\vec{j} + 2\alpha_{BC} R\vec{j} + \vec{a}_{Drel/BC} \cdot \vec{i} = \vec{0} \longrightarrow \underline{\vec{\alpha}_{BC} = \frac{3\omega^2}{2}\vec{k}}$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

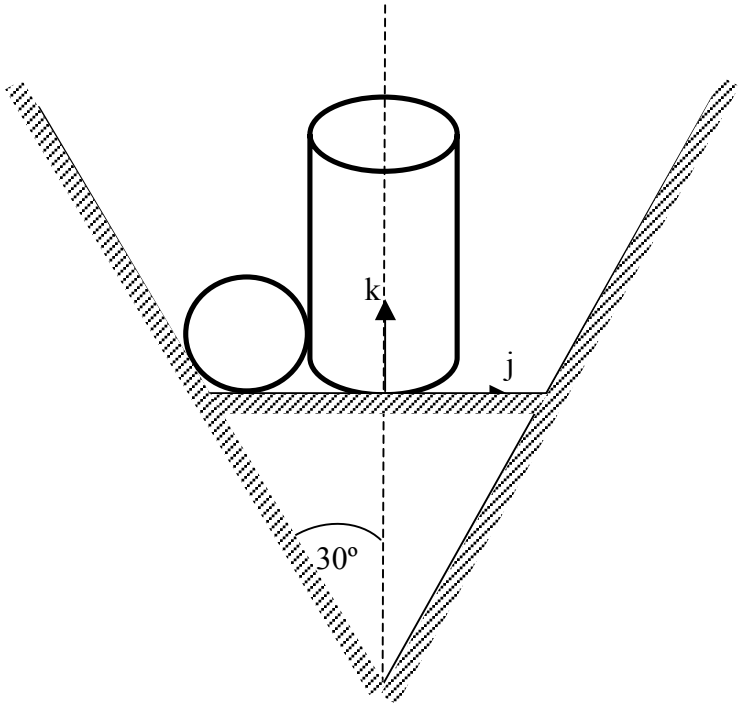
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. CINEMÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN TEÓRICO. TIEMPO: 20‘

1. Deducir la expresión del campo de velocidades del movimiento relativo del punto material. Definir el concepto de velocidad de arrastre y velocidad relativa. (5 puntos)

2. El cilindro de revolución de la figura gira con velocidad angular constante $\overrightarrow{\Omega_{cil}} = \omega\vec{k}$. La esfera está en contacto permanente con el cilindro, con un plano fijo perpendicular al eje del cilindro, y con el interior de un cono fijo de semiángulo en el vértice 30º. La velocidad angular de la esfera es $\overrightarrow{\Omega_{esf}} = \omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}\right)$. No hay deslizamiento en ninguno de los puntos de contacto. Determinar las velocidades angulares de pivotamiento y rodadura de la esfera relativas al cilindro y al plano (5 puntos).



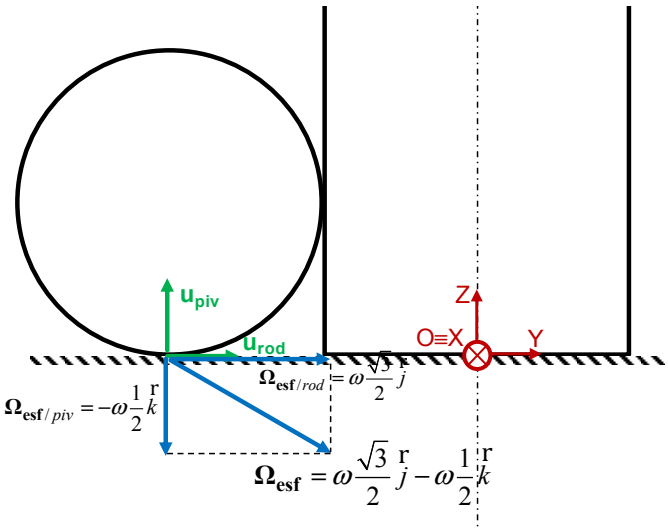
Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

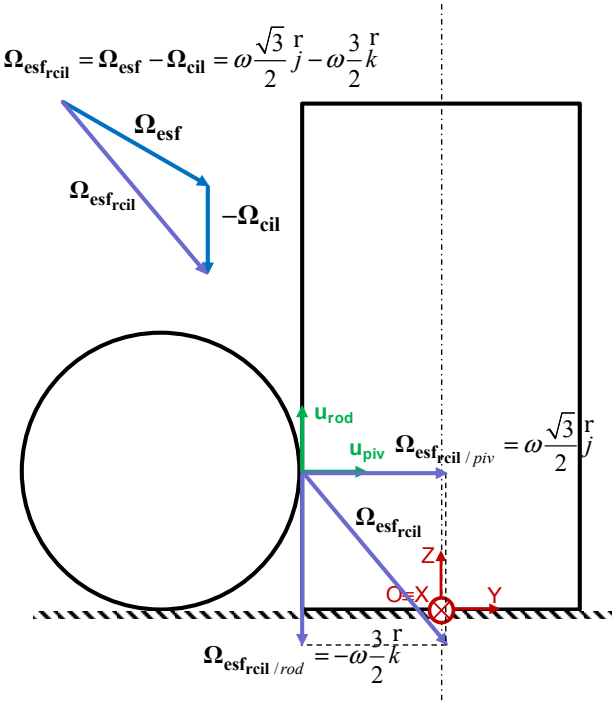
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. CINEMÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN TEÓRICO. RESOLUCIÓN

1. Libro "Mecánica Aplicada: Estática y Cinemática", Ed. Síntesis. Págs. 316-318.
2.





Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

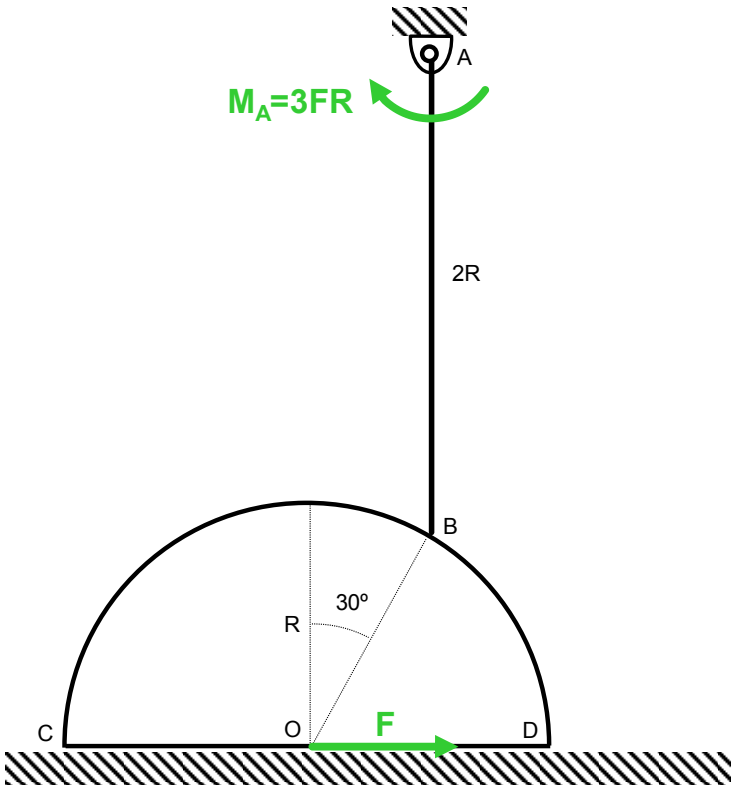
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 1. TIEMPO: 35‘

La barra sin masa AB de longitud **2R** está articulada en A y en contacto en B con un semidisco de radio **R** sin masa de centro en O que se apoya sobre una superficie horizontal. En ambos contactos hay rozamiento. Se pretende que el sistema esté en equilibrio en la posición de la figura con el semidisco a punto de iniciar el vuelco, para lo cual a la barra se le aplica un momento conocido **3FR** y al centro del semidisco una fuerza horizontal conocida **F** en el sentido indicado en la figura.

Se pide:

1. Dibujar los diagramas de sólido libre de los dos sólidos. (2 puntos)
2. Calcular el coeficiente de rozamiento mínimo. (5 puntos)
3. Suponiendo que se elimina la fuerza aplicada en O y que el contacto en B es sin rozamiento, razonar si el equilibrio del semidisco es posible indicando la posición de la reacción entre el semidisco y el suelo y el coeficiente de rozamiento necesario. ¿Sería posible hacer volcar el semidisco aumentando el momento aplicado sobre la barra AB? (3 puntos)



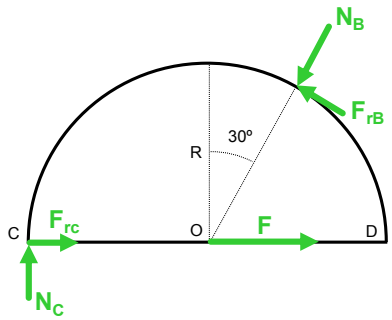
Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

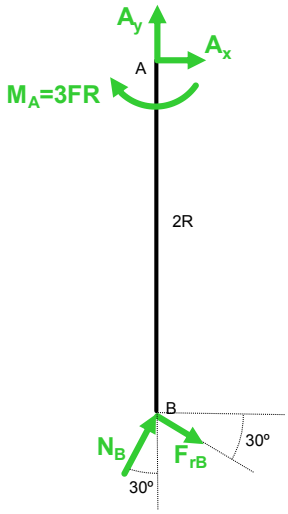
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 1. RESOLUCIÓN

Siempre que aparece un momento de vuelco, en este caso debido a la fuerza de rozamiento en B, la normal se desplaza sobre la superficie de contacto con el objeto de equilibrar dicho momento. En el límite, si el semidisco está a punto de volcar, la normal se habrá desplazado al un extremo de dicha superficie, en este caso hasta el punto C.





$$x)\ -F+F_{rC}-\frac{N_B}{2}-\frac{\sqrt{3}F_{rB}}{2}=0$$

$$y)\ N_C-\frac{\sqrt{3}N_B}{2}+\frac{F_{rB}}{2}=0$$

$$Mo)\ F_{rB}R-N_CR=0$$

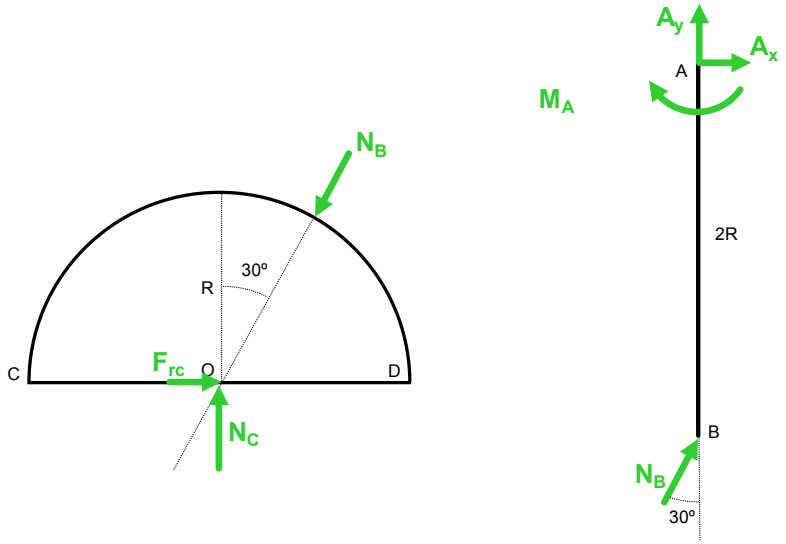
$$M_A)\ -3FR+\frac{N_B}{2}2R+\frac{\sqrt{3}F_{rB}}{2}2R=0$$

Planteadas las ecuaciones de equilibrio indicadas (las de equilibrio en X e Y para la barra sólo sirven para obtener las fuerzas de enlace en A), se tiene un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas: las dos normales y las correspondientes fuerzas d rozamiento. Resolviendo:

$$N_B=\frac{3F}{2},F_{rB}=\frac{\sqrt{3}F}{2},N_C=\frac{\sqrt{3}F}{2},F_{rC}=\frac{F}{2}$$

Suponiendo que el equilibrio estricto se da en B y luego en C, con el objeto de seleccionar el coeficiente de rozamiento mayor, el resultado es que en ambos contactos, el coeficiente es igual , por tanto ese es el mínimo necesario: $f=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Si desaparecen la fuerza horizontal F en O y el rozamiento en B, la situación es la siguiente:



Sobre el semidisco sólo hay tres fuerzas aplicadas, de las cuales, forzosamente la normal en B y la fuerza de rozamiento concurren en el punto O. Para garantizar el equilibrio de momentos, la tercera fuerza, que es la normal, ha de ser concurrente también en O. El equilibrio entonces es posible si se equilibran las fuerzas:

$$x)\ F_{rC} = \frac{N_B}{2}$$

$$y)\ N_C = \frac{\sqrt{3}N_B}{2} \qquad M_A)\ -M_A + \frac{N_B}{2}2R = 0 \rightarrow N_B = \frac{M_A}{R}$$

El coeficiente de rozamiento necesario será: $f = {F_{rC}}/{N_C} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Por último, no será posible volcar el disco en esta situación, ya que por mucho que aumente, el valor de M_A, al no haber rozamiento en B, no se genera un momento de vuelco en el disco. Aumentará el valor de la normal, pero ésta no genera dicho momento.

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

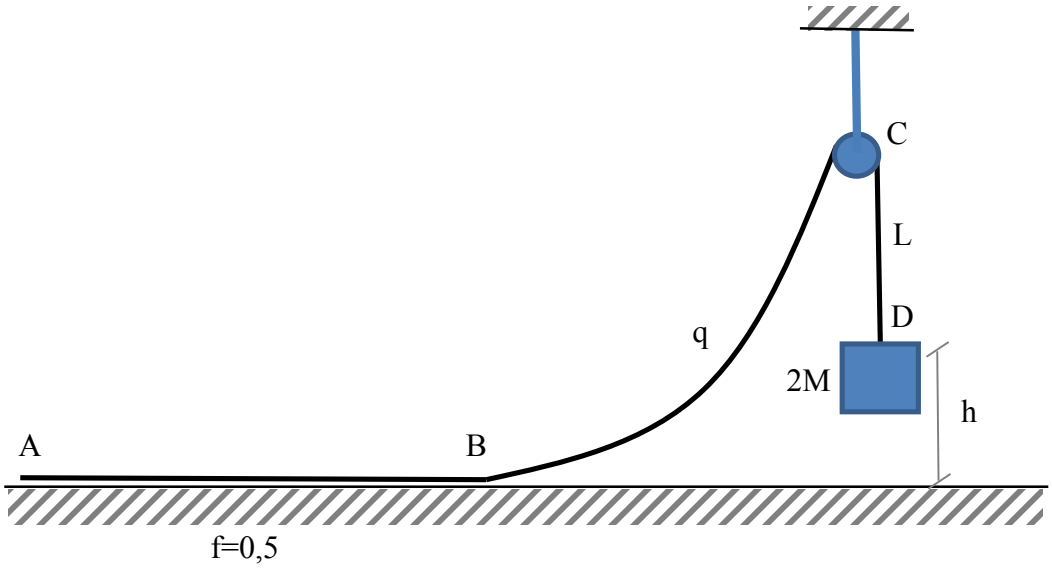
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 2. TIEMPO: 40‘

El cable **ABCD** de peso por unidad de longitud **q = Mg/L** y longitud total $\mathbf{S_{ABCD} = 7L}$, se encuentra en la situación de equilibrio **estricto** de la figura. Se sabe que el coeficiente de rozamiento entre cable y suelo es de **f = 0,5**. En C se encuentra apoyado en una polea de dimensiones despreciables y sin rozamiento, con una masa de valor **2M** colgando en su extremo D, siendo $\mathbf{S_{CD} = L}$. Se pide:

1.- Tensión en C (1 p)
2.- Longitud de cable S_{BC} (4 p)
3.- Parámetro de la catenaria (2 p)
4.- Altura h de la masa con respecto al suelo (3 p)



Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN PRÁCTICO 2. RESOLUCIÓN

$T_c = q*L+2Mg = 3Mg$

$T_o = Fr = N*f = S_{AB} *q*0.5$

$S_{AB} + S_{BC} + L = 7L$

$(3Mg)^2 = T_o^2 + (S_{BC} * q)^2$

$S_{AB} = 18/5L$

$S_{BC} = 12/5L$

$\alpha = T_o/q = 9/5L$

$y_c = T_c/q = 3L$
$y_B = \alpha = 9/5L$

$h = 3L - 9/5L - L = L/5$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

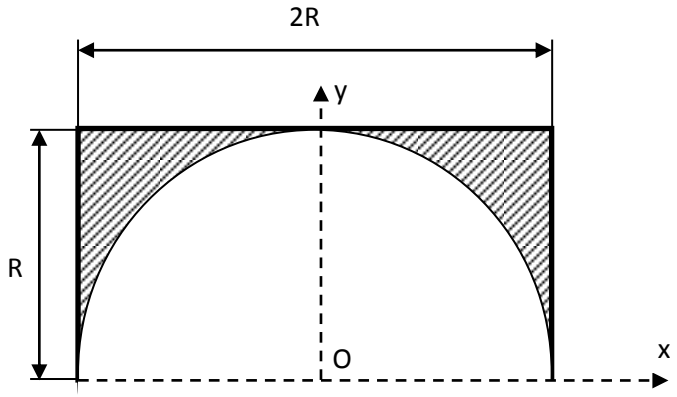
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN TEÓRICO. TIEMPO: 20‘

1. Obtener las ecuaciones vectoriales del equilibrio de un hilo (5 puntos)

2. A una placa rectangular homogénea, de dimensiones Rx2R, se le practica un orificio semicircular de radio R, como se aprecia en la figura. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del sólido resultante. (5 puntos)



Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. ESTÁTICA. 23-01-2018
EXAMEN TEÓRICO. RESOLUCIÓN

1. Libro "Mecánica Aplicada: Estática y Cinemática", Ed. Síntesis. Págs. 203-204.
2. Hay simetría respecto al plano x=0, así que $x_G = 0$.

Para la coordenada y, a partir de la posición de los centros de gravedad de cada figura:

Para la placa: $y_{Gplaca} = R/2$
$S_{placa} = 2R^2$

Para el semidisco: $y_{Gsemidisco} = 4R/3\pi$
$S_{semidisco} = \dfrac{\pi R^2}{2}$

Para el conjunto: $y_G = \dfrac{1}{2R^2 - \dfrac{\pi R^2}{2}}\left(2R^2 \cdot R/2 - \dfrac{\pi R^2}{2} \cdot 4R/3\pi\right) = \dfrac{2R}{3(4-\pi)}$

Para la coordenada y, por Pappus-Guldin:

$$V = S \cdot 2\pi y_G \rightarrow \left(\pi R^2 2R - \frac{4}{3}\pi R^3\right) = \left(2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}\right) 2\pi y_G$$

$$y_G = \frac{2R}{3(4-\pi)}$$