SEINALEEN PROZESATZEA: LEHEN PARTZIALA

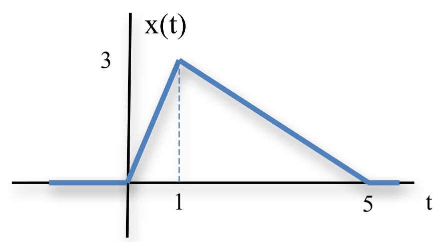
Azterketak 3 ariketa ditu. Ariketa bakoitzak 10 puntu balio ditu, eta 1. ariketako galdera guztiek pisu berdina dute. Bi ordu dituzue.

1. ARIKETA (10 puntu, 40 minutu)

1. GALDERA

a) Izan bedi x(t) seinalea. Adieraz ezazu aldagai independientearen oinarrizko transformaketen sekuentzia (tolestea, desplazamendua, eskalatzea, ….) ondorengo seinalea lortzeko: $y(t) = x\left(\frac{-t}{2} + 1\right)$

b) Aurreko atalean zehaztutako sekuentzia jarraituz irudikatu transformaketa bakoitzaren emaitza y(t) lortu arte, x(t) irudian adierazitakoa bada.



2. GALDERA

Izan bedi LTI sistema $h(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ duena. Lortu irteera-seinalea y(t), sarrera-seinalea $x(t)=e^{-t}\,u(t)$ bada.

3. GALDERA

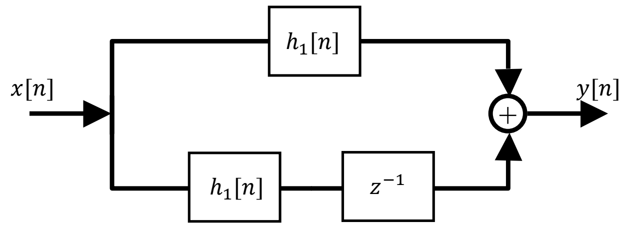
Izan bedi ondorengo sistema: $y[n] = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} x[n-k]$

a) Irudikatu sistemaren pultsu-erantzuna.

b) Kalkulatu y[n] sarrera-seinalea $x[n] = 5$ bada.

2. Ariketa (10 puntu, 40 minutu)

a) Izan bedi irudian adierazitako eskema:



- Kalkulatu h[n] sistema osoaren pultsu-erantzuna, $h_1[n]$ pultsu-erantzunaren menpe. **(2 puntu)**
- Izan bedi $h_1[n]=\{\underline{1}, -1, 1\}$, lortu sistemaren diferentzia-ekuazioa, sistemaren mota eta maila. **(2 puntu)**
- Kalkulatu y[n] sarrera-seinalea $x[n]=\{\underline{1}, 1, 1\}$ bada. **(1 puntu)**

b) Sistema batek ondorengo diferentzia-ekuazioa du: $y[n] = x[n]- a^2\, y[n-2]$

- Adierazi sistemaren mota eta maila. Irudikatu sistemaren bloke-diagrama II. forma zuzeneko egituran. **(2.5 puntu)**
- Analitikoki kalkulatu eta grafikoki irudikatu sistemaren pultsu-erantzuna, h[n]. **(1.5 puntu)**
- Ondorioztatu "a" konstanteak bete behar duen baldintza sistema egonkorra izan dadin. **(1 puntu)**

3. Ariketa (10 puntu, 40 minutu)

Izan bedi T iraupeneko tartean sarrera-seinalearen batezbesteko balioa kalkulatzen duen sistema. Sistema horren sarrera-irteera erlazioa honakoa da:

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$$

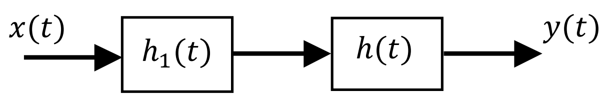
a) Aztertu sistema lineala, aldaezina, kausala edota egonkorra den. **(3 puntu)**

b) Kalkulatu sistemaren pultsu-erantzuna, $h(t)$, eta aztertu $h(t)$-ren arabera sistema kausala edota egonkorra den. **(2 puntu)**

c) Demagun orain ondoko pultsu-erantzuna:

$$h(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t-{}^{T}/_{2}}{T}\right)$$

eta sistema ondoko egituran erabiltzen dela:



Kalkulatu $h_1(t)$ eta T, jakinda multzoaren pultsu-erantzuna, $h_T(t)$, honakoa dela:

$h_T(t) = 2\Lambda\left(\frac{t}{5}\right)$ Gogoan izan: $y(t) = h_T(t) * x(t)$ **(2 puntu)**

d) Izan bedi hurrengo sarrera-seinalea:

$$x(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_1)$$

Irudikatu seinalea A eta T_1 balioen menpe. **(1 puntu)**

e) Kalkulatu A eta T_1 , irteera-seinalea $y(t) = 8$ dela jakinda. **(2 puntu)**

PROBLEMA 1

(1) Se puede plantear de varias formas, veamos dos:

(A) $x(t) \xrightarrow[t\to t+1]{(1)} x(t+1) \xrightarrow[t\to -t]{(2)} x(-t+1) \xrightarrow[t\to t/2]{(3)} x\left(-\frac{t}{2}+1\right)$

- (1) $t\to t+1$: adelanto de una unidad
- (2) $t\to -t$: inversión temporal
- (3) $t\to t/2$: expansión $\times 2$

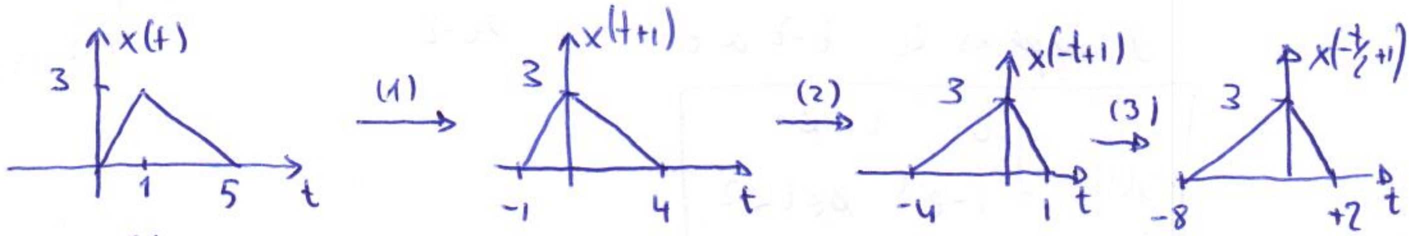
(B) $x(t) \xrightarrow[t\to -t]{(1)} x(-t) \xrightarrow[t\to t/2]{(2)} x(-t/2) \xrightarrow[t\to t-2]{(3)} x(-t/2+1)$

- (1) $t\to -t$: inversión temporal
- (2) $t\to t/2$: expansión $\times 2$
- (3) $t\to t-2$: retardo de 2 unidades

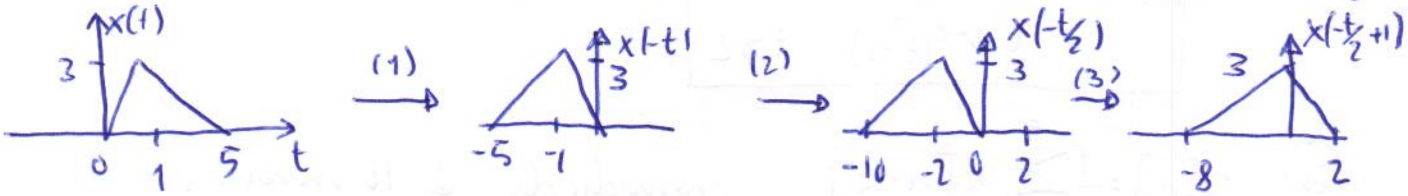
$$\left(-\frac{(t+2)}{2} = -t/2+1\right)$$

En nuestro ejemplo sería:

(A)



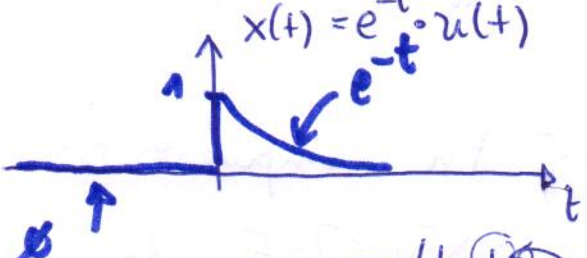
(B)

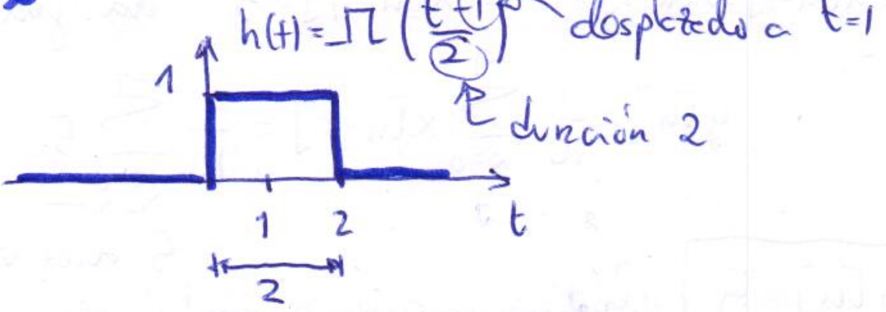


(2) Sistema LTI:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

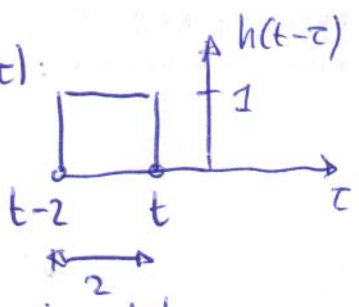
en nuestro caso:



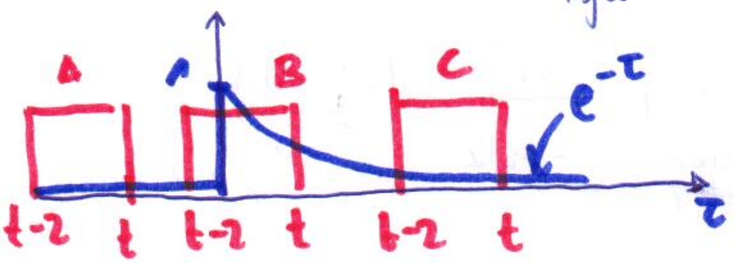


Planteemos $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{fija}}\,\underbrace{h(t-\tau)}_{\text{movemos}}\cdot d\tau$

$h(t-\tau)$:



invertida y desplazada a $\tau=t$!!



Tenemos 3 casos:

(A) No hay solape $y(t)=0$ $\quad t<0$

(B) $t>0$ y $t-2<0 \Rightarrow 0\leq t<2$
el solape es entre 0 y t

$$\int_0^t e^{-\tau}\cdot 1\cdot d\tau = -e^{-\tau}\Big]_0^t = 1-e^{-t}$$

(C) $t-2>0 \quad t>2$
el solape es de $t-2$ a t

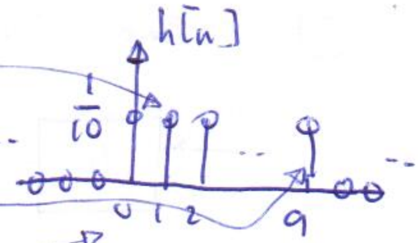
$$\int_{t-2}^t e^{-\tau}\cdot 1\cdot d\tau = -e^{-\tau}\Big]_{t-2}^t = e^{2-t}-e^{-t} = e^{-t}(e^2-1)$$

$$\boxed{y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-t} & 0\leq t<2 \\ e^{-t}(e^2-1) & t\geq 2\end{cases}}$$

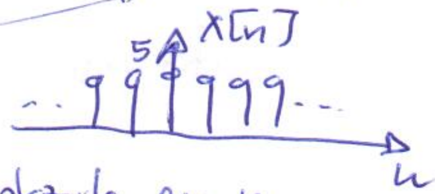
(3) $y[n]=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} x[n-k]$, promediador de 10 muestras

(a) $h[n]$ se obtiene por $x[n]=\delta[n]$:

$$h[n]=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\delta[n-k]=\frac{1}{10}\cdot\{\delta[n]+\delta[n-1]+\dots+\delta[n-9]\}\ \dots$$



(b) Si $x[n]=5\ \forall n$ componente DC



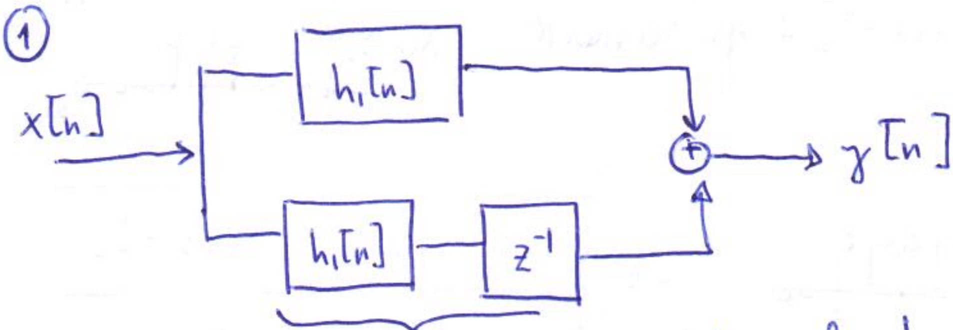
$x[n]=x[n-1]=x[n-2]=\dots=x[n-9]=5$ da igual desplazarla en n

$$y[n]=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}x[n-k]=\frac{1}{10}\underbrace{\sum_{k=0}^{9}5}_{5\text{ diez veces}}=\frac{1}{\cancel{10}}(5\cdot\cancel{10})=5!!$$

$\boxed{y[n]=5}$ lógico ya que promedia 10 muestras iguales siempre!!

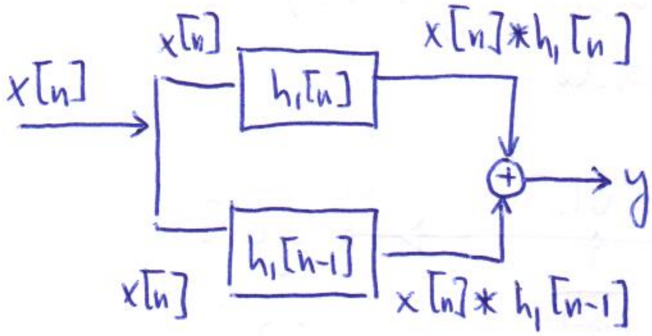
PROBLEMA 2

ⓐ ①



sistemas en cascada, el retardador por 1 tiene z^{-1}: $h[n] = \delta[n-1]$

$$h_1[n] * \delta[n-1] = h_1[n-1]$$



$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x_1[n] * h_1[n-1]$$

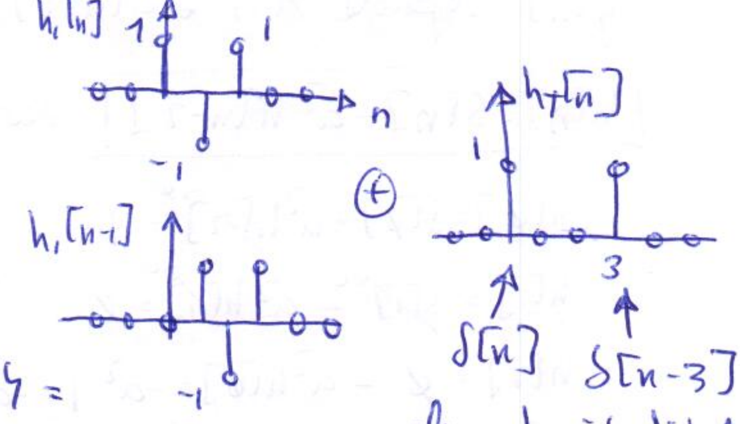
$$= x[n] * \{\underbrace{h_1[n] + h_1[n-1]}\}$$

distributiva respecto de la suma

y en un sistema LTI $\Rightarrow$ $y[n] = x[n] * h_T[n]$

identificando términos $\boxed{h_T[n] = h_1[n] + h_1[n-1]}$

② $h_1[n] = \{\underline{1}, -1, 1\}$



$h_T[n] = h_1[n] + h_1[n-1]$

$= \{\underline{1}, -1, 1\} + \{\underline{0}, 1, -1, 1\} = \{\underline{1}, 0, 0, 1\} =$

$= \delta[n] + \delta[n-3]$

elemento identidad, retardo

$y[n] = x[n] * h_T[n] = x[n] * \{\delta[n] + \delta[n-3]\} =$

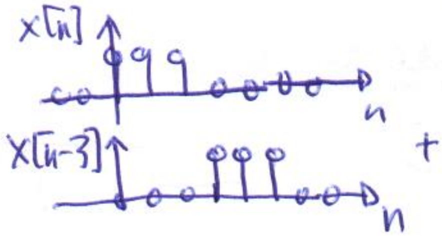
$\boxed{y[n] = x[n] + x[n-3]}$

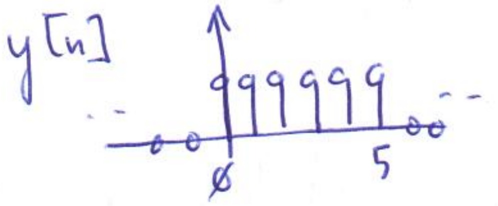
FIR, no tiene parte recursiva (depende de $y[n]$)

Orden 3 → máximo retardo

③ $x[n] = \{1, 1, 1\}$

$y[n] = x[n] + x[n-3] \Rightarrow$ gráficamente



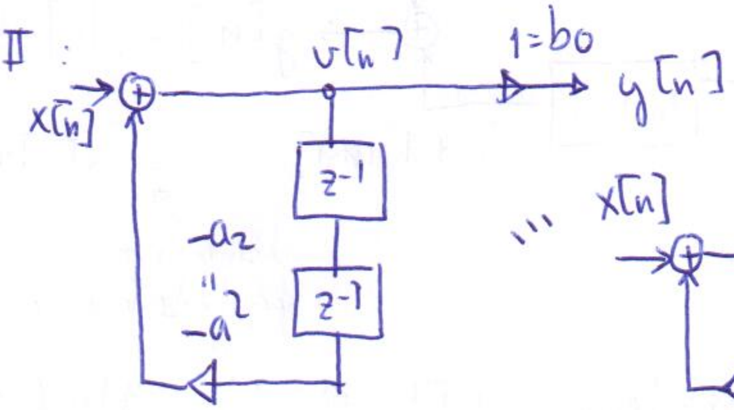


$\rightarrow$ $\boxed{y[n] = u[n] - u[n-6]}$
analíticamente (6 muestras)

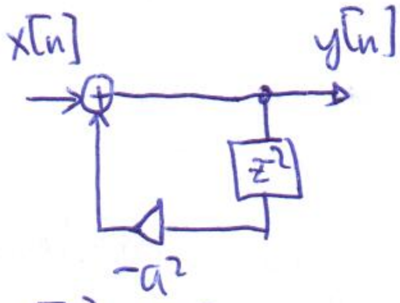
Ⓑ $y[n] = x[n] - a^2 y[n-2]$ (1)

① Sistema IIR (tiene parte recursiva, $y[n-2]$)
Orden 2 máximo retardo.

En Forma directa II:



...



② La respuesta impulsional $h[n]$ le sale si $x[n] = \delta[n]$:

$y[n]$ depende $x[n]$ e $y[n-2]$ $\rightarrow$ es causal $\Rightarrow$ $h[n] = 0 \quad n < 0$!!

$\boxed{h[n] = \delta[n] - a^2 h[n-2]}$ ecuación (1) si $x[n] = \delta[n]$

$h[0] = \delta[0] - a^2 \cancel{h[-2]}^{0} = 1$

$h[1] = \cancel{\delta[1]}^{0} - a^2 \cancel{h[-1]}^{0} = 0$

$h[2] = 0 - a^2 h[0] = -a^2 \cdot 1 = -a^2$

$h[3] = 0 - a^2 \cancel{h[1]}^{0} = 0$

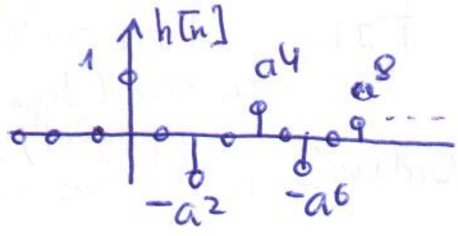
$h[4] = 0 - a^2 h[2] = -a^2(-a^2) = a^4$

$h[5] = 0 - a^2 \cancel{h[3]}^{0} = 0$

$h[6] = 0 - a^2 h[4] = -a^2 a^4 = -a^6$

$\vdots$

Suponiendo $0 < a < 1$



$h[n] = \delta[n] + (-a^2)\delta[n-2] + (a^4)\delta[n-4] + \dots$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^{2k} \delta[n-2k] = h[n]}$$

③ Para que un sistema LTI sea estable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$ en nuestro caso:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ver dibujo}}}{=} 1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Serie geom} \\ \text{de razón } a^2}}{=} \frac{1}{1-a^2}$$

$|a^2| < 1$ razón debe ser menor que 1

$\Downarrow$

$|a|^2 < 1$

$\boxed{|a| < 1}$ Sistema estable !!

3. ARIKETA

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{T} x(\tau)\,d\tau$$

a) Lineala: BAI

$$\mathcal{L}\{a x_1(t) + b x_2(t)\} = a y_1(t) + b y_2(t)$$

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = y_1(t) = \int^{T} x_1(\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}\{x_2(t)\} = y_2(t) = \int_{t-T}^{T} x_2(\tau)\,d\tau$$

$$\frac{1}{T}\int_{t-T}^{T}(a x_1(\tau) + b x_2(\tau))\,d\tau = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{T} a x_1(\tau)\,d\tau + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{T} b x_2(\tau)\,d\tau = a y_1(t) + b y_2(t)$$

Kausala: BAI

y(t) depende de los valores de x(t) en el instante t y en los instantes pasados, t-T, no de valores futuros. Esto lo fija los límites de la integral.

Invariant: BAI

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} \overset{?}{=} y(t-t_0) = \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau$$

$$\downarrow \quad \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau - t_0)\,d\tau = \{\tau - t_0 = \tau'\} = \frac{1}{T}\int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\tau')\,d\tau'$$

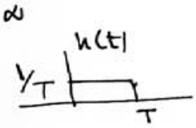
Egonkorra: BAI

Si x(t) está acotada en amplitud, su integral en un intervalo acotado, $t-T \rightarrow t$, también será un valor acotado.

b)

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau - \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t-T}\delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\left[u(t) - u(t-T)\right]$$

$$h(t) = \frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$



- Kausala, $h(t) = 0 \;\; \forall\; t < 0$
- Egonkorra, $\int |h(t)|\,dt = \frac{1}{T}\cdot T = 1 < \infty$

3. ARIKETA

c) $h_T(t) = h_1(t) * h(t)$

Kontuan izanda: $\Pi\left(t/T\right) * \Pi\left(t/T\right) = T \, \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$ (1)

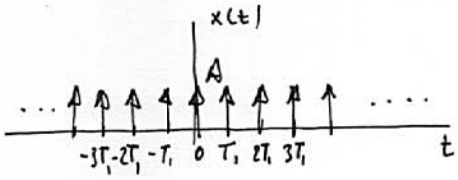
Gure kasuan: $h_1(t) * \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = 2\,\Lambda\left(\frac{t}{5}\right)$ (2)

$T=5$

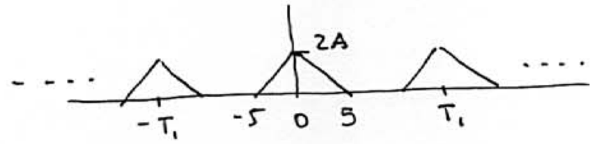
Por la propiedad del desplazamiento temporal de la señal en la convolución $h_1(t)$ ha de ser un pulso rectangular desplazado $\frac{T}{2}$ a la izquierda para compensar el desplazamiento $T/2$ a la derecha de $h(t)$.

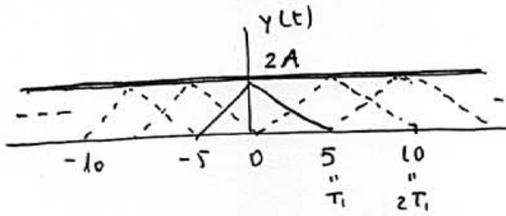
$h_1(t) = K \cdot \Pi\left(\frac{t+5/2}{5}\right)$ donde $K=2$ para que las amplitudes encajen con (1) y (2).

d) $x(t) = A\sum_k \delta(t-kT_1) = \ldots + A\delta(t+2T_1) + A\delta(t+T_1) + A\delta(t) + A\delta(t-T_1) + \ldots$



e) $y(t) = x(t) * h_T(t) = A\sum_k \delta(t-kT_1) * 2\Lambda\left(\frac{t}{5}\right) = 2A\sum_k \Lambda\left(\frac{t-kT_1}{5}\right)$





$\boxed{T_1 = 5}$, es decir si se solapan los pulsos triangulares media duración ($T_1=5$) el resultado es una constante.

$2A = 8 \rightarrow \boxed{A=4}$