eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Departamento de Matemática Aplicada
Paseo Rafael Moreno “Pitxitxi”, 3
48013 Bilbao

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

LEHENENGO DEIALDIA 2015-2016

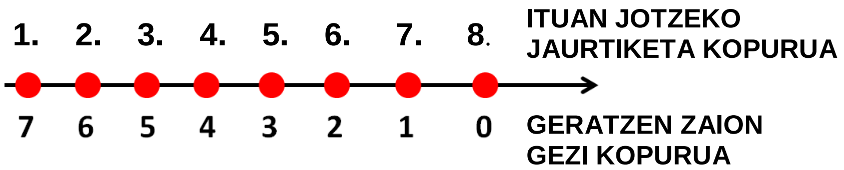
***Emaitzen argitalpena**: 2016ko ekainaren 7an, 19:00etan*
***Azterketen berrikuspena**: 2016ko ekainaren 10ean, 13:00etan (7 I 1 gela).*

---

1. ARIKETA

Getxoko Andra Mari kiroldegian larunbat goizero arku-tiroko lehiaketa egiten da. Tiratzaile bakoitza zortzi gezirekin hasten da. Lehiaketak gezi batek ituan eman arte edo tiratzailea gezirik gabe geratu arte irauten du. Momentu horretan tiratzailea erretiratu egiten da. Ituan jotzeko probabilitatea ℙ dela jakinik: **(1.)** X zorizko aldagaia “tiratzaile bati erretiratu ondoren geratzen zaion gezi kopurua” izendatuz, zorizko aldagai honen lagin espazioa definitu eta probabilitate funtzioa eta banaketa funtzioa lortu (**5 puntu**).

Grafikoki, tiratzaileak ituan jotzeko behar izan duen jaurtiketa kopurua eta tiratzaile berari geratzen zaion gezi kopurua erlazionatuz, esperimentua honela irudikatuko litzateke:



Izan bedi X “tiratzaile bati erretiratu ondoren geratzen zaion gezi kopurua” zorizko aldagaia. Aldagai honek $[0,7]$ tarteko balioak har ditzake, bere probabilitateak hurrengoak izanik (ituan jotzeko probabilitatea p bezala adierazten da):

$$P(7) = p \qquad P(3) = (1-p)^4 \cdot p$$
$$P(6) = (1-p) \cdot p \qquad P(2) = (1-p)^5 \cdot p$$
$$P(5) = (1-p)^2 \cdot p \qquad P(1) = (1-p)^6 \cdot p$$
$$P(4) = (1-p)^3 \cdot p \qquad P(0) = (1-p)^7 \cdot p + (1-p)^8 = (1-p)^7$$

Banaketa funtzioa honakoa da:

$$x < 0:\ F(X) = 0$$
$$0 \le x < 1:\ F(X) = (1-p)^7$$
$$1 \le x < 2:\ F(X) = (1-p)^7 + (1-p)^6 \cdot p = (1-p)^6 \cdot [p + (1-p)] = (1-p)^6$$
$$2 \le x < 3:\ F(X) = (1-p)^6 + (1-p)^5 \cdot p = (1-p)^5$$
$$3 \le x < 4:\ F(X) = (1-p)^5 + (1-p)^4 \cdot p = (1-p)^4$$
$$4 \le x < 5:\ F(X) = (1-p)^4 + (1-p)^3 \cdot p = (1-p)^3$$
$$5 \le x < 6:\ F(X) = (1-p)^3 + (1-p)^2 \cdot p = (1-p)^2$$
$$6 \le x < 7:\ F(X) = (1-p)^2 + (1-p) \cdot p = 1-p$$
$$x \ge 7:\ F(X) = (1-p) + p = 1$$

Eraginkortasun maila bera duten lau tiratzaile desberdin daudela kontsidera dezagun:

(2.) Denek gezi guztiak agortzen badituzte, zein da lau tiratzaileek ituetan jotzeko probabilitatea? (**2 puntu**)

Azter dezagun tiratzaile bakarra.

Geziak agortzeko probabilitatea: $P(X=0)=(1-p)^7$

Azken jaurtiketan ituan jotzeko probabilitatea (geziak agortuta): $P=(1-p)^7 * p$

Tiratzaile batek geziak agortu baditu, ituan jotzeko probabilitatea:

$$P(diana|X=0)=\frac{(1-p)^7 * p}{(1-p)^7}=p$$

Lau tiratzaileak aztertzen baditugu, eskatutako probabilitatea: $\boxed{P=p^4}$

(3.) Kalkulatu, lau tiratzaileek guztira bi gezi soberan edukitzeko probabilitatea (**3 puntu**).

Gezi bat soberan edukitzeko probabilitatea: $P(X=1)=(1-p)^6\cdot p$

Gezi bi soberan edukitzeko probabilitatea: $P(X=2)=(1-p)^5\cdot p$

Izan bitez honako gertaerak:

- S_2 : “lau tiratzaileek guztira bi gezi soberan edukitzea”
- T_1 : “tiratzaile batek bi gezi soberan edukitzea eta beste hiru tiratzaileek bat ere soberan ez edukitzea”
- T_2 : “tiratzaile bik gezi bat soberan edukitzea eta beste bi tiratzaileek bat ere soberan ez edukitzea”

Kontutan izanda soberan gera daitezkeen geziak tiratzaile desberdinenak izan daitezkeela, eskatutako probabilitatea honakoa da:

$$P(S_2)=\binom{4}{1}\cdot P(T_1)+\binom{4}{2}\cdot P(T_2)=\binom{4}{1}\cdot\left[(1-p)^7\right]^3\cdot(1-p)^5\cdot p+\binom{4}{2}\cdot\left[(1-p)^7\right]^2\cdot\left[(1-p)^6\cdot p\right]^2$$

Garatuz: $\boxed{P(S_2)=2p\cdot(2+3p)\cdot(1-p)^{26}}$

---

2. ARIKETA

Izan bedi X mendian zoriz aurkitutako kilkerren pisua, gramotan, neurtzen duen zorizko aldagaia. 25 kilker pisatzen dira:

5.7	8.2	7.1	7.0	4.6	6.6	3.3	4.6	4.7	6.4	2.4	3.2	0.4
8.9	6.7	5.1	5.9	6.2	9.9	5.9	7.9	5.8	4.4	6.6	8.1	

(1.) Zein izango litzateke datuak taldekatzeko erabili beharreko klase kopuru gomendagarria? (**0**[5] **puntu**)

Serie estatistikoaren tamaina (hau da, zorizko lagin bakuna edo z.l.b.) $n=25$ denez, klase kopuru gomendagarria honakoa da:

$$\boxed{d=E\left[\sqrt{n}\right]=E\left[\sqrt{25}\right]=E[5]=5}$$

Ryan-en irizpidearekin bat datorrena. Edo, Sturges-en irizpidea aplikatuz:

$$d = E\left[1+\log_2 n\right] = E\left[1+\log_2 25\right] = E\left[1+3.322\log_{10} 25\right] = E[5.64396] = 5$$

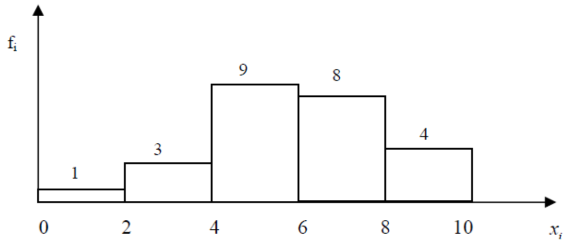
(2.) Lor ezazu maiztasun taula $x = 0$ eta $x = 10$ balioen artean zabalera bereko bost klase erabiliz (1^{5} **puntu**).

$x = 0\,g.$ eta $x = 10\,g.$ arteko zabalera berdineko 5 tarte hartzen baditugu, tarte bakoitzaren zabalera $h = \frac{R}{d} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{5} = \frac{10-0}{5} = 2\,g$ da.

Ondorioz, maiztasun taula hurrengoa da:

$[l_i, l_{i+1})$	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[0,2)	1	1	1	0,04	0,04
[2,4)	3	3	4	0,12	0,16
[4,6)	5	9	13	0,36	0,52
[6,8)	7	8	21	0,32	0,84
[8,10]	9	4	25	0,16	1
		25		1	

(3.) Irudika ezazu histograma (**puntu 1**).



Taldekatutako datuak erabiliz:

(4.) Lortu $\overline{x}$ eta mediana estimatu (**2 puntu**).

Batezbestekoaren kalkulua:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} f_i x_i = \frac{147}{25} = 5{,}88\,g.}$$

Mediana bere ezkerrean eta eskuinean %50a uzten duen serie estatistikoaren balioa da; kasu honetan, hirugarren klasean dago

$F_2 = 4 \le \frac{n}{2} = 12{,}5$ eta $F_3 = 13 > \frac{n}{2} = 12{,}5$;

beraz, $Me \in [4,6)$ eta interpolatuz $\boxed{Me = 4 + \frac{12{,}5-4}{9}\cdot 2 = 4 + \frac{8{,}5}{9}\cdot 2 = 5{,}\widehat{8}\,g}$

(5.) Kalkulatu s^2 (lagineko bariantza) eta S^2 (lagineko kuasibariantza). Bietako zein erabiliko zenuke kilkerren pisuen bariantza estimatzeko? (1^{5} **puntu**)

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{104{,}64}{25} = 4{,}19\,g.^2}$$

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{104,64}{24} = 4,36\ g.^2}$$

Honako edozein formula erabili daiteke:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} f_i x_i^2 - \overline{x}^2 \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5} f_i x_i^2 - \overline{x}^2$$

Populazioko bariantzarako, bariantza minimoa duen estimatzaile alboragabea **laginaren kuasibariantza** da, $\boxed{S^2}$.

(6.) Kalkulatu kuartilarteko heina (**2 puntu**).

Kuartilarteko heina: $\boxed{RIC = Q_3 - Q_1 = 7.4375 - 4.5 = 2.9375\ g.}$ Kuartilak lortzeko 4. ordenako kuantilen formula orokorra erabil daiteke; hau da:

$$Q_i \triangleq C_{p/4} = l_i + \frac{\frac{p \times n}{s} - F_{i-1}}{f_i} h$$

Espresio hau hirugarren kuartilari aplikatuz, Q_3 (laugarren tartean egongo da, serie estatistikoaren datuen %75ari dagokiona):

$$F_3 = 13 \le \frac{3n}{4} = 18,75 \text{ eta } F_4 = 21 > \frac{3n}{4} = 18,75 \text{ ; beraz, } Q_3 \in [6,8)$$

$$\boxed{Q_3 = 6 + \frac{18,75 - 13}{8} \cdot 2 = 6 + \frac{5,75}{8} \cdot 2 = 7,4375\ g.}$$

Eta lehenengo kuartilari aplikatuz, Q_1 (hirugarren tartean egongo da, laginaren datuen %25ari dagokiona)

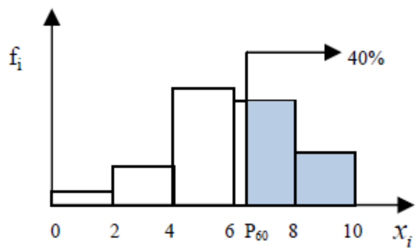
$$F_2 = 4 \le \frac{n}{4} = 6,25 \text{ eta } F_3 = 13 > \frac{n}{4} = 6,25 \text{ ; beraz, } Q_1 \in [4,6)$$

$$\boxed{Q_1 = 4 + \frac{6,25 - 4}{9} \cdot 2 = 4 + \frac{2,25}{9} \cdot 2 = 4,5\ g.}$$

(7.) Zein da gehien pisatzen duten kilkerren %40ak pisatzen duen pisu minimoa? (**puntu 1**).

60. pertzentila, P_{60} , eskatzen da, laugarren klasean dagoena:

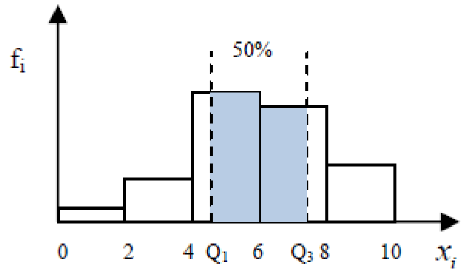
$$P_{60}: \ F_3 = 13 \le \frac{60 \cdot 25}{100} = 15 \text{ eta } F_4 = 21 > \frac{60 \cdot 25}{100} = 15 \text{ ; beraz, } P_{60} \in [6,8)$$



$$\boxed{P_{60} = 6 + \frac{\frac{60 \cdot 25}{100} - 13}{8} \cdot 2 = 6 + \frac{15 - 13}{8} \cdot 2 = 6{,}5\ g.}$$

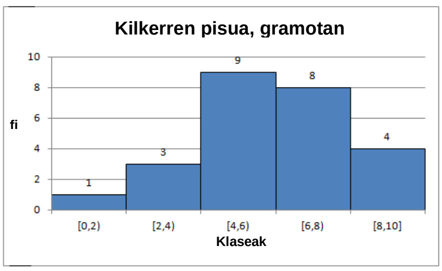
(8.) Zein bi balioen artean daude pisu zentralen %50ak? (0[5] **puntu**)

Pisu zentralen %50a kuartilarteko heinan daude: $\boxed{[Q_1, Q_3] = [4.5g, 7.4375g]}$



Aurreko estatistiko batzuk kalkulu geometrikoen bidez lor daitezke.

Tarteak	L_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	$\bar{x}$	s^2	S^2
[0,2]	0	1	1	1	0,04	0,04	1	23,81	23,81
[2,4]	2	3	3	4	0,12	0,16	9	24,88	24,88
[4,6]	4	5	9	13	0,36	0,52	45	6,97	6,97
[6,8]	6	7	8	21	0,32	0,84	56	10,04	10,04
[8,10]	8	9	4	25	0,16	1	36	38,94	38,94
			25		1		5,8800	4,1856	4,3600



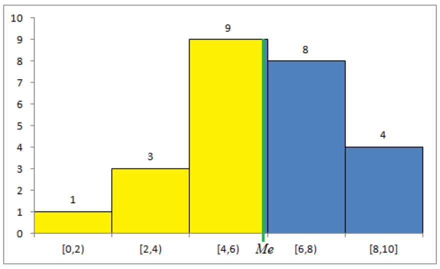
- **Mediana**: $N_2 = 4 < \frac{n}{2} = 12{,}5 < N_3 = 13 \Rightarrow \boxed{Me \in [4, 6)}$

  Geometrikoki, mediana seriearen erdian dagoen balioa denez, histogramaren azalera erditik banatzen du.

  Histogramaren azalera totala: $A(H) = \sum_{i=1}^{5} A(T_i) = \sum_{i=1}^{5} A_i \cdot f_i = 50\ u.$

  Medianara arte metatutako azalera: $A(Me) = \frac{1}{2} A(H) = 25\ u.$

  Garatuz: $A(Me) = 25 = \sum_{i=1}^{2} A(T_i) + f_3 \cdot (Me - L_3) = 8 + 9 \cdot (Me - 4) \Rightarrow \boxed{Me = 5.\hat{8}\ g.}$



Analogoki, kuartilak azalera guztia lau zati berdinetan banatzen dutenez, histogramako laukizuzenen azaleran oinarritzen den hurbilketa geometrikoa erabiliz estima daitezke:

- **Lehenengo kuartila,** Q_1: $\quad N_2 = 4 < \dfrac{n}{4} = 6{,}25 < N_3 = 13 \Rightarrow \boxed{Q_1 \in [4,6)}$

  Lehenengo kuartilera arte metatutako azalera: $\quad A(Q_1) = \dfrac{1}{4}A(H) = 12.5\ u.$

  Garatuz: $\quad A(Q_1) = \dfrac{1}{4}A(H) = 12.5 = \sum_{i=1}^{2} A(T_i) + f_3 \cdot (Q_1 - L_3) = 8 + 9 \cdot (Q_1 - 4)$

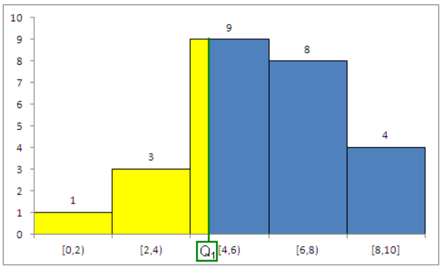
  $$\boxed{Q_1 = 4.50\ g.}$$

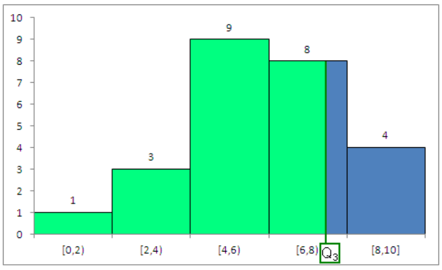
- **Hirugarren kuartila,** Q_3: $\quad F_3 = 13 < \dfrac{3n}{4} = 18{,}75 < F_4 = 21 \Rightarrow \boxed{Q_3 \in [6,8)}$

  Hirugarren kuartilera arte metatutako azalera: $\quad A(Q_3) = \dfrac{3}{4}A(H) = 37.5\ u.$

  Garatuz: $\quad A(Q_3) = \dfrac{3}{4}A(H) = 37.5 = \sum_{i=1}^{3} A(T_i) + f_4 \cdot (Q_3 - L_4) = 26 + 8 \cdot (Q_3 - 6)$

  $$\boxed{Q_3 = 7.4375\ g.}$$





Beraz: $\quad \boxed{RIC = IQR = Q_3 - Q_1 = 7.4375 - 4.50 = 2.9375\ g.}$

Era berean, 60. pertzentila kalkulatu nahiko bagenu:

- **60. pertzentila,** P_{60}: $\quad N_3 = 13 < \dfrac{6n}{10} = 15 < N_4 = 21 \Rightarrow \boxed{P_{60} \in [6,8)}$

  P_{60} -era arte metatutako azalera: $\quad A(P_{60}) = \dfrac{6}{10}A(H) = 30\ u.$

  Garatuz: $\quad A(P_{60}) = 30 = \sum_{i=1}^{3} A(T_i) + f_4 \cdot (P_{60} - L_4) = 26 + 8 \cdot (P_{60} - 6)$

  $$\boxed{P_{60} = 6.5\ g.}$$

3. ARIKETA

40 karta dituen karta-sorta batetik lau karta 200 aldiz ateratzen dira.

(1.) Lor ezazu bateko bat, errege bat, txanka bat eta desberdina den beste edozein karta bost aldiz lortzeko probabilitatea. Lau interpretazio posibleak (ordena eta/edo itzulera) kontsideratu eta emaitzak era zehatzean lortu (**5 puntu**).

Bernoulli-ren proba bat ("40 karta dituen karta-sorta batetik lau karta ateratzea"), independenteki, 200 aldiz errepikatzean datzan esperimentu bat daukagu. Arrakasta A gertaera, *A*: "Bateko bat (B), errege bat (E), txanka bat (T) eta desberdina den beste edozein karta (X) lortzea" izanik. Hau da: $\boxed{A = B \cap E \cap T \cap X}$

Arrakastaren probabilitatea, $\boxed{P(A) = P(B \cap E \cap T \cap X)}$, eman daitezkeen lau interpretazioen (ordena eta/edo itzulera) menpe dago:

1) Karten ordena kontutan izan gabe, eta itzulerarik gabe:

$$P(A) = 4! \cdot P(B) \cdot P(E|B) \cdot P(T|B \cap E) \cdot P(X|B \cap E \cap T) = 4! \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{28}{37} = 0.0196$$

2) Karten ordena kontutan izan gabe, eta itzulerarekin:

$$P(A) = 4! \cdot P(B) \cdot P(E|B) \cdot P(T|B \cap E) \cdot P(X|B \cap E \cap T) = 4! \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{28}{40} = 0.0168$$

3) Kartak zehaztutako ordenan lortuz, eta itzulerarik gabe:

$$P(A) = 4! \cdot P(B) \cdot P(E|B) \cdot P(T|B \cap E) \cdot P(X|B \cap E \cap T) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{28}{37} = 0.0008$$

4) Kartak zehaztutako ordenan lortuz, eta itzulerarekin:

$$P(A) = P(B) \cdot P(E|B) \cdot P(T|B \cap E) \cdot P(X|B \cap E \cap T) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{28}{40} = 0.0007$$

Izan bedi *X*: "esperimentuan (200 errepikapenetan) izandako arrakasta kopurua" zorizko aldagai diskretua. Aldagai honek **banaketa binomiala** jarraitzen du:

$$\boxed{X \sim Bin(200, P(A))}$$

i arrakasta kopurua bada: $\boxed{P(X = i) = \binom{200}{i} \cdot P(A)^i \cdot [1 - P(A)]^{200-i}}$

Orduan, interpretazio desberdinak aztertuz, $i = 5$ bada:

1) Karten ordena kontutan izan gabe, eta itzulerarik gabe:

$$\boxed{P(X = 5) = \binom{200}{5} \cdot 0.0196^5 \cdot (1 - 0.0196)^{200-5} = 0.154530}$$

2) Karten ordena kontutan izan gabe, eta itzulerarekin:

$$\boxed{P(X = 5) = \binom{200}{5} \cdot 0.0168^5 \cdot (1 - 0.0168)^{200-5} = 0.124681}$$

3) Kartak zehaztutako ordenan lortuz, eta itzulerarik gabe:

$$\boxed{P(X=5)=\binom{200}{5}\cdot 0.0008^5\cdot(1-0.0008)^{200-5}=7.11\times10^{-7}}$$

4) Kartak zehaztutako ordenan lortuz, eta itzulerarekin:

$$\boxed{P(X=5)=\binom{200}{5}\cdot 0.0007^5\cdot(1-0.0007)^{200-5}=3.72\times10^{-7}}$$

(2.) Kalkula ezazu aurreko konbinazioa zehaztutako ordenan bost aldiz baino gehiagotan lortzeko probabilitatea (**2 puntu**).

Aurreko zorizko aldagaia erabiliz: $\boxed{X\sim Bin(200, P(A))}$

Interpretazio desberdinak aztertuz,honakoa daukagu:

$$\boxed{P(X>5)=1-P(X\leq 5)=1-\sum_{i=0}^{5}P(X=i)}$$

Kalkuluak sinplifikatzeko, enuntziatuaren amaieran emandako taulan, talde desberdinek erabilitako tresna informatikoen (*R*, *Octave* eta *Excel*) funtzio multzoa ematen da; honela:

$$\boxed{P(X>5)=1-\left(\underbrace{P(X\leq 4)}_{taulak}+\underbrace{P(X=5)}_{kalkulatuta}\right)}$$

1) Kartak zehaztutako ordenan lortuz, eta itzulerarik gabe: $\boxed{P(X>5)=1.89\times10^{-8}}$

2) Kartak zehaztutako ordenan lortuz, eta itzulerarekin: $\boxed{P(X>5)=8.63\times10^{-9}}$

(3.) Kalkula ezazu erauzketa batean, gutxienez hiru palo desberdineko kartak lortzeko probabilitatea (**3 puntu**).

Izan bedi "40 karta dituen karta-sorta batetik lau karta atera" esperimentua.

Izan bedi *Y*: "esperimentuan agertzen diren palo desberdin kopurua" zorizko aldagaia.

Orduan: $\boxed{P(Y\geq 3)=P(Y=3)+P(Y=4)}$

U, B, K, E palo ezberdinak: urreak, bastuak, kopak eta ezpatak, hurrenez hurren, izendatzen dituzte.

Erauzketa **itzulerarik gabe** egiten bada:

- $P(Y=3)=\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot PR_4^{2,1,1}\cdot P(U\cap U\cap K\cap B)=144\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{10}{38}\cdot\frac{10}{37}=0.59088$
- $P(Y=4)=4!\,P(U\cap E\cap K\cap B)=24\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{39}\cdot\frac{10}{38}\cdot\frac{10}{37}=0.10942$

$$\boxed{P(Y\geq 3)=0.7003}$$

Erauzketa **itzulerarekin** eginez gero, probabilitatea era berean kalkulatzen da.

---

4. ARIKETA

Igerilari batek bere bi espezialitateetan, 100 metroko bizkar-igeriketan eta 200 metro libretan, 2016ko Rio de Janeiroko Joko Olinpikoetan parte hartzeko marka minimoak lortu nahi ditu. 2014. urtearen bukaeran igerilariak bere eboluzioa egokia ez dela uste du. Entrenamenduetan eta parte hartu duen lehiaketa desberdinetan egindako marka guztiek (minututan, segundotan eta segundo-ehunenetan erregistratuak) banaketa normala jarraitzen dute eta ondorengo taulan adierazten dira eskatutako marka minimoekin batera:

Proba	JOrako Marka minimoa	Batezbestekoa	Desbideratze tipikoa
100 m. bizkar-igeriketa	01:00:07	01:01:01	00:02:21
200 m. libre	01:57:93	02:00:01	00:03:31

(1.) Defini itzazu zorizko aldagaiak. Independenteak direla suposatuz, kalkula ezazu bere helburua lortzeko, hau da, espezialitate bietan marka minimoa lortzeko probabilitatea (**2 puntu**).

$\boxed{T_1}$: "100 metro bizkarreko proba osatzeko behar den denbora (segundutan)"$\Rightarrow$ $T_1 \sim N(61.01,\ 2.21)$

$\boxed{T_2}$:"200 metro libreko proba osatzeko behar den denbora (segundutan)"$\Rightarrow$ $T_2 \sim N(120.01,\ 3.31)$

$$P(\mathrm{T_1} \le 60.07 \cap \mathrm{T_2} \le 117.93) \overset{T_1 \text{ eta } T_2 \text{ indep.}}{=} \mathrm{P}(\mathrm{T_1} \le 60.07)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{T_2} \le 117.93)=$$

$$=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{60.07-61.01}{2.21}\right)\cdot \mathrm{P}\left(Z \le \frac{117.93-120.01}{3.31}\right)=\mathrm{P}(Z \le -0.4253)\cdot \mathrm{P}(Z \le -0.6284) \overset{\text{simetria}}{=}$$

$$=\mathrm{P}(Z \ge 0.4253)\cdot \mathrm{P}(Z \ge 0.6284)=(1-\mathrm{P}(Z \le 0.4253))\cdot(1-\mathrm{P}(Z \le 0.6284))=$$

$$=(1-\Phi(0.4253,0,1))\cdot(1-\Phi(0.6284,0,1))=0.335309\cdot 0.264871=0.0881362$$

(2.) Kalkula ezazu lagineko tamaina minimoa, 100 metroko bizkar-igeriketa proban, estimazio errorea 588 segundo-milaren baino handiagoa izan ez dadin, %95eko konfiantza mailaz (**2 puntu**).

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0.588 \Leftrightarrow n \ge \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{0.588}\right)^2 \Leftrightarrow n \ge \left(z_{0.025}\frac{\sigma}{0.588}\right)^2 \Leftrightarrow n \ge \left(1.96\frac{2.21}{0.588}\right)^2 \Leftrightarrow n \ge 54.26$$

Hau da, laginaren tamaina $\boxed{n \ge 55}$ **proba**koa izan behar da.

Igerilariak 100 metroko bizkar-igeriketan zentratzea erabaki du. Entrenatzaile berria kontratatu du, entrenatzaile honek metodo berriak erabiliz bere markak hobetuko dituela ziurtatu dio. Metodo berriak aplikatu baino lehen eta aplikatu ondoren egindako sei probatako denborak erregistratu dira:

	1. Proba	2. Proba	3. Proba	4. Proba	5. Proba	6. Proba
Lehenago	01:00:13	01:01:30	01:00:90	01:01:70	01:00:83	01:01:20
Ondoren	01:00:19	00:59:63	01:00:98	00:59:95	00:59:50	01:00:10

(3.) Defini itzazu bi zorizko aldagai berri hauek. Bi batezbestekoen puntu-estimazioa lortu (**puntu 1**).

Kasu honetan beste bi zorizko aldagai definituko ditugu:

$\boxed{X_1}$: "100 metro bizkarreko proba osatzeko behar den denbora (segundutan) metodo berriak aplikatu baino lehen" $\Rightarrow$ $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$

$\boxed{X_2}$: "100 metro bizkarreko proba osatzeko behar den denbora (segundutan) metodo berriak aplikatu ondoren" $\Rightarrow$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

Populazioaren batezbestekoaren **puntu-estimazioa** laginaren batezbestekoa da:

$$\boxed{\hat{\mu}_1 = \bar{x}_1 = 61.01 \text{ eta } \hat{\mu}_2 = \bar{x}_2 = 60.05833}$$

(4.) Lor ezazu batezbesteko denboren diferentziarako konfiantza-tartea, %95eko konfiantza mailaz. Emaitza interpretatu (**2 puntu**).

Datuak parekatuak direnez, D aldagaia beste bi aldagaien diferentzia bezala definitzen da:

$$D = X_1 - X_2 \sim N(\mu_D, \sigma_D) \text{ non } \mu_D = \mu_1 - \mu_2 .$$

	1. proba	2. proba	3. proba	4. proba	5. proba	6. proba
X_1	60.13	61.30	60.90	61.70	60.83	61.20
X_2	60.19	59.63	60.98	59.95	59.50	60.10
$D = X_1 - X_2$	-0.06	1.67	-0.08	1.75	1.33	1.10

$$\left.\begin{array}{l}\text{Banaketa normala}\\ \text{Bariantza ezezaguna}\end{array}\right\} \Rightarrow I_{\mu_D}^{1-\alpha} = \left[\bar{d} - t_{n-1;\,\alpha/2}\cdot\frac{S_D}{\sqrt{n}},\ \bar{d} + t_{n-1;\,\alpha/2}\cdot\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$$

Ariketa egiteko beharrezkoak diren lagineko estatistikoak hauek dira:

$$\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.951667 \ \ eta \ \ S_D = \sqrt{0.6812567} = 0.8253827$$

Gainera, $t_{n-1;\,\alpha/2} = t_{5,0.025} = \text{qt}(0.975,5) = 2.57082$

Beraz, kalkulatu beharreko konfidantza tartea hauxe da: $I_{\mu_D}^{0.95} = \left[\bar{d} - t_{5;\,0.025}\cdot\frac{S_D}{\sqrt{n}},\ \bar{d} + t_{5;0.025}\cdot\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow$

$$I_{\mu_D}^{0.95} = \left[0.951667 - 2.57082\cdot\frac{0.8253827}{\sqrt{6}},\ 0.951667 + 2.57082\cdot\frac{0.8253827}{\sqrt{6}}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{\mu_D}^{0.95} = [0.085397, 1.8179366]}$$

Interpretazioa: $0 \notin I_{\mu_D}^{0.95} = [0.085397, 1.8179366]$ denez $\Rightarrow$ %95eko konfidantza mailaz $\mu_D \neq 0$ dela onar dezakegu, hau da, $\mu_1 \neq \mu_2$. Gainera, tartearen beheko muga zero baino handiagoa denez $(0.085397 > 0)$, $\mu_1 > \mu_2$ dela onar daiteke.

5.) Hipotesi-kontraste bat egin ezazu, %5eko adierazgarritasun mailaz, igerilariak entrenatzaile berria kontratatzerakoan erabaki egokia hartu duen zehazteko (**2 puntu**).

Igerilariak entrenatzaile berria kontratatzerakoan erabaki zuzena hartu du $\mu_1 > \mu_2$ betetzen bada, hau da, proba betetzeko beharrezko denbora entrenatzailea kontratatu eta gero, kontratatu baino lehenago behar duena baino txikiagoa bada.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_a : \mu_D > 0 \end{cases}$$

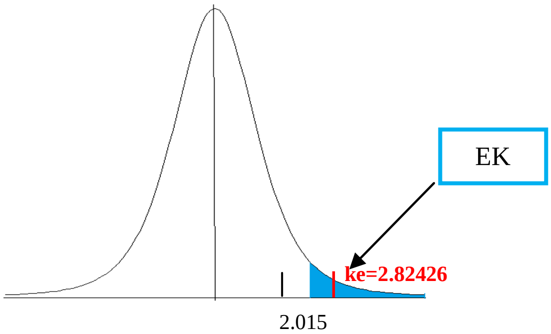
$$\left.\begin{array}{l}\text{Banaketa normala} \\ \text{Bariantza ezezaguna}\end{array}\right\} \Rightarrow EK = \left\{ \bar{d} - \mu_0 > t_{n-1;\,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$EK = \left\{ \frac{\bar{d} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\,\alpha} \right\}$$

Kontrasterako estatistikoa: $$ke = \frac{\bar{d} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{d} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{0.951667 - 0}{0.8253827/\sqrt{6}} = 2.82426$$

Eskualde kritikoa: $$t_{n-1;\,\alpha} = t_{5;0.05} = \text{qt(0.95,5)=2.015048}$$

$$EK = \left\{ \frac{\bar{d} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > 2.015048 \right\}$$



$\boxed{ke = 2.82426 \in EK}$, beraz, **hipotesi nulua errefusatu** egiten da %5eko **adierazgarritasun mailaz**. Hau da, %5eko adierazgarritasun mailaz igerilariak erabaki egokia hartu duela onartzen da.

(6.) Aurreko kontrastearen *p*-balioa lortu eta interpretatu (**puntu 1**).

***p*-balioa** hipotesi nulua onartzeko adierazgarritasun-maila maximoa da

$$t_{5;\alpha} = 2.82426 \Rightarrow 1-\alpha = pt(2.82426{,}5) \Rightarrow 1-\alpha = 0.9815385 \Rightarrow \boxed{\alpha\text{=0.01846155}}$$