# SEINALEEN PROZESAKETA
# EZOHIKO DEIALDIA

Azterketak 30 puntu balio du, eta hiru ariketetan banatu dira:

1. Ariketa: 10 puntu. Galdera guztiek balio berdina dute.
2. Ariketa: 10 puntu.
3. Ariketa: 10 puntu.

Azterketa ebazteko aurreikusitako denbora 2 ordu da.

# PROBLEMA 1 (10 puntos)

1. Izan bedi hurrengo diferentzia-ekuazioa duen LTI sistema:

$$y[n] = 3\,x[n] + \frac{1}{5}\,y[n-1]$$

   a) Lortu pultsu-erantzuna eta aztertu sitemaren egonkortasuna.
   b) Lortu irteera-seinalea, sarrera-seinalea $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}\,n\right)$ denean.

2. Izan bedi LTI sistema jarraitua. Dakigunez, sarrera-seinalea periodikoa denean irteera-seinalea ere periodikoa da. Lortu, prozesua arrazoituz, irteera-seinalearen eta sarrera-seinalearen Fourier-en koefizienteen arteko erlazioa.

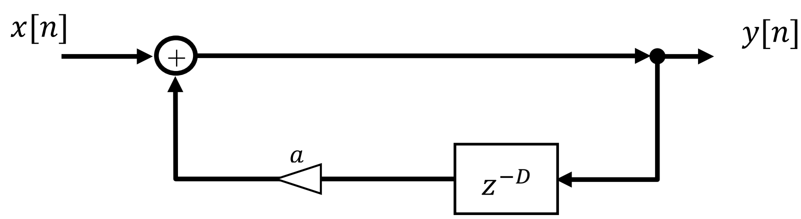
3. Izan bedi $x(t) = 3\cos(2\pi\,50\,t) + 5\cos(2\pi\,300\,t)$ seinalea, A/D bihurgailu ideal (antialiasing iragazkirik gabe) baten sarrera-seinalea, eta $f_{s1} = 800\ \mathrm{Hz}$. Lortutako sekuentzia, $x_d[n]$, $z[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\,n\right)$ sekuentziarekin biderkatu da $y[n] = x_d[n] \cdot z[n]$ lortuz.

   $y[n]$ sekuentzia D/A bihurgailu ideal batetik pasa da $f_{s2} = 1.6$ kHz delarik. Kalkulatu D/A bihurgailuaren irteera-seinalearen adierazpen analitikoa kosinuen batuketa moduan adierazita.

# 2. ARIKETA (10 puntu)

Ariketa honek bi atal desberdin ditu a) eta b), guztiz independienteak direnak eta banaka ebatzi daitezkeenak.

a) Izan bedi irudiko sistema, non |a|<1:

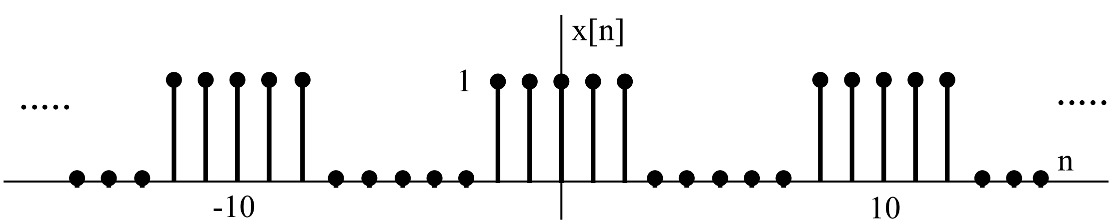



- Kalkulatu sistemaren maiztasun-erantzuna, H(Ω). **(1p)**
- Kalkulatu alderantzizko sistemaren maiztasun-erantzuna, $H_I(\Omega)$, eta bere pultsu-erantzuna, $h_I[n]$. **(1.5p)**
- x[n] seinalearen espektrua $X(\Omega)$ bada, frogatu:

$$Y(\Omega) = X(\mathrm{D}\cdot\Omega) \qquad \text{baldin eta} \qquad y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{D}\right], & n = \dot{D} \\ 0 & , \text{ beste } n \end{cases}$$ **(1.5p)**

- Kalkulatu sistemaren pultsu-erantzuna, h[n]. **(1p)**

b) Izan bedi irudiko x[n] seinalea.




- Lortu seinalearen $a_k$ Fourierren koefizienteen adierazpen analitikoa k-ren menpe. **(2p)**
- Irudikatu x[n] seinalearen espektroa, X(Ω), $0 \leq \Omega < 2\pi$ tartean. **(1.5p)**
- Adierazi x[n] cosinu funtzioen batuketa gisa. **(1.5p)**

# 3. ARIKETA (10 puntu)

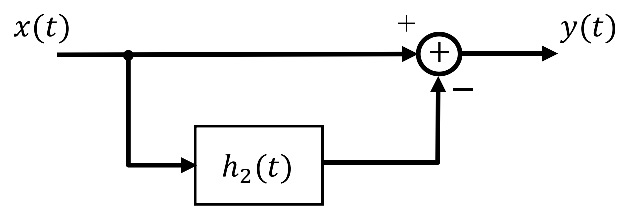
**a)** Kalkulatu eta irudikatu hurrengo pultsu-erantzuna duen LTI sistemaren maiztasun-erantzuna: **(0.5p)**

$$h_1(t) = 2\frac{\mathrm{sen}(\omega_c \cdot t)}{\pi t}$$

**b)** Izan bedi pultsu-erantzuna hau duen LTI sistema: $h_2(t) = \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot h_1(t)$. Kalkulatu eta irudikatu sistemaren maiztasun-erantzuna. **(1.5p)**

**c)** Izan bedi irudiko LTI sistema. Kalkulatu sistemaren pultsu-erantzuna:

$$y(t) = x(t) * h_3(t). \quad \textbf{(1p)}$$

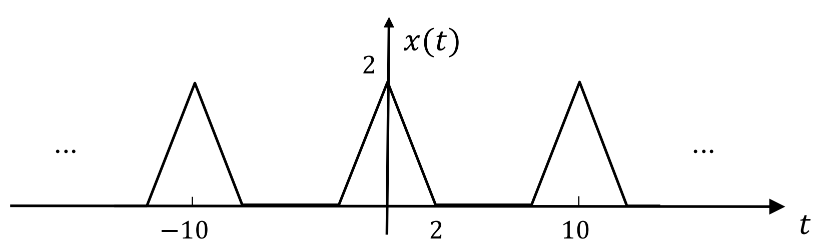



**d)** Kalkulatu eta irudikatu $h_3(t)$ pultsu-erantzuna duen sistemaren maiztasun-erantzuna. **(1p)**

**e)** Esan **a**, **b** eta **d** ataletako iragazkiak ze motatakoak diren eta zehaztu, $\omega_0$ eta $\omega_c$ menpe, iragazkion paseko bandak eta banda ezabatuak. **(1.5p)**

**f)** Izan bedi $x(t) = 5 + 2\cos(2\pi 75t) + \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2\pi 125t - \frac{\pi}{2}\right)$ seinalea. Aurreko iragazki batekin iragazita irteera-seinalea $y(t) = \cos\left(2\pi 100 + \frac{\pi}{3}\right)$ da. Zehaztu, modu arrazoituan, zein den erabilitako iragazkia. Iragazkiaren banda zabalera ahal den handiena da, kalkulatu $\omega_0$ eta $\omega_c$ . **(1.5p)**

**g)** Irudiko seinalea iragazkiaren sarreran jarrita irteeran $y(t) = A$ lortu da. Adierazi, modu arrazoituan, aurreko iragazkietarik zein aurkeratu den eta zein den $\omega_c$ bete behar duen baldintza. **(2p)**




**h)** Kalkulatu A. **(1p)**

$$\boxed{\text{CUESTION } 1}$$

a) $$y[n] = 3\,x[n] + \frac{1}{5}\,y[n-1]$$

$$h[0] = 3\,\delta[0] + \frac{1}{5}\cancel{h[-1]}^{\,0} = 3$$ Condiciones iniciales nulas.

$$h[1] = 3\,\cancel{\delta[1]}^{\,0} + \frac{1}{5}\,h[0] = 3\cdot\frac{1}{5}$$

$$h[2] = 3\,\cancel{\delta[2]}^{\,0} + \frac{1}{5}\,h[1] = 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$h[3] = 3\,\cancel{\delta[3]}^{\,0} + \frac{1}{5}\,h[2] = 3\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$h[n] = 3\,\cancel{\delta[n]}^{\,0} + \frac{1}{5}\,h[n-1] = 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\boxed{h[n] = 3\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]}$$

Estabilidad $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

$$= 3 + 3\,\frac{1}{5} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + 3\left(\frac{1}{5}\right)^\infty$$

$$= 3\,\underbrace{\left[1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots \left(\frac{1}{5}\right)^\infty\right]}_{\text{Serie geométrica } r = \frac{1}{5} < 1 \text{ Convergente.}} = 3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{4/5} = \frac{15}{4}$$

$$\boxed{\text{ES ESTABLE}}$$

b) $$H(\omega) = \frac{3}{1-1/5\,e^{-j\omega}} \qquad x(n) = \cos\frac{\pi}{2}n \qquad y(n) = |H(\pi/2)|\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \measuredangle H(\pi/2)\right)$$

$$H(\pi/2) = \frac{3}{1-\frac{1}{5}e^{-j\frac{\pi}{2}}} = 2'94\,\underline{-0'2}$$

$$\boxed{y(n) = 2'94\cos\left(\frac{\pi}{2}n - 0'2\right)}$$

$$\boxed{\text{CUESTION } 2}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{\phantom{LTI}} \longrightarrow Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega).$$

Sea $x(t)$ una señal periódica de periodo fundamental $T_0$ y pulsación $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

$x(t)$ se puede descomponer en una serie de Fourier en la forma $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{jkw_0 t}$$

donde $a_k$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$.

Aplicando la transformada de Fourier de $x(t)$ se obtiene:
$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

Por tanto la salida tendrá una transformada

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = 2\pi \, H(\omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, H(\omega) \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k \, H(k\omega_0)}_{b_k} \, \delta(\omega - k\omega_0) \xrightarrow{TF^{-1}} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

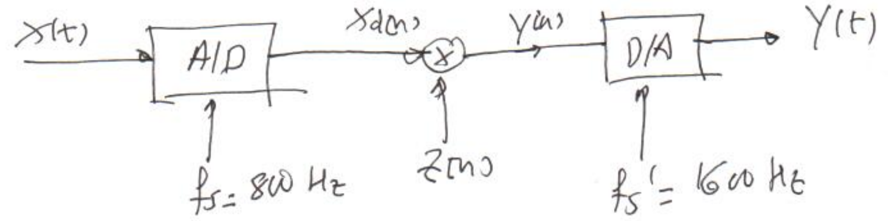
Se observa que la salida tiene una transformada por la de una señal periódica cuyos coeficientes podemos llamar $b_k$ y que tiene una relación con los $a_k$ de la señal de entrada.

La relación que nos piden por tanto es:

$$\boxed{b_k = a_k \cdot H(k\omega_0)}$$

Donde $H(\omega)$ es la respuesta frecuencial del sistema LTI.

CUESTION 3




$$x(t) = 3\cos(2\pi\, 50 t) + 5\cos(2\pi \cdot 300\, t)$$

$f_{max} = 300$

$f_s = 800 > 2 f_{max}$

No hay aliasing.

$$x_d[n] = x(t)\Big|_{t=\frac{n}{f_s}} = 3\cos\left(2\pi \frac{5\cancel{0}}{8\cancel{00}} n\right) + 5\cos\left(2\pi \frac{3\cancel{00}}{8\cancel{00}} n\right)$$

$$x_d[n] = 3\cos\left(2\pi \frac{1}{16} n\right) + 5\cos\left(2\pi \frac{3}{8} n\right).$$

$$y[n] = x_d[n] \cdot z[n] = \left[3\cos\left(2\pi \frac{1}{16} n\right) + 5\cos\left(2\pi \frac{3}{8} n\right)\right] \cdot 2\cos\frac{\pi}{2} n.$$

$$y[n] = 2\cdot 3\cos\left(2\pi \frac{1}{16} n\right)\cdot \cos\frac{\pi}{2} n + 2\cdot 5\cos\left(2\pi \frac{3}{8} n\right)\cos\frac{\pi}{2} n.$$

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

$$y[n] = 3\left[\cos\left[\underbrace{\left(2\pi \frac{1}{16} + \frac{\pi}{2}\right)}_{\Omega_1} n\right] + \cos\left[\underbrace{\left(2\pi \frac{1}{16} - \frac{\pi}{2}\right)}_{\Omega_2} n\right]\right] +$$
$$+ 5\left[\cos\left[\underbrace{\left(2\pi \frac{3}{8} + \frac{\pi}{2}\right)}_{\Omega_3} n\right] + \cos\left[\underbrace{\left(2\pi \frac{3}{8} - \frac{\pi}{2}\right)}_{\Omega_4} n\right]\right]$$

$$\Omega_1 = 2\pi \frac{1}{16} + \frac{\pi}{2} = 2\pi\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi \cdot \frac{1+4}{16} = 2\pi \cdot \frac{5}{16} \quad -\pi < \Omega_1 < \pi$$

$$\Omega_2 = 2\pi \frac{1}{16} - \frac{\pi}{2} = 2\pi\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi \frac{1-4}{16} = 2\pi\left(\frac{-3}{16}\right) \quad -\pi < \Omega_2 < \pi$$

$$\Omega_3 = 2\pi \frac{3}{8} + \frac{\pi}{2} = 2\pi\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi \frac{3+2}{8} = 2\pi \cdot \frac{5}{8} \quad \Omega_3' = 2\pi \cdot \frac{5}{8} - 2\pi$$

$$\Omega_3' = 2\pi\left(\frac{-3}{8}\right) \quad -\pi < \Omega_3' < \pi$$

$$\Omega_4 = 2\pi \frac{3}{8} - \frac{\pi}{2} = 2\pi\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi \frac{3-2}{8} = 2\pi \frac{1}{8} \quad -\pi < \Omega_4 < \pi.$$

$$y[n] = 3\cos\left(2\pi \frac{5}{16} n\right) + 3\cos\left[2\pi\left(\frac{-3}{16}\right) n\right] + 5\cos\left[2\pi\left(\frac{-3}{8}\right) n\right] + 5\cos\left(2\pi \frac{1}{8} n\right)$$

$$y[n] = 3\cos\left(2\pi \frac{5}{16} n\right) + 3\cos\left(2\pi \frac{3}{16} n\right) + 5\cos\left(2\pi \frac{3}{8} n\right) + 5\cos\left(2\pi \frac{1}{8} n\right)$$

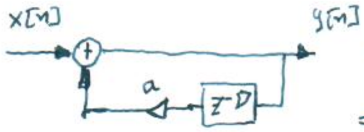
Conversión D/A $\quad n = t \cdot f_s' = t \cdot 1600.$

$$y(t) = 3\cos\left(2\pi \tfrac{5}{16} \cdot 1600\, t\right) + 3\cos\left(2\pi \tfrac{3}{16}\, 1600\, t\right)$$
$$+ 5\cos\left(2\pi \tfrac{3}{8} \cdot 1600\, t\right) + 5\cos\left(2\pi \tfrac{1}{8}\, 1600\, t\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & 3\cos(2\pi\, 500\, t) + 3\cos(300\, t) \\ & + 5\cos(2\pi\, 600\, t) + 5\cos(2\pi\, 200\, t) \end{aligned}}$$

# PROBLEMA 2

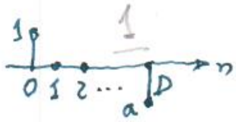
$\boxed{a}$




• ec en diferencias: $y[n] = x[n] + a\, y[n-D] \xrightarrow{F} Y(\Omega) = X(\Omega) + a Y(\Omega) e^{-j\Omega D}$

$$\Rightarrow H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega D}}$$

• $H_I(\Omega) = \frac{1}{H(\Omega)} = 1 - a e^{-j\Omega D} \xrightarrow{F^{-1}} h_I[n] = \delta[n] - a\,\delta[n-D]$



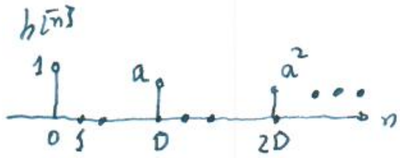

• $x[n] \xrightarrow{F} X(\Omega) = \sum_n x[n] e^{-j\Omega n}$

$$y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{D}] & n = \dot{D} \\ 0 & \text{otro } n \end{cases} \quad Y(\Omega) = \sum_n y[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=\dot{D}} x[\tfrac{n}{D}] e^{-j\Omega n} \left\{ \frac{n}{D} = n_1 \right\} \to Y(\Omega) = \sum_{n_1} x[n_1] e^{-j\Omega D n_1} \Rightarrow$$

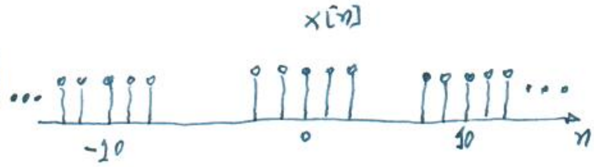
$$\Rightarrow Y(\Omega) = X(\Omega D)$$

• $H(\Omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega D}}$ ; $H_1(\Omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} \xrightarrow{F^{-1}} h_1[n] = a^n u[n]$

$$H(\Omega) = H_1(\Omega \cdot D) \Rightarrow h[n] = \begin{cases} h_1[\frac{n}{D}] & n = \dot{D} \\ 0 & \text{otro } n \end{cases}$$




$\boxed{b}$

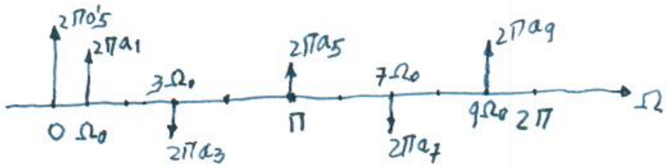



x[n] periódica de periodo fundamental $N_0 = 10$ ; $\Omega_0 = \frac{2\pi}{10}$

• $a_k = \frac{1}{N_0} X_b(\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$ ; $x_b[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & \text{otro } n \end{cases} \xrightarrow{F} X_b(\Omega) = \frac{\text{sen}(\Omega\, 5/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} = \frac{\text{sen}(\Omega\, 5/2)}{\text{sen}(\Omega/2)}$

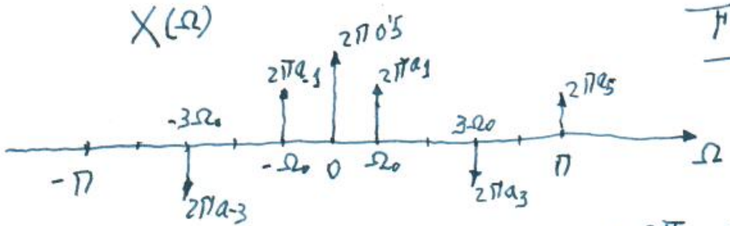
$$a_k = \frac{1}{10} \frac{\text{sen}(k \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{5}{2})}{\text{sen}(k \frac{2\pi}{10} \frac{1}{2})} = \frac{1}{10} \frac{\text{sen}(k \frac{\pi}{2})}{\text{sen}(k \frac{\pi}{10})} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} ;\ a_1 = 0'3236 ;\ a_2 = 0 ;\ a_3 = -0'1236 ;\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0'1 ;\ a_6 = 0 ;\ a_7 = -0'1236 ;\ a_8 = 0 ;\ a_9 = 0'3236 \end{cases}$$

• $X(\Omega) = \sum_k 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$




• $a_{-1} = a_{9-N_0} = a_9 = 0'3236$ ; $a_{-3} = a_{7-N_0} = a_7 = -0'1236$ ;

$X(\Omega)$



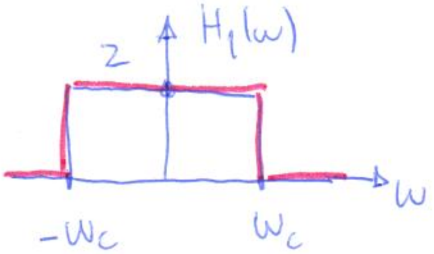

$\xrightarrow{F^{-1}} x[n] = 0'5 + 2 \cdot 0'3236 \cos(\Omega_0 n) + 2 \cdot (-0'1236) \cos(3\Omega_0 n) +$
$+ 0'1 e^{j\pi n}$

$$\Rightarrow x[n] = 0'5 + 0'6472 \cos\left(\frac{2\pi}{10} n\right) - 0'2472 \cos\left(3 \frac{2\pi}{10} n\right) + 0'1 \cos(\pi n)$$

# PROBLEMA 3

ⓐ $h_1(t) = 2 \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(W_c t)}{\pi t}}_{\text{por básico}}$ $\rightsquigarrow$ $H_1(w) = F\left\{2 \frac{\operatorname{sen}(W_c t)}{\pi t}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linealidad}}}{=} 2\, F\left\{\frac{\operatorname{sen}(W_c t)}{\pi t}\right\} =$

$H_1(w) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{w}{2W_c}\right)$ = es real y por lo tanto le podemos dibujar en una única gráfica.




filtro PASOBAJO

frec. corte $f_c \Rightarrow W_c = 2\pi \cdot f_c$

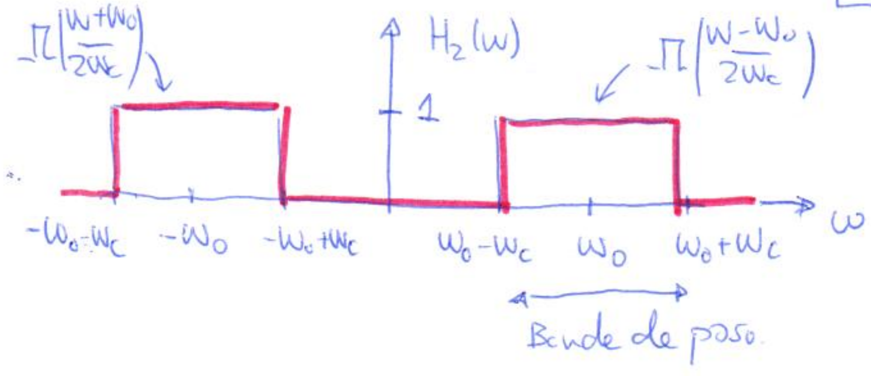
ⓑ $h_2(t) = \cos(w_0 t)\, h_1(t)$

aplicamos la propiedad de modulación: (desplazamiento en frecuencia)

$h_2(t) = \frac{1}{2} e^{jw_0 t} h_1(t) + \frac{1}{2} e^{-jw_0 t} h_1(t)$

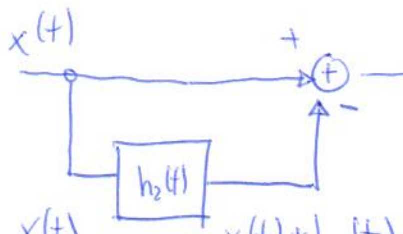
$F\{e^{jw_0 t} x(t)\} = X(w - w_0)$

$H_2(w) = \frac{1}{2} H_1(w - w_0) + \frac{1}{2} H_1(w + w_0) = \boxed{\Pi\left(\frac{w - w_0}{2W_c}\right) + \Pi\left(\frac{w + w_0}{2W_c}\right) = H_2(w)}$




filtro PASOBANDA

ⓒ




$y(t) = x(t) - x(t) * h_2(t) = x(t) * \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conv.}}}{\overset{\text{elem. identidad}}{\delta(t)}} - x(t) * h_2(t)$

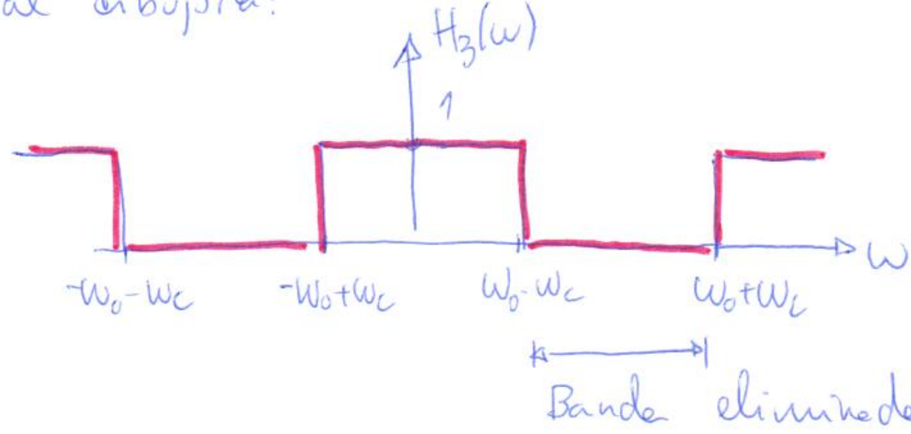
$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. distributiva}}}{=} x(t) * \underbrace{[\delta(t) - h_2(t)]}$

$\boxed{h_3(t) = \delta(t) - h_2(t)}$

ⓓ $H_3(w) = F\{h_3(t)\} = F\{\delta(t) - h_2(t)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linealidad}}}{=} \underbrace{F\{\delta(t)\}}_{\text{por básico}} - \underbrace{F\{h_2(t)\}}_{\text{apartado b}} =$

$= \boxed{1 - H_2(w) = H_3(w)}$

Que al dibujarla:




Filtro BANDA ELIMINADA

ⓔ Apartado ⓐ → Pasobajo $|\omega| \leq \omega_c$ banda de paso

$|\omega| > \omega_c$ banda eliminada

Apartado ⓑ → Pasobanda $|\omega_0-\omega_c| \leq |\omega| \leq |\omega_0+\omega_c|$ bandas de paso

$|\omega| < |\omega_0-\omega_c|$
$|\omega| > |\omega_0+\omega_c|$ bandas eliminadas

Apartado ⓓ → Banda eliminada → igual que el ⓑ pero las bandas al revés.

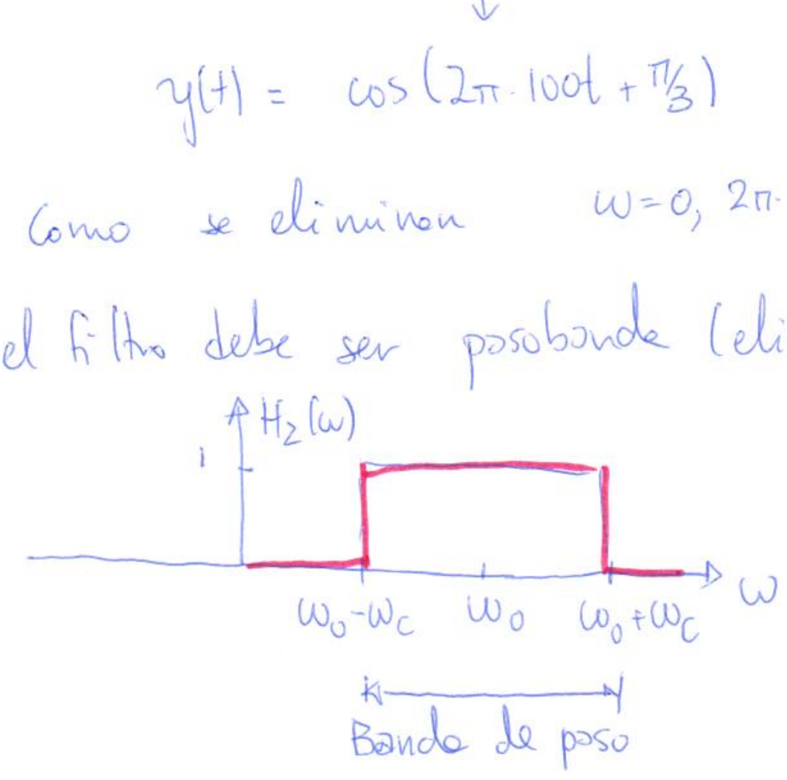
ⓕ $x(t) = \underbrace{5}_{\text{elimin.}} + \underbrace{2\cos(2\pi\cdot 75t)}_{\text{elimin.}} + \underbrace{\cos(2\pi\cdot 100t+\pi/3)}_{\text{pasa}} \underbrace{-3\cos(2\pi\cdot 125t - \frac{\pi}{2})}_{\text{elimin.}}$

$\downarrow$

$y(t) = \cos(2\pi\cdot 100t + \pi/3)$

Como se eliminan $\omega = 0,\ 2\pi\cdot 75,\ 2\pi\cdot 125$ y pasan $\underbrace{2\pi\cdot 100}_{\text{medio}}$

el filtro debe ser pasobanda (elimina bajas y altas frecuencias).




El límite de frecuencias eliminadas:

$2\pi\cdot 75 = \omega_0 - \omega_c \quad (1)$

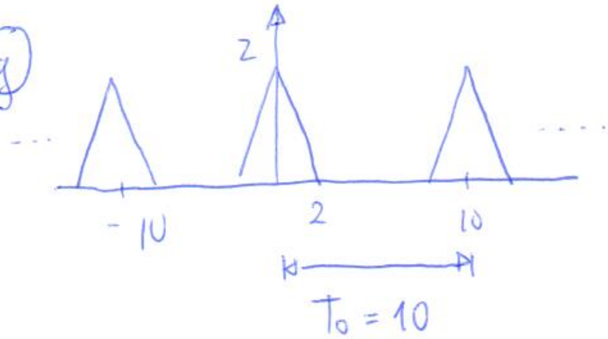
$2\pi\cdot 125 = \omega_0 + \omega_c \quad (2)$

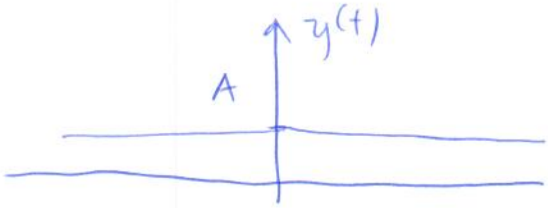
$(1)+(2) \Rightarrow 2\omega_0 = 2\pi \cdot 200$

$(2)-(1) \Rightarrow 2\omega_c = 2\pi \cdot 50$

$$\boxed{\begin{array}{l}\omega_0 = 2\pi \cdot 100 \\ \omega_c = 2\pi \cdot 25\end{array}}$$

(g)




Señal entrada periódica

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ serie de Fourier

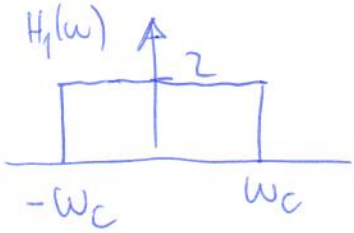
componentes en $\omega = \phi, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \dots$

Señal salida DC continua.

$y(t) = A$ solo componentes en $\omega = \phi$

El filtro debe eliminar todas las componentes excepto DC:

Filtro pasobajo y $\omega_c < \omega_0$ para que no pase la componente fundamental:




$$\boxed{\omega_c < \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{10}}$$

(h) Para calcular el valor de A calculamos la componente DC de la señal de entrada $x(t)$

área del triángulo

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-5}^{5} x(t) \cdot e^{-j\phi\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} x(t)\, dt = \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{5}$$

Como el filtro tiene ganancia 2 en continua:

$$\boxed{y(t) = 2 \cdot a_0 = 2/5}$$