eman ta zabal zazu
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Matematika Aplikatua Saila
Rafael Moreno "Pitxitxi" 3 Pasealekua
48013 Bilbao

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK
EBALUAZIO JARRAITUA
BIGARREN DEIALDIA 2015-2016

***Emaitzen argitalpena**: 2016ko ekainaren 27an, 19:00etan*
***Azterketen berrikuspena**: 2016ko ekainaren 30ean, 13:00etan (7 I 1 gela).*

1. ARIKETA

Igeriketako hautatzaile nazionalak Rio de Janeiro 2016an herrialdea ordezkatuko duen talde olinpikoa osatu behar du. Plaza baterako, 1500 metro libre probarako marka minimoa lortu duten bi igerilarien artean aukeratu behar du. Hautaketa egiteko, prestakuntza faseko bi urteetan bi igerilariek egindako denboren erregistro historikoa dauka (banaketa normala jarraitzen dute). Erabakia hartzeko, Igeriketa Federazio Nazionalak (IFN) azken sei hilabeteetan parte hartu duten probetan lortutako denborak erabiltzea erabaki du. Independentzia bermatzeko, bi igerilariak bat etorri ez diren probetan lortutako denborak aintzat hartuko dira soilik. Informazioa honako taulan agertzen da:

	PROBA							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1. igerilaria	15:00:90	15:01:03	14:59:20	15:01:05	14:58:90	15:00:01	15:01:01	14:57:20
2. igerilaria	14:59:10	15:02:10	15:02:30	15:01:99	15:01:20	15:00:99	15:00:97	

IFN-k %90eko konfidantza maila ezarri eta ikerketa bat agindu du, aurkeztuko zaion informazio eta kalkulu guztien justifikazioa eskatzen duelarik.

OHARRA. Ariketaren ebazpenerako erabiliko den neurri-unitatea segundoa (s.) da. Ondorengo taulak probetan behar izandako denbora, segundotan, erakusten du:

	PROBA (denbora segundutan)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1. igerilaria	900,90	901,03	899,20	901,05	898,90	900,01	901,01	897,20
2. igerilaria	899,10	902,10	902,30	901,99	901,20	900,99	900,97	

Populazioko batezbestekoen eta bariantzen estimazio puntualak ondorengoak dira:

$$\begin{array}{ll} \hat{\mu}_1 = \bar{x}_1 = 899.9125\ s. & \hat{\sigma}_1^2 = S_1^2 = 1.9461\ s.^2 \\ \hat{\mu}_2 = \bar{x}_2 = 901.2357\ s. & \hat{\sigma}_1^2 = S_2^2 = 1.1904\ s.^2 \end{array}$$

(1.) Egiaztatu laginak desbiderazio tipiko berdina duten populazioei dagozkiela (**2⁵ puntu**).

Bi bariantzen zatidurarako kontraste bati dagokio, planteatutako hipotesiak hauek dira:

$$\begin{cases} H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_a : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$n_1 = 8$ eta $n_2 = 7$ tamainak dituzten bi laginak independenteak dira, eta μ_1 eta μ_2 batezbestekoak ezezagunak dituzten populazio normaletatik datoz.

Kasu honetan erabilitako **kontrastearen estatistikoa**: $\boxed{KE = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}}$

Estatistiko honek Fisher−Snedecor-en banaketa jarraitzen du, zenbatzaile eta izendatzaileko askatasun graduak $\nu_1 = n_1 - 1 = 7$ eta $\nu_2 = n_2 - 1 = 6$ izanik, hurrenez hurren: $\boxed{KE : F_{7;6}}$.

Eskualde kritikoa, EK, ondorengo baldintza betetzen duten kontrasterako estatistikoaren balioekin osatuta dago:

$$\boxed{EK = \left\{ ke \notin \left[F_{\nu_1;\nu_2;1-\frac{\alpha}{2}}, F_{\nu_1;\nu_2;\frac{\alpha}{2}} \right] \mid EK : F_{7;6} \right\} = \left\{ ke > F_{\nu_1;\nu_2;\frac{\alpha}{2}} \cup ke < F_{\nu_1;\nu_2;1-\frac{\alpha}{2}} \mid KE : F_{7;6} \right\}}$$

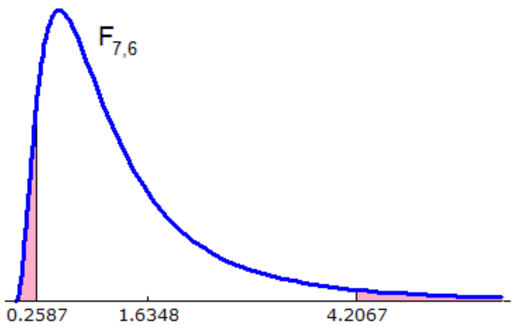
Emandako adierazgarritasunarentzat ($\alpha = 0.10$) eskualde kritikoaren limiteak:

- $L_1 = F_{7;6;0.95} = 0.258667$ (*R:* $qf(0.05,7,6)$; *Excel:* =DISTR.F.INV(0,95;7;6)
- $L_2 = F_{7;6;0.05} = \dfrac{1}{F_{6;7;0.95}} = 4.206658$ (*R:* $qf(0.05,6,7)$; *Excel:* =DISTR.F.INV(0,95;6;7)

Eta kontrasterako estatistikoaren balioa:

$$ke = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.9461}{1.1904} = 1.634839 \in (0.258687, 4.206658) \Rightarrow \boxed{ke \notin EK}$$

Kontrastearen estatistikoa ez dago eskualde kritikoaren barne. Beraz, $\alpha = 0.10$ adierazgarritasun mailarekin ez dago ebidentzia estatistikorik hipotesi nulua errefusatzeko. Hau dela eta, **laginak desbiderazio tipiko berdineko populazioei dagozkiela onartzen da**.



(2.) Hautatzaileak 1. igerilaria aukeratua izango dela uste du, prestakuntza osoan zehar egindako ibilbide hobea izan baita, baina IFN-k ezarritako irizpideak onartu behar ditu. Ikerketaren emaitzen arabera, zuzen al dago hautatzailea eta 1. igerilaria aukeratuko da? Lortu eta interpretatu dagokion *p*-balioa (**2[5] puntu**).

Bi batezbestekoen diferentziaren kontraste bat da. Hautatzaileak 1. igerilaria aukeratua izango dela uste duenez, egin beharreko hipotesian bere denboren batezbestekoa beste igerilariarena baino txikiagoa den kontrastatu behar da. Beraz, ondorengo **hipotesiak** planteatuko dira:

$$\boxed{\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_a : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases}}$$

$n_1 = 8$ eta $n_2 = 7$ tamainak dituzten bi laginak independenteak dira, desbiderazio tipikoak ezezagunak dituzten populazio normaletatik datoz; Hala ere, aurreko atalean desbiderazioak berdinak direla kontrastatu da.

Kasu honetan, erabilitako **estatistikoaren kontrastea** hauxe da: $\boxed{\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_P \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}}$

non: $S_P^2 = \dfrac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

Estatistiko honek t-student banaketa jarraitzen du, askatasun graduak $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 13$ izanik: $\boxed{KE : t_{13}}$

Eskualde kritikoa, EK, ondorengo baldintza betetzen duten kontrasterako estatistikoaren balioekin osatuta dago:

$$\boxed{EK = \left\{ ke \in \left(-\infty, -t_{\nu;\alpha}\right] \mid KE : t_{13} \right\} = \left\{ ke < -t_{\nu;\alpha} \mid KE : t_{13} \right\}}$$

$\alpha = 0.10$ adierazgarritasunarentzako eskualde kritikoaren limitea:

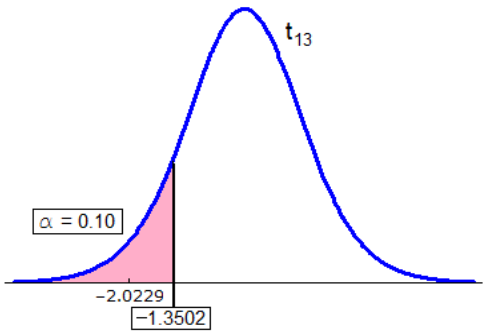
$$L = -t_{13;0.10} = -1.350171$$

(*R:* *qt(0.10,13,lower.tail=FALSE)=1.350171*; *Excel:* = DISTR.T.INV(0,2;13))

Eta kontrasterako estatistikoaren balioa:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_P \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \\ S_P = 1.263832 \end{array}\right\} \Rightarrow ke = -2.022969 \in \left(-\infty, -1.350171\right] \Rightarrow \boxed{ec \in EK}$$

Kontrastearen estatistikoa eskualde kritikoan dago. Hau dela eta, $\alpha = 0.10$ adierazgarritasunarekin, ebidentzia estatistikoa dago hipotesi nulua errefusatzeko. Beraz, **1. igerilariaren denboren batezbestekoa beste igerilariarena baino txikiagoa dela onartzen da**, eta hautatzailearen ustea zuzena zen.



Kontrasteari elkartutako ***p-balioa***, hipotesi nulua errefusatzeko (eta hipotesi nulua onartzeko) adierazgarritasun maila minimoa da:

$$\boxed{p = P\left(KE \le ke = -2.022969 \mid KE : \ t_{13}\right)}$$

$$\boxed{p = 0.032071}$$

(R: $pt\left(-2.022969, 13\right)$; *Excel:* =DISTR.T(2,022969;13;1))

Behin erabakia hartuta eta igerilaria aukeratuta %5eko adierazgarritasunarekin **(3.)** eta **(4.)** atalak ebatzi:

(3.) Kalkulatu bere denboren batezbestekorako konfidantza tartea (**2[5] puntu**).

$n_1 = 8$ tamaina duen lagina desbiderazio tipiko ezezaguna duen populazio normaletatik datoz:

$$\left.\begin{array}{l} Normala \\ \sigma \ ezezaguna \end{array}\right\} \Rightarrow I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\overline{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Ariketa ebazteko beharrezkoak diren lagineko estatistikoak hauek dira:

$$\overline{x} = 899.9125\,s; \ S = \sqrt{1.9461} = 1.3950\,s$$

Beraz, $t_{n-1,\alpha/2} = t_{7,0.025} = 2.3646$ (R: $qt\left(0.975, 7\right)$; *Excel:* = DISTR.T.INV(0.05;7))

$$I_{\mu}^{0.95} = \left[899.9125 - 2.3646\frac{1.395}{\sqrt{8}}, 899.9125 + 2.3646\frac{1.395}{\sqrt{8}}\right] \Rightarrow I_{\mu}^{0.95} = \left[898.7463, 901.0787\right]$$

(4.) Lagin handia hartzea posiblea izango balitz, kalkula ezazu laginaren tamaina igerilariaren populazioaren eta laginaren batezbestekoen arteko diferentzia segundo laurdena baino txikiagoa izateko (**2[5] puntu**).

Tamaina handiko lagina izango balitz, hartu beharreko konfidantza tartea honakoa izango litzateke:

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$P\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(\left|\mu - \overline{x}\right| \le z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le 0.25 \Rightarrow \sqrt{n} \ge z_{\alpha/2}\frac{S}{0.25}$$

$\alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow z_{0.025} = 1.96$, orduan: $\sqrt{n} \ge 10.9368 \Rightarrow n \ge 119.6135 \Rightarrow n \ge 120$

2. ARIKETA

A ATALA: Metroak Bidezabal-etik daukan igaro-kadentzia 10 minutukoa dela dakigu. Geltokira heltzen den erabiltzaile batek itxaron behar duen denbora ondorengo dentsitate funtzioa duen zorizko aldagaia da:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha} & 0<x<10\\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

Metroa atzerapenez heltzen bada, itxaroteko denborak ondorengo dentsitate funtzioa jarraitzen du:

$$f_2(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-z/7} & z>0\\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

(1.) Kalkulatu α eta β balio errealak $f_1(x)$ eta $f_2(z)$ probabilitateko dentsitate funtzioak izateko (**2 puntu**).

X aldagai jarraitu orok ondorengoa bete behar du: $F(\infty)\equiv \mathbb{P}(X<\infty) @\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=1$. α-ren balioa kalkulatzeko, emandako banaketa uniformea eta jarraitua denez (0, 10) tartean, badakigu definizioz bere dentsitate funtzioa honakoa izango dela:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

Banaketa biak berdinduz $\alpha = 10$ daukagu.

β-ren kalkulurako, dentsitate funtzioaren integrala aldagaiaren definizio-eremuan bat izan behar dela aplikatuko dugu:

$$1=\int_0^{\infty}\frac{1}{\beta}e^{-z/7}\,dz$$

Integral inpropioa da, limite bat infinitu delako, beraz, limiteak hartuz, integralaren balioa kalkula dezakegu:

$$1=\int_0^{\infty}\frac{1}{\beta}e^{-z/7}dz=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x}\frac{1}{\beta}e^{-z/7}dz=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{7}{\beta}e^{-z/7}\right)_0^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{7}{\beta}e^{-x/7}+\frac{7}{\beta}\right)=\frac{7}{\beta}$$

Beraz:

$$1=\frac{7}{\beta}\rightarrow\beta=7$$

Beraz, banaketa era honetan geldituko da:

$$f_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{7} e^{-z/7} & z \geq 0 \\ 0 & beste\ kasuetan \end{cases}$$

(2.) Metroa orduan heltzen bada, kalkulatu erabiltzaileak batezbeste itxaron behar duen denbora. Errepikatu prozesua metroa atzerapenez heltzen den kasurako (**puntu 1**).

X aldagaiaren batezbestekoaren eta bariantzaren kalkuluetarako, aldagaiak banaketa uniformea jarraitzen duela ohartu beharra daukagu:

$$\mu = \frac{b-a}{2} = \frac{10-0}{2} = 5\ minutu$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{25}{3} = 8.3333\ minutu^2$$

a = 7 parametroa duen banaketa esponentzialarentzat, batezbestekoa eta bariantza kalkulatzeko, teorian ikusitakoaren arabera:

$$\mu = a = 7\ minutu$$
$$\sigma^2 = a^2 = 7^2 = 49\ minutu^2$$

(3.) Metroa astean egun baten atzerapenez heltzen dela jakinik, kalkulatu erabiltzaileak 5 minutu baino gehiago itxaron behar izateko probabilitatea (**3 puntu**).

$$P(T > 5) = P(R) * P(T > 5/R) + P(NR) * P(T > 5/NR)$$

$$P(T > 5/R) = \int_5^\infty \frac{1}{7} e^{-Z/7} dz = \lim_{x\to\infty} \int_5^x \frac{1}{7} e^{-Z/7} dz = e^{-5/7}$$

$$P(T > 5/NR) = \int_5^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}$$

Beraz, eskatutako probabilitatea:

$$P(T > 5) = P(R) * P(T > 5/R) + P(NR) * P(T > 5/NR) = \frac{1}{7} * e^{-5/7} + \frac{6}{7} * \frac{1}{2} = 0.4985$$

B ATALA: Egun zehatz batean, finantza-erakunde bateko akzioen kotizazioek -1€ eta 7€ artean oszilatzen dutela frogatu da, banaketa uniformea (errektangularra) jarraituz.

(1.) Aldakuntza horretarako *X* zorizko aldagaia eta dentsitate funtzioa definitu (**puntu 1**).

X zorizko aldagaiak banaketa uniformea jarraitzen du -1 eta 7 balioen artean, beraz, dentsitate funtzioa ondorengoa da:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{7+1}=\dfrac{1}{8} & -1\le x\le 7 \\ 0 & x>7 \end{cases}$$

(2.) Dentsitate funtzioa abiapuntutzat hartuz, kalkulatu banaketa funtzioa eta itxaropen matematikoa eta desbiderazio tipikoa (**3 puntu**). **Atal honetan, dagokien formulen aplikazioen ordez, emaitzak lortzeko erabilitako prozesua ebaluatuko da.**

X zorizko aldagai jarraituaren banaketa funtzioa ondorengoa da:

$$\mathrm{F}(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=0 & x<-1 \\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{8}dz=\frac{1}{8}(z|_{-1}^{x}=\frac{1}{8}(x+1) & -1\le x\le 7 \\ 1 & x>7 \end{cases}$$

Zorizko aldagai honen itxaropen matematikoa (itxarondako balioa):

$$\mu_X=E[X]=\int_{-\infty}^{x} z\ f(z)\,dz=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=0 & x<-1 \\ \int_{-1}^{x}\frac{z}{8}dz=\frac{1}{16}(z^2|_{-1}^{7}=\frac{1}{16}(49-1)=3 & -1\le x\le 7\Rightarrow \mu_X=E[X]=3\text{ €} \\ 0 & x>7 \end{cases}$$

Analogoki, desbiderazio tipikoa honakoa izango da:

$$\sigma_X=\sigma[X]=Var[X]=+\sqrt{\int_{-\infty}^{x} z^2\ f(z)\,dz}=+\sqrt{E[X^2]-(E[X])^2}$$

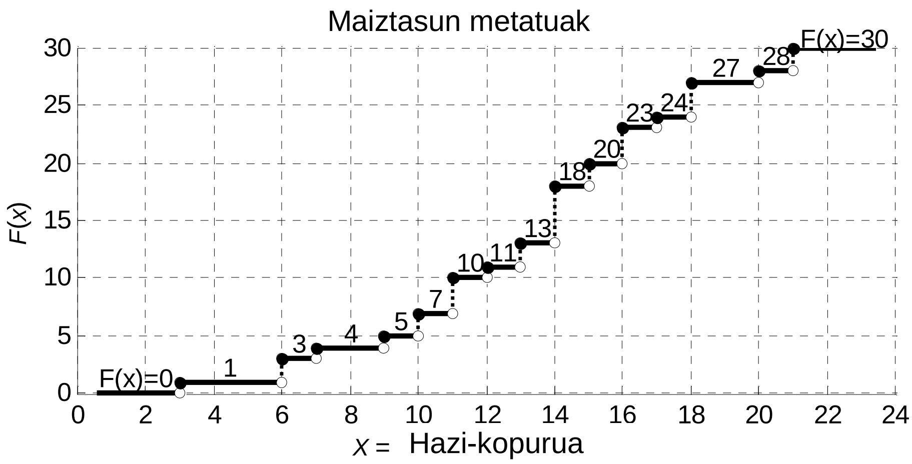
Baina $x<-1$ edo $x>7$ bada, f(z) = 0 denez, kalkulua murriztu egiten da:

$$\sigma_X^2=E[X^2]-(E[X])^2=\int_{-1}^{7} z^2\ f(z)\,dz-3^2=\int_{-1}^{7}\frac{1}{8}z^2\ dz-3^2=\frac{1}{24}(z^3|_{-1}^{7}-9=\frac{344}{24}-9=\frac{128}{24}=\frac{16}{3}\Rightarrow$$

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{16}{3}}=2.3094\text{ €}$$

3 ARIKETA

Sagarrek fruitu bakoitzeko izaten duten hazi kopurua 0 eta 24 bitartekoa izaten da. Zoriz, sagardi batetik 30 sagar aukeratu dira eta bakoitzak dituen hazi kopurua aztertu da. Lortutako maiztasun metatuen diagrama honakoa da:



(1.) Arrazoitu *X* aldagaia kuantitatiboa edo kualitatiboa den, eta diskretua edo jarraitua den (**puntu 1**).

Emandako serie estatistikoa informazio kuantitatiboa (zenbakiak dira) eta diskretua (sagarrak ezin du hazi bat eta erdi eduki).

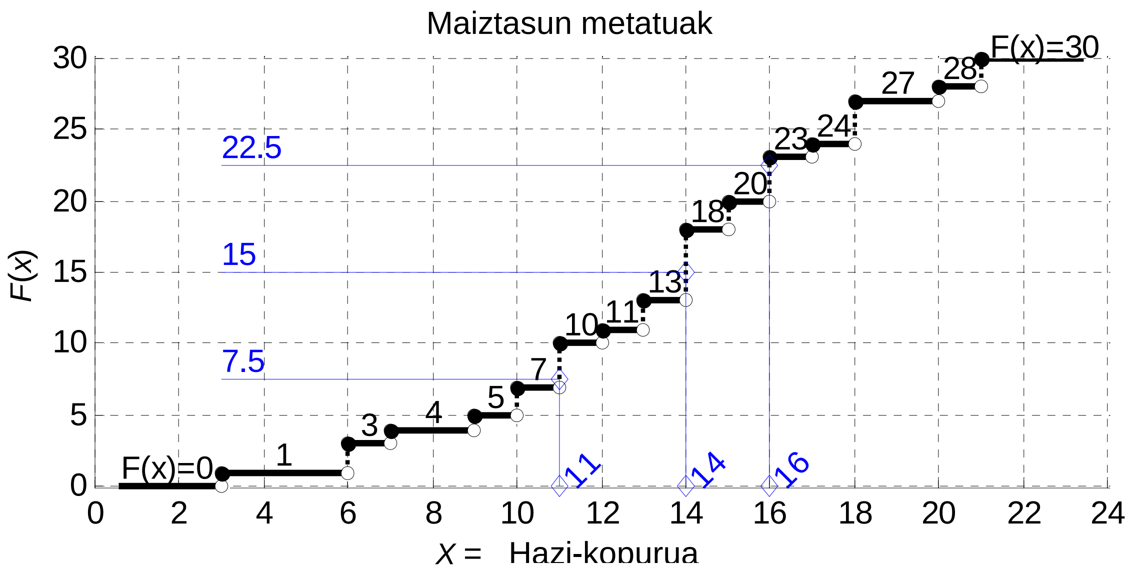
Aldagaia hala tratatuz:

(2.) Eman maiztasun taula (**1^{5} puntu**).

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
3	1	1	0.033333	0.033333
6	2	3	0.066667	0.1
7	1	4	0.033333	0.13333
9	1	5	0.033333	0.16667
10	2	7	0.066667	0.23333
11	3	10	0.1	0.33333
12	1	11	0.033333	0.36667
13	2	13	0.066667	0.43333
14	5	18	0.16667	0.6
15	2	20	0.066667	0.66667
16	3	23	0.1	0.76667
17	1	24	0.033333	0.8
18	3	27	0.1	0.9
20	1	28	0.033333	0.93333
21	2	30	0.066667	1
	30		1	

(3.) Lortu mediana eta Q_1 eta Q_3 kuartilak (**2 puntu**).

Mediana Q_2 kuartila da. Q_1 (25 % - 75 %), Q_2 (50 % - 50 %) eta Q_3 (75 % - 25 %) kuartilak oso erraz lor daitezke emandako maiztasun metatuen gainean:



Beraz, $Q_1 = 11$, $Me = Q_2 = 14$, $Q_3 = 16$; beraien unitateak haziak izanik

(4.) Kalkulatu moda (**puntu 1**).

Moda maiztasun maximoa duen X-ren balioa da, ariketa honetan maiztasun maximoa $f_i = 5$ (ikus lehenengo ataleko taula) da, beraz:

$$\boxed{Moda = 14\ hazi}.$$

Datuak 0 eta 24 arteko zabalera berdineko 6 klasetan taldekatuz:

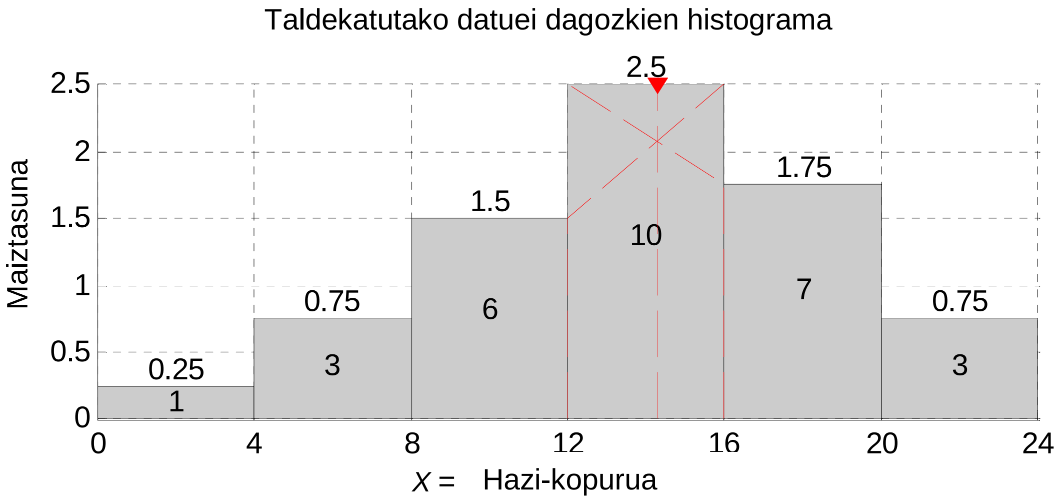
(5.) Eman arrazoituz maiztasun taula (1^{5} **puntu**).

Ariketak adierazten duenez, datuak tartekatzeko zabalera berdineko 6 klase hartu behar dira, beraz, klase bakoitzaren tarte-zabalera:

$$h @ \frac{R}{6} = \frac{24-0}{6} = \frac{24}{6} = 4\ hazi$$

Class	l_i	u_i	d_i	m_i	f_i	F_i	h_i	H_i	fd_i
[0, 4)	0	4	4	2	1	1	0.033333	0.033333	0.25
[4, 8)	4	8	4	6	3	4	0.1	0.13333	0.75
[8, 12)	8	12	4	10	6	10	0.2	0.33333	1.5
[12, 16)	12	16	4	14	10	20	0.33333	0.66667	2.5
[16, 20)	16	20	4	18	7	27	0.23333	0.9	1.75
[20, 24]	20	24	4	22	3	30	0.1	1	0.75
			24		30		1		

(6.) Irudikatu histograma (**puntu 1**).



(7.) Estimatu batezbesteko aritmetikoa (**puntu 1**).

Taldekatutako datuen batezbestekoa lortzeko klase-markak eta klase bakoitzaren maiztasun behar dira:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot f_i = \frac{2\cdot 1 + 6\cdot 3 + 10\cdot 6 + 14\cdot 10 + 18\cdot 7 + 22\cdot 3}{30} \approx 13.7\overset{\frown}{3}\ hazi$$

(8.) Estimatu mediana. Hirugarren atalean lortutakoarekin bat al dator? Arrazoitu erantzuna. (**puntu 1**).

Jarraian agertzen den irudia ondoren datozen kalkuluetarako erabiliko da

[8, 12)	8	12	4	10	6	10	0.2	0.33333	1.5
[12, 16)	12	16	4	14	10	20	0.33333	0.66667	2.5
[16, 20)	16	20	4	18	7	27	0.23333	0.9	1.75

Medianak serie estatistikoaren datuen %50a (15 datu) ezkerrean uzten du, eta beste %50a eskuinean. Orduan, $Me \in [12,16)$. Honakoa ondorioztatzen da:

$$Mediana = l_i + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} h = 12 + \frac{\frac{30}{2} - 10}{10} 4 = 12 + \frac{5}{10} 4 = 14\ hazi$$

Modaren definizioa kontutan hartuz: $Mo \in [12,16)$; kalkuluaren espresioa:

$$Moda = l_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{2f_i - f_{i-1} - f_{i+1}} h = 12 + \frac{10-6}{2\times 10 - 6 - 7} 4 = 12 + \frac{4}{7} 4 = 14.2857\ hazi$$

Lortutako emaitzetan, medianaren balioa serie estatistikoaren balioekin (taldekatu gabeko datuak) eta tarteetan banatutakoekin (taldekatutako datuak) berdina da (hain zuzen ere, $Mediana = 14\, hazi$). Hala ere, hau ez da bat ere ohikoa. Honela, estatistikoen (batezbestekoa, desbiderazio tipikoa) kalkulurako jatorrizko serie estatistikoa erabiltzen bada, egin daitekeen errore bakarra biribiltze-errorea da. Aldiz, balioak klase-tarteetan taldekatzen baditugu, taldekatzearen ondorioz egindako mozketa-errorea (tarte bakoitzean dauden balioak klase-markaren balioagatik ordezkatzen dira) ere kontutan hartu beharra dago. Mozketa-errorea txikitu egiten da tarte kopurua handitzen den heinean.