ÁLGEBRA LINEAL – Primer Parcial (7 de Enero de 2015)

1.- a) Sea $A \in E_{n\times n}(\mathbb{R})$ **tal que su determinante vale** $\alpha \in \mathbb{R}$**. Calcula los determinantes de las siguientes matrices: 2A, 2**A^{-1}**,** $(2A)^{-1}$**,** A^a**,** $2A^3$**,** $A\cdot A^t$**,** $A\cdot B$ **(B**$\in E_{n\times n}(\mathbb{R})$ **es una matriz diagonal cuyos elementos son 1, 2, … , n)** **(2 ptos)**

b) Sea $A \in E_{n\times n}(\mathbb{R})$ **tal que** $4A + A^3 - \beta\cdot I_n = (0)$**. ¿Para qué valores de** β **es la matriz A regular? ¿Cuál es la expresión de** A^{-1} **para dichos valores de** β**?**

(1.5 ptos)

c) ¿Son los sistemas $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 5\\ -9\end{pmatrix}$ **y** $B\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -6\end{pmatrix}$ **donde** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ **equivalentes? Razona la respuesta sin resolver los sistemas.**

(0.75 puntos)

d) Todos los bloques de la matriz $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ (0) & A_{22}\end{pmatrix}$ **son regulares. Calcula** A^{-1}**.**

(1 pto)

Solución:

a) Suponiendo que $\alpha \neq 0$, es decir, A regular

- $|2\cdot A| = 2^n\cdot|A| = 2^n\cdot\alpha$
- $|2\cdot A^{-1}| = 2^n\cdot|A^{-1}| = \dfrac{2^n}{|A|} = \dfrac{2^n}{\alpha}$
- $\left|(2\cdot A)^{-1}\right| = \dfrac{1}{|2\cdot A|} = \dfrac{1}{2^n\cdot\alpha}$
- Como $A^{-1} = \dfrac{A^a}{|A|} \Rightarrow A^a = |A|\cdot A^{-1} \Rightarrow |A^a| = \left||A|\cdot A^{-1}\right| = |A|^n\,|A^{-1}| = \dfrac{\alpha^n}{|A|} = \dfrac{\alpha^n}{\alpha} = \alpha^{n-1}$
- $|2\cdot A^3| = 2^n\cdot|A|^3 = 2^n\cdot\alpha^3$
- $|A\cdot A^t| = |A|\cdot|A^t| = |A|\cdot|A| = |A|^2 = \alpha^2$
- $|A\cdot B| = |A|\cdot|B| = \alpha\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = \alpha\cdot n!$

b) $4\cdot A + A^3 - \beta\cdot I_n = (0) \Leftrightarrow 4A + A^3 = A\cdot\left(4\cdot I_n + A^2\right) = \beta\cdot I_n$

Tomando determinantes $\left|A\cdot\left(4\cdot I_n + A^2\right)\right| = |A|\cdot|4\cdot I_n + A^2| = |\beta\cdot I_n| = \beta^n\,|I_n| = \beta^n$

- Si $\beta \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$ y por tanto A es regular.

- Si $\beta = 0$ entonces $\begin{cases} |A| = 0 \\ \quad \vee \\ |4 \cdot I_n + A^2| = 0 \end{cases}$

pero si $|A| \neq 0$ con $\beta = 0$ entonces queda que

$A \cdot \left(4 \cdot I_n + A^2\right) = \mathbf{0} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \left(4 \cdot I_n + A^2\right) = 4 \cdot I_n + A^2 = \mathbf{0} \Rightarrow A^2 = -4 \cdot I_n \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{-4} \cdot I_n = \pm 2i \cdot I_n$, lo que contradice el hecho de que según el enunciado $A \in E_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Por tanto, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 0$ y en este caso

$A \cdot \left(4 \cdot I_n + A^2\right) = \beta \cdot I_n \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \left(4 \cdot I_n + A^2\right) = A^{-1} \cdot \beta \cdot I_n = \beta \cdot A^{-1} = \left(4 \cdot I_n + A^2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\beta} \cdot \left(4 \cdot I_n + A^2\right)$.

c) Sabemos que dos sistemas $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ y $U \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{c}$ se dicen equivalentes cuando tienen la misma solución. Además, también sabemos que si se aplican transformaciones elementales de filas a la matriz ampliada $\left(A / \underset{\sim}{b}\right)$ de un sistema $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ la solución del sistema no varía. En consecuencia, aplicaremos transformaciones elementales de filas a la matriz ampliada $\left(A / \underset{\sim}{b}\right)$ que nos conviertan a la matriz del sistema en una matriz triangular superior.

$$\left(A / \underset{\sim}{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2-2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ se ha transformado en el sistema equivalente $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ del enunciado.

d) Si todos los bloques de la matriz A son regulares, serán bloques cuadrados de dimensión $r \times r$ y por tanto, todos los bloques de la matriz A^{-1} tendrán también dimensión $r \times r$.

Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, entonces

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ (0) & A_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}\cdot X+A_{12}\cdot Z & A_{11}\cdot Y+A_{12}\cdot T\\ A_{22}\cdot Z & A_{22}\cdot T\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} I_r & (0)_{r\times r}\\ (0)_{r\times r} & I_r\end{pmatrix}=I_{2r}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_{11}\cdot X+A_{12}\cdot Z=I_r\\ A_{11}\cdot Y+A_{12}\cdot T=(0)_{r\times r}\\ A_{22}\cdot Z=(0)_{r\times r}\xrightarrow{A_{22}\text{ regular}}A_{22}^{-1}\cdot A_{22}\cdot Z=Z=(0)_{r\times r}\\ A_{22}\cdot T=I_r\xrightarrow{A_{22}\text{ regular}}A_{22}^{-1}\cdot A_{22}\cdot T=T=A_{22}^{-1}\end{cases}$$

la primera ecuación queda ahora $A_{11}\cdot X=I_r\Rightarrow X=A_{11}^{-1}$

y la segunda ecuación se convierte en

$$A_{11}\cdot Y+A_{12}\cdot A_{22}^{-1}=(0)_{r\times r}\Rightarrow A_{11}\cdot Y=-A_{12}\cdot A_{22}^{-1}\Rightarrow Y=-A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot A_{22}^{-1}$$

Luego $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot A_{22}^{-1}\\ (0) & A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$.

2.- a) En el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden 2 $E_{2\times 2}(\mathbb{R})$**, se considera el subespacio vectorial U formado por aquellas matrices en las que la suma de los elementos de la diagonal principal es cero. Obtén las matrices A de este subespacio, encuentra sus ecuaciones implícitas, paramétricas, y una base del mismo. (1 pto)**

b) Sea $W=\{B\in E_{2\times 2}(\mathbb{R})\ /\ B^t=-B\}$**. Obtén las matrices B de este subespacio, encuentra sus ecuaciones implícitas, paramétricas, y una base del mismo. (1 pto)**

c) Halla $U\cap W$ **y U+W. (1 pto)**

<u>Solución:</u>

a) $U=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in E_{2\times 2}(\mathbb{R})\ /\ a+d=0\right\}$ y considerando como base B de $E_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a la base canónica $B=\left\{e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

tenemos que $C_B(A)=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$ y por tanto, $a+d=0$ es la ecuación cartesiana o implícita de U.

Sabemos que $\dim(U)=\dim(E_{2\times 2}(\mathbb{R}))-\text{número de ecuaciones cartesianas}=4-1=3$.

Para obtener la base de U resolvemos la ecuación cartesiana $a+d=0 \Rightarrow d=-a \Rightarrow$ si $A \in U$ entonces

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ a,b,c\in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow U=\mathrm{Span}\left\{u_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y las matrices u_1,u_2,u_3 tienen que ser linealmente independientes ya que la dim(U)=3 $\Rightarrow B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ es una base de U.

Para obtener las ecuaciones paramétricas de U podemos usar dos procedimientos:

1) Como en las matrices de U se verifica que $a+d=0 \Rightarrow d=-a$, llamando $\alpha_1=a, \alpha_2=b, \alpha_3=c$ se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} a=\alpha_1 \\ b=\alpha_2 \\ c=\alpha_3 \\ d=-\alpha_1 \end{cases} \ / \ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$$

siendo $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ los parámetros y verificándose que el número de parámetros coincide con la dimensión de U.

2) Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in U$ entonces

$$C_B(A)=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\alpha_1\cdot C_B(u_1)+\alpha_2\cdot C_B(u_2)+\alpha_3\cdot C_B(u_3)=$$

$$=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=\alpha_1 \\ b=\alpha_2 \\ c=\alpha_3 \\ d=-\alpha_1 \end{cases} \ / \ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$$

b) $W=\{B\in E_{2\times2}(\mathbb{R}) \ / \ B^t=-B\}=\{B\in E_{2\times2}(\mathbb{R}) \ / \ B \text{ es antisimétrica}\}\Rightarrow$

si $B\in W$ entonces $B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow W=\mathrm{Span}\left\{w_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y dim (W)=1.

Para obtener las ecuaciones paramétricas de W tenemos en cuenta que si $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$ entonces $C_B(B)=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\alpha \cdot C_B(w_1)=\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y por tanto las ecuaciones paramétricas quedan $\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\alpha \\ c=-\alpha \\ d=0 \end{cases}$ / $\alpha \in \mathbb{R}$ siendo α el parámetro.

Como $\dim(W)=1=\dim(E_{2\times 2}(\mathbb{R}))-\text{n}^{\circ}$ ecuaciones cartesianas $\Rightarrow$ W tiene 3 ecuaciones cartesianas o implícitas que se deducen de forma inmediata a partir de las ecuaciones paramétricas y que son $\begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \\ d=0 \end{cases}$.

c) Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U \cap W \Rightarrow$ A tiene que verificar las ecuaciones cartesianas de U y de W $\Rightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ a=0 \\ b+c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \\ d=0 \end{cases}$ que coincide con las ecuaciones cartesianas de W y por tanto, $U \cap W = W$.

Sabemos que $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U \cap W)=3+1-1=3$ y además $U+W=\text{Span}\{u_1,u_2,u_3,w_1\}$, pero claramente se ve que $w_1=u_2-u_3$, de donde $U+W=\text{Span}\{u_1,u_2,u_3\}=U$.

3.- Sean $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ y $B'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\}$ dos bases de un espacio vectorial E de dimensión 4 verificándose que $\begin{cases} \mathbf{e}'_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2=\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_3=\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_4=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4 \end{cases}$:

a) Halla las coordenadas respecto de la base B' de un vector x cuyas coordenadas respecto de B son $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ utilizando la matriz P de cambio de base. (0.5 ptos)

b) Halla respecto de la base B' las ecuaciones de un subespacio que respecto a B viene dado por x – t = 0, y + z = 0. ($\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ son las coordenadas en la base B de un vector de E). **(0.75 ptos)**

c) Si E= $E_{2\times2}(\mathbb{R})$ **y** $B' = \left\{ \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$**, hallar la matriz que se corresponde con el vector x del apartado a) y la base** $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$**. Halla la matriz** $P_1 = \left(C_{B'}(\mathbf{e}_1) \quad C_{B'}(\mathbf{e}_2) \quad C_{B'}(\mathbf{e}_3) \quad C_{B'}(\mathbf{e}_4) \right)$**. ¿Qué relación hay entre esta matriz y la matriz P del apartado a)?.** **(1.25 ptos)**

__Solución:__

a) La matriz de paso entre las bases B y B' es la que tiene por columnas las coordenadas en la base B de los vectores de la base B', es decir, en este caso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sabemos que la relación entre las coordenadas de un vector **x** de E en ambas bases viene dada por: $C_B(\mathbf{x}) = P \cdot C_{B'}(\mathbf{x})$, con lo cual el sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x'_1 + x'_2 + \quad x'_4 \\ 2 = x'_1 + \quad x'_3 \\ 3 = \quad -x'_3 \\ 4 = \quad x'_4 \end{cases} \underset{\text{resolviendo el sistema}}{\Leftrightarrow} C_{B'}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) Teniendo en cuenta de nuevo la expresión matricial establecida en el apartado **a)**, la relación entre las coordenadas de un vector **x** en ambas bases viene dada por:

$$\begin{cases} x = x'_1 + x'_2 + \quad x'_4 \\ y = x'_1 + \quad x'_3 \\ z = \quad -x'_3 \\ t = \quad x'_4 \end{cases} \Rightarrow$$

Sustituyendo estas expresiones en las dos ecuaciones del subespacio respecto a la base B: $\begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, obtenemos:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_4 - x'_4 = 0 \\ x'_1 + \ x'_3 - x'_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 + x'_2 = 0 \\ x'_1 = 0 \end{cases} \equiv$$

Estas son, por tanto, las ecuaciones cartesianas de dicho subespacio en B'.

c) Según acabamos de ver las coordenadas del vector **x** en B' eran $C_{B'}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

por lo que la matriz correspondiente será:

$$\mathbf{x} = 5\cdot\mathbf{e}'_1 - 8\cdot\mathbf{e}'_2 - 3\cdot\mathbf{e}'_3 + 4\cdot\mathbf{e}'_4 = 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 8\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, tenemos en cuenta que:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 \end{cases} \underset{\text{despejando los } e_i}{\Rightarrow} \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_4 = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Luego la base $B = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

La matriz $P_1 = \left(C_{B'}(\mathbf{e}_1) \quad C_{B'}(\mathbf{e}_2) \quad C_{B'}(\mathbf{e}_3) \quad C_{B'}(\mathbf{e}_4) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz coincide con la inversa de la matriz P calculada en el apartado **a)**: $P_1 = P^{-1}$.

4.- Sea la aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \ : \ \mathbb{P}_n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ p(x) = a_0 + a_1\cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n & \longrightarrow \| p \| = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \end{aligned}$$

Estudiar si esta aplicación es una norma o no, indicando las propiedades que fallen en caso de no serlo. (0.75 ptos)

<u>Solución:</u>

Hay que comprobar que se cumplen los tres axiomas que debe verificar una norma:

i) $\forall p(x) \in \mathbb{P}_n \quad \|p\| \geq 0$ y $\|p\| = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \ \forall x$, esto es, p(x) es el polinomio nulo:

$\|p\| = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \geq 0$, lo cual es evidente por ser suma de valores absolutos que son siempre ≥ 0.

En cuanto a la segunda parte, probemos la doble implicación:

$\Leftarrow$ Si p(x) es el polinomio nulo, entonces: $\|p\| = |0| + |0| + \ldots + |0| = 0$.

$\Rightarrow$ Pero recíprocamente, si
$\|p\| = 0 = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \Leftrightarrow |a_0| = |a_1| = \ldots = |a_n| = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0\, \forall x$.
Luego se cumple este primer axioma.

ii) $\forall p(x) \in \mathbb{P}_n$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \|\lambda \cdot p\| = |\lambda| \cdot \|p\|$
Como el polinomio $\lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot a_0 + \lambda \cdot a_1 \cdot x + \ldots + \lambda \cdot a_n \cdot x^n \Rightarrow$

$$\|\lambda \cdot p\| = |\lambda \cdot a_0| + |\lambda \cdot a_1| + \ldots + |\lambda \cdot a_n| \underset{\text{por prop. del valor absoluto}}{=} |\lambda| \cdot |a_0| + |\lambda| \cdot |a_1| + \ldots + |\lambda| \cdot |a_n| =$$

$$= |\lambda| \cdot \left(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \right) = |\lambda| \cdot \|p\|.$$

También se cumple el segundo axioma.

iii) $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{P}_n$ $\quad \|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$

Como si $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_n \cdot x^n$, el polinomio suma es: $(p+q)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) \cdot x + \ldots + (a_n + b_n) \cdot x^n \Rightarrow$

$$\|p + q\| = |a_0 + b_0| + |a_1 + b_1| + \ldots + |a_n + b_n| \leq |a_0| + |b_0| + |a_1| + |b_1| + \ldots + |a_n| + |b_n| = \|p\| + \|q\|,$$

donde se ha tenido en cuenta la propiedad del valor absoluto:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente, este tercer axioma también se cumple y la aplicación es norma.

5.- a) Enuncia y demuestra la caracterización de una aplicación lineal inyectiva.

(0.5 ptos)

b) Sea $f : E \longrightarrow F$ **una aplicación lineal inyectiva entre dos espacios vectoriales. Demuestra que si** $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ **es una base de E, entonces** $f(B) = \{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ **es base de Im f.** **(1 pto)**

c) Justifica que n vectores linealmente independientes de un espacio vectorial E cuya dimensión es n, forman una base de dicho espacio vectorial. **(0.5 ptos)**

<u>Solución:</u>

a) Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $f : E \to F$ una aplicación lineal. La condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva es que $\text{Ker } f = \{\mathbf{0_E}\}$, esto es: f inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\mathbf{0_E}\}$.

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Supóngase que $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal inyectiva.

Sea $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_F}$, además por ser f lineal $f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F}$, luego

$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0_E}) \underset{f \text{ inyectiva}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = \mathbf{0_E}$. Por tanto, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$. Se va a demostrar que entonces f es inyectiva.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{E} / f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ o equivalentemente $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0_F}$ y por ser f lineal, $f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0_F}$. Luego, $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$, de donde $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{0_E}$, y por tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Luego, f es inyectiva.

b) Para demostrar que $f(\mathrm{B}) = \{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), ..., f(\mathbf{e}_n)\}$ es una base de $\operatorname{Im} f$ hay que demostrar que es un sistema generador de $\operatorname{Im} f$ y además que es un sistema libre.

Empezamos demostrando que es un sistema generador:

Como $\mathrm{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ es una base de E $\Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}$, $\mathbf{x}$ se expresa como combinación lineal de los vectores de B, es decir, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Tomando imágenes por f y teniendo en cuenta que es lineal : $f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{e_1}) + x_2 f(\mathbf{e_2}) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n)$. Pero $f(\mathbf{x}) \in \operatorname{Im} f$, luego, $\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \cdots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es un sistema generador de $\operatorname{Im} f$.

Ahora veamos que tales vectores son linealmente independientes, lo cual es consecuencia de que f es inyectiva:

Consideremos la combinación lineal nula:

$$\alpha_1 f(\mathbf{e_1}) + \alpha_2 f(\mathbf{e_2}) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F} \ .$$

que puede escribirse, por ser lineal, como: $f(\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0_F}$.

Luego: $\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \in \operatorname{Ker} f$ y por ser f inyectiva, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$, de donde $\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0_E}$. Como los vectores $\{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ , \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes, entonces: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Por tanto: $\{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ f(\mathbf{e}_n)\}$ son linealmente independientes, y por tanto constituyen una base de $\operatorname{Im} f$.

c) Por ser E de dimensión n, E es de tipo finito y está generado por conjuntos de n vectores, entonces si $\{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}, \ \cdots \ , \mathbf{u}_n\}$ son n vectores libres de E, también tienen que ser forzosamente un sistema generador de E, ya que en caso contrario, existiría un vector $\mathbf{x}$ de E que no se podría expresar como combinación lineal de

$\{\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_2, \quad \cdots \quad ,\mathbf{u}_n\}$, luego el sistema $\{\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_2, \quad \cdots \quad ,\mathbf{u}_n, \mathbf{x}\}$, sería libre. Pero como E es un subespacio de tipo finito generado por n vectores sabemos que en él no pueden existir más de n vectores linealmente independientes. Por tanto, hemos llegado a una contradicción, lo que implica que $\{\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_2, \quad \cdots \quad ,\mathbf{u}_n\}$ debe ser también un sistema generador.

6.- Sean $\mathrm{P}_2(\mathrm{x})$ y $\mathrm{P}_3(\mathrm{x})$ los espacios vectoriales de los polinomios reales de orden menor o igual que 2, y menor o igual que 3, respectivamente. Se considera la aplicación:

$$\begin{aligned} f: P_2(x) &\quad \rightarrow \quad P_3(x) \\ p(x) &\quad \rightarrow \quad f[p(x)] = x^2 \cdot p'(x) - \int p(x)dx \end{aligned}$$

a) **Demostrar que la aplicación es lineal.** **(0.5 ptos)**

b) **Calcular la matriz en las bases** $B = \{1, x, x^2+1\}$ **y** $B' = \{1, x, x^2-1, x^3-1\}$ **(1.5 ptos)**

c) **Sin utilizar la matriz hallar razonadamente una base, ecuaciones y dimensión tanto del núcleo como del subespacio imagen de la aplicación. (1.5 ptos)**

d) **Sea** $U = \{p(x) \in P_2(x) \,/\, p(x) = p(-x)\}$ **hallar una base de f(U).** **(1 pto)**

<u>Nota:</u> **las integrales se considerarán sin constante (ej** $\int x dx = \frac{x^2}{2}$**)**

<u>Solución:</u>

a) Veamos si f cumple las condiciones para ser lineal:

i) $\forall \mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathrm{P}_2(\mathrm{x}) \Rightarrow$ ¿ $f(\mathrm{p}+\mathrm{q}) = f(\mathrm{p}) + f(\mathrm{q})$?

$$f(\mathrm{p}+\mathrm{q}) = \mathrm{x}^2 \cdot (\mathrm{p}+\mathrm{q})' - \int (\mathrm{p}+\mathrm{q})dx \underset{\text{por las propiedades de las derivadas e integrales}}{=}$$

$$= \mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{p}' + \mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{q}' - \int \mathrm{p}dx - \int \mathrm{q}dx = \mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{p}' - \int \mathrm{p}dx + \mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{q}' - \int \mathrm{q}dx = f(\mathrm{p}) + f(\mathrm{q})$$

ii) $\forall \mathrm{p}(\mathrm{x}) \in \mathrm{P}_2(\mathrm{x}) \ \wedge \forall \lambda \in \mathrm{R} \Rightarrow$ ¿ $f(\lambda \mathrm{p}(\mathrm{x})) = \lambda f(\mathrm{p}(\mathrm{x}))$?

$$f(\lambda \cdot \mathrm{p}) = \mathrm{x}^2 \cdot (\lambda \cdot \mathrm{p})' - \int \lambda \cdot \mathrm{p}dx = \mathrm{x}^2 \cdot \lambda \cdot \mathrm{p}' - \lambda \int \mathrm{p}dx =$$

$$= \lambda \left[\mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{p}' - \int \mathrm{p}dx \right] = \lambda \cdot f(\mathrm{p})$$

Luego, f es una aplicación lineal.

b) Sabemos que la matriz asociada a la aplicación A es de dimensìón 4x3 y tiene por columnas las coordenadas en la base B' de las imágenes por f de los vectores de la base B, es decir,

$$A = \left(C_{B'}[f(1)] \quad C_{B'}[f(x)] \quad C_{B'}[f(x^2+1)] \right)$$

Calculemos estas columnas:

$$\bullet\ f[(1)] = 0 - \int 1 \cdot dx = -x \Rightarrow C_{B'}[-x] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ f\left[(x)\right] = x^2 \cdot 1 - \int x \cdot dx = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \underset{en\ la\ base\ B'}{=} \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot (x^2 - 1) + \alpha_3 \cdot (x^3 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = \alpha_0 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \to \alpha_0 = 1/2 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1) \Rightarrow C_{B'}[f(x)] = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ f[x^2+1] = 2 \cdot x^3 - \int (x^2+1) dx = 2 \cdot x^3 - \frac{x^3}{3} - x = \frac{5x^3}{3} - x \underset{en\ B'}{=} \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot (x^2 - 1) + \alpha_3 \cdot (x^3 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x^3}{3} - x = \alpha_0 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \to \alpha_0 = \alpha_3 = 5/3 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 5/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{B'}[f(x^2+1)] = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz pedida es: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

c) Ker f = $\left\{ p(x) \in P_2(x) \,/\, f[p] = 0 \equiv \text{Polinomio nulo} \right\}$, pero p(x)= $a+b\cdot x+c\cdot x^2$, luego p'(x)= $b + 2c\cdot x$, entonces:

$$f[p(x)] = x^2 \cdot (b + 2cx) - \int (a + bx + cx^2)dx = x^2 \cdot (b + 2cx) - ax - b\frac{x^2}{2} - c\frac{x^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f[p(x)] = -a\cdot x + x^2 \cdot (b - \frac{b}{2}) + x^3 (2c - \frac{c}{3}) = -a\cdot x + \frac{b}{2}\cdot x^2 + \frac{5c}{3}\cdot x^3 .$$

Este polinomio será el polinomio nulo cuando:

$\begin{cases} -a = 0 \\ \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{5c}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$. Estas son las 3 ecuaciones cartesianas del Ker f , luego el Ker f es el polinomio nulo y su dimensión será 0.

En cuanto a Im f , según el Teorema Fundamental:

dim $P_2(x)$ = dim Ker f + dim Im f $\Leftrightarrow$ 3 = 0 + dim Im f $\Leftrightarrow$ dim Im f = 3, y según acabamos de ver: $f[p(x)] = -ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{5c}{3}x^3 \Leftrightarrow \text{Im } f = Span\left\{-x, \frac{x^2}{2}, \frac{5}{3}x^3\right\}$. Esta sería una base de Im f y su ecuación en la base usual de $P_3(x)$ es $a_0 = 0$.

d) $U = \left\{p(x) \in P_2(x) / p(x) = p(-x)\right\}$

$$p(x) = a + b\cdot x + c\cdot x^2 \in U \Leftrightarrow a + b\cdot x + c\cdot x^2 = a - b\cdot x + c\cdot x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = a & \forall a \\ b = -b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 & \\ c = c & \forall c \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $p(x) \in U \Leftrightarrow p(x) = a + c\cdot x^2 \Rightarrow$ Base de U = $\{1, x^2\}$ por ser 1 y x^2 libres.

Entonces sabemos que el subespacio f (U) = Span { f (1), f (x^2)}.

En el apartado b) hemos visto que $f[(1)] = -x$.

Ahora vamos a hallar:

$$f\left[(x^2)\right] = x^2 \cdot 2x - \int x^2 \cdot dx = 2x^3 - \frac{x^3}{3} = \frac{5x^3}{3} \Rightarrow f(U) = Span\left\{-x, \frac{5x^3}{3}\right\}.$$

Es decir, podemos considerar como base de $f(U) : \left\{x, x^3\right\}$.