ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Elasticidad (21/11/15)

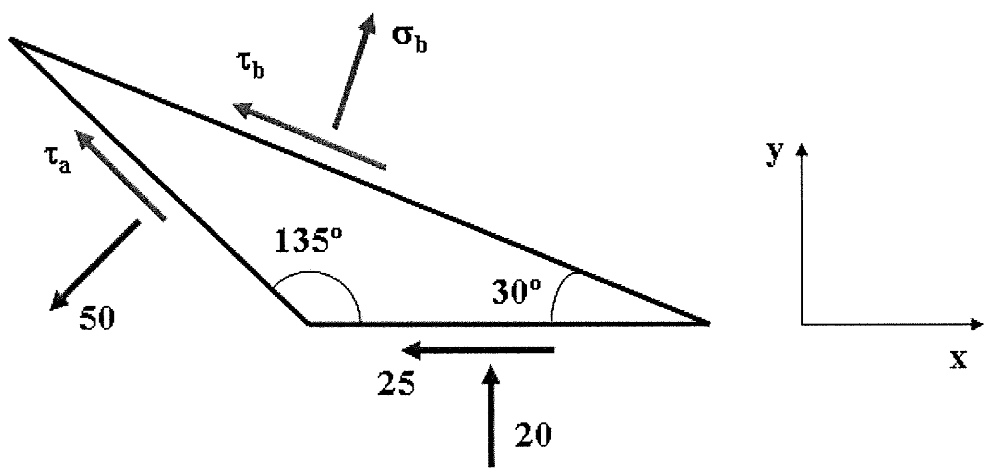
****

Una placa plana en equilibrio de un material elástico lineal está sometida a un estado tensional plano uniforme reflejado en la figura adjunta. Los valores de las tensiones indicados en la figura están dados en N/mm^2. Determinar:

1) Los valores de las tensiones que están reflejadas en forma simbólica (τ_a, σ_b y τ_b), así como sus sentidos de aplicación.

2) Valores de las tensiones principales y sus direcciones. Representar gráficamente la orientación de los ejes principales respecto a los ejes (x, y) indicados en la figura.

3) Tensión tangencial máxima y tensión normal asociada (ambas con su sentido), indicando gráficamente el plano en el que actúan respecto a los ejes (x, y).

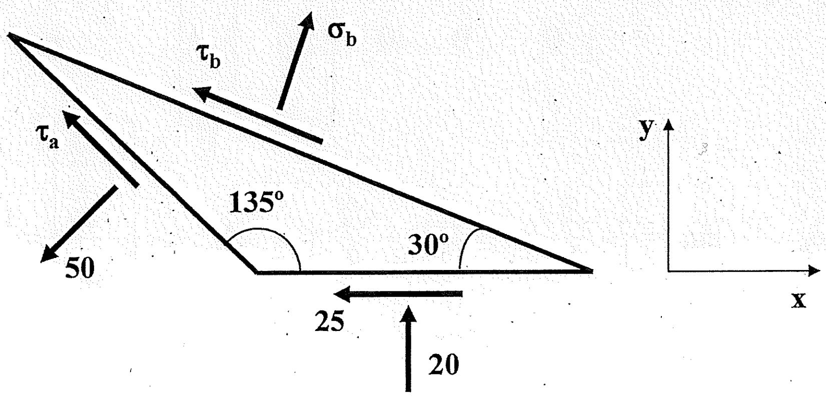


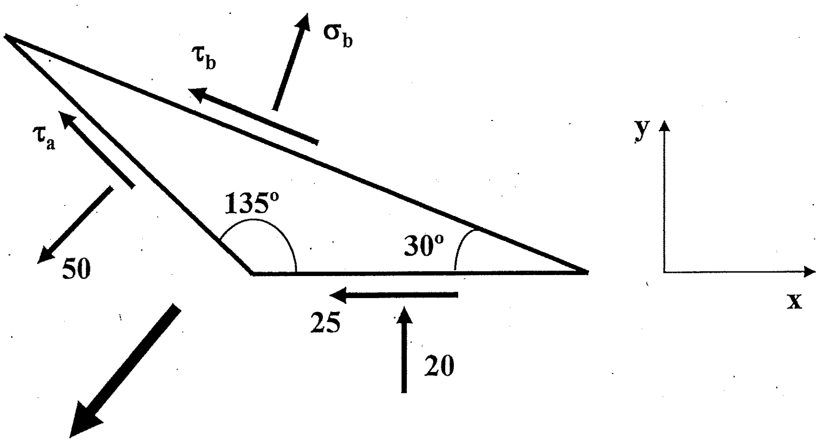
Una placa plana en equilibrio de un material elástico lineal está sometida a un estado tensional plano uniforme reflejado en la figura adjunta. Los valores de las tensiones indicados en la figura están dados en N/mm². Determinar:

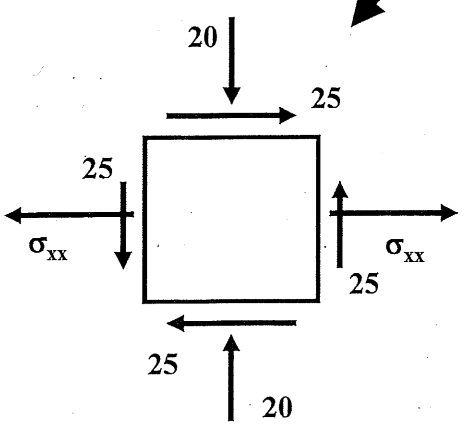
1) Los valores de las tensiones que están reflejadas en forma simbólica (τ_a, σ_b y τ_b), así como sus sentidos de aplicación.

2) Valores de las tensiones principales y sus direcciones. Representar gráficamente la orientación de los ejes principales respecto a los ejes (x, y) indicados en la figura.

3) Tensión tangencial máxima y tensión normal asociada (ambas con su sentido), indicando gráficamente el plano en el que se produce respecto a los ejes (x, y).







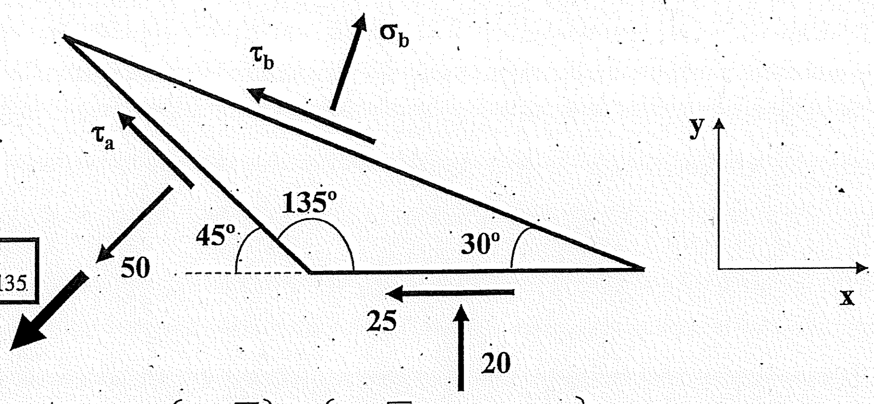
$$\boxed{\left[T_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & 25 & 0\\ 25 & -20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

$$\{\vec{n}_{135}\} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\}$$

DATO:

$$\boxed{\sigma_{nn.135} = 50}$$

$$\boxed{\vec{n}_{135}}$$



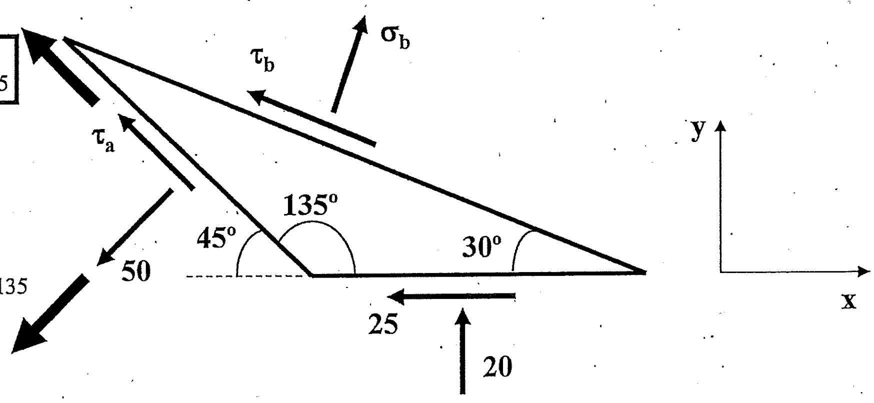
$$\{\vec{\sigma}_{n.135}\} = [T_{ij}] \cdot \{\vec{n}_{135}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 25 & 0 \\ 25 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sigma_{xx} + 25) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (25-20) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{nn.135} = \{\vec{\sigma}_{n.135}\}^T \cdot \{\vec{n}_{135}\} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sigma_{xx} + 25) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (25-20) \quad 0 \right\} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{xx} + 25) + \frac{1}{2} \cdot (25-20) = 50$$

$$\sigma_{xx} + 30 = 100 \qquad \boxed{\sigma_{xx} = 70 \text{ N/mm}^2}$$

$$\{\vec{t}_{135}\} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\}$$

$$\boxed{\vec{t}_{135}}$$



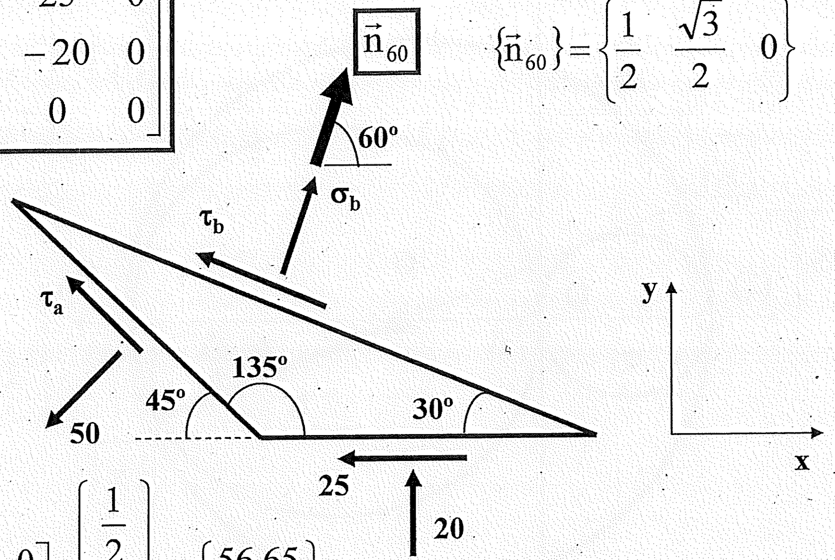
$$\{\vec{n}_{135}\} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\}$$

$$\tau_{a.135} = \{\vec{\sigma}_{n.135}\}^T \cdot \{\vec{t}_{135}\} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (70+25) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (25-20) \quad 0 \right\} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\tau_{a.135} = \frac{1}{2} \cdot (70+25) - \frac{1}{2} \cdot (25-20) = 45 \text{ N/mm}^2}$$

$$\boxed{\left[T_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}70 & 25 & 0\\ 25 & -20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

$$\left\{\vec{n}_{60}\right\}=\left\{\frac{1}{2}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\quad 0\right\}$$



$$\left\{\vec{\sigma}_{n.60}\right\}=\left[T_{ij}\right]\cdot\left\{\vec{n}_{60}\right\}=\begin{bmatrix}70 & 25 & 0\\ 25 & -20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}56{,}65\\ -4{,}82\\ 0\end{Bmatrix}$$

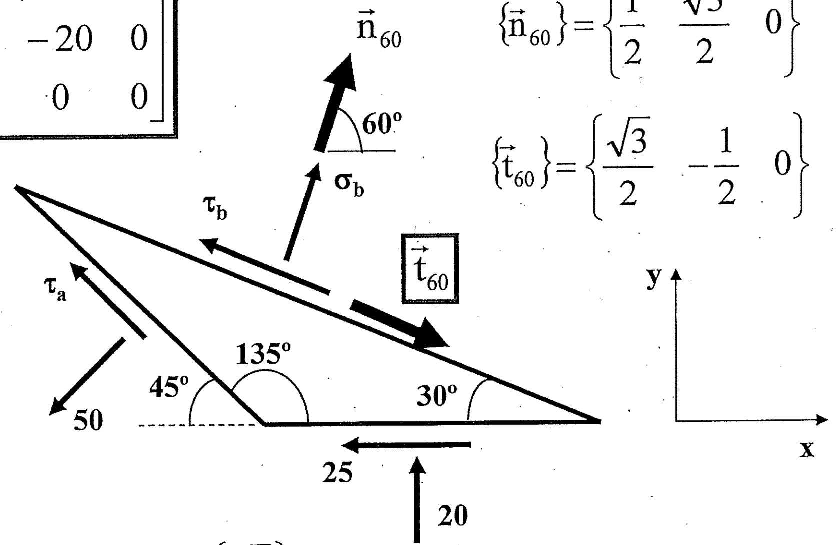
$$\sigma_{b.60}=\sigma_{nn.60}=\left\{\vec{\sigma}_{n.60}\right\}^{T}\cdot\left\{\vec{n}_{60}\right\}=\left\{56{,}65\quad -4{,}82\quad 0\right\}\cdot\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{Bmatrix}=24{,}15\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\boxed{\sigma_{b.60}=24{,}15\ \mathrm{N/mm^2}}$$

$$\boxed{\left[T_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}70 & 25 & 0\\ 25 & -20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

$$\left\{\vec{n}_{60}\right\}=\left\{\frac{1}{2}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\quad 0\right\}$$

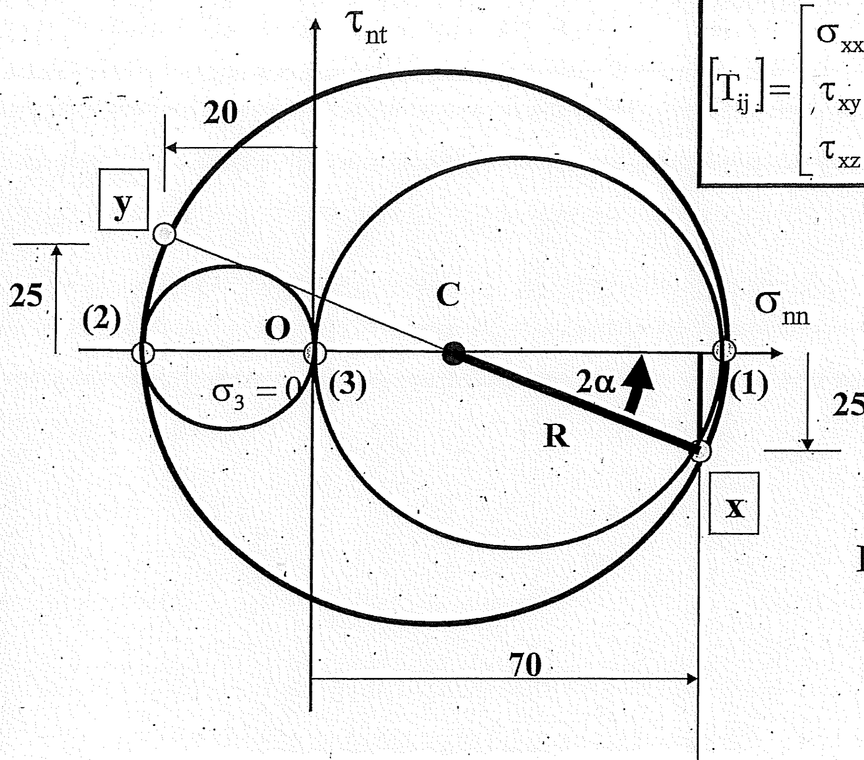
$$\left\{\vec{t}_{60}\right\}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 0\right\}$$



$$\tau_{b.60}=\left\{\vec{\sigma}_{n.60}\right\}^{T}\cdot\left\{\vec{t}_{60}\right\}=\left\{56{,}65\quad -4{,}82\quad 0\right\}\cdot\begin{Bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{Bmatrix}=51{,}47\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\boxed{\tau_{b.60}=51{,}47\ \mathrm{N/mm^2}}$$

Sentido contrario al dibujado originalmente



$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 25 & 0 \\ 25 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = (70 \quad -25)}$$

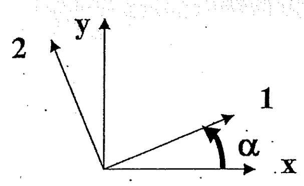
$$\boxed{Y = (-20 \quad 25)}$$

$$OC = \frac{70-20}{2} = 25$$

$$R = \sqrt{(70-25)^2 + 25^2} = 51{,}48$$

$$tg\, 2\alpha = \frac{25}{70-25} = 0{,}555$$

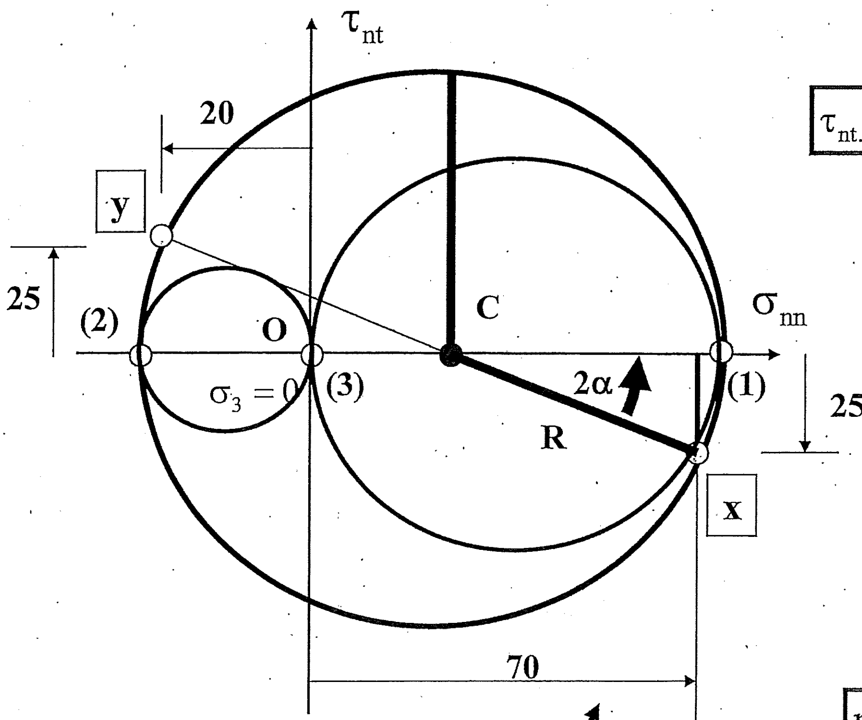
$$2\alpha = 29{,}054^\circ \qquad \boxed{\alpha = 14{,}527^\circ}$$



$$\boxed{\sigma_1 = OC + R = 25 + 51{,}58 = 76{,}48\ \text{N/mm}^2}$$

$$\boxed{\sigma_2 = OC - R = 25 - 51{,}58 = -26{,}48\ \text{N/mm}^2}$$

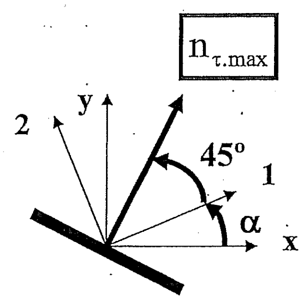
$$\boxed{\sigma_3 = 0\ \text{N/mm}^2}$$



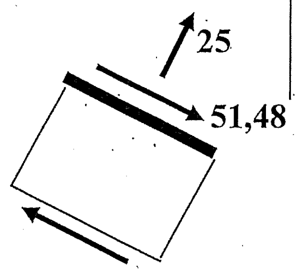
$$\boxed{\tau_{nt.max} = R = 51{,}48\ \text{N/mm}^2}$$

$$2\alpha = 29{,}054^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 14{,}527^\circ}$$



$$\boxed{n_{\tau.max} = 45^\circ + \alpha = 59{,}527^\circ}$$

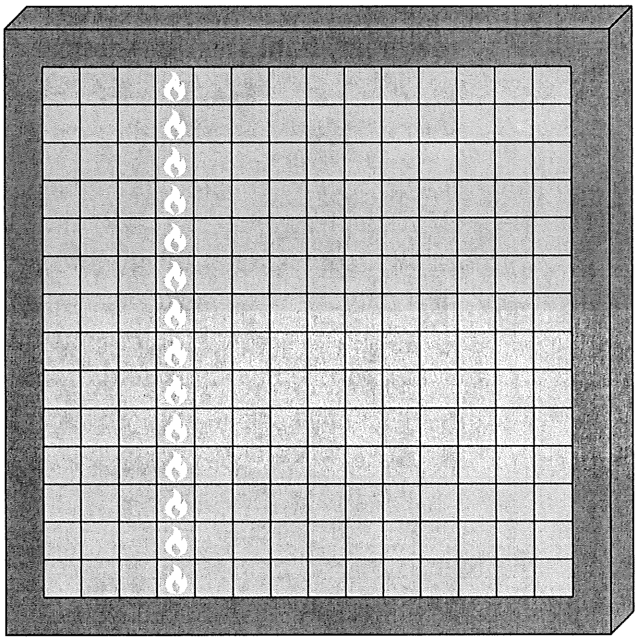


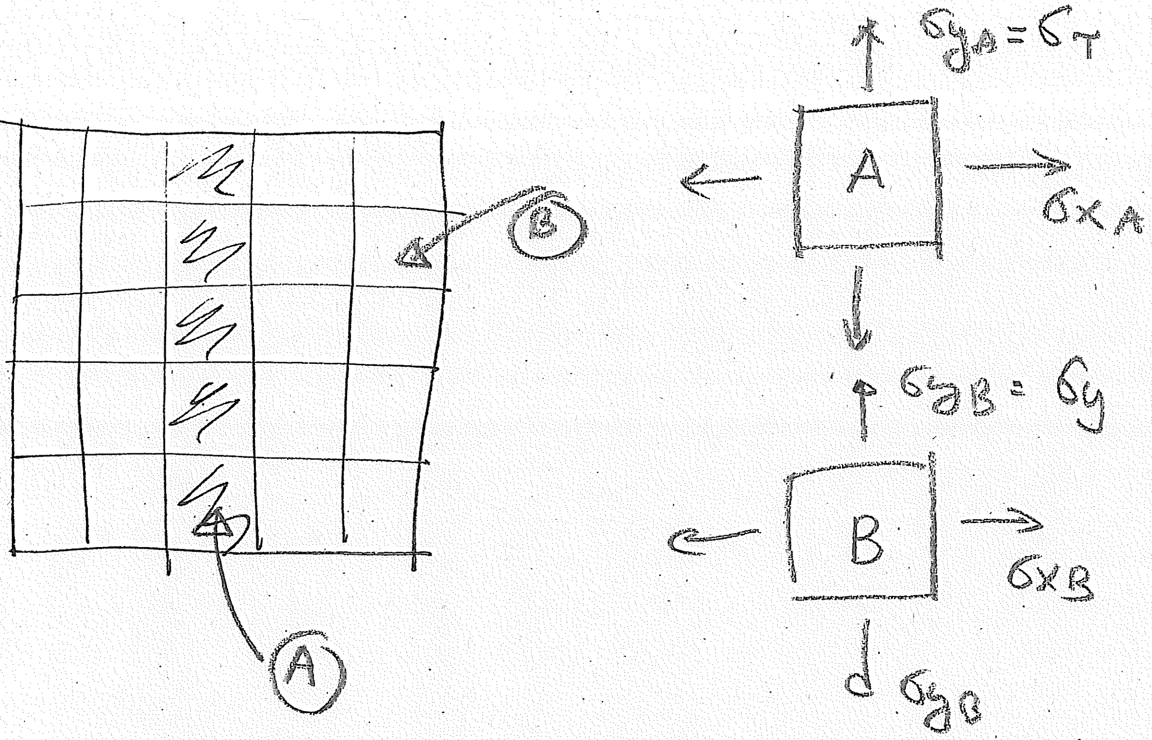
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Elasticidad (21/11/15)

****

Los cubos de la figura se encuentran alojados en una cavidad cuadrada e indeformable, ordenados en n filas y n columnas. Todos los cubos son idénticos y de lado **L = 1 cm**, siendo el módulo de elasticidad del material **E = 200 GPa**, el coeficiente de Poisson $\boldsymbol{\nu = 1/3}$, el coeficiente de dilatación lineal $\boldsymbol{\alpha = 10^{-5}\ ^{o}C^{-1}}$ y la tensión de fluencia $\boldsymbol{\sigma_f = 290}$ **MPa**. Se somete a n cubos situados en una columna cualquiera a un incremento de temperatura $\boldsymbol{\Delta T = 140\ ^{o}C}$. Se pide determinar, aplicando el criterio de Tresca, el valor mínimo de n para que no se alcance la fluencia en ninguno de los cubos.





<u>Ec. de equilibrio</u>: $\sigma_{xA} = \sigma_{xB} = \sigma_x$

- Para una fila cualquiera: $\Sigma \Delta L_x = 0 \rightarrow \Sigma \varepsilon_x = 0$

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu \cdot \sigma_T\right] + \alpha \Delta T + (n-1)\frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu \sigma_y\right) = 0$$

$$\boxed{n \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_T + E \alpha \cdot \Delta T - (n-1) \cdot \nu \cdot \sigma_y = 0}$$

- Para la columna con incremento de Tª:

$\Sigma \Delta L_y = 0 \Rightarrow \Sigma \varepsilon_y = 0$

$$\left(\frac{1}{E}\left(\sigma_T - \nu \sigma_x\right) + \alpha \Delta T\right) \cdot n = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_T = \nu \sigma_x - E \alpha \Delta T}$$

- Para el resto de columnas:

$$\Sigma \Delta L_y = 0 \rightarrow \Sigma \varepsilon_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu \sigma_x\right] \cdot n = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_y = \nu \cdot \sigma_x}$$

Sustituyendo y resolviendo el sistema:

$$n.\sigma_x - \nu(\nu\sigma_x - E\alpha\Delta T) + E\alpha\Delta T - (n-1).\nu.(\nu\sigma_x) = 0$$

$$n.\sigma_x - \nu^2.\sigma_x + \nu E\alpha\Delta T + E\alpha\Delta T - n\nu^2\sigma_x + \nu^2\sigma_x = 0$$

$$n.\sigma_x(1-\nu^2) + (1+\nu)E\alpha\Delta T = 0$$

$$\sigma_x = -\frac{E\alpha\Delta T(1+\nu)}{n(1-\nu^2)} \rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{E\alpha\Delta T}{n(1-\nu)}}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{200.10^3.10^{-5}.140}{n(1-1/3)} = -\dfrac{420}{n} \\ \sigma_y = \nu\sigma_x = -\dfrac{140}{n} \\ \sigma_T = \nu\sigma_x - E\alpha\Delta T = -\dfrac{140}{n} - 200.10^3.10^{-5}.140 = -\dfrac{140}{n} - 280 \end{cases}$$

La mayor tensión es σ_T, luego:

$$\sigma_{eq} = |\sigma_T| = \frac{140}{n} + 280 \leq 290$$

$$\boxed{n \geq 14}$$