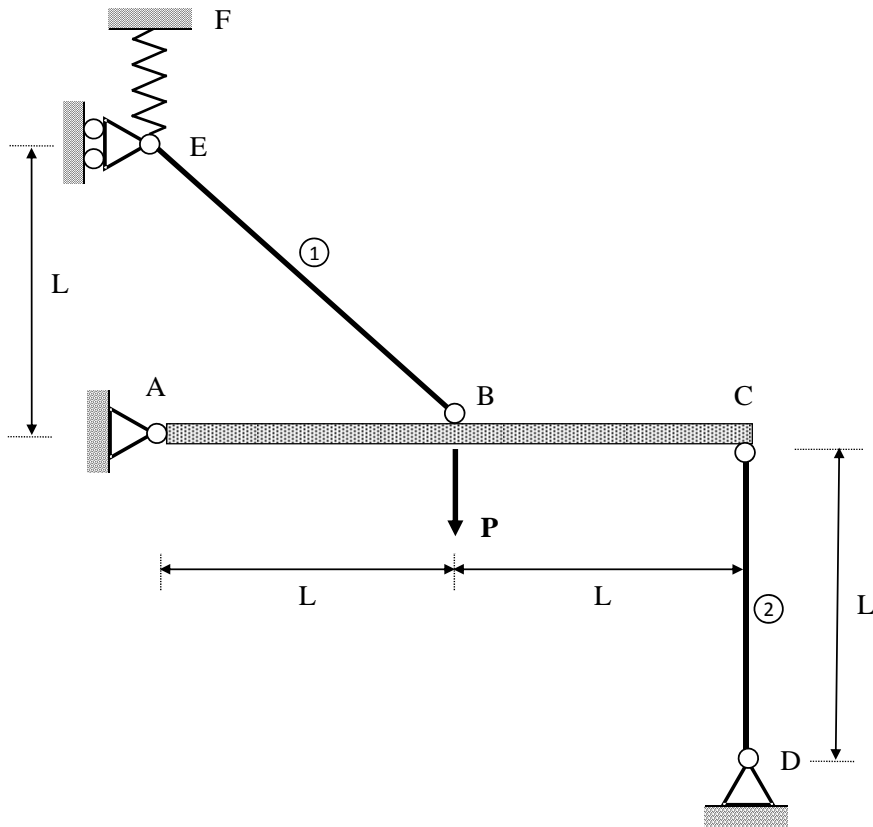
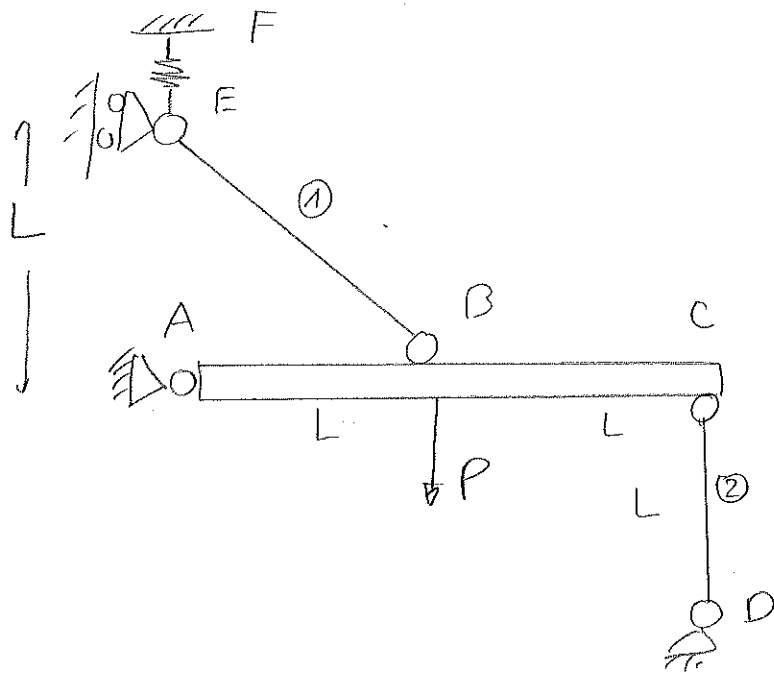


ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Examen Final (16/01/15)

La estructura de la figura está formada por una barra indeformable **ABC**, articulada al apoyo fijo **A** y sostenida mediante dos tirantes biarticulados **EB** y **CD**, siendo las dimensiones las indicadas en la figura, donde $L = 1 \text{ m}$. Los tirantes son de la misma sección $A = 10 \text{ cm}^2$ y están contruidos con acero de módulo de elasticidad $E = 200 \text{ GPa}$. El apoyo articulado **D** es fijo, mientras que el apoyo **E** es deslizante y está unido en dirección vertical a un resorte de constante $k = 2000 \text{ N/mm}$, fijado en **F**. Si se aplica una carga vertical $P = 150 \text{ kN}$ en **B**, determinar el giro de la barra **ABC** y el desplazamiento vertical en **E**.

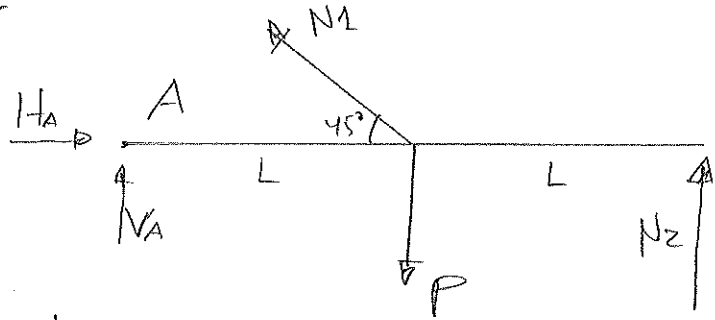




$L = 1\text{m}$
 $A = 10 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$
 $E = 200 \cdot 10^9\text{Pa}$
 $k = 2 \cdot 10^6\text{N/m}$
 $P = 150 \cdot 10^3\text{N}$
 $\frac{EA}{KL} = 100$

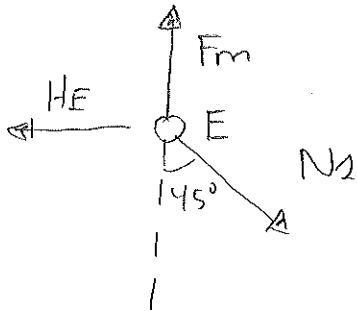
Hipótesis ① tr
② compr

1) Equilibrio



$\sum M_A = 0$

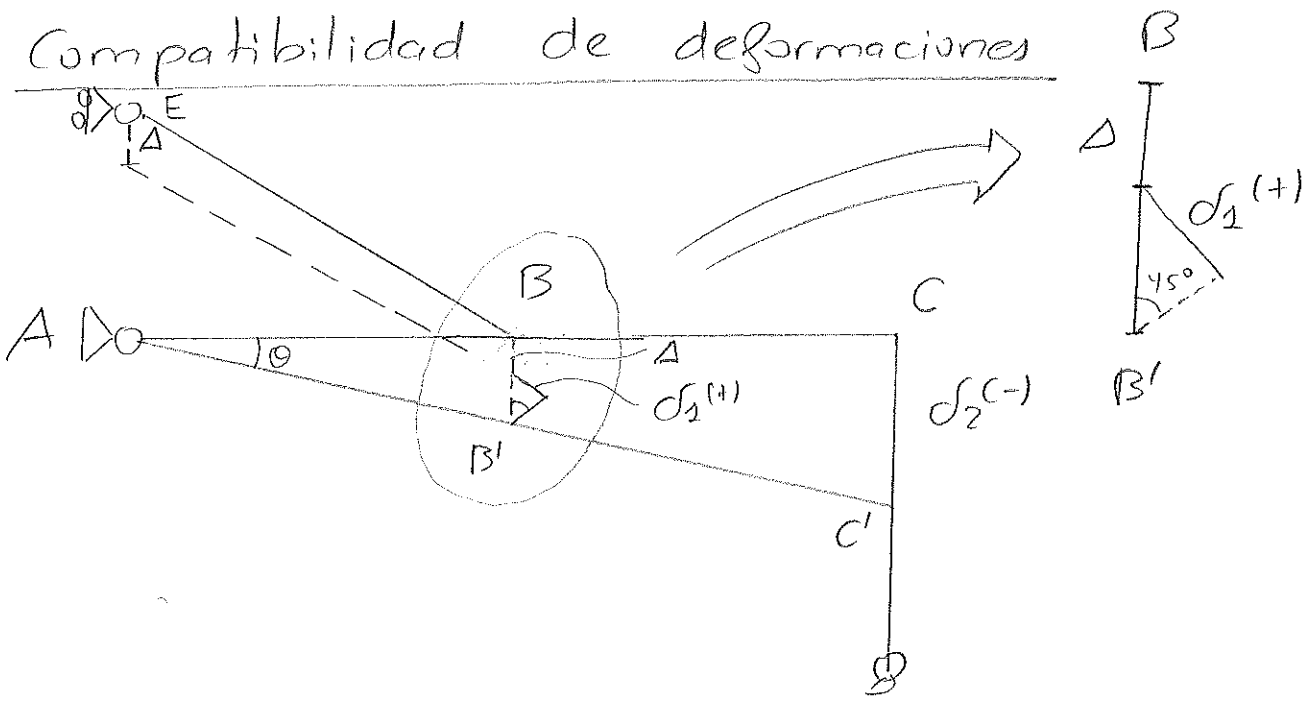
$N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2N_2 = P$ (1)



$F_m = N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = k \cdot \Delta$

$\Delta = \frac{N_1}{k} \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Compatibilidad de deformaciones



$$\left. \begin{aligned} \underline{CC'} = 2BB' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} CC' &= \sigma_2^{(-)} \\ BB' &= \Delta + \frac{\sigma_2^{(+)}}{\sin 45^\circ} \end{aligned}$$

$$\sigma_2^{(-)} = 2(\Delta + \sigma_1^{(+)} \sqrt{2})$$

$$\boxed{\sigma_2^{(-)} = 2\sqrt{2}\sigma_1^{(+)} + 2\Delta}$$

3) Ley de comportamiento

$$\sigma_1^{(+)} = \frac{N_1 \cdot L\sqrt{2}}{EA}; \quad \sigma_2^{(-)} = \frac{N_2 L}{EA}; \quad \Delta = \frac{N_1}{k} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\frac{N_2 L}{EA} = \frac{4N_1 L}{EA} + \sqrt{2} \frac{N_1}{k}} \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2):

$$\text{de (1): } (N_2 = P/2 - N_1 \sqrt{2}/4)$$

$$\frac{(P/2 - N_1 \sqrt{2}/4) L}{EA} = \frac{4N_1 L}{EA} + \sqrt{2} \frac{N_1}{k}$$

$$N_1 = P \frac{\sqrt{2}/8}{\sqrt{2} + 4/8 + \frac{EA}{2kL}} = \boxed{0,514 \text{ kN}}$$

$$N_2 = P/2 - N_1 \sqrt{2}/4 = \boxed{74,82 \text{ kN}}$$

$$\theta = \frac{\sigma_2^{(-)}}{2L} = \frac{N_2 k}{2EA k} = \boxed{1,871 \cdot 10^{-4} \text{ rad}}$$

$$\sigma_E(\downarrow) = \Delta = \frac{N_1}{k} \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{0,182 \text{ mm}}$$

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

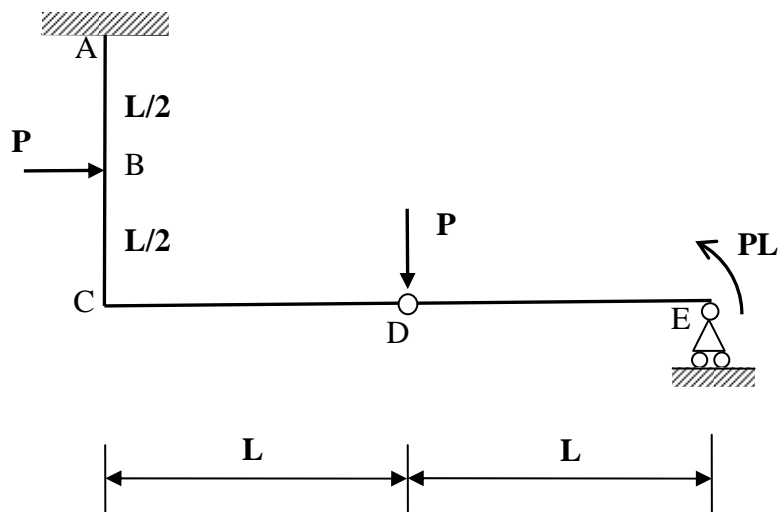
Examen Final (16/01/15)

En la estructura de la figura, con un empotramiento en A, unión rígida a 90° en C, rótula en D y apoyo articulado deslizante en E, se aplican las fuerzas y el momento indicados. La sección recta es rectangular de $6 \times 10 \text{ cm}$, con el lado mayor paralelo al plano del dibujo, y el material es un acero de módulo de elasticidad $E=200 \text{ GPa}$ y tensión de fluencia $\sigma_f=300 \text{ MPa}$. Se pide:

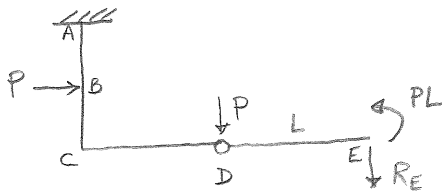
- 1º) Diagramas de esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores, en términos de P y L, y aspecto aproximado de la deformada.
- 2º) Coeficiente de seguridad con que trabaja la estructura respecto a la fluencia.
- 3º) Desplazamiento de la rótula D.

Considerar sólo las tensiones y deformaciones debidas a flexión.

Datos: $P=3 \text{ kN}$, $L=2 \text{ m}$.



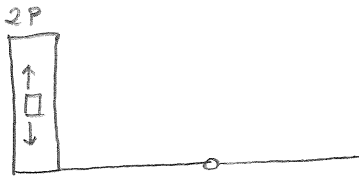
1º)



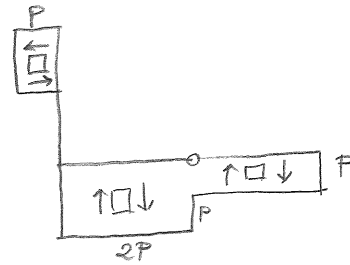
$$M_{zD} = 0 \rightarrow R_E \cdot L = P \cdot L \rightarrow R_E = P$$

Diagramas:

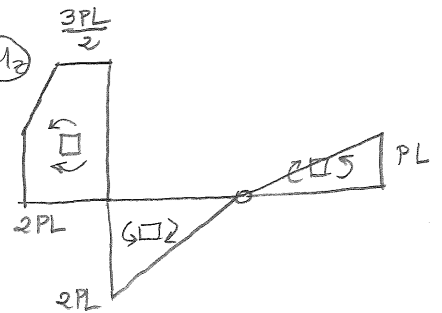
(Nx)



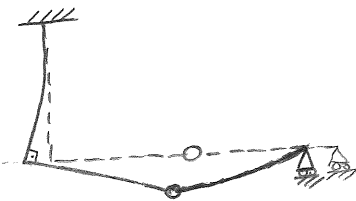
(Vy)



(Mz)



Deformada:



2º)

Sección más desfavorable: C

$$\sigma_{\max} = \frac{2PL \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{2PL \cdot 5\text{cm}}{500\text{cm}^4} = 120\text{MPa} \rightarrow \boxed{h = \frac{\sigma_p}{\sigma_{\max}} = \frac{300}{120} = 2.5}$$

$$I_z = \frac{1}{12} 6 \cdot 10^3 = 500\text{cm}^4$$

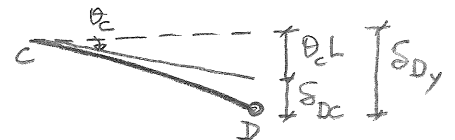
3º)

$$\boxed{(+)} \delta_{Dx} = \delta_{CA} = \frac{1}{EI} \left(2PL^2 \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{PL}{2} \frac{L}{2} \frac{5L}{6} \right) = \frac{43}{48} \frac{PL^3}{EI} = \boxed{2.15\text{cm}}$$

$$\boxed{(-)} \delta_{Dy} = \hat{\theta}_C \cdot L + \delta_{DC} = \left(\frac{15}{8} + \frac{2}{3} \right) \frac{PL^3}{EI} = \frac{61}{24} \frac{PL^3}{EI} = \boxed{6.1\text{cm}}$$

$$\hat{\theta}_C = \theta_{AC} = \frac{1}{EI} \left(2PL^2 - \frac{PL^2}{8} \right) = \frac{15}{8} \frac{PL^2}{EI}$$

$$\delta_{DC} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 2PL^2 \frac{2}{3} L \right) = \frac{2}{3} \frac{PL^3}{EI}$$



ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

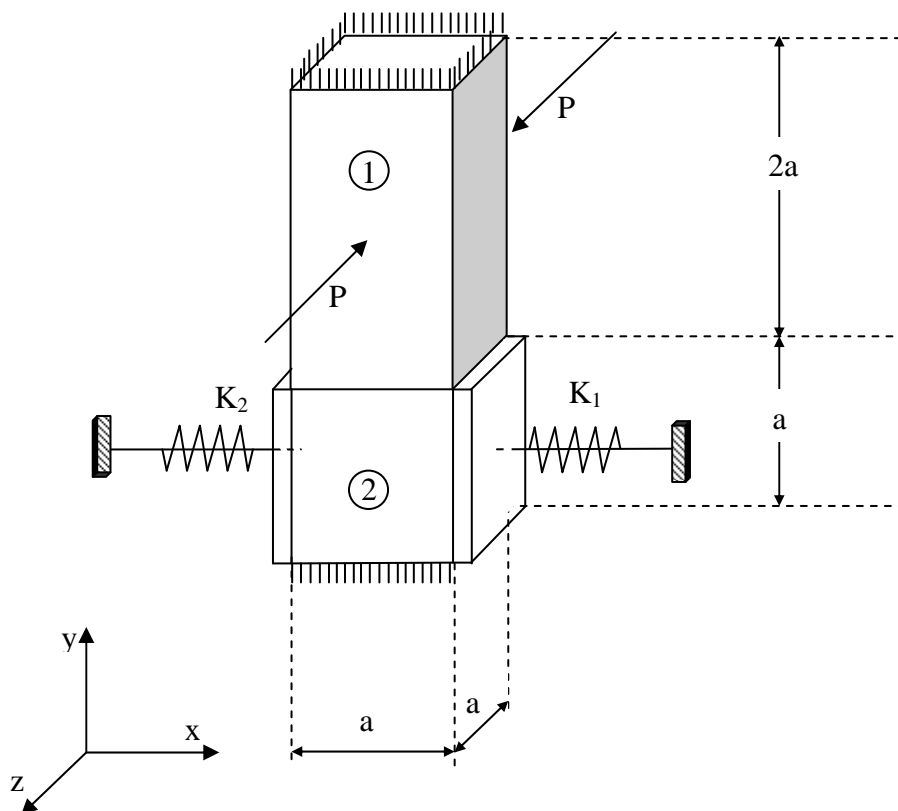
Examen Final (16/01/15)

En la figura se representan dos paralelepípedos elásticos (1) y (2), superpuestos y alojados entre dos paredes rígidas, superior e inferior. Las dimensiones de cada paralelepípedo, según los ejes x, y, z de la figura, son $a \times 2a \times a$ y $a \times a \times a$, respectivamente, siendo $a = 10 \text{ mm}$. El paralelepípedo (1) se encuentra sometido a una carga P de compresión, distribuida uniformemente en la cara sobre la que actúa, en la dirección z , mientras que el paralelepípedo (2) está unido a dos placas totalmente rígidas conectadas a dos paredes fijas mediante sendos muelles en la dirección x , tal como se observa en el dibujo. Las rigideces de dichos muelles son $K_1 = 10^6 \text{ N/mm}$ y $K_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$. El material de ambos paralelepípedos posee un módulo de elasticidad lineal $E = 200 \text{ GPa}$, un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y una tensión de fluencia $\sigma_f = 240 \text{ MPa}$.

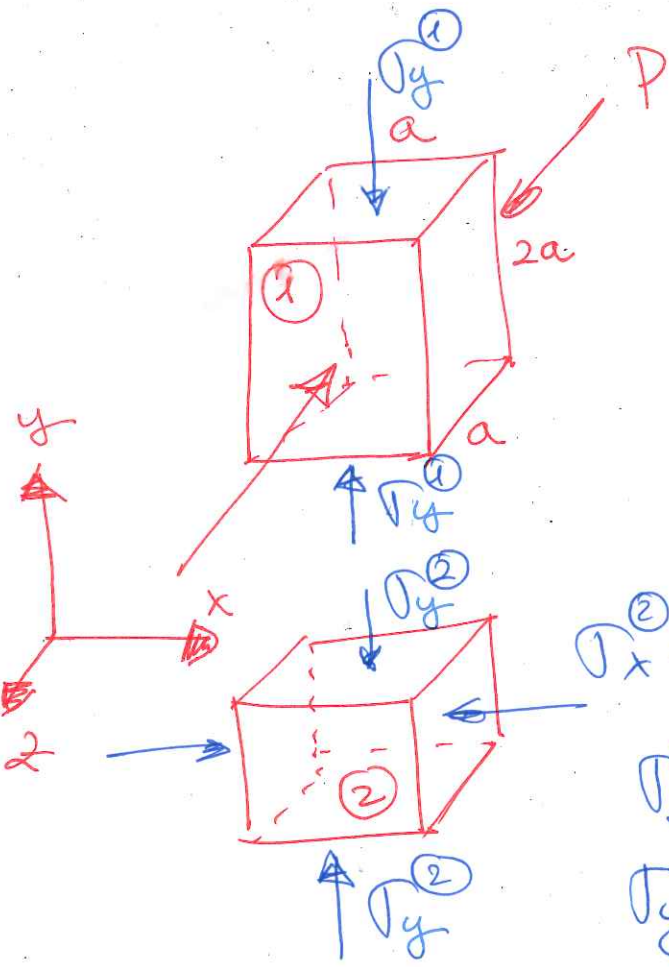
Calcular:

- 1º) Valor máximo de la carga P según el criterio de fallo de Tresca.
- 2º) Tensiones principales en cada paralelepípedo para el valor de la carga P calculado anteriormente.

Nota: Los contactos se producen sin rozamiento.



HIPOTESIS:
 Tensiones a compresión
 Alargamientos



$$\sigma_z^1 = -P/2a^2$$

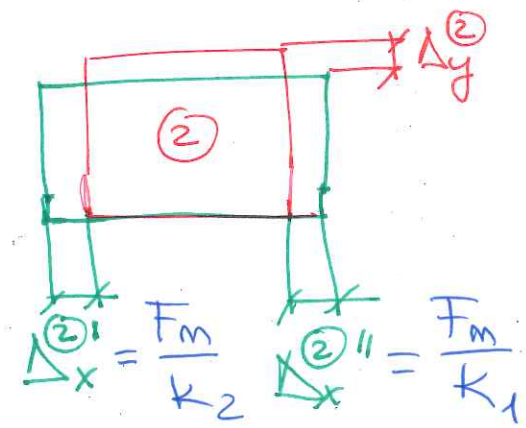
$$\sigma_x^1 = 0$$

$$\sigma_y^1 = -\sigma_y$$

$$\sigma_x^2 = \frac{F_m}{a^2} = -\sigma_x^2$$

$$\sigma_z^2 = 0$$

$$\sigma_y^2 = -\sigma_y$$



$$\Delta_x^2 = \Delta_x^{2'} + \Delta_x^{2''} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) F_m$$

EQUILIBRIO:

$$\sigma_y^1 \cdot a \cdot a = \sigma_y^2 \cdot a \cdot a \Rightarrow \sigma_y^1 = \sigma_y^2 = \sigma_y$$

INCOGNITAS: σ_y, σ_x^2

COMPATIBILIDAD: $\Delta_y^1 + \Delta_y^2 = 0$

$$\epsilon_{yy}^1 \cdot 2a + \epsilon_{yy}^2 \cdot a = 0$$

$$2\epsilon_{yy}^1 + \epsilon_{yy}^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_x^{(2)+} = \Delta_x^{(2)'+} + \Delta_x^{(2)''+} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F_M =$$

$$= \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) a^2 \cdot \sigma_x^{(2)}$$

$$\epsilon_{xx}^{(2)+} \cdot a = a^2 \sigma_x^{(2)} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

$$\boxed{\epsilon_{xx}^{(2)} = a \cdot \sigma_x^{(2)} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)} \quad (2)$$

HIPOTESIS: Tensiones a compresión
Alargamientos.

LEY DE COMPORTAMIENTO:

$$\epsilon_{xx}^{(2)} = \frac{-\sigma_x^{(2)} - \nu(-\sigma_y + 0)}{E} = \frac{-\sigma_x^{(2)} + \nu \sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_{yy}^{(1)} = \frac{-\sigma_y - \nu(0 - P/2a^2)}{E} = \frac{-\sigma_y + \nu P/2a^2}{E}$$

$$\epsilon_{yy}^{(2)} = \frac{-\sigma_y - \nu(-\sigma_x^{(2)} + 0)}{E} = \frac{-\sigma_y + \nu \sigma_x^{(2)}}{E}$$

ECUACIONES

3

① E desaparece

$$-2 \sigma_y + L P/a^2 - \sigma_y + L \sigma_x^{(2)} = 0$$

$$\boxed{-3 \sigma_y + L P/a^2 + L \sigma_x^{(2)} = 0}$$

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\frac{-\sigma_x^{(2)} + L \sigma_y}{E} = a \sigma_x^{(2)} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)}$$

RESOLUCIÓN:

Datos: $a = 10 \text{ mm}$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200000 \text{ MPa} = 200000 \text{ N/mm}^2$$

$$L = 0.3$$

$$\sigma_f = 240 \text{ MPa} = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$k_1 = 10^6 \text{ N/mm}, \quad k_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$$

$$\textcircled{1} \quad -3 \sigma_y + 0.3 \sigma_x^{(2)} = -0.3 P/10^2$$

$$\textcircled{2} \quad -\sigma_x^{(2)} + 0.3 \sigma_y = 10 \cdot 200000 \left(\frac{1}{10^6} + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \right) \sigma_x^{(2)}$$

$$-\sigma_x^{(2)} + 0.3 \sigma_y = \frac{3 \cdot 2}{2} \sigma_x^{(2)} = 3 \sigma_x^{(2)}$$

$$0.3 \sigma_y = (1 + 3) \sigma_x^{(2)} = 4 \sigma_x^{(2)}$$

$$\boxed{3 \sigma_y = 4 \sigma_x^{(2)}} \quad \text{sustituimos en } \textcircled{1}$$

$$-4 \sigma_x^{(2)} + 0.3 \sigma_x^{(2)} = -0.3 P/10^2$$

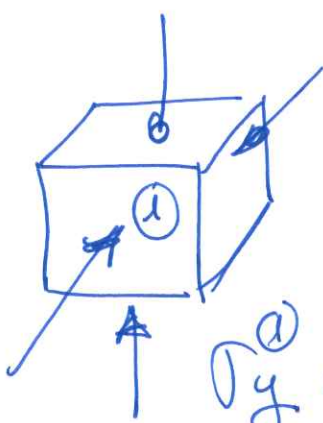
$$-3.7 \sigma_x^{(2)} = -0.3 P/10^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_x^{(2)} = 7.556 \cdot 10^{-5} \cdot P$$

$$\sigma_y = \frac{4}{3} \sigma_x^{(2)} = 10.07 \cdot 10^{-5} P$$

ESTADO DE TENSION EN CADA CUBO:

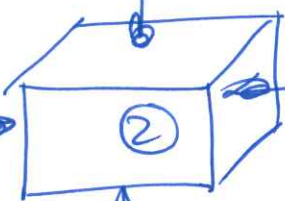
(4)



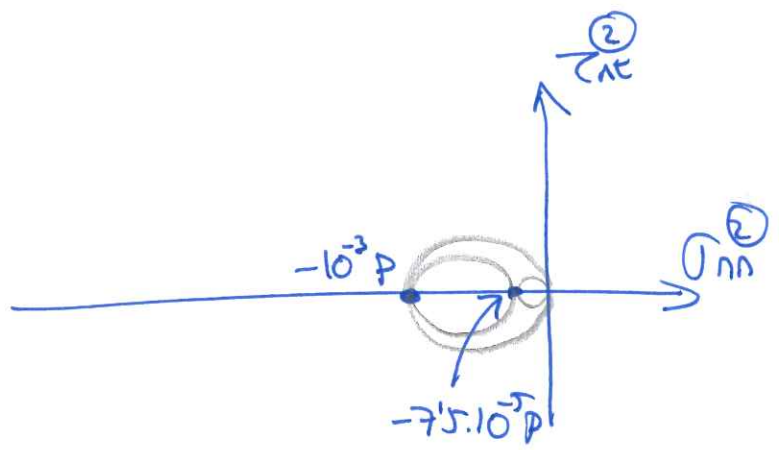
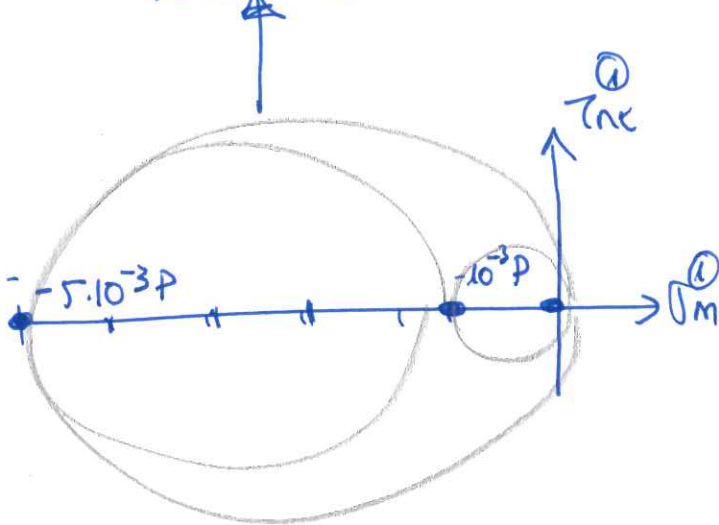
$$\sigma_z^{(1)} = \frac{-P}{2 \cdot 10^2} = -5 \cdot 10^{-3} P$$

$$\sigma_y^{(1)} = -\sigma_y \approx -1'007 \cdot 10^{-3} P \approx -10^{-3} P$$

$$-10^{-3} P = \sigma_y^{(2)}$$



$$\sigma_x^{(2)} = -7'556 \cdot 10^{-5} P$$



CRITERIO DE TRESCA: $R^{max} = \frac{\sigma_f}{2}$

$$\frac{+5 \cdot 10^{-3} P}{2} = \frac{\sigma_f}{2} \rightarrow 5 \cdot 10^{-3} P = 240$$

$P = 48000 N$

TENSIONES PARA ESA CARGA

$$\sigma_x^{(1)} = 0$$

$$\sigma_y^{(1)} = -1'007 \cdot 10^{-3} P = -48'36 MPa$$

$$\sigma_z^{(1)} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot P = -240 MPa$$

$$\sigma_x^{(2)} = -3'626 MPa$$

$$\sigma_y^{(2)} = -48'36 MPa$$

$$\sigma_z^{(2)} = 0$$