ÁLGEBRA LINEAL – Convocatoria ordinaria de Mayo.

Segundo Parcial (30 de Mayo de 2015)

1) A) Siendo $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio real de los polinomios de grado menor o igual que dos, se considera el siguiente producto escalar

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{P}_2(x)\times\mathbb{P}_2(x) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle p,q\rangle \quad \to \langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\ dx$$

Sea W el subespacio de $\mathbb{P}_2(x)$ cuya base es {1,x}. Obtener el subespacio ortogonal de W, es decir, $W^{\perp}$. Dar una base de dicho subespacio .

1 Punto

Solución:

W=Span {1,x}. Por definición, el subespacio ortogonal de W, representado por $W^{\perp}$ es:

$W^{\perp}$ = { p(x)∈$\mathbb{P}_2(x)$ / <p(x),q(x)>=0 ∀q(x)∈ W }

Si q(x)∈ W → q(x) = α + β·x , de donde <p(x),q(x)>=0 ∀ α, β∈ $\mathbb{R}$ ↔ p(x) debe ser ortogonal a los dos vectores de la base de W $\leftrightarrow \begin{cases} <p(x),1>=0 \\ <p(x),x>=0 \end{cases}$. Entonces, como p(x)∈$\mathbb{P}_2(x)$ → p(x) = a + bx + cx^2 , luego:

$$<p(x),\ 1>=\int_0^1 (a+bx+cx^2)\ dx = \left[ax+b\frac{x^2}{2}+c\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \qquad (1)$$

$$<p(x),\ x>=\int_0^1 (a+bx+cx^2)\cdot x\ dx = \left[a\frac{x^2}{2}+b\frac{x^3}{3}+c\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0 \qquad (2)$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones cartesianas de $W^{\perp}$. Despejamos “a” de la ecuación (1): $a=-\frac{b}{2}-\frac{c}{3}$, y lo sustituimos en (2):

$-\frac{b}{4}-\frac{c}{6}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0 \Rightarrow \boxed{c=-b}$. Luego, $a=-\frac{b}{2}+\frac{b}{3} \Rightarrow \boxed{a=-\frac{b}{6}}$. Así:

$$p(x) = -\frac{b}{6}+bx-bx^2 = -b\left(\frac{1}{6}-x+x^2\right) \Rightarrow \boxed{W^{\perp} = \text{Span}\left\{\frac{1}{6}-x+x^2\right\}}\ .$$

B) En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 se considera la aplicación:

$$P_2(\mathbb{R})\ x\ P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} / <p,\ q> = \int_0^1 p(x)q(x)dx - p(0)q(0)$$

Estudia si es o no producto escalar. En caso negativo, indica qué propiedad o propiedades no se cumplen, dando un contraejemplo en cada caso si es necesario.

1 Punto

<u>Solución:</u>

Estudiemos si la aplicación dada verifica los axiomas de producto escalar:

1. Positividad: $<p,\ p>=\int_0^1 p(x)p(x)dx - p(0)p(0) = \int_0^1 p^2(x)dx - p^2(0)\ \geq 0$??

   Pero este resultado no tiene por qué ser ≥ 0. Veamos un contraejemplo.
   Si $p(x) = x - 1$:

$$\left.\begin{array}{c}\int_0^1 p^2(x)dx = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\ p^2(0) = (0-1)^2 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad < p(x), p(x) > = < x-1, x-1 > = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0$$

y $<p,\ p> = 0 \Leftrightarrow p = 0$? Se observa que: $<p,\ p> = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 p^2(x)dx = p^2(0)$,

pero esto lo cumple, por ejemplo, el polinomio $p(x) = 1$ ($\int_0^1 dx = 1$ y $p^2(0) = 1$) y no es el polinomio nulo.

Por tanto, la aplicación dada no es producto escalar. Pero veamos si se cumplen los otros dos axiomas:

2. Simetría: $< p, q > = < q, p >$??

$$<p,\ q> = \int_0^1 p(x)q(x)dx - p(0)q(0) = \int_0^1 q(x)p(x)dx - q(0)p(0) = < q, p >$$

   Luego, la aplicación dada verifica la simetría.

3. Bilinealidad: $< p, (\alpha\cdot q + \beta\cdot r) > = \alpha<p,q> + \beta<p,r>$??

$$< p, (\alpha\cdot q + \beta\cdot r) > = \int_0^1 p(x)[\alpha\, q(x) + \beta\, r(x)]dx - p(0)[\alpha\, q(0) + \beta\, r(0)] =$$

$$= \alpha\left[\int_0^1 p(x)q(x)dx - p(0)q(0)\right] + \beta\left[\int_0^1 p(x)r(x)dx - p(0)r(0)\right] = \alpha < p,q > + \beta < p,r >$$

   La bilinealidad sí se verifica.

2) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **Estudia si A es diagonalizable en función del parámetro** a **. En los casos en que sí sea diagonalizable, escribe la matriz diagonal D y la matriz de cambio P. Halla la expresión de la matriz** A^4**, utilizando la relación entre A y D.** **1.5 Puntos**

<u>Solución:</u>

Lo primero que hacemos es calcular los valores propios de A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (2-\lambda) - a - a(1-\lambda) + a(2-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \text{con multiplicidad algebráica } \mathrm{m}_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 & \text{con multiplicidad algebráica } \mathrm{m}_2 = 1 \end{cases}$$

Calculemos ahora los vectores propios asociados a cada vector propio:

$$V(1) = \mathrm{Ker}(A \text{ - } I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A \text{ - } I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz A será diagonalizable cuando este subespacio V(1) tenga dimensión 2, para lo cual el rango de $A - I$ deberá ser 1, es decir, todos sus menores de orden 2 tendrán que anularse. Los distintos menores de orden 2 que podemos sacar de ella son:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \ ; \quad \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a; \quad \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

Luego, los dos casos a distinguir son: $a \neq 0 \quad y \quad a = 0$

Si $\boxed{a \neq 0}$ el rango de $(A - I) = 2 \rightarrow$ dim(V(1))=1, y la matriz A no será diagonalizable.

Si $\boxed{a = 0}$: rang$(A - I) = 1 =$ número de ec.cartesianas de $V(1)$, luego:

dim $V(1)$ = dim $\mathbb{R}^3$ -1= 3 - 1 = 2 = $\mu_1 = \mathrm{m}_1$, de donde, A es diagonalizable ya que $\mu_2 = \mathrm{m}_2 = 1$. Entonces:

$$V(1) = \mathrm{Ker}(A \text{ - } I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A \text{ - } I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1 \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow B_{V(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \right\}$$

Calculamos ahora $V(2) = \mathrm{Ker}(A \text{ - } 2I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A \text{ - } 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow B_{V(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 - 1 \end{pmatrix}^t \right\}$$

Así ya tenemos una base de vectores propios:

$$B_{vect.\,propios} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 - 1 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 0 & 1 - 1 \end{pmatrix}^t \right\}$$

Por tanto, la matriz de paso P y la matriz diagonal D serán de la forma:

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\quad y\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos A^4:

$$A^4=(P\cdot D\cdot P^{-1})^4=P\cdot D\cdot\underbrace{P^{-1}P}_{I}\cdot D\cdot\underbrace{P^{-1}P}_{I}\cdot D\cdot\underbrace{P^{-1}P}_{I}\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^4\cdot P^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

3) Sea A la matriz de mínimo orden que verifica las siguientes condiciones:

1. $\dim(\mathrm{KerA})=1$

2. $\lambda=1$ **es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 4.** $\lambda=2$ **es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 3.**

3. $\mathrm{rango}(\mathrm{A}-\mathrm{I})=6$ **y** $\mathrm{rango}(\mathrm{A}-\mathrm{I})^2=4$

4. $\mathrm{rango}(\mathrm{A}-2\mathrm{I})=7$ **y** $\mathrm{rango}(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^3=5$

Halla la forma canónica de Jordan de dicha de matriz. **2 Puntos**

<u>Solución:</u>

Como nos dicen que $\dim(\mathrm{KerA})=1$, y teniendo en cuenta que: $\mathrm{Ker}(A)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\ /\ A\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}=V_1(0)\Rightarrow\dim V_1(0)=1$. Luego el 0 es un autovalor de A, del que de momento desconocemos su multiplicidad algebraica. Los otros autovalores según el enunciado son: $\lambda_1=1$ con m_1 = 4 y $\lambda_2=2$ con m_2 = 3. Consecuentemente, la matriz A será de orden $n\geq 8$, pues su polinomio característico tiene tres raíces, $\lambda_1=1$ cuádruple, $\lambda_2=2$ triple y la raíz $\lambda_3=0$, pero como nos piden considerar la de mínimo orden, se tendrá que A es forzosamente de orden n=8 y consecuentemente el autovalor $\lambda_3=0$ será simple:

Por otro lado, por la condición 3:

$\mathrm{rango}(\mathrm{A}-\mathrm{I})=6=$ nº de ecuaciones cartesianas de $V_1(1)\Longrightarrow$

$\dim V_1(1)=\dim\mathbb{R}^8-6=8-6=2$ y como

$\mathrm{rango}(\mathrm{A}-\mathrm{I})^2=4$ = nº de ecuaciones cartesianas de $V_2(1)\Longrightarrow$

$\dim V_2(1)=\dim\mathbb{R}^8-4=8-4=4=m_1\rightarrow$ $V_2(1)$ es ya el subespacio maximal asociado a $\lambda_1=1$.

De la condición 4:

$\operatorname{rango}(A-2I)=7=$ nº de ecuaciones cartesianas de $V_1(2) \Longrightarrow$

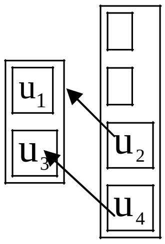
$\dim V_1(2) = \dim \mathbb{R}^8 - 7 = 8 - 7 = 1$

$\operatorname{rango}(A-2I)^3 = 5 =$ nº de ecuaciones cartesianas de $V_3(2) \Longrightarrow$

$\dim V_3(2) = \dim \mathbb{R}^8 - 5 = 8 - 5 = 3 = m_2 \to V_3(2)$ es el subespacio maximal asociado a $\lambda_2 = 2$.

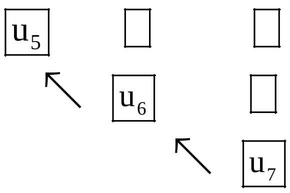
Entonces, las cadenas de subespacios para estos dos autovalores y la forma de elegir los vectores de la base de Jordan va a ser la siguiente:

$\underset{\dim 2}{V_1(1)} \underset{\neq}{\subset} 4\,\underset{\dim 4}{V_2(1)}$



$\Longrightarrow$ 2 bloques elementales de Jordan de orden 2: $J_1(1)$, $J_2(1)$

$\underset{\dim 1}{V_1(2)} \underset{\neq}{\subset} \underset{\dim 2}{V_2(2)} \underset{\neq}{\subset} \underset{\dim 3}{V_3(2)}$



$\Longrightarrow$ 1 bloque elemental de Jordan de orden 3: $J_3(2)$

Para el autovalor simple $\lambda_3 = 0$, sólo existe el subespacio:

$\underset{\dim 1}{V_1(0)}$

$\Longrightarrow$ 1 bloque elemental de Jordan de orden 1: $J_4(0)$

Por tanto, en la base B = $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ la forma de Jordan de A será:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.- Sea el sistema lineal:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.25 \cdot (100 + x_2 + x_3) \\
x_2 &= 0.25 \cdot (20 + x_1 + x_4) \\
x_3 &= 0.25 \cdot (20 + x_1 + x_4 + x_5) \\
x_4 &= 0.25 \cdot (20 + x_2 + x_3 + x_6) \\
x_5 &= 0.25 \cdot (100 + x_3 + x_6) \\
x_6 &= 0.25 \cdot (20 + x_4 + x_5)
\end{aligned}$$

a) Estudiar la convergencia y velocidad de convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, sin calcular los radios espectrales de las matrices T_J **y** T_G **asociadas a ellos, enunciando todos los resultados en los que te basas.**

b) Realizar dos iteraciones del método más rápido, trabajando con 3 dígitos significativos y partiendo del vector nulo como aproximación inicial. Calcular el porcentaje de error cometido en la última iteración.

2 Puntos

Solución:

a) El sistema del que provienen las ecuaciones del enunciado es:

$$\begin{cases}
4x_1 - x_2 - x_3 = 100 \\
-x_1 + 4x_2 - x_4 = 20 \\
-x_1 + 4x_3 - x_4 - x_5 = 20 \\
- x_2 - x_3 + 4x_4 - x_6 = 20 \\
- x_3 + 4x_5 - x_6 = 100 \\
- x_4 - x_5 + 4x_6 = 20
\end{cases}$$

La matriz A de este sistema es *estrictamente diagonal dominante* ya que $|a_{i,i}| = 4 > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \quad \forall i$ ya que $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 1,2,5,6 \\ 3 & \text{si } i = 3,4 \end{cases}$ y por tanto, los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen.

Además la matriz A cumple las condiciones del teorema de Stein-Rosenberg, ya que $\begin{cases} a_{i,i} > 0 & \forall i \\ a_{i,j} \leq 0 & \forall i \neq j \end{cases}$ y en consecuencia, Gauss-Seidel convergerá más aprisa que Jacobi.

b) Para este sistema el algoritmo de Gauss-Seidel queda en la forma:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 0.25 \cdot (100 + x_2^k + x_3^k) \\ x_2^{k+1} = 0.25 \cdot (20 + x_1^{k+1} + x_4^k) \\ x_3^{k+1} = 0.25 \cdot (20 + x_1^{k+1} + x_4^k + x_5^k) \\ x_4^{k+1} = 0.25 \cdot (20 + x_2^{k+1} + x_3^{k+1} + x_6^k) \\ x_5^{k+1} = 0.25 \cdot (100 + x_3^{k+1} + x_6^k) \\ x_6^{k+1} = 0.25 \cdot (20 + x_4^{k+1} + x_5^{k+1}) \end{cases}$$

Si partiendo del vector $\underset{\sim}{x}^{(0)} = \underset{\sim}{0}$ hacemos dos iteraciones dando valores k=0 y k=1 en el algoritmo anterior, obtenemos al trabajar con 3 dígitos significativos:

$$\begin{cases} x_1^1 = 0.25 \cdot (100 + x_2^0 + x_3^0) \simeq 25 \\ x_2^1 = 0.25 \cdot (20 + x_1^1 + x_4^0) \simeq 11.3 \\ x_3^1 = 0.25 \cdot (20 + x_1^1 + x_4^0 + x_5^0) \simeq 11.3 \\ x_4^1 = 0.25 \cdot (20 + x_2^1 + x_3^1 + x_6^0) \simeq 10.7 \\ x_5^1 = 0.25 \cdot (100 + x_3^1 + x_6^0) \simeq 27.8 \\ x_6^1 = 0.25 \cdot (20 + x_4^1 + x_5^1) \simeq 14.6 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1^2 = 0.25 \cdot (100 + x_2^1 + x_3^1) \simeq 30.7 \\ x_2^2 = 0.25 \cdot (20 + x_1^2 + x_4^1) \simeq 15.4 \\ x_3^2 = 0.25 \cdot (20 + x_1^2 + x_4^1 + x_5^1) \simeq 22.3 \\ x_4^2 = 0.25 \cdot (20 + x_2^2 + x_3^2 + x_6^1) \simeq 18.1 \\ x_5^2 = 0.25 \cdot (100 + x_3^2 + x_6^1) \simeq 34.2 \\ x_6^2 = 0.25 \cdot (20 + x_4^2 + x_5^2) \simeq 18.1 \end{cases}$$

y el porcentaje de error relativo cometido en la segunda iteración es

$$e_{rel} \cdot 100 \simeq \frac{\| \underset{\sim}{\mathbf{x}}^{(2)} - \underset{\sim}{\mathbf{x}}^{(1)} \|_\infty}{\| \underset{\sim}{\mathbf{x}}^{(2)} \|_\infty} \cdot 100 = \frac{\max_i \left\{ \left| x_i^2 - x_i^1 \right| \right\}}{\max_i \left\{ \left| x_i^2 \right| \right\}} \cdot 100 =$$

$$= \frac{\max\{|30.7 - 2.5|, |15.4 - 11.3|, |22.3 - 11.3|, |18.1 - 10.7|, |34.2 - 27.8|, |18.1 - 14.6|\}}{\max\{|30.7|, |15.4|, |22.3|, |18.1|, |34.2|, |18.1|\}} \text{x} 100 =$$

$$= \frac{11}{34.2} \text{x} 100 = 32.2\%$$

5.- Dada la tabla de datos

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0.47	-1.7632	-7.2560	-20.766	-53.995

Calcula el elemento mejor aproximación mínimo-cuadrática del tipo $y = 2 - b\, e^{a \cdot x}$ **trabajando con redondeo a 5 dígitos significativos. Plantea, sin calcular, cuál es el error mínimo-cuadrático cometido. 2 Puntos**

Solución:

$y = 2 - b \cdot e^{a \cdot x} \Rightarrow b \cdot e^{a \cdot x} = 2 - y$ y tomando logaritmos neperianos se obtiene que $L(2 - y) = L(b \cdot e^{a \cdot x}) = L(b) + L(e^{a \cdot x}) = L(b) + a \cdot x$, que ya es una relación lineal.

En consecuencia, aproximaremos la función $L(2 - y)$ por la recta $p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot x$ que mejor se ajuste a sus datos. Esto significa que a la hora de resolver el problema de aproximación, debemos utilizar la tabla de datos

x_i	0	1	2	3	4
$L(2-y_i)$	0.42527	1.3253	2.2253	3.1253	4.0253

Para resolver este problema de aproximación, se considera el vector $\mathbf{L}(2-\underset{\sim}{\mathbf{y}})=\begin{pmatrix}0.42527\\1.3253\\2.2253\\3.1253\\4.0253\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^5$ y el subespacio $H=\text{Span}\{\underset{\sim}{\mathbf{x}_0},\underset{\sim}{\mathbf{x}_1}\}=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$. Se trata de hallar el elemento $\mathbf{u}=\lambda_0\cdot\underset{\sim}{\mathbf{x}_0}+\lambda_1\cdot\underset{\sim}{\mathbf{x}_1}$ mejor aproximación de $\mathbf{L}(2-\underset{\sim}{\mathbf{y}})$ en H respecto al producto escalar $<f,g>=\sum_{i=1}^{5}f(x_i)\cdot g(x_i)$, que como sabemos se obtiene imponiendo que $L(2-\underset{\sim}{\mathbf{y}})-\mathbf{u}\in H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases}<L(2-\underset{\sim}{\mathbf{y}})-\mathbf{u},\underset{\sim}{\mathbf{x}_0}>=0\\<L(2-\underset{\sim}{\mathbf{y}})-\mathbf{u},\underset{\sim}{\mathbf{x}_1}>=0\end{cases}$, condiciones que conducen al sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix}<\underset{\sim}{\mathbf{x}_0},\underset{\sim}{\mathbf{x}_0}> & <\underset{\sim}{\mathbf{x}_1},\underset{\sim}{\mathbf{x}_0}>\\<\underset{\sim}{\mathbf{x}_0},\underset{\sim}{\mathbf{x}_1}> & <\underset{\sim}{\mathbf{x}_1},\underset{\sim}{\mathbf{x}_1}>\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<L(2-\underset{\sim}{\mathbf{y}}),\underset{\sim}{\mathbf{x}_0}>\\<L(2-\underset{\sim}{\mathbf{y}}),\underset{\sim}{\mathbf{x}_1}>\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{5}1 & \sum_{i=1}^{5}x_i\\\sum_{i=1}^{5}x_i & \sum_{i=1}^{5}x_i^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{5}L(2-y_i)\\\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot L(2-y_i)\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5 & 10\\10 & 30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11.126\\31.253\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}5\lambda_0+10\lambda_1=11.126\\10\lambda_0+30\lambda_1=31.253\end{cases}$$

y realizando la transformación elemental F_2-2F_1 se obtiene que

$$\begin{cases}5\lambda_0+10\lambda_1=11.126\\\quad\quad 10\lambda_1=9.001\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=\frac{9.001}{10}=0.9001\Rightarrow\lambda_0=\frac{11.126-10\lambda_1}{5}=0.425\Rightarrow$$

$$\begin{cases}L(b)\simeq\lambda_0\Rightarrow b\simeq e^{\lambda_0}=e^{0.425}=1.5296\\a\simeq\lambda_1=0.9001\end{cases}\xrightarrow[\text{tomando exponenciales}]{}y\simeq 2-1.5296\cdot e^{0.9001\cdot x}$$

El error mínimo cuadrático cometido en la aproximación es

$$E=d(L(2-y),\lambda_0+\lambda_1\cdot x)=\left\|L(2-y)-\lambda_0-\lambda_1\cdot x\right\|=$$

$$=\sqrt{\left\langle L(2-y)-\lambda_0-\lambda_1\cdot x, L(2-y)-\lambda_0-\lambda_1\cdot x\right\rangle}=$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left[L(2-y_i)-\lambda_0-\lambda_1\cdot x_i\right]^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left[L(2-y_i)-0.425-0.9001\cdot x_i\right]^2}\ .$$

6.- Define los siguientes conceptos, dando un ejemplo en cada caso:

a) Error de truncatura.

b) Problema mal condicionado

0.5 Puntos

Solución:

a) El error de truncatura **(e_t)** es debido al truncamiento de un proceso matemático infinito.

Por ejemplo, si para el cálculo de la función elemental f(x) = sen(x) consideramos el polinomio de Taylor de grado 2n+1

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

el error de truncatura será $e_t = f(x) - p_n(x)$.

b) Un ***problema*** se dice ***mal condicionado*** cuando pequeñas perturbaciones en los datos iniciales conducen a resultados muy diferentes (independientemente del algoritmo utilizado en la resolución)**.** Consecuentemente, un problema se dirá bien condicionado cuando pequeños errores en los datos iniciales den lugar a pequeños cambios en la solución.

Un ejemplo de problema mal condicionado será la resolución de un sistema de ecuaciones $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, en el que la matriz A es cercana a una matriz singular.