ÁLGEBRA LINEAL – Convocatoria ordinaria de Mayo.

Primer Parcial (30 de Mayo de 2015)

1.-A) Sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que su determinante vale β. Se aplican las siguientes operaciones:

1. Se invierte la matriz A para lograr la matriz B.

2. Se intercambian dos filas cualesquiera de B y se obtiene la matriz C.

3. La matriz D es el resultado de intercambiar dos columnas cualesquiera en la matriz C.

4. Se multiplica D con un parámetro real $\alpha \neq 0$. El resultado es la matriz E.

5. La fila iésima de E se multiplica por $1/\alpha$ logrando una matriz F.

6. En F sustituímos la columna j con la suma de las columnas (j-1) y j. Se obtiene la matriz G.

7. La matriz H es la traspuesta de G.

¿Cúales son los determinantes de las matrices B, C, D, E, F, G y H? (0.75 ptos)

<u>Solución:</u>

Suponiendo que $\beta \neq 0$, es decir, A regular

- $|B| = |A^{-1}| = 1/|A| = \dfrac{1}{\beta}$ por ser $A \cdot A^{-1} = I$ y tomando determinantes:

  $|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.
- $|C| = -|B| = -\dfrac{1}{\beta}$, porque un intercambio de filas en un determinante provoca un cambio de signo en su valor.
- $|D| = -|C| = \dfrac{1}{\beta}$, porque un intercambio de columnas en un determinante provoca un cambio de signo en su valor.
- $|E| = \alpha^n \cdot |D| = \dfrac{\alpha^n}{\beta}$, porque cuando se multiplica una fila o columna de una matriz por un escalar su determinante queda multiplicado por dicho escalar, y la matriz D tiene n filas.
- $|F| = \dfrac{1}{\alpha} \cdot |E| = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha^n}{\beta} = \dfrac{\alpha^{n-1}}{\beta}$, por la propiedad que acabamos de comentar.

- $|G| = |F| = \dfrac{\alpha^{n-1}}{\beta}$, porque esta transformación elemental no altera el valor del determinante de una matriz.
- $|H| = |G| = \dfrac{\alpha^{n-1}}{\beta}$, porque el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

1.-B) Calcula el valor del determinante de orden (n+1):

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & \dots & a+(n-1)b & a+nb \\ -a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \end{vmatrix}$$

(1 pto)

<u>**Solución:**</u>

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & \dots & a+(n-1)b & a+n\cdot b \\ -a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \end{vmatrix} =< C_1 + C_2 + \dots + C_{n+1} >=$$

$$= \begin{vmatrix} (n+1)\cdot a + b + 2b + \dots + n\cdot b & a+b & a+2b & \dots & a+(n-1)b & a+nb \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollando por la Columna 1}}{=}$$

$$= [(n+1)\cdot a + b\cdot(1+2+\dots+n)] \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \end{vmatrix} \underset{\text{por ser el det. de una matriz triangular}}{=}$$

$$= \left[(n+1)\cdot a + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot b\right]\cdot a^n = (n+1)\cdot a^n \cdot \left(a + \frac{n}{2}.b\right).$$

1.-C) Encuentra todas las matrices columna b= $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^t$ **para las cuales existe al menos una solución del sistema** $A \cdot x = b$**, siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$**.**

(0.75 ptos)

Solución:

Para que el sistema $A \cdot x = b$ sea compatible debe cumplirse que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid b)$, entonces, se trata de ver para qué vectores **b** se cumple esto. Realizando transformaciones elementales sobre la matriz ampliada obtenemos:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5| & b_1 \\ 2 & -3 & 4\,| & b_2 \\ 4 & 1 & -6| & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} < F2 - 2 \cdot F1 > \\ F3 - 4 \cdot F1 \end{matrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5\,| & b_1 \\ 0 & -7 & 14\,| & b_2 - 2 \cdot b_1 \\ 0 & -7 & 14\,| & b_3 - 4 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Se observa claramente que $\text{rango}(A) = 2 \Rightarrow$ Para que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid b) = 2$, debe cumplirse la condición:

$b_3 - 4 \cdot b_1 = b_2 - 2 \cdot b_1 \Leftrightarrow 2 \cdot b_1 + b_2 - b_3 = 0$. Luego los vectores $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^t$ para los que $A \cdot x = b$ tiene al menos una solución son aquellos para los que b_1, b_2, b_3 cumplen la relación: $2 \cdot b_1 + b_2 - b_3 = 0$.

2.-A) Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ **y** $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ **un conjunto de vectores linealmente independientes de E. Demostrar que el conjunto de vectores** $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ **con** $\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \mathbf{u}_n = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{e}_n \end{cases}$ **es también un conjunto libre. (0.25 ptos)**

Solución:

Sea una relación lineal nula entre los vectores $\mathbf{u_i}$ de la forma:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}_E \;/\; \alpha_i \in \mathbb{K} \;\; i = 1, ..., n \;\Leftrightarrow\; \mathbf{0}_E = \alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + ... +$$
$$+ \alpha_{n-1} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{e}_{n-1}) + \alpha_n \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n) \Leftrightarrow$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) \cdot \mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + ... + \alpha_n) \cdot \mathbf{e}_2 + ... + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) \cdot \mathbf{e}_{n-1} + \alpha_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0_E} \underset{\text{por ser los } e_i \text{ libres}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \; ... + \alpha_n = 0 \\ \qquad \alpha_2 + \; ... + \alpha_n = 0 \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema homogéneo:

De la ecuación n: $\alpha_n = 0$, de la n-1, $\alpha_{n-1} = 0$ y así sucesivamente, de la segunda ecuación $\alpha_2 = 0$ y finalmente de la primera $\alpha_1 = 0$. Luego, todos los escalares $\alpha_i = 0 \ \forall\ i = 1,...,n$ y consecuentemente, los vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ son también linealmente independientes.

2.-B) Hallar la dimensión del subespacio S en función de los valores de a y b

$S = \mathrm{Span}\left\{(1,1,1)^t,\ (1,1,a)^t,\ (1,a,b)^t \text{ siendo } a,b \in \mathbb{R}\right\}$. **Obtener las ecuaciones paramétricas y cartesianas de S en cada caso.** **(1.5 ptos)**

<u>Solución:</u>

Para saber la dimensión de S tenemos que estudiar cuántos vectores hay linealmente independientes de entre los tres $\left\{(1\,1\,1)^t,\ (1\,1\ a)^t,\ (1\ a\ b)^t\right\}$. Para ello estudiamos el rango de la matriz A que tiene por columnas las coordenadas de tales vectores:

$$\mathrm{Rango}(A) = \mathrm{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix} \begin{matrix} < C2 - C1 > \\ C3 - C1 \end{matrix} = \mathrm{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a-1 & b-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -(a-1)^2 \Rightarrow$$

Los dos casos a distinguir son: $a = 1$ y $a \neq 1$

- Si **a≠1**, el rango de A es tres, por lo que los tres vectores $\left\{(1\,1\,1)^t,\ (1\,1\ a)^t,\ (1\ a\ b)^t\right\}$ son linealmente independientes $\forall$ b $\Longrightarrow$ dim(S) = 3 $\Longrightarrow$ S coincide con el espacio total $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ S no tiene ecuaciones cartesianas y sus **ecuaciones paramétricas** son: $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_3 \end{cases} \ /\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, considerando como base de S= $\mathbb{R}^3$ la base canónica y (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de un vector de x respecto a dicha base.

- Si **a=1** el rango de la matriz A coincide con el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$

  En este caso hay que distinguir que b=1 o que b ≠ 1. Es decir:

  - Si **a=1** y **b=1** se tiene que el rango de A es claramente 1 $\Longrightarrow$ dim(S) = 1, pues sólo hay un vector linealmente independiente, esto es: $S = \mathrm{Span}\left\{(1\,1\,1)^t\right\} \Rightarrow$ Las **ecuaciones paramétricas** de S son:

    $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = \lambda_1 \end{cases} \ /\ \lambda_1 \in \mathbb{R}$. S tendrá 2 ecuaciones cartesianas, que se pueden obtener eliminando el parámetro λ_1 de estas ecuaciones, obteniéndose:

$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \equiv$ **Ecuaciones cartesianas** de S.

- Si **a=1** y **b≠ 1** se tiene que el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ es 2 $\Longrightarrow$ dim(S) = 2,

  ya que $S = \mathrm{Span}\left\{(1\,1\,1)^t, (0\ 0\ b-1)^t\right\} \Rightarrow$ Las **ecuaciones paramétricas** de S en esta base son:

  $$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot (b-1) \end{cases} \quad / \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

  S tendrá 1 ecuación cartesiana, que se puede obtener anulando el determinante de la matriz:

  $0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & b-1 & x_3 \end{vmatrix} = -(b-1)\cdot(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \equiv$ **Ecuacion cartesiana** de S.

3) En $\mathbb{P}_2$ se considera el subespacio $M = \mathrm{Span}\left\{x^2 - 1,\ x + 1,\ 3\cdot x^2 - 7\cdot x - 10\right\}$

a) Hallar la forma de todas las bases de $\mathbb{P}_2$ que contengan una base de M. (1 punto)

b) Dar un subespacio suplementario de M. (0.5 puntos)

c) Se consideran en $\mathbb{P}_2$ las dos bases siguientes:

$B = \left\{\mathbf{e_1} = (1-x)^2,\ \mathbf{e_2} = x\cdot(1-x),\ \mathbf{e_3} = x^2\right\}$ y $B' = \left\{\mathbf{e}'_1 = x^2 - 1,\ \mathbf{e}'_2 = x + 1,\ \mathbf{e}'_3 = 1\right\}$

c.1) Hallar la matriz de cambio de base $P = \left(C_B(\mathbf{e}'_1) \quad C_B(\mathbf{e}'_2) \quad C_B(\mathbf{e}'_3)\right)$**.(0.5 puntos)**

c.2) Hallar, utilizando la definición de coordenadas, las coordenadas del polinomio $p = 1 + 2\cdot x + 2\cdot x^2$ **en la base B'. (0.25 puntos)**

c.3) Hallar, utilizando la matriz P del apartado c.1), las coordenadas del polinomio $p = 1 + 2\cdot x + 2\cdot x^2$ **en la base B. (0.5 puntos)**

<u>Solución:</u>

a) Veamos cuantos vectores de M son linealmente independientes, para lo cual estudiamos el rango de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los polinomios que generan M respecto a la base usual de $\mathbb{P}_2$ $\left\{1, x, x^2\right\}$:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -10\\ 0 & 1 & -7\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}< & C2+C1 >\\ & C3-10\cdot C1\end{matrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -7\\ 1 & 1 & -7\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Rango}=2 \Rightarrow M=\text{Span}\left\{x^2-1, x+1\right\}.$$

Entonces una base de $\mathbb{P}_2$ que contenga una base de M, será de la forma $\left\{x^2-1, x+1, a+b\cdot x+c\cdot x^2\right\}$, siendo a, b, c tales que los tres polinomios $x^2-1,\ x+1,\ a+b\cdot x+c\cdot x^2$ sean linealmente independientes, es decir, el determinante de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de esos tres polinomios en la base usual $\left\{1, x, x^2\right\}$ debe ser no nulo:

$0\neq\begin{vmatrix}-1 & 1 & a\\ 0 & 1 & b\\ 1 & 0 & c\end{vmatrix}=-c+b-a \Leftrightarrow b\neq a+c$. Por tanto, todas las bases de $\mathbb{P}_2$ que contenga una base de M, serán de la forma $\left\{x^2-1, x+1, a+b\cdot x+c\cdot x^2\right\}$, siendo a, b, c tales $b\neq a+c$.

b) Un subespacio suplementario de M, será un subespacio M^* de dimensión 1 de forma que se verifique que $M\cap M^*=\mathbf{0}_{\mathbb{P}_2}\equiv$ polinomio nulo, ya que en tal caso ya se tendrá que $M\oplus M^*=\mathbb{P}_2$. Es decir, basta considerar $M^*=\text{Span}\{p_1(x)\}$, siendo $p_1(x)$ un polinomio linealmente independiente con x^2-1 y $x+1$. Por ejemplo, podemos tomar $p_1(x)=1$, ya que para este polinomio se cumple la condición que acabamos de obtener $b\neq a+c$ ($0\neq 1+0$). Luego, un subespacio suplementario de M puede ser $M^*=\text{Span}\{1\}$.

c.1) Para hallar la matriz $P=\left(C_B(\mathbf{e}_1^{'})\quad C_B(\mathbf{e}_2^{'})\quad C_B(\mathbf{e}_3^{'})\right)$ se trata de expresar los polinomios $\mathbf{e}_i^{'}$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_i$, esto es:

- $\mathbf{e}_1^{'}=x^2-1=a\cdot(1-x)^2+b\cdot x\cdot(1-x)+c\cdot x^2=a\cdot(1+x^2-2x)+b\cdot(x-x^2)+c\cdot x^2=$
  $=(a-b+c)\cdot x^2+(b-2a)\cdot x+a \Rightarrow$ Igualando coeficientes:
  $$\begin{cases}-1=a\\ 0=b-2a\\ 1=a-b+c\end{cases}\Rightarrow a=-1,\ b=-2,\ c=0\Rightarrow 1^{a}\text{ Columna de P}:\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

- $\mathbf{e}_2^{'}=x+1=a\cdot(1-x)^2+b\cdot x\cdot(1-x)+c\cdot x^2=a\cdot(1+x^2-2x)+b\cdot(x-x^2)+c\cdot x^2=$
  $=(a-b+c)\cdot x^2+(b-2a)\cdot x+a \Rightarrow$ Igualando coeficientes:
  $$\begin{cases}1=a\\ 1=b-2a\\ 0=a-b+c\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=3,\ c=2\Rightarrow 2^{a}\text{ Columna de P}:\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

- $\mathbf{e}_3^{'}=1=a\cdot(1-x)^2+b\cdot x\cdot(1-x)+c\cdot x^2=a\cdot(1+x^2-2x)+b\cdot(x-x^2)+c\cdot x^2=$
  $=(a-b+c)\cdot x^2+(b-2a)\cdot x+a \Rightarrow$ Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} 1=a \\ 0=b-2a \\ 0=a-b+c \end{cases} \Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=1 \Rightarrow 3^{a}\text{ Columna de } P: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

La matriz P es: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, siendo la relación entre las coordenadas de un polinomio p(x) en ambas bases: $C_B(p(x)) = P \cdot C_{B'}(p(x))$.

c.2) Expresamos el polinomio $p = 1 + 2\cdot x + 2\cdot x^2$ como combinación lineal de los vectores de B', esto es:

$p = 1 + 2\cdot x + 2\cdot x^2 = a\cdot(x^2-1) + b\cdot(x+1) + c = a\cdot x^2 + b\cdot x + (c+b-a) \Rightarrow$ Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} 2=a \\ 2=b \\ 1=c+b-a \end{cases} \Rightarrow a=2,\ b=2,\ c=1 \Rightarrow C_{B'}(p(x)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \text{Coordenadas de p(x) en B'.}$$

c.3) Teniendo en cuenta la relación matricial entre las coordenadas de un polinomio en las bases B y B': $C_B(p(x)) = P \cdot C_{B'}(p(x))$, sustituyendo en esta relación las coordenadas de p(x) en B', que acabamos de calcular en el apartado c.2), obtendremos las coordenadas de p(x) en la base B:

$$C_B(p(x)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \equiv \text{Coordenadas de p(x) en B} \Rightarrow$$

$$p = 1 + 2\cdot x + 2\cdot x^2 = 1\cdot(1-x)^2 + 4\cdot x(1-x) + 5\cdot x^2.$$

4) En el espacio vectorial V de las <u>matrices diagonales de orden 3</u> se considera la aplicación

$$\begin{aligned} f: V &\to P_2(x) \\ A &\to f(A) = \text{traza}(A)\cdot x^2 + \text{traza}(A) \end{aligned}$$

a) Demostrar que la aplicación es lineal.

b) Hallar la expresión matricial en las bases canónicas de V y $P_2(x)$.

c) Hallar una base del núcleo.

1.5 puntos

<u>Solución:</u>

a) Veamos si f cumple las dos condiciones para ser lineal:

i) $\forall\, A,B \in V \Rightarrow$ ¿ $f(A+B) = f(A) + f(B)$?

$f(A+B) = \text{traza}(A+B)\cdot x^2 + \text{traza}(A+B) \Rightarrow$ Por las propiedades de la traza de una matriz, sabemos que traza(A+B) = traza(A) + traza(B) $\Rightarrow$

$$f(A+B) = (\text{traza}(A)+\text{traza}(B))\cdot x^2 + \text{traza}(A) + \text{traza}(B) =$$
$$\text{traza}(A)\cdot x^2 + \text{traza}(A) + \text{traza}(B)\cdot x^2 + \text{traza}(B) = f(A) + f(B) \Rightarrow$$

Esta primera condición sí se cumple.

ii) $\forall A \in V \ \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ¿ $f(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot f(A)$?

$f(\lambda\cdot A) = \text{traza}(\lambda\cdot A)\cdot x^2 + \text{traza}(\lambda\cdot A)$. Pero como sabemos que se cumple:

$\text{traza}(\lambda\cdot A) = \lambda\cdot\text{traza}(A) \Rightarrow$

$f(\lambda\cdot A) = \lambda\cdot\text{traza}(A)\cdot x^2 + \lambda\cdot\text{traza}(A) = \lambda\cdot(\text{traza}(A)\cdot x^2 + \text{traza}(A)) = \lambda\cdot f(A) \Rightarrow$

Esta segunda condición también se cumple.

Luego, f es una aplicación lineal.

b) Sabemos que la matriz asociada a la aplicación es la que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes por f de las matrices de la base usual de V, en la base usual de $P_2(x)$, esto es en $B' = \{1, x, x^2\}$. Pero como el espacio V está formado por las matrices diagonales:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \Big/ \ a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3 \right\}$$

$\Rightarrow$ La base usual de V está formada por estas tres matrices:

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3 \right\}$ ya que son linealmente independientes.

Es decir, la matriz M asociada a la aplicación en las bases B y B' será:

$$M = \left(C_{B'}[f(A_1)] \quad C_{B'}[f(A_2)] \quad C_{B'}[f(A_3)] \right)$$

Calculemos las imágenes por f de A_1, A_2 y A_3:

$$\bullet f(A_1) = f\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = x^2 + 1 \Rightarrow C_{B'}[x^2+1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(A_2) = f\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = x^2 + 1 \Rightarrow C_{B'}[x^2+1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(A_3) = f\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = x^2 + 1 \Rightarrow C_{B'}[x^2+1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de la aplicación es $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ y la expresión matricial de dicha aplicación: $C_{B'}[f(A)]=M\cdot C_B[A]=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{22}\\a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{22}+a_{33}\\0\\a_{11}+a_{22}+a_{33}\end{pmatrix}$.

c) Sabemos que $\mathrm{Ker}(f)=\{A\in V\,/\,f(A)=0\equiv \text{Polinomio nulo}\}$, pero como

$f(A)=(a_{11}+a_{22}+a_{33})\cdot x^2+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\Rightarrow$ para que este polinomio sea el polinomio nulo debe cumplirse: $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0\equiv$ **Ecuación cartesiana** del Ker(f). Por tanto, se tiene que dim(Ker(f)) = 2 y para hallar una base de él, despejando de la ecuación:

$$a_{11}=-a_{22}-a_{33}\Rightarrow\quad \mathrm{Ker}(f)=\left\{\begin{pmatrix}-a_{22}-a_{33}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}/\,a_{22},a_{33}\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow \text{Base del Ker}(f):\left\{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

4 B) Demostrar el teorema fundamental aplicaciones lineales. **(1.5 puntos)**

__**Solución:**__

Teorema: Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, siendo E de dimensión finita n. Si $f:E\to F$ es una aplicación lineal entonces: dim E = dim Ker *f* + dim Im *f*.

Demostración: Para hacer la demostración se van a distinguir 3 casos en cuanto a la dimensión del Ker *f*:

i) Dim(Ker *f*) = dim E= n ***ii)*** Dim(Ker *f*) = p con 0 < p < n ***iii)*** Dim(Ker *f*) =0

i) Si Dim(Ker *f*) = dim E= n, esto significa que Ker *f* = E, es decir, *f* es la aplicación nula, y consecuentemente Im *f* = **0**, es decir, dim(Im *f*)=0 y se cumple trivialmente la relación dim E = dim Ker *f* + dim Im *f*.

ii) Sea dim Ker *f* = p con 0 < p < n=dim E y sea $\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots\ ,\mathbf{e_p}\}$ una base del Ker *f*, se probará que dim Im *f* = $n-p$.

Por el Teorema de la Base Incompleta, se puede encontrar una base de E de la forma $\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots,\ \mathbf{e_p},\ \mathbf{e_{p+1}},\ \mathbf{e_{p+2}},\ \cdots,\ \mathbf{e_n}\}$. Entonces, sabemos que se tiene que: $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Span}\{f(\mathbf{e_1}),\ f(\mathbf{e_2}),\ \cdots,\ f(\mathbf{e_p}),\ f(\mathbf{e_{p+1}}),\ \cdots,\ f(\mathbf{e_n})\}$ y como $f(\mathbf{e_i})=\mathbf{0_F}\ \forall\, i=1,2,\cdots,p$, entonces $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Span}\{f(\mathbf{e_{p+1}}),\ f(\mathbf{e_{p+2}}),\ \cdots,\ f(\mathbf{e_n})\}$. Veamos que $\{f(\mathbf{e_{p+1}}),\ f(\mathbf{e_{p+2}}),\ \cdots,\ f(\mathbf{e_n})\}$ es un conjunto linealmente independiente. Para ello se construye la combinación lineal nula:

$$b_{p+1} f(\mathbf{e_{p+1}}) + b_{p+2} f(\mathbf{e_{p+2}}) + \cdots + b_n f(\mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F}$$ y por ser *f* lineal ⇒ $f(b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F}$.

Luego el vector $b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n}$ está en Ker *f* y por tanto es combinación lineal de los vectores de la base del Ker *f*, es decir:

$$b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \cdots + a_p\mathbf{e_p}$$

O equivalentemente

$$-a_1\mathbf{e_1} - a_2\mathbf{e_2} - \cdots - a_p\mathbf{e_p} + b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0_E}$$

y como $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \cdots, \mathbf{e_p}, \mathbf{e_{p+1}}, \mathbf{e_{p+2}}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$ es una base de E, necesariamente todos los coeficientes anteriores son nulos. En particular: $b_{p+1} = b_{p+2} = \cdots = b_n = 0$. Luego, $\{f(\mathbf{e_{p+1}}), f(\mathbf{e_{p+2}}), \cdots, f(\mathbf{e_n})\}$ es un conjunto linealmente independiente y, en consecuencia, una base de Im *f*. Claramente, se cumple: dim Im *f* = n – p y por tanto:

dim Ker *f* + dim Im *f* = p + (n – p) = n =dim E.

iii) Si Ker $f = \{\mathbf{0_E}\}$ o equivalentemente dim(Ker f)=0, considerando cualquier base B de E, $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$, se tiene que $f(B) = \{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), ..., f(\mathbf{e_n})\}$ es un sistema generador de Im *f y* también será un sistema libre, lo cual se demostraría análogamente a como se ha hecho en el apartado ii), por lo que f(B) es una base de Im *f*. Por tanto, dim Im *f* = n y también se verifica la relación : dim E = dim Ker *f* + dim Im *f*.