AMPLIACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍA INDUSTRIAL

23 DE JUNIO DE 2015

Nota: el examen se realizará de forma ininterrumpida (sin descanso intermedio) y se valorará sobre 24 puntos.

EJERCICIO 1 **(6 puntos)**

Trabajando con 3 cifras significativas:

a) Un estudiante desea interpolar una función $f(x)$ en el intervalo $[1.74, 6.26]$ utilizando 5 nodos. Calcula los nodos que utilizará si pretende minimizar el error de truncatura. (1p)

b) Por si 5 nodos fueran pocos, el estudiante decide finalmente utilizar 6, y evaluando $f(x)$ en ellos obtiene la siguiente tabla:

x_i	1.82	2.40	3.42	4.58	5.60	6.18
$f(x_i)$	0.844	0.309	−0.249	−0.249	0.309	0.844

Calcula la tabla de diferencias. (1p)

c) Calcula el polinomio interpolador $p_3(x)$ de grado ≤ 3 por los cuatro últimos nodos. (1p)

d) Estima $f(5.1)$ evaluando $p_3(x)$ de forma óptima. (1p)

e) Demuestra la expresión $e(z) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, z]\,\Pi(z)$ a partir de los polinomios de Newton de grados n y $n+1$. (1p)

f **a)** Estima el error cometido en el apartado d). (0.5p)

g **b)** Sabiendo que la función interpolada era $f(x) = \cos(\pi x)$, calcula el error real cometido en el apartado d), compáralo con la estimación de f a), y comenta los resultados. (0.5p)

EJERCICIO 2 **(6 puntos)**

Sea $I = \int_1^3 f(x)dx$. Trabajando con 5 decimales:

a) Aplica la fórmula del punto medio compuesta para calcular un valor aproximado de I a partir de los datos proporcionados en la siguiente tabla: $n{:}0$ $\quad 2h\,f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''$ (1p)

x_i	1.25	1.75	2.25	2.75
$f(x_i)$	0.5371	0.1900	0.0384	0.0044

b) Sabiendo que la expresión del error de la fórmula del punto medio compuesta es

$$R(f) = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi) \quad \text{para algún } \xi \in (a,b)$$

y que $|f''(x)| \leq 0.89617 \ \forall x \in \mathbb{R}$, obtén una cota superior del error absoluto cometido en a). (1p)

c) Determina razonadamente cuántas veces bastará componer la fórmula del punto medio para obtener el valor de la integral asegurando un error no superior a $\varepsilon = 0.005$. (1p)

d) Sabiendo que los datos anteriores corresponden a $f(x) = e^{-x^2}(x^2+1)$, indica razonadamente qué tipo de cuadratura de Gauss utilizarías para aproximar I, y aplícala para obtener dicha integral con la precisión indicada en el apartado c). (Hacer los cálculos considerando los nodos y coeficientes del Apéndice final) (2.5p)

e) Según los resultados de los apartados c) y d), ¿qué fórmula de cuadratura asegura la precisión indicada con menor coste operativo: la del punto medio compuesta o la de Gauss utilizada en el apartado d)? Responde razonadamente a la pregunta. (0.5p)

EJERCICIO 3 **(6.5 puntos)**

El movimiento del sistema de muelles de la figura del Apéndice está gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2) y_1 + k_2 y_2 \\ m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2 y_1 - k_2 y_2 \end{cases}$$

donde y_1 e y_2 son los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 respectivamente, y k_1 y k_2 son las constantes de elasticidad de los muelles.

Para $m_1 = m_2 = 1, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2$
y las condiciones iniciales: $y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0,$
y trabajando con 2 decimales:

a) Transforma el sistema de ecuaciones diferenciales anterior en otro de 1^{er} orden. (1p)

b) Estima los desplazamientos y_1, y_2 en $t = 1$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. (3p)

c) Sabiendo que el polinomio característico de la matriz jacobiana asociada al sistema obtenido en el apartado a) es $p(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 2$, y teniendo en cuenta que las regiones de estabilidad absoluta de los métodos RK-1, RK-2, RK-3 y RK-4 son las mostradas en la figura del Apéndice, ¿es adecuado el tamaño de paso $h = 1$ para resolver el problema mediante el método RK-4? Justifica la respuesta. (2p)

d) De los métodos de la figura, di razonadamente cuáles son adecuados y cuáles no para resolver el problema con tamaño de paso $h = 0.5$. (0.5p)

EJERCICIO 4 **(5.5 puntos)**

Se desea estimar $f'''(z)$ usando nodos igualmente espaciados desde $x_0 = z$ hacia su derecha.

a) ¿Cuál es el mínimo número de nodos que es necesario emplear? (0.5p)

b) Usando cuatro nodos equiespaciados (desde $x_0 = z$ hasta $x_3 = z+3h$), obtén la fórmula de derivación numérica mediante series de Taylor (sin obtener el término de error). (2p)

c) Sabiendo que el término de error se puede escribir en la forma $R(f) = -3 f^{4)}(\xi)\, h/2 \cancel{+ O(h^2)}$ para algún $\xi \in [z, z+3h]$, estima la distancia óptima entre nodos h_{opt}. Escribe el resultado en términos de $M \geq |f^{4)}(\xi)|$ y de $\varepsilon \geq |f_i - \bar{f}_i|$. (1p)

Para $f(x) = 2 \sin(2x)$, $z = \pi/12$, y considerando $\varepsilon = 10^{-16}$:

d) Estima valores numéricos de h_{opt} y de la cota esperada del error absoluto. (1p)

e) Al calcular estos valores hemos asumido varias hipótesis que no se cumplen exactamente. Di al menos una. (0.5p)

f) Teniendo en cuenta que hemos aceptado hipótesis que no se cumplen del todo, alguien puede querer comprobar experimentalmente las estimaciones del apartado d). Para ello, la figura final del Apéndice muestra 10^7 puntos, cada uno de los cuales tiene por abscisa un valor aleatorio de h, y por ordenada el error absoluto cometido al estimar $f^{3)}(z)$ con ese valor de h. A la vista de la figura, indica razonadamente si los resultados del apartado d) son buenos o no. (0.5p)

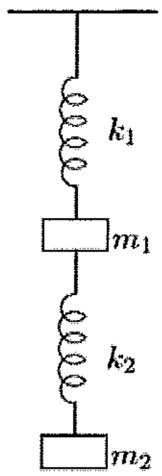
Ver Apéndice en hoja separada

Apéndice:

Nodos y pesos para el apartado d) del ejercicio 2:

$n=1$	$x_0=-3^{-1/2}$, $x_1=3^{-1/2}$	$A_0=A_1=1$
$n=2$	$x_0=-0.77460$, $x_1=0$, $x_2=0.77460$	$A_0=A_2=0.55556$, $A_1=0.88889$
$n=3$	$x_0=-0.86114$, $x_1=-0.33998$, $x_2=0.33998$, $x_3=0.86114$	$A_0=A_3=0.34785$, $A_1=A_2=0.65215$
$n=4$	$x_0=-0.90618$, $x_1=-0.53847$, $x_2=0$, $x_3=0.53847$, $x_4=0.90618$	$A_0=A_4=0.23693$, $A_1=A_3=0.47863$, $A_2=0.56889$
$n=5$	$x_0=-0.93247$, $x_1=-0.66121$, $x_2=-0.23862$, $x_3=0.23862$, $x_4=0.66121$, $x_5=0.93247$	$A_0=A_5=0.17132$, $A_1=A_4=0.36076$, $A_2=A_3=0.46791$

Figuras del ejercicio de Valor Inicial:



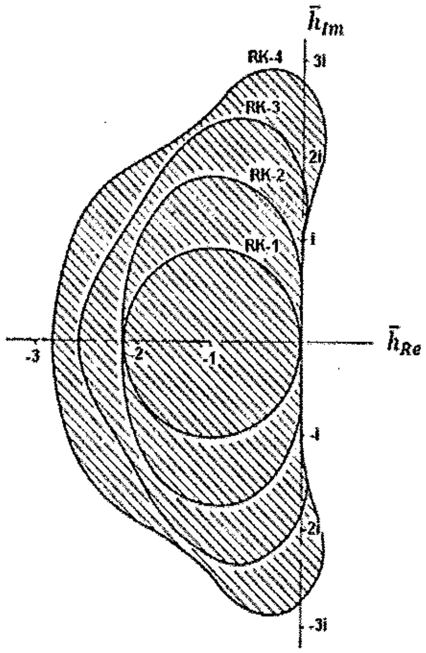
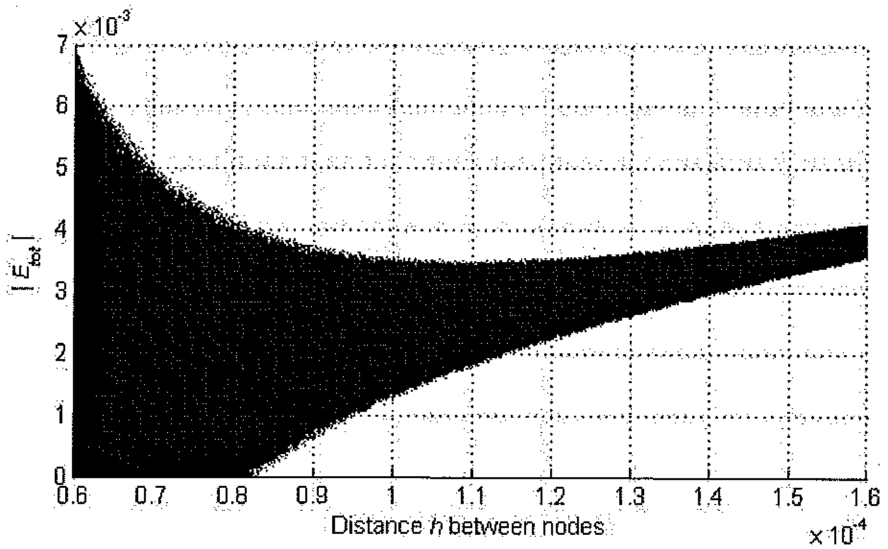


Figura del ejercicio de Derivación:



TIEMPO TOTAL: 3 horas.