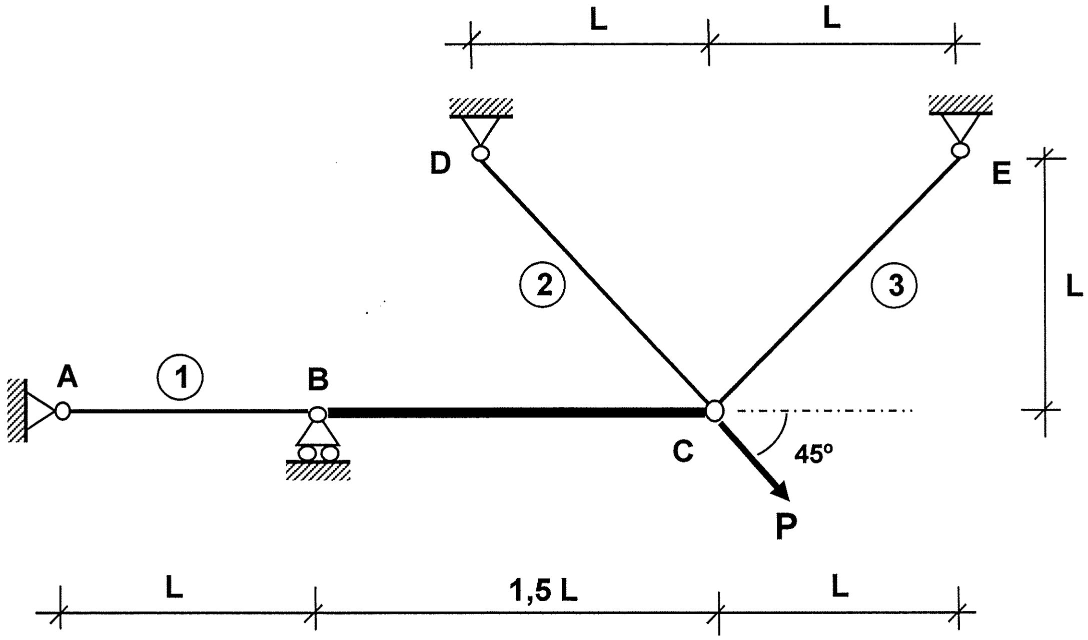
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

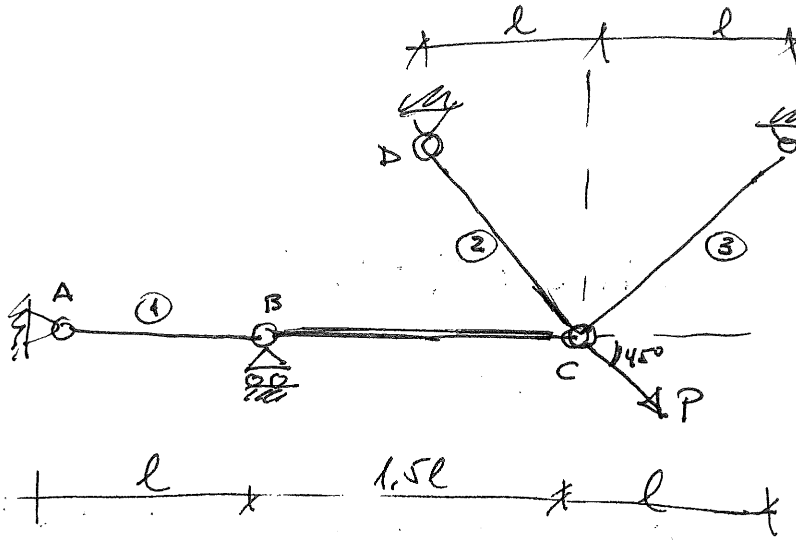
Examen Final (15/06/15)

****

La estructura de la figura, en la que **L=1 m**, está formada por cuatro barras biarticuladas: una barra es rígida (**BC**) y las otras tres (**AB**, **CD** y **CE**) son elásticas. Estas últimas son de la misma sección **A=200 mm^2** y del mismo material de módulo de elasticidad **E=200 GPa** y tensión de fluencia **σ_f=280 MPa**. Como se indica en la figura, en **B** hay una articulación deslizante que permite el desplazamiento horizontal, y en **C** está aplicada una carga **P** a **45º**.

Determinar el valor máximo de la carga **P** que se puede admitir en régimen elástico y las tensiones en las barras elásticas para ese valor de **P**.



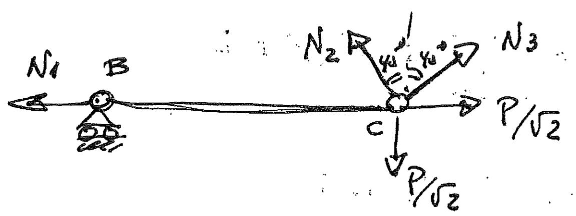


l

$$\left\{\begin{array}{l} l = 1\,m \\ A = 200\ cm^2 \\ E = 200\ GPa \\ \sigma_f = 280\ MPa \end{array}\right.$$

Hipótesis: las 3 a tracción

* Equilibrio de BC



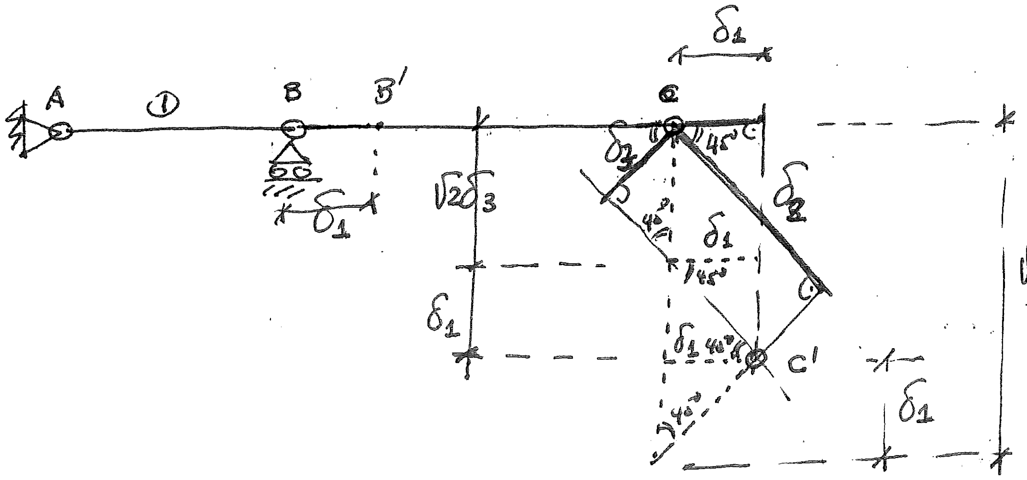
$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 + \dfrac{N_2}{\sqrt{2}} = \dfrac{N_3}{\sqrt{2}} + \dfrac{P}{\sqrt{2}} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \dfrac{N_2}{\sqrt{2}} + \dfrac{N_3}{\sqrt{2}} = \dfrac{P}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\sqrt{2}N_1 + N_2 - N_3 = P} \quad (1)$$

$$\boxed{N_2 + N_3 = P} \quad (2)$$

$l = 1$

* Compatibilidad de deformaciones



$$\overline{CC'} = \delta_1 + \sqrt{2}\delta_3 = \sqrt{2}\delta_2 - \delta_1 \Rightarrow \boxed{2\delta_1 - \sqrt{2}\delta_2 + \sqrt{2}\delta_3 = 0}$$

* Leyes de comportamiento

$$\left\{\begin{array}{l} l_1 = l \\ l_2 = l_3 = \sqrt{2}\,l \end{array}\right\} \quad 2\frac{N_1 l}{EA} - \sqrt{2}\frac{N_2\sqrt{2}l}{EA} + \sqrt{2}\frac{N_3\sqrt{2}l}{EA} = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 - N_2 + N_3 = 0} \quad (3)$$

* Resolución

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \sqrt{2}N_1+N_2-N_3=P\\ (2) & N_2+N_3=P\\ (3) & N_1-N_2+N_3=0\end{array}\right\}$$

Eliminando: $N_1 = N_2 - N_3$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}N_2-\sqrt{2}N_3+N_2-N_3=P\\ N_2+N_3=P\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\sqrt{2}+1)N_2-(\sqrt{2}+1)N_3=P\\ N_2+N_3=P\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}N_2-N_3=\dfrac{P}{\sqrt{2}+1}\\ N_2+N_3=P\end{array}\right\}$$

$$2N_2 = P\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}P \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}N_2=\dfrac{(\sqrt{2}+2)}{2(\sqrt{2}+1)}P = 0{,}707\,P\\ N_3 = P - N_2 = 0{,}293\,P\\ N_1 = N_2 - N_3 = 0{,}414\,P\end{array}\right\}$$

* Luego la primera en entrar en fluencia es la 2.- Lo hace cuando:

$$N_2 = \sigma_f \cdot A = 280\times10^3\times 200\times10^{-6} = 56\ kN$$

siendo en ese instante:

$$N_2 = 0{,}707\,P \Rightarrow \boxed{P = \frac{56}{0{,}707} = 79{,}21\ kN}$$

Esfuerzos

$$\left\{\begin{array}{l}N_1 = 0{,}414P = 32{,}79\ kN\\ N_2 = 56\ kN\\ N_3 = 0{,}293\,\cancel{kN} = 23{,}21\ kN\end{array}\right\}$$

Tensiones

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A} = \dfrac{32{,}79\times10^3}{200} = 163{,}95\ MPa\\ \sigma_2 = 280\ MPa\\ \sigma_3 = \dfrac{23{,}21\times10^3}{200} = 116{,}05\ MPa\end{array}\right\}$$

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Examen Final (15/06/15)

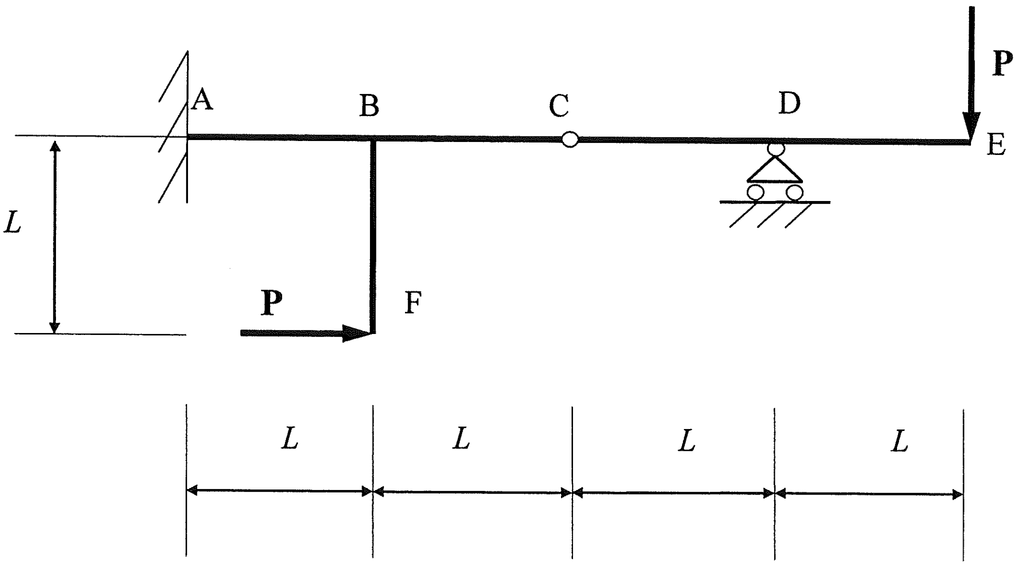
****

En la viga de sección constante de la figura, **A** es un empotramiento perfecto, **D** un apoyo deslizante y **C** una rótula intermedia. En **B** se une mediante un nudo rígido la barra vertical **BF**. En las secciones **F** y **E** se aplican las fuerzas **P = 40 kN** tal como se indica en la figura. La sección, cuyas dimensiones se indican en el dibujo, es rectangular y está situada con el lado menor perpendicular al plano del dibujo. El módulo de elasticidad lineal del material es **E = 210 GPa** y la longitud **L=1 m**.

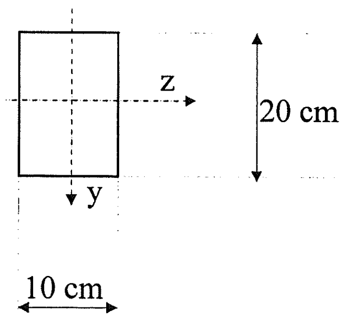
Se pide:

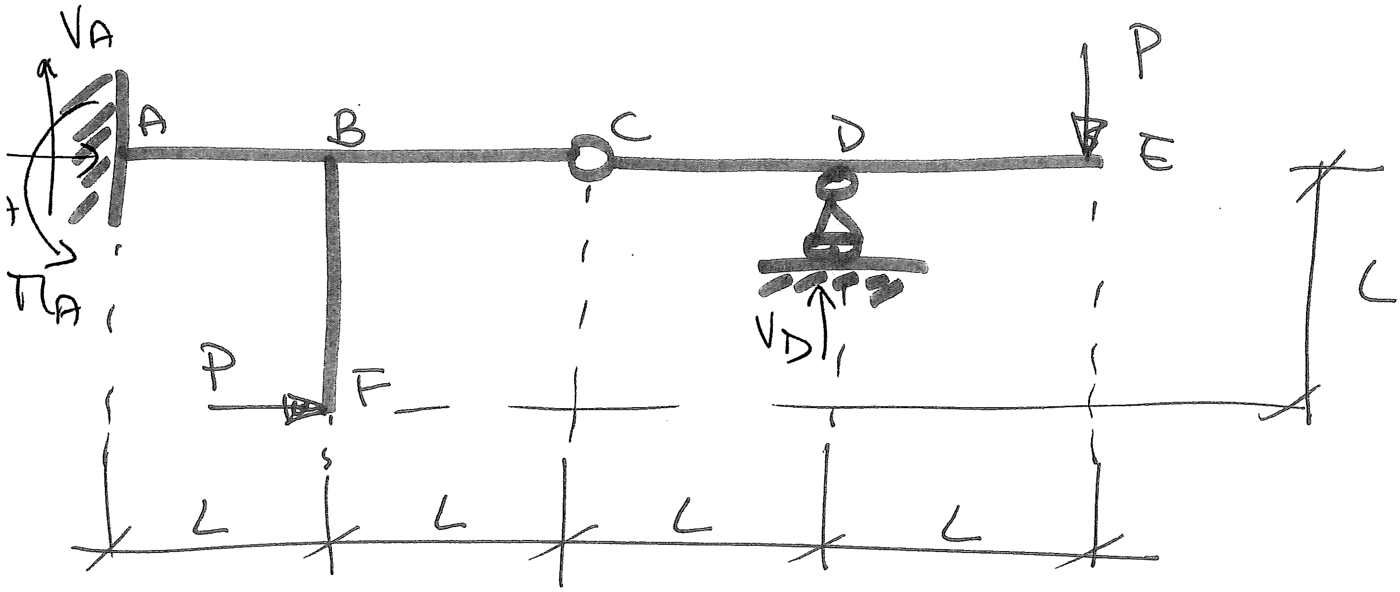
1º) Diagramas de esfuerzos acotados en función de **P** y **L**.
2º) Dibujo aproximado de la deformada.
3º) Tensión normal máxima indicando el punto en el que se produce.
4º) Desplazamiento horizontal del punto **F**.
5º) Desplazamiento vertical del punto **E**.

Nota: Despreciar el efecto del esfuerzo axial y cortante tanto en tensiones como en deformaciones.



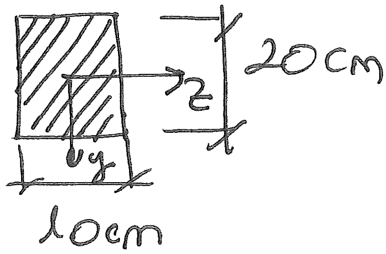
Sección S-S



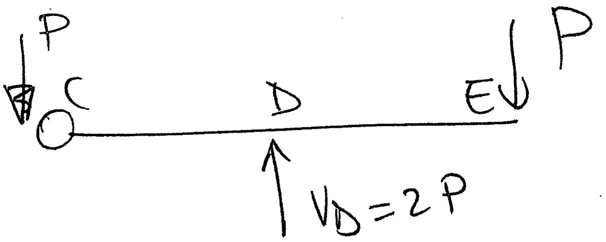


$L = 1m$

$P = 10kN$



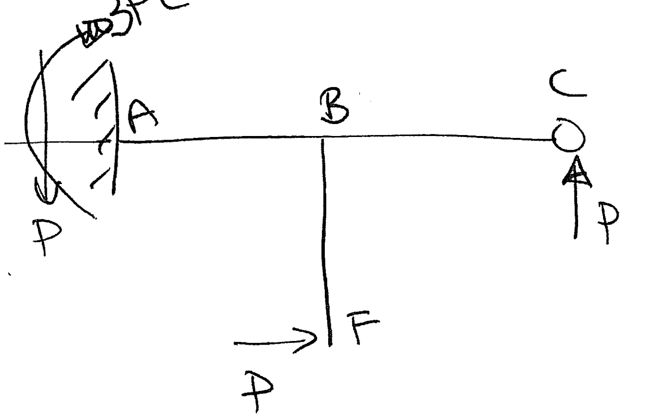
Reacciones :



$$\Sigma M_C = 0$$

$$V_D \cdot L - 2PL = 0$$

$$V_D = 2P$$

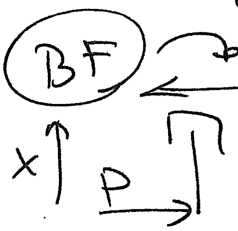


$$M_A + P \cdot L + P \cdot 2L = 0$$

$$M_A = -3PL$$

Diagramas:

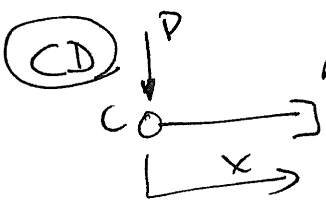
BF



$M_z = P \cdot x$

$V_y = P$

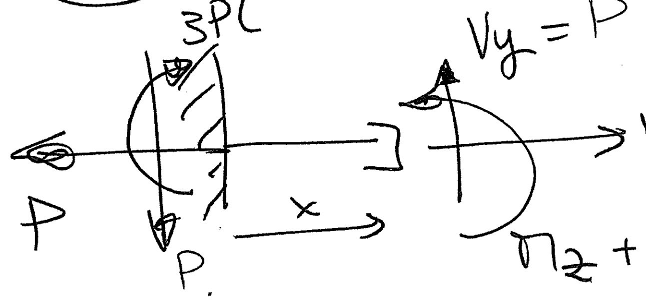
CD



$V_y = P$

$M_z = Px$

AB



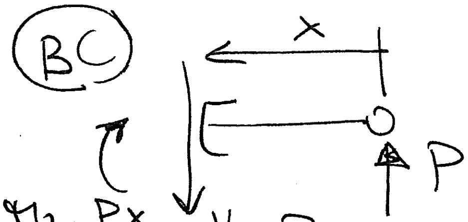
$V_y = P$

$N_x = P$

$M_z + Px - 3PL = 0$

$M_z = 3PL - Px$

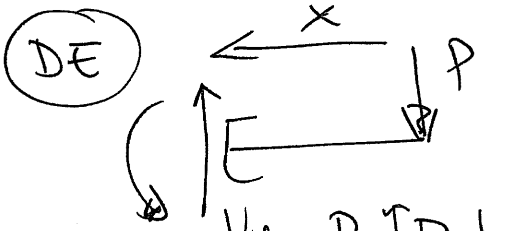
BC



$M_z = P.x$

$V_y = P$

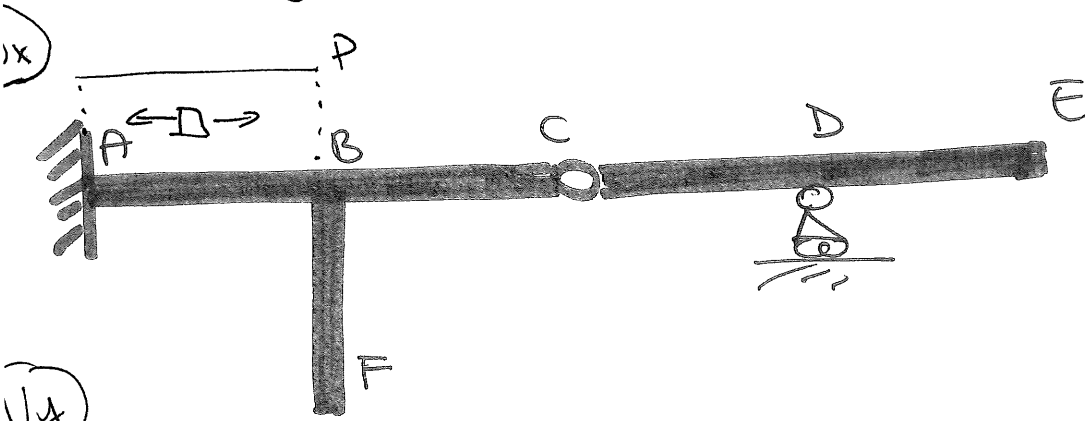
DE



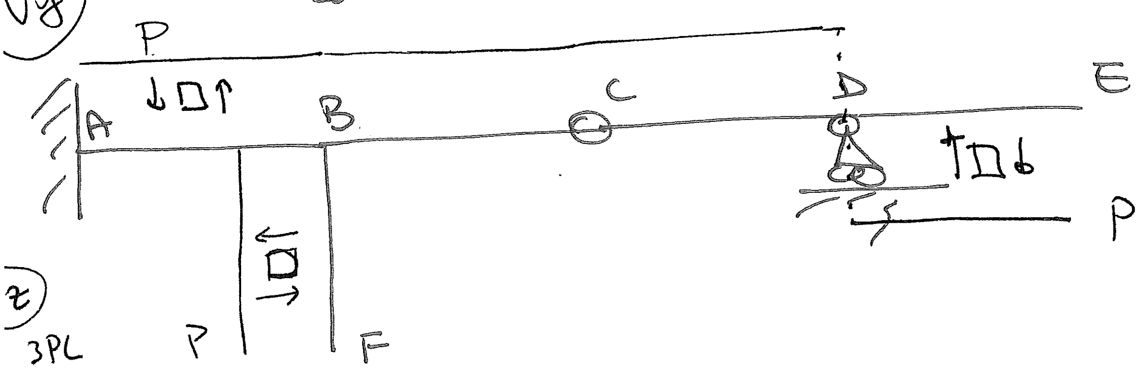
$M_z = Px$

$V_y = P$

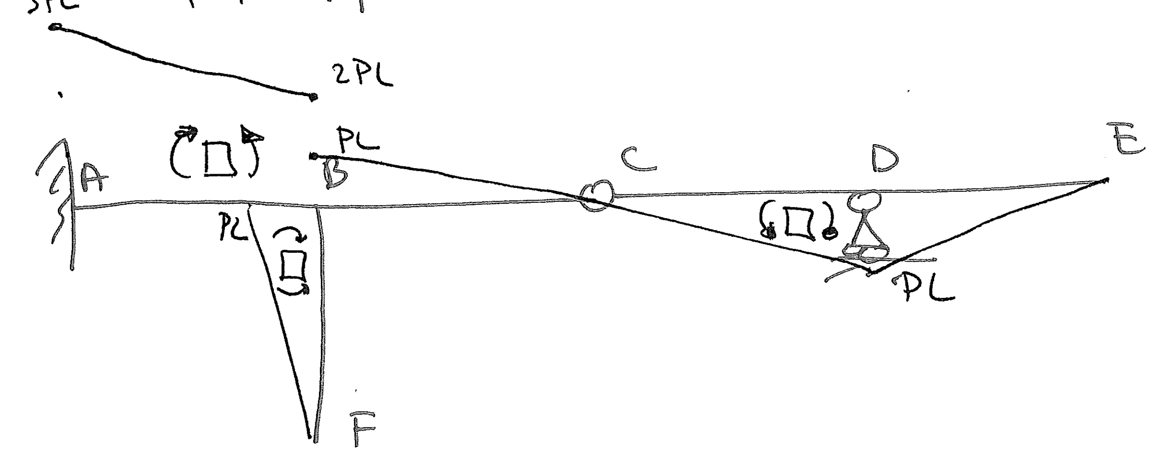
N_x



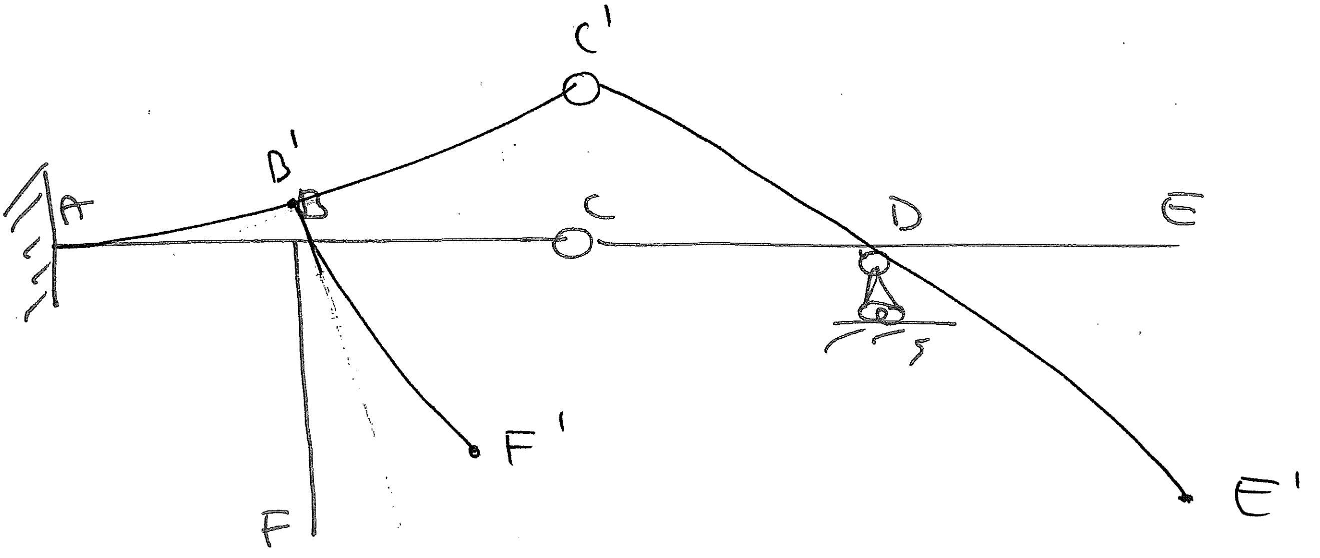
V_y



M_z



Deformada aproximada:

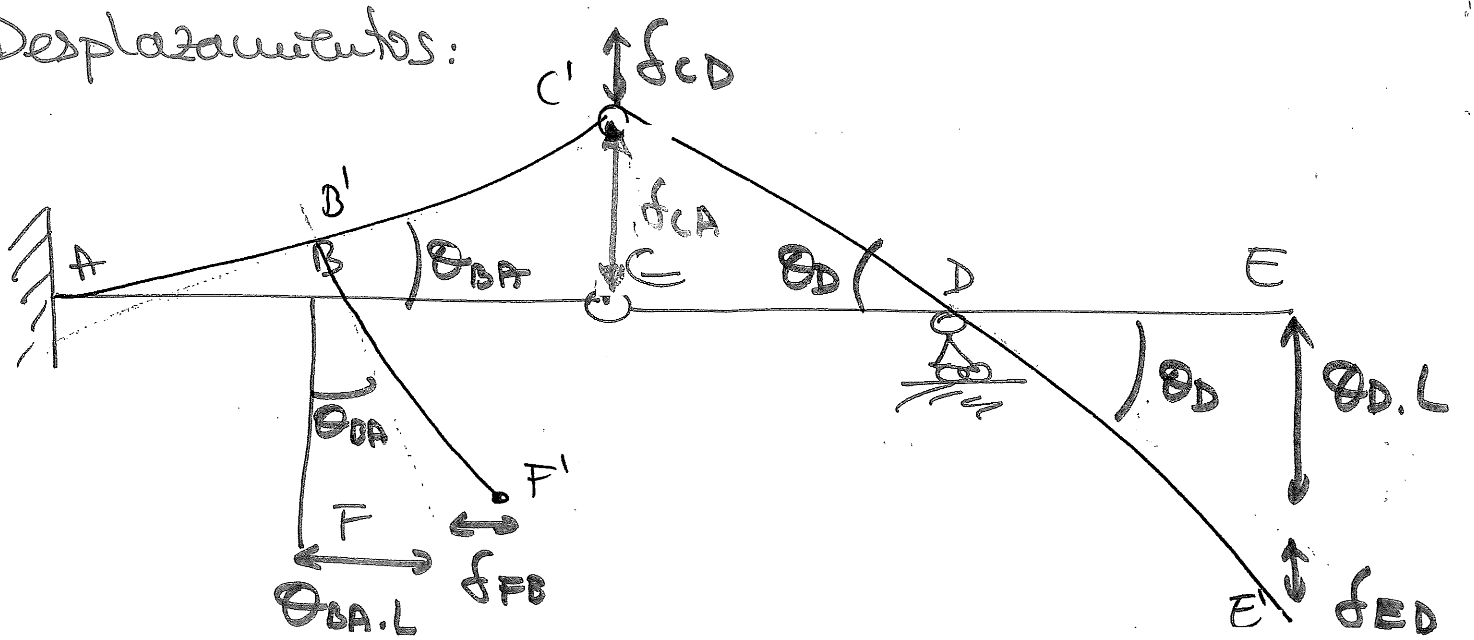


Tensão normal máxima:

$$\sigma_{xx}^{max} = \frac{M_z^{max} \cdot y^{max}}{I_z} = \frac{3PL \cdot y^{max}}{I_z} = \frac{3 \cdot 40000 N \cdot 1000 mm \cdot 100 mm}{\frac{1}{12} 100 \cdot 200^3 mm^4} =$$

$$= 180 \, N/mm^2 = 180 \, MPa$$

Desplazamientos:



$$\vec{\delta_F} = \theta_{BA} L + \delta_{FB} = \left(\frac{2PL.L}{EI} + \frac{PL.L}{2EI}\right) L + \frac{PL.L}{2EI}\frac{2}{3}L$$

$$= \frac{4PL^2 + PL^2}{2EI} L + \frac{PL^3}{3EI} = \frac{5PL^3}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(15+2)PL^3}{6EI} =$$

$$\frac{17PL^3}{6EI} = \frac{17 . 40 kN . 1000^3 \ mm^3}{6 . 210 \frac{kN}{mm^2} \frac{1}{12} 100 . 200^3 \ mm^4} = \underline{8'1 mm}$$

$$\underline{\delta_E \downarrow} = \theta_D . L + \delta_{ED} = \delta_{CA} + \delta_{CD} + \delta_{ED} =$$

$$\delta_{CA} = \frac{2PL.L\left(L+\frac{L}{2}\right)}{EI} + \frac{PL.\frac{L}{2}\left(L+\frac{2}{3}L\right)}{EI} + \frac{PL.L}{2EI}\frac{2}{3}L = \frac{25PL^3}{6EI}$$

$$\delta_{CD} = \frac{PL.L}{2EI} . \frac{2}{3} L = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\delta_{ED} = \quad '' \quad = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\delta_E \downarrow = \frac{25PL^3}{6EI} + \frac{2PL^3}{3EI} = \frac{(25+4)PL^3}{6EI} = \frac{29PL^3}{6EI} =$$

$$\frac{29 . 40 . 1000^3}{6 . 210 . \frac{1}{12} 100 . 200^3} = \underline{13'8 mm}$$

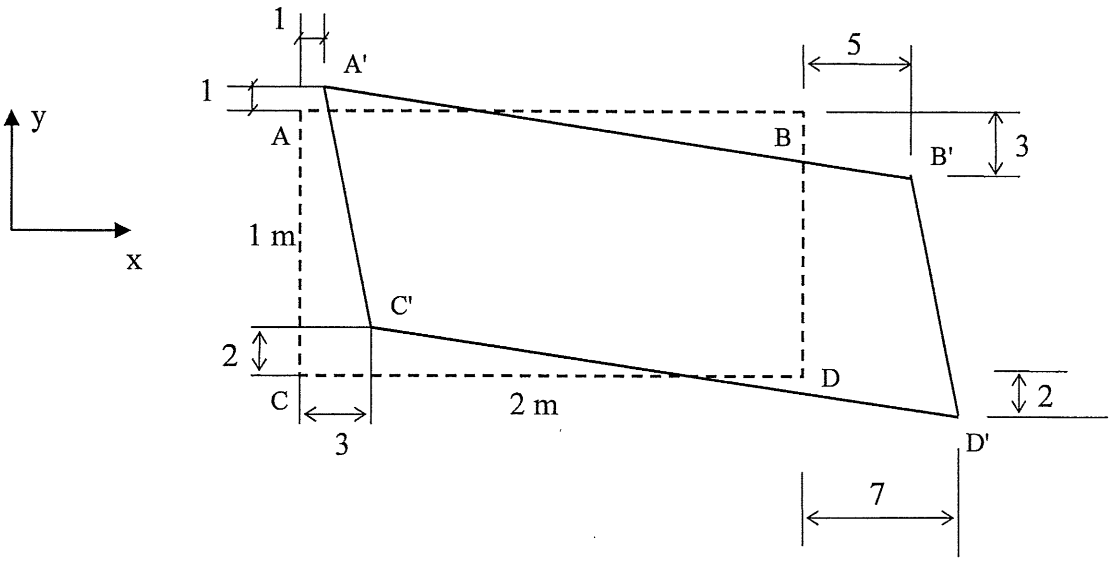
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Examen Final (15/06/15)

******

Nombre___________Apellidos_____________________________________Grupo______Nº_____

1º) En un medio material con deformación plana y uniforme, se ha obtenido la configuración deformada de la sección rectangular de 2 x 1 m representada en la figura, donde los desplazamientos se dan en mm. Hallar la matriz de deformación referida a los ejes x, y, así como las deformaciones principales.



$$\varepsilon_{xx} \overset{\overline{CD}}{=} \frac{7-3}{2000} = \frac{4}{2000} = 2\cdot 10^{-3} \qquad \left(\overset{\overline{AB}}{=} \frac{5-1}{2000} = \frac{4}{2000} \right)$$

$$\varepsilon_{yy} \overset{\overline{CA}}{=} \frac{1-2}{1000} = \frac{-1}{1000} = -1\cdot 10^{-3} \qquad \left(\overset{\overline{DB}}{=} \frac{-3+2}{1000} = \frac{-1}{1000} \right)$$

$$\varepsilon_{xy} \overset{\widehat{\overline{CA},\overline{CD}}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1-3}{1000} + \frac{-2-2}{2000} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{1000} - \frac{4}{2000} \right) = -2\cdot 10^{-3} \qquad \left[\overset{\widehat{\overline{BA},\overline{BD}}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{-3-1}{2000} + \frac{5-7}{1000} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{2000} - \frac{2}{1000} \right) \right]$$

$$\boxed{\left[\varepsilon_{ij}\right]_{xy} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = 10^{-3}\left[\frac{2-1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}}_{5/2} \right] = \begin{cases} 3\cdot 10^{-3} \\ -2\cdot 10^{-3} \end{cases}}$$

$\boxed{\varepsilon_3 = 0}$ (def. plana)