ÁLGEBRA LINEAL – Examen Final – Convocatoria extraordinaria (22/06/2015)

1) A) Discute si las siguientes afirmaciones son o no correctas :

a) Si A y B son 2 matrices simétricas, entonces AB también lo es.
b) Si A es una matriz simétrica y P una matriz cuadrada, entonces la matriz PAP^t también es simétrica.
c) Si Aes una matriz antisimétrica y B una matriz simétrica, entonces AB es simétrica si y sólo si AB=-BA.

(0.75 puntos)

Solución:

a) Si A y B son simétricas, entonces, ambas cumplen: $A=A^t, B=B^t$. Veamos lo que pasa con la matriz $A\cdot B$: $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t=B\cdot A \Rightarrow$ la matriz $A\cdot B$ será simétrica si y solo si $A\cdot B=B\cdot A$, es decir, si A y B conmutan. Por tanto, la afirmación es **falsa**.

b) Si A es simétrica, veamos lo que pasa con la matriz $P\cdot A\cdot P^t$: $(P\cdot A\cdot P^t)^t=P\cdot A^t\cdot P^t=P\cdot A\cdot P^t \Rightarrow$ la matriz $P\cdot A\cdot P^t$ es simétrica $\forall P$, luego la afirmación es **verdadera**.

c) Como acabamos de ver en el apartado a) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$, pero por A antisimétrica y B simétrica, se tiene $A=-A^t, B=B^t \Rightarrow$ $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t=-B\cdot A=A\cdot B \Leftrightarrow A\cdot B=-B\cdot A$ y consecuentemente, la afirmación es **verdadera**.

B) Qué transformación elemental se puede efectuar con la matriz $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ sobre la matriz $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}$? **(0. 25 puntos)**

Solución:

La matriz $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ es una matriz elemental que se obtiene a partir de la matriz identidad intercambiando las columnas 1 y 3. Entonces, postmultiplicando esa matriz por la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}$, se obtendrá la matriz resultante de realizar sobre A dicha transformación elemental, esto es, de intercambiar las columnas 1 y 3. Es decir, se obtendrá la matriz $\begin{pmatrix}1&0&1\\4&3&2\end{pmatrix}$.

C) Calcula por bloques, para los valores de a que sea posible, la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} B & I_3 \\ D & (0) \end{pmatrix}$, donde $D=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Cuáles son esos valores de a?

Especifica el órden de los distintos bloques que conforman la matriz A^{-1}.
(1 punto)

<u>Solución:</u>

Para obtener A^{-1} por bloques la dividimos de la forma $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, siendo las dimensiones de las submatrices X, Y, Z, T, tales que sea posible efectuar los productos $A\cdot A^{-1}$ y $A^{-1}\cdot A$ y que ambos sean iguales a la matriz identidad. Entonces, como A está particionada en la forma $A=\begin{pmatrix} B_{3x2} & I_3 \\ D_{2x2} & (0)_{2x3} \end{pmatrix} \Rightarrow$ las dimensiones de las submatrices de A^{-1}, serán $A^{-1}=\begin{pmatrix} X_{2x3} & Y_{2x2} \\ Z_{3x3} & T_{3x2} \end{pmatrix}$. Para calcular estas submatrices, se trata de resolver el sistema:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} B_{3x2} & I_{3x3} \\ D_{2x2} & (0)_{2x2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_{2x3} & Y_{2x2} \\ Z_{3x3} & T_{3x2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B\cdot X+Z & B\cdot Y+T \\ D\cdot X & D\cdot Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{3x3} & (0)_{3\times2} \\ (0)_{2\times3} & I_{2x2} \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} B\cdot X+Z=I \\ B\cdot Y+T=(0) \\ D\cdot X=(0)\xrightarrow{\text{Si D regular}}X=(0)_{2\times3} \\ D\cdot Y=I\xrightarrow{\text{Si D regular}}Y=D^{-1} \end{cases}$$

. Luego para que este sistema pueda resolverse $D=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ debe ser regular $\Leftrightarrow |D|=1-a\neq0\Leftrightarrow a\neq1$. Estos son por tanto, los valores de a posibles. En tales casos, la primera ecuación del sistema queda ahora $Z=I_{3x3}$ y la segunda ecuación se convierte en $B\cdot D^{-1}+T=(0)\Rightarrow T=-B\cdot D^{-1}$.

Falta calcular $D^{-1}=\dfrac{1}{|D|}\cdot D^{a}$. Como $D^{t}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow D^{a}=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{a}{a-1} \\ \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} \end{pmatrix}$,

y por tanto: $A^{-1}=\begin{pmatrix} (0)_{2x3} & D^{-1}_{2x2} \\ I_{3x3} & -B_{3x2}\cdot D^{-1}_{2x2} \end{pmatrix}$.

2) A) Sea V un espacio vectorial de dimensión 6 y W_1 y W_2 dos subespacios de V de dimensión 4. Deducir las posibles dimensiones de los subespacios $W_1\cap W_2$ y W_1+W_2 . ¿Puede ser V suma directa de W_1 y W_2, en algún caso?

(0. 25 puntos)

Solución:

Si dim(V)=6, dim(W_1)=dim(W_2)=4, entonces, se tendrá:

$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)=4+4-\dim(W_1\cap W_2)$, pero como $W_1+W_2\subset V\Rightarrow \dim(W_1+W_2)\le 6\Rightarrow$ El subespacio intersección $W_1\cap W_2$ debe tener dimensión mayor o igual que 2. Pero como $W_1\cap W_2\subset W_1$ y $W_1\cap W_2\subset W_2$ $\Rightarrow \dim\left(W_1\cap W_2\right)\le 4\Rightarrow$ Las posibles dimensiones del subespacio $W_1\cap W_2\subset W$ son:

- $\dim\left(W_1\cap W_2\right)=2.$ En este caso $\dim(W_1+W_2)=4+4-2=6\Rightarrow W_1+W_2=V.$

- $\dim\left(W_1\cap W_2\right)=3.$ En este caso $\dim(W_1+W_2)=4+4-3=5.$

- $\dim\left(W_1\cap W_2\right)=4.$ En este caso $W_1=W_2=W_1\cap W_2$ y como $\dim(W_1+W_2)=4$, también se tiene $W_1+W_2=W_1=W_2.$

Además, en ningún caso, V puede ser suma directa de W_1 y W_2, porque $W_1\cap W_2\neq\mathbf{0}$, en todos los casos.

B) En $\mathbb{P}_2$ se consideran los polinomios $\left\{p_1(t)=1+t, p_2(t)=t+t^2\right\}$.

a) Demostrar que son linealmente independientes. (0. 25 puntos)

b) Obtener la base de $\mathbb{P}_2$ que contenga a $p_1(t)$ y $p_2(t)$ de forma que las coordenadas del polinomio $p(t)=1+t-t^2$ en dicha base sean $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. (0.5 puntos)

Solución:

a) Sea una relación nula entre $p_1(t)=1+t$ y $p_2(t)=t+t^2$:

$$\alpha_1\cdot(1+t)+\alpha_2\cdot(t+t^2)=0\ \ \forall t\Rightarrow \alpha_1+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot t+\alpha_2\cdot t^2=0+0\cdot t+0\cdot t^2\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2=0\end{cases}\Rightarrow \text{ los dos polinomios son linealmente independientes.}$$

b) Se trata de obtener una base de $\mathbb{P}_2$ de la forma $\left\{1+t, t+t^2, a+b\cdot t+c\cdot t^2\right\}$, donde el tercer polinomio $a+b\cdot t+c\cdot t^2$ debe elegirse de forma que el polinomio $p(t)=1+t-t^2$ tenga por coordenadas en dicha base $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow$ debe verificarse:

$$1+t-t^2=2\cdot(1+t)+1\cdot(t+t^2)-(a+b\cdot t+c\cdot t^2)=2-a+(3-b)\cdot t+(1-c)\cdot t^2\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1=2-a \\ 1=3-b \\ -1=1-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$$. Luego la base de $\mathbb{P}_2$ será: $\{1+t, t+t^2, 1+2\cdot t+2\cdot t^2\}$. Falta probar que los tres polinomios son libres. Para ello formamos la matriz que tiene por columnas las coordenadas de tales polinomios en la base usual $\{1, t, t^2\}$ y estudiamos su rango:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} < C_3 - C_1 > \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$. Por tanto, $\{1+t, t+t^2, 1+2\cdot t+2\cdot t^2\}$ es la base buscada.

3) Sea el espacio vectorial $E_{2x2}(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden 2, se considera el subespacio $V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in E_{2x2} \right\}$ que tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda \qquad\quad + 2\cdot\nu \\ a_{12} = \lambda + \mu + 5\cdot\nu \\ a_{21} = 5\cdot\lambda - 3\cdot\mu + \nu \\ a_{22} = -\lambda + \mu + \nu \end{cases} \quad / \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

a) **Hallar una base de V y sus ecuaciones cartesianas.** **(1 punto)**
b) **Dar un subespacio suplementario de V.** **(0. 25 puntos)**
c) **Se considera también el subespacio de $E_{2x2}(\mathbb{R})$:**

$$W = \left\{ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \ / \ 2\cdot b_{11} + 3\cdot b_{12} = b_{22} \right\}$$

Hallar las ecuaciones cartesianas y una base de $V \cap W$ y de $V + W$.
(1 punto)

__**Solución:**__

a) Teniendo en cuenta las ecuaciones que nos dan, veamos de qué forma son las matrices de V y quién es un sistema generador de V:

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\cdot\nu & \lambda + \mu + 5\cdot\nu \\ 5\cdot\lambda - 3\cdot\mu + \nu & -\lambda + \mu + \nu \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = A_1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = A_2, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_3 \right\}$$. Ahora estudiamos si estas tres matrices son o no linealmente independientes. Para ello formamos la matriz que tiene por columnas las coordenadas de tales matrices en la base usual de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ y estudiamos su rango, esto es:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ 5 & -3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} < C_2 - 2\cdot C_1 > \text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -3 & -9\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix} = 2,$$ pues como puede observarse, la tercera columna es 3 veces la segunda. Por tanto, sólo son libres las matrices A_1 y A_2, con lo cual una base de V estará formada por esas dos matrices.

$\text{Base de } V = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix} = A_1, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix} = A_2\right\} \Rightarrow \dim(V) = 2$. Consecuentemente, V tendrá dos ecuaciones cartesianas. Para obtenerlas imponemos que una matriz genérica $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ pertenezca a V, lo cual se cumplirá siempre que el rango de la matriz conteniendo las coordenadas sea 2, esto es: $\text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{11}\\ 1 & 1 & a_{12}\\ 5 & -3 & a_{21}\\ -1 & 1 & a_{22}\end{pmatrix} = 2$. Para ello deben ser nulos todos los menores de orden 3 de esta matriz. Ahora bien, basta anular dos de ellos que conduzcan a dos ecuaciones independientes:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 0 & a_{11}\\ 1 & 1 & a_{12}\\ 5 & -3 & a_{21}\end{vmatrix} = 0 = a_{21} - 3a_{11} - 5a_{11} + 3a_{12} \Leftrightarrow -8a_{11} + 3a_{12} + a_{21} = 0\\ \begin{vmatrix}1 & 0 & a_{11}\\ 1 & 1 & a_{12}\\ -1 & 1 & a_{22}\end{vmatrix} = 0 = a_{22} + a_{11} + a_{11} - a_{12} \Leftrightarrow 2a_{11} - a_{12} + a_{22} = 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } V \equiv \begin{cases}-8a_{11} + 3a_{12} + a_{21} = 0\\ 2a_{11} - a_{12} + a_{22} = 0\end{cases}.$$

b) Para obtener un subespacio suplementario de V basta considerar un subespacio V^* de dimensión 2 generado por 2 matrices que sean linealmente independientes con las matrices A_1 y A_2 de la base de V. Por ejemplo, podemos tomar como $V^* = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$ ya que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 5 & -3 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es 4, al ser $|A| \neq 0.$

c) Consideramos ahora el subespacio $W = \left\{B = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} \;/\; 2\cdot b_{11} + 3\cdot b_{12} = b_{22}\right\}$, que al tener una única ecuación cartesiana tiene dimensión 3. Para hallar el subespacio $V \cap W$ tomamos una matriz de V, de la forma $a\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & a+b\\ 5a-3b & -a+b\end{pmatrix}$ y le obligamos a que pertenezca a W, es decir, a que cumpla su ecuación cartesiana:

$2\cdot b_{11}+3\cdot b_{12}=b_{22} \Leftrightarrow 2\cdot a+3\cdot(a+b)=-a+b \Leftrightarrow 6\cdot a+2\cdot b=0 \Leftrightarrow b=-3a \Rightarrow$

Las matrices de $V\cap W$ serán de la forma $\begin{pmatrix} a & -2a \\ 14a & -4a \end{pmatrix} \Rightarrow$ Una base de $V\cap W$ es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 14 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(V\cap W)=1 \Rightarrow$ Habrá tres ecuaciones cartesianas que definan $V\cap W$, las dos ecuaciones de V y la de W, esto es: $\begin{cases} -8a_{11}+3a_{12}+a_{21}=0 \\ 2a_{11}-a_{12}+a_{22}=0 \\ 2a_{11}+3a_{12}-a_{22}=0 \end{cases} \equiv$ Ecuaciones cartesianas de $V\cap W$.

La dimensión del subespacio $V+W$ será:

$$\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W)=2+3-1=4 \Rightarrow V+W=E_{2x2}(\mathbb{R}).$$

Consecuentemente, una base de V+W será cualquier base de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ y no existen para él ecuaciones cartesianas.

4) Sea $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado 2 o inferior. Dada la siguiente aplicación lineal:

$$f:\mathbb{P}_2(x) \longrightarrow \mathbb{P}_2(x)$$

$$p(x) \longrightarrow f(p(x)) = x\cdot(2\cdot p(x+1) - p(x) - p(x-1))$$

a) **Halla la matriz de dicha aplicación en la base canónica de $\mathbb{P}_2(x)$.**

(0. 25 puntos)

b) **Estudia la naturaleza de la aplicación:**
   b.1) sin usar la matriz asociada a dicha aplicación. (0. 75 puntos)
   b.2) usando la matriz. (0. 25 puntos)

c) **Obtén las ecuaciones implícitas y una base de los subespacios Ker f y Im f, respectivamente.**
   Son los subespacios Ker f y Im f suplementarios? Justifica tu respuesta.

(0. 75 puntos)

<u>Solución:</u>

a) La matriz asociada a la aplicación f, que es un endomorfismo, en la base canónica de $\mathbb{P}_2(x)$, $B=\{1,x,x^2\}$, es la matriz que tiene por columnas las coordenadas, en tal base canónica, de las imágenes por f de los polinomios de dicha base: $A=\left(C_B[f(1)] \quad C_B[f(x)] \quad C_B[f(x)]\right)$. Se trata de calcular tales imágenes:

$$f(1)=x\cdot[2\cdot 1-1-1]=0 \Rightarrow C_B[f(1)]=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x)=x\cdot[2\cdot(x+1)-x-(x-1)]=3x \Rightarrow C_B[f(x)]=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2)=x\cdot\left[2\cdot(x+1)^2-x^2-(x-1)^2\right]=x\cdot\left[2\cdot x^2+2+4x-x^2-x^2-1+2x\right]=$$

$$=x+6x^2\Rightarrow C_B[f(x)]=\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}\Rightarrow \text{La matriz asociada a f es: } A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&1\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

b.1) Para estudiar la naturaleza de la aplicación sin usar la matriz, debemos obtener la expresión de la aplicación para un polinomio genérico de $\mathbb{P}_2(x)$. Esto es, sea $p(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\Rightarrow\quad f\left[p(x)\right]=$

$$=x\cdot\left[2\cdot\left(a_0+a_1\cdot(x+1)+a_2\cdot(x+1)^2\right)-a_0-a_1\cdot x-a_2\cdot x^2-a_0-a_1\cdot(x-1)-a_2\cdot(x-1)^2\right]=$$

$$=x\cdot\left[3a_1+a_2+6a_2\cdot x\right]=6a_2\cdot x^2+(3a_1+a_2)\cdot x\ \Rightarrow\ f\left[p(x)\right]=a_1\cdot 3x+a_2\cdot\left(x+6x^2\right)\ \forall a_1,a_2$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f=\operatorname{Span}\left\{3\cdot x,\ x+6x^2\right\}$ y como ambos polinomios son linealmente independientes $\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f)=2\neq 3=\dim\left(\mathbb{P}_2(x)\right)\Rightarrow$ f no es sobreyectiva. Pero entonces, teniendo en cuenta el teorema fundamental de las aplicaciones lineales: $\dim\left(\mathbb{P}_2(x)\right)=\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim(\operatorname{Im} f)\Rightarrow 3=\dim(\operatorname{Ker} f)+1\Rightarrow\dim(\operatorname{Ker} f)=1\Rightarrow$ f tampoco es inyectiva.

b.2) Para estudiar la naturaleza de la aplicación utilizando la matriz, basta calcular el rango de la matriz A, que coincide con la dimensión del subespacio imagen. Pero se observa claramente que $\operatorname{Rango}(A)=\operatorname{Rango}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&1\\0&0&6\end{pmatrix}=2$ por ser la primera columna la nula. Por tanto, f no es sobreyectiva y tal como hemos razonado en el apartado b1), tampoco es inyectiva.

c) Acabamos de obtener una base de Imf: $\left\{3\cdot x,\ x+6x^2\right\}\Rightarrow$ Su única ecuación cartesiana se obtendrá imponiendo que, para que un polinomio $p(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\in \operatorname{Im} f$, el rango de la matriz $\begin{pmatrix}0&0&a_0\\3&1&a_1\\0&6&a_2\end{pmatrix}$ sea 2

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}0&0&a_0\\3&1&a_1\\0&6&a_2\end{vmatrix}=0=18a_0\Leftrightarrow a_0=0\equiv\text{Ecuación cartesiana de Imf.}$$

Para calcular el Kerf, tenemos en cuenta que:

$$\operatorname{Ker} f=\left\{p(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\ /\ f[p(x)]=6a_2\cdot x^2+(3a_1+a_2)\cdot x=0\ \ \forall x\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_2=0\\3a_1+a_2=0\Rightarrow a_1=0\end{cases}\Rightarrow \text{Ecuaciones cartesianas del Kerf}:\begin{cases}a_2=0\\a_1=0\end{cases}.\Rightarrow \text{Base del Kerf}=\{1\}.$$

En este caso, teniendo en cuenta lo que acabamos de obtener, se cumple trivialmente que $\mathbb{P}_2(x) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, es decir, los subespacios núcleo e imagen sí son suplementarios, ya que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0_{\mathbb{P}_2(x)}$, al ser los tres polinomios $\{1, 3\cdot x,\ x+6x^2\}$ linealmente independientes.

5) En un espacio euclídeo E_3 se define un producto escalar referido a una base ortonormal $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ Se efectúa un cambio de base, siendo la nueva base: $B'=\{e_1=u_1, e_2=-u_1+u_2, e_3=-u_2+u_3\}$ Se pide:

a) Calcular la matriz asociada al producto escalar en B'.
(0.5 puntos)

b) Se consideran los vectores $C_{B'}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C_{B'}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Halla el ángulo que forman.

(0.5 puntos)

<u>Solución:</u>

a) Como la base B es ortonormal, la matriz asociada al producto escalar en esa base, G_B, es la matriz identidad, es decir, $G_B = I_3$. Sabemos que las matrices asociadas al mismo producto escalar en dos bases distintas son matrices congruentes, es decir, verifican que $G_{B'} = P^t \cdot G \cdot P$, siendo P la matriz de paso de B a B', y sus columnas son las coordenadas de los vectores de B' en la base B, es decir:

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_B(\mathbf{e_1}) & C_B(\mathbf{e_2}) & C_B(\mathbf{e_3}) \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$G_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot I_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) El ángulo entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se obtiene de la fórmula:

$$\cos(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}$$

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = (2\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2\ 1\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -2$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (2\,1\,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\,1\,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{y}\|^2 = (0\,1\,-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0\,1\,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 6 \Rightarrow \|\mathbf{y}\| = \sqrt{6}$$

Luego, $\cos(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \cos\alpha = \dfrac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|} \Rightarrow \cos(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \dfrac{-2}{|\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

6) Sea $\mathrm{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ una base de un espacio vectorial real de dimensión 3 y f un endomorfismo del que sabemos que:

$$f(\mathbf{v_1} + \mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v_1} + 4\mathbf{v_2},\ f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 \ \text{ y } \ f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v}_2.$$

a) Calcula los autovalores y autovectores de A, siendo A la matriz asociada al endomorfismo f en la base B. ¿Es el endomorfismo f una aplicación inyectiva.

(1.25 puntos)

b) Es A diagonalizable ortogonalmente. ¿Por qué? En caso afirmativo, diagonaliza ortogonalmente dicha matriz. En caso negativo, calcula su matriz semejante más simple.

(0.5 puntos)

<u>Solución:</u>

a) De las condiciones que nos dan:

$f(\mathbf{v_1} + \mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v_1} + 4\mathbf{v_2} = 4\cdot(\mathbf{v_1} + \mathbf{v}_2) \Rightarrow \lambda = 4$ es autovalor de f y por tanto de su matriz asociada en la base B, siendo el vector $(\mathbf{v_1} + \mathbf{v}_2)$ su vector propio asociado, lo cual significa, que para la matriz asociada al endomorfismo, el subespacio propio $V(4) = \mathrm{Span}\left(C_B(\mathbf{v_1} + \mathbf{v}_2)\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 = 1\cdot\mathbf{v}_3 \Rightarrow \lambda = 1$ es autovalor de f y por tanto de su matriz asociada en la base B, siendo el vector $\mathbf{v}_3$ su vector propio asociado, lo cual significa, que para la matriz asociada al endomorfismo, el subespacio propio $V(1) = \mathrm{Span}\left(C_B(\mathbf{v}_3)\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Calculemos la matriz de este endomorfismo, A, en la base B, que será una matriz cuyas columnas son:

$$A=\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathrm{C_B}\left(f(\mathbf{v_1})\right) & \mathrm{C_B}\left(f(\mathbf{v_2})\right) & \mathrm{C_B}\left(f(\mathbf{v_3})\right) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.\text{ Así:}$$

$$f(\mathbf{v_1}+\mathbf{v}_2)=4\mathbf{v_1}+4\mathbf{v_2} \Rightarrow f(\mathbf{v_1})+f(\mathbf{v}_2)=4\mathbf{v_1}+4\mathbf{v_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\mathbf{v_1})=4\mathbf{v_1}+4\mathbf{v_2}-f(\mathbf{v}_2) \overbrace{=}^{(1)} 4\mathbf{v_1}+4\mathbf{v_2}-2\mathbf{v_1}-2\mathbf{v}_2=2\mathbf{v_1}+2\mathbf{v}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{C}_B\left(f(\mathbf{v_1})\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{v}_2)=2\mathbf{v_1}+2\mathbf{v}_2 \quad (1) \Rightarrow \mathrm{C}_B\left(f(\mathbf{v}_2)\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{v}_3)=\mathbf{v}_3 \qquad \Rightarrow \mathrm{C}_B\left(f(\mathbf{v}_3)\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A=\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathrm{C_B}\left(f(\mathbf{v_1})\right) & \mathrm{C_B}\left(f(\mathbf{v_2})\right) & \mathrm{C_B}\left(f(\mathbf{v}_3)\right) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de A es:

$$\mathrm{p_A}(\lambda)=|A-\lambda \mathrm{I}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)[(2-\lambda)^2-4]=$$

$$=(1-\lambda)(4+\lambda^2-4\lambda-4)=(1-\lambda)\lambda(\lambda-4)=0 \Rightarrow$$

De donde los autovalores de A son: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$ y $\lambda_3=0$, todos ellos simples, es decir con multiplicidad algebraica igual a 1, por lo que sólo nos falta calcular el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_3=0$:

$$\mathrm{V}(0)=\mathrm{Ker}\ (A)=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 \,/\, A\cdot \mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow x_2=-x_1 \wedge x_3=0 \Rightarrow V(0)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Como $\lambda_3 = 0$ es un autovalor: $V(0) = \text{Ker}(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}_E \right\} \neq \mathbf{0}_E$ luego este endomorfismo no es inyectivo.

b) La matriz A sí es diagonalizable ortogonalmente, es decir, $D = P^{-1}AP = P^t AP$, ya que $A = A^t$, ó sea, es una matriz simétrica. Además como los 3 autovalores propios son distintos, y sabemos que sus autovectores son ortogonales entre sí, reuniendo los tres vectores calculados en el apartado a) ya tendremos una base ortogonal de autovectores. Después, si dividimos cada vector de esta base entre su norma, tendremos ya una base ortonormal de autovectores, por lo que la matriz de paso P será una matriz ortogonal.

Así, una base ortogonal de autovectores será:

$$B = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y una base ortonormal de autovectores:

$$B = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \mathbf{w_1} = \frac{1}{\|\mathbf{v_1}\|}\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w_2} = \frac{1}{\|\mathbf{v_2}\|}\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \right\}$$

La matriz ortogonal P es: $P = [\mathbf{w_1} \quad \mathbf{w_2} \quad \mathbf{w_3}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y se puede comprobar

que $P^t AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$, siendo D la matriz semejante a A.

7) Sea el endomorfismo $f:\mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ cuya matriz en la base

B=$\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}, \boldsymbol{u_5}, \boldsymbol{u_6}, \boldsymbol{u_7}\}$ es la siguiente: $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$**.**

Responde, de manera razonada, las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los autovalores asociados a *f* y sus multiplicidades algebraicas y geométricas? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la dimensión del subespacio $\left\{ \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^7 \,/\, (A-2I)^2 \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \right\}$?

(0.25 puntos)

<u>Solución:</u>

a) Los autovalores de f son los elementos diagonales de la matriz de Jordan, es decir:

$\lambda_1 = 0$ triple, o sea de multiplicidad algebraica m_1=3, y $\lambda_2 = 2$ cuádruple, o sea de multiplicidad algebraica m_2=4.

Como hay 2 bloques elementales de Jordan asociados a $\lambda_1 = 0 \Longrightarrow$ su multiplicidad geométrica μ_1=2.

Como hay 2 bloques elementales de Jordan asociados a $\lambda_2 = 2 \Longrightarrow$ su multiplicidad geométrica μ_2=2.

b) $\left\{ \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^7 \,/\, (A-2I)^2 \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \right\}$ =$V_2(2)$ =Ker $(A-2I)^2$.

Como uno de los bloques asociados a $\lambda_2 = 2$ es de dimensión 3, quiere decir que se ha formado una cadena con 3 vectores, cada uno de ellos correspondientes a un subespacio distinto, es decir, a $V_1(2)$, a $V_2(2)$ y a $V_3(2)$:

$$\begin{array}{ccccc} V_1(2) & \underset{\neq}{\subset} & V_2(2) & \underset{\neq}{\subset} & V_3(2) \\ \boxed{u_4} & & \boxed{} & & \boxed{} \\ \boxed{u_5} & & \boxed{} & & \boxed{} \\ & \nwarrow & \boxed{u_6} & & \boxed{} \\ & & & \nwarrow & \boxed{u_7} \end{array}$$

, luego, la dim$V_2(2)$=3 y la dim$V_3(2)$=4.

8) a) ¿Podría factorizarse la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3&2&2\\2&6&5&6\\1&4&3&5\\1&5&4&2\end{pmatrix}$ **como** $A=L\cdot U\ /\ l_{i,i}=1$ **sin realizar proceso de pivotaje? Justifica la respuesta. (0.25 puntos)**

b) Obtén su factorización usando el proceso de pivotaje parcial y cambio de escala y escribe las matrices P, L y U correspondientes a dicha factorización. (1.5 puntos)

c) A partir de la factorización anterior resolver el sistema. $A\cdot \mathbf{x}=$ **(1 1 0 -1)** ^{t}
(0.5 puntos)

__Solución:__

a) La factorización $A=L\cdot U\ /\ l_{ii}=1\ \forall i$ es la factorización obtenida al aplicar eliminación gaussiana sin pivotaje parcial ni cambio de escala. Veamos si para esta matriz es posible obtener tal factorización:

Paso k=1:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&2\\2&6&5&6\\1&4&3&5\\1&5&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_3=F_3-F_1\\F_4=F_4-F_1}]{F_2=F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&\boxed{0}&1&2\\0&1&1&3\\0&2&2&0\end{pmatrix}$$

Puede observarse que el pivote $a_{2,2}=0$ y que por tanto el proceso no se puede continuar.

b) Comenzamos calculando los factores de escala:

$s_1=\max\limits_{1\le j\le n}|a_{1,j}|=\max\{|1|,|3|,|2|,|2|\}=3;\ s_2=\max\limits_{1\le j\le n}|a_{2,j}|=\max\{|2|,|6|,|5|,|6|\}=6;$

$s_3=\max\limits_{1\le j\le n}|a_{3,j}|=\max\{|1|,|4|,|3|,|5|\}=5;\ s_4=\max\limits_{1\le j\le n}|a_{4,j}|=\max\{|1|,|5|,|4|,|2|\}=5;$

Inicializamos el vector de pivotaje con valores $\underset{\sim}{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ y vamos realizando las 3 etapas del algoritmo:

<u>Paso k=1:</u> Buscamos el elemento de máximo valor absoluto en la columna 1 como si la matriz se hubiera escalado, es decir, buscamos

$$\max_{i\ge 1}\frac{|a_{i,1}|}{s_i}=\max\left\{\frac{|a_{1,1}|}{s_1},\frac{|a_{2,1}|}{s_2},\frac{|a_{3,1}|}{s_3},\frac{|a_{4,1}|}{s_4}\right\}=\max\left\{\frac{|1|}{3},\frac{|3|}{6},\frac{|2|}{5},\frac{|2|}{5}\right\}=\frac{|1|}{3}=\frac{|a_{1,1}|}{s_1}$$

luego el pivote será el elemento $a_{1,1}$ y por tanto, en este paso no necesitamos intercambiar filas en la matriz A. En consecuencia, el vector de pivotaje seguirá siendo

$\underset{\sim}{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{pmatrix}$. Las transformaciones a realizar en este paso, así como los multiplicadores obtenidos serán las mismas que en el apartado a) .

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&2\\2&6&5&6\\1&4&3&5\\1&5&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_3=F_3-F_1;\ m_{3,1}=1\\ F_4=F_4-F_1;\ m_{4,1}=1}]{F_2=F_2-2F_1;\ m_{2,1}=2}\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&\boxed{0}&1&2\\0&1&1&3\\0&2&2&0\end{pmatrix}$$

<u>k=2:</u> Buscamos el elemento de máximo valor absoluto en la columna 2 como si la matriz se hubiera escalado al inicio. Además, buscaremos este pivote en todas las filas salvo en la fila 1, puesto que de ella ya hemos extraído el pivote en el paso anterior. Esto significa que buscamos

$$\max_{i\geq 2}\frac{|a_{p_i,2}|}{s_{p_i}}=\max\left\{\frac{|a_{2,2}|}{s_2},\frac{|a_{3,2}|}{s_3},\frac{|a_{4,2}|}{s_4}\right\}=\max\left\{\frac{|0|}{6},\frac{|1|}{5},\frac{|2|}{5}\right\}=\frac{|2|}{5}=\frac{|a_{4,2}|}{s_4}=\frac{|a_{p_4,2}|}{s_{p_4}}$$

Por tanto, deberíamos intercambiar las filas $p_2=2$ y $p_4=4$ entre sí. Intercambiando los valores 2 y 4 en $\underset{\sim}{p}$, obtenemos que el nuevo vector de pivotaje es $\underset{\sim}{p}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{pmatrix}$. El pivote será el elemento $a_{p_2,2}=a_{4,2}$. Las transformaciones a realizar en este paso serán

$$\xrightarrow[F_2=F_2-0\cdot F_4;\ m_{2,2}=0]{F_3=F_3-\frac{1}{2}F_4;\ m_{3,2}=\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\boxed{1}&3&2&2\\0&0&1&2\\0&0&0&3\\0&\boxed{2}&2&0\end{pmatrix}$$

<u>k=3:</u> Buscamos el elemento de máximo valor absoluto en la columna 3 como si la matriz se hubiera escalado al inicio. Además, buscaremos este elemento en las filas $p_3=3$ y $p_4=2$ de las que todavía no hemos extraído ningún pivote. Esto significa que buscamos

$$\max_{i\geq 3}\frac{|a_{p_i,3}|}{s_{p_i}}=\max\left\{\frac{|a_{3,3}|}{s_3},\frac{|a_{2,3}|}{s_2}\right\}=\max\left\{\frac{|0|}{5},\frac{|1|}{6}\right\}=\frac{1}{6}=\frac{|a_{2,3}|}{s_2}=\frac{|a_{p_4,3}|}{s_{p_4}}$$

Por tanto, deberíamos intercambiar las filas $p_3=3$ y $p_4=2$ entre sí. Intercambiando los valores 3 y 2 en $\underset{\sim}{p}$, obtenemos que el nuevo vector de pivotaje es $\underset{\sim}{p}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{pmatrix}$. El pivote será el elemento $a_{p_3,3}=a_{2,3}$. En este paso, no necesitamos realizar ninguna operación, ya que la única transformación asociada es $F_3=F_3-0\cdot F_2 \Rightarrow m_{3,3}=0$.

El vector de pivotaje final del proceso es $\underset{\sim}{p}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{pmatrix}$ y las matrices L,U y P que aparecen en la factorización obtenida para la matriz A son:

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\m_{p_2,1}&1&0&0\\m_{p_3,1}&m_{p_3,2}&1&0\\m_{p_4,1}&m_{p_4,2}&m_{p_4,3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\m_{4,1}&1&0&0\\m_{2,1}&m_{2,2}&1&0\\m_{3,1}&m_{3,2}&m_{3,3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&0&1&0\\1&1/2&0&1\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&2&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&3\end{pmatrix},\quad P=\left(\underset{\sim}{e}_{p_1}\ \underset{\sim}{e}_{p_2}\ \underset{\sim}{e}_{p_3}\ \underset{\sim}{e}_{p_4}\right)=\left(\underset{\sim}{e}_1\ \underset{\sim}{e}_4\ \underset{\sim}{e}_2\ \underset{\sim}{e}_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$L\cdot U=P^t\cdot A=\begin{pmatrix}1&3&2&2\\1&5&4&2\\2&6&5&6\\1&4&3&5\end{pmatrix}$$

c) Si en el sistema $A\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$, premultiplicamos por la matriz P^t obtenida en el apartado anterior, obtenemos el sistema equivalente $P^t\cdot A\cdot\underset{\sim}{x}=P^t\cdot\underset{\sim}{b}$. En nuestro caso:

$$P^t\cdot\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}b_{p_1}\\b_{p_2}\\b_{p_3}\\b_{p_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_4\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Si en el sistema equivalente $P^t\cdot A\cdot\underset{\sim}{x}=P^t\cdot\underset{\sim}{b}$, sustituimos $P^t\cdot A$ por $L\cdot U$ obtenemos que $L\cdot U\cdot\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Llamando ahora $U\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{y}$, resolveremos en primer lugar el sistema $L\cdot\underset{\sim}{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ por sustitución progresiva y a continuación el sistema $U\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{y}$ por sustitución regresiva.

En nuestro caso, el primero de los sistemas es

$$\begin{cases} y_1 & & & & = & 1 \\ y_1 & + & y_2 & & & = & -1 \\ 2y_1 & & & + & y_3 & & = & 1 \\ y_1 & + & (1/2)y_2 & & & + & y_4 & = & 0 \end{cases}$$

que al resolver por sustitución progresiva tiene como solución

$y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = -1 - y_1 = -2 \Rightarrow y_3 = 1 - 2y_1 = -1 \Rightarrow y_4 = -y_1 - (1/2)y_2 = 0$

El sistema $U \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ queda ahora en la forma

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ \quad\;\; 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ \qquad\quad\;\; x_3 + 2x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\quad\; 3x_4 = 0 \end{cases}$$

y al resolverlo por sustitución regresiva se obtiene que

$x_4 = 0 \Rightarrow x_3 - 1 - 2x_4 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3$

9) Deducir la expresión matricial del método de Gauss-Seidel, es decir, dado el sistema lineal $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\frown}{b}$, escribir el sistema $\underset{\sim}{x} = T \cdot \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{c}$ al que equivale el proceso iterativo $\underset{\sim}{x}^{k+1)} = T \cdot \underset{\sim}{x}^{k)} + \underset{\sim}{c}$ de Gauss-Seidel. **(1 punto)**

Solución:

Sabemos que el algoritmo de Gauss-Seidel es

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1+i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Si en la ecuación anterior multiplicamos a ambos lados por a_{ii} y pasamos a la parte izquierda todas las componentes correspondientes a la etapa k+1, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1^{(k+1)} & = b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1,n}x_n^{(k)} \\ a_{2,1}x_1^{(k+1)} + a_{2,2}x_2^{(k+1)} & = b_2 - a_{2,3}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2,n}x_n^{(k)} \\ a_{3,1}x_1^{(k+1)} + a_{3,2}x_2^{(k+1)} + a_{3,3}x_3^{(k+1)} & = b_3 - a_{3,4}x_4^{(k)} - \ldots - a_{3,n}x_n^{(k)} \\ \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1,1}x_1^{(k+1)} + a_{n-1,2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{n-1,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} & = b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n^{(k)} \\ a_{n,1}x_1^{(k+1)} + a_{n,2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{n,n}x_n^{(k+1)} = b_n & \end{array}\right\}$$

lo que expresado matricialmente queda en la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n.1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ . \\ . \\ x_{n-1}^{(k+1)} \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,n-1} & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,n-1} & -a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{3,4} & \dots & -a_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ . \\ . \\ x_{n-1}^{(k)} \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si descomponemos la matriz original A de coeficientes del sistema como A=D+L+U siendo:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

la relación matricial anterior puede expresarse en la forma:

$$(L+D)\cdot \underset{\sim}{x}^{(k+1)} = -U\cdot \underset{\sim}{x}^{(k)} + \underset{\sim}{b}$$

y despejando $\underset{\sim}{x}^{(k+1)}$, se obtiene:

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}\cdot U\cdot \underset{\sim}{x}^{(k)} + (L+D)^{-1}\cdot \underset{\sim}{b} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x}^{(k+1)} = T\cdot \underset{\sim}{x}^{(k)} + \underset{\sim}{c}$$

es decir, tenemos ya la relación $\underset{\sim}{x}^{k+1} = T\cdot \underset{\sim}{x}^{k} + \underset{\sim}{c}$ a la que equivale el algoritmo de Gauss-Seidel y también el sistema $\underset{\sim}{x} = T\cdot \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{c}$ equivalente al original $A\cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, siendo la matriz T=$-(L+D)^{-1}\cdot U$ y el vector $\underset{\sim}{c} = (L+D)^{-1}\cdot \underset{\sim}{b}$.

10) Calcula el polinomio de grado 2 que mejor se ajusta en el intervalo [-1,1] a la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ utilizando polinomios ortogonales.

<u>Nota 1</u>: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = 2 - \frac{\pi}{2}$**.**

<u>No*ta* 2</u>: La base de polinomios ortogonales debe ser deducida de manera justificada.

(1.5 puntos)

Solución:

Comenzaremos ortogonalizando mediante el método de Gram-Schmidt la base canónica de $\mathbb{P}_2$. Sabemos que la base canónica de $\mathbb{P}_2$ es $\{1, x, x^2\}$. Si ahora llamamos $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$ a la base ortogonal que vamos a obtener al aplicar el método de Gram-Schmidt, tendremos que:

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x + \alpha \cdot p_0(x) = x + \alpha$ y calcularemos α para que $\langle p_1(x), p_0(x) \rangle = 0$

$$\langle p_1(x), p_0(x) \rangle = \langle x + \alpha, 1 \rangle = \langle x, 1 \rangle + \alpha \langle 1, 1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{-\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{0}{2} = 0$$

Luego $p_1(x) = x$. Calculemos ahora $p_2(x)$

$p_2(x) = x^2 + \beta \cdot p_0(x) + \lambda \cdot p_1(x)$ y calcularemos β y λ para que $\begin{cases} \langle p_2(x), p_0(x) \rangle = 0 \\ \langle p_2(x), p_1(x) \rangle = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \langle p_2(x), p_0(x) \rangle &= \langle x^2 + \beta \cdot p_0(x) + \lambda \cdot p_1(x), p_0(x) \rangle = \\ &= \langle x^2, p_0(x) \rangle + \beta \langle p_0(x), p_0(x) \rangle + \lambda \langle p_1(x), p_0(x) \rangle = \\ &= 0 = \langle x^2, p_0(x) \rangle + \beta \langle p_0(x), p_0(x) \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta = \frac{-\langle x^2, p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x), p_0(x) \rangle} = \frac{-\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{-\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{-2/3}{2} = -1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle p_2(x), p_1(x) \rangle &= \langle x^2 + \beta \cdot p_0(x) + \lambda \cdot p_1(x), p_1(x) \rangle = \\ &= \langle x^2, p_1(x) \rangle + \beta \langle p_0(x), p_1(x) \rangle + \lambda \langle p_1(x), p_1(x) \rangle = \\ &= 0 = \langle x^2, p_1(x) \rangle + \lambda \langle p_1(x), p_1(x) \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{-\langle x^2, p_1(x) \rangle}{\langle p_1(x), p_1(x) \rangle} = \frac{-\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{-\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \frac{0}{2/3} = 0 \end{aligned}$$

Luego $p_2(x) = x^2 - 1/3$.

El polinomio mejor aproximación será ahora de la forma $p(x) = \lambda_0 \cdot p_0(x) + \lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x)$, donde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ son la solución del sistema de ecuaciones normales (que ahora es diagonal)

$$\begin{pmatrix} \langle p_0(x), p_0(x) \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle p_1(x), p_1(x) \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle p_2(x), p_2(x) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f(x), p_0(x) \rangle \\ \langle f(x), p_1(x) \rangle \\ \langle f(x), p_2(x) \rangle \end{pmatrix}$$

Luego $\lambda_i = \dfrac{\langle f(x), p_i(x)\rangle}{\langle p_i(x), p_i(x)\rangle} \quad i = 1,2,3$

En nuestro caso

$$\lambda_0 = \frac{\langle f(x), p_0(x)\rangle}{\langle p_0(x), p_0(x)\rangle} = \frac{\langle f(x), 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}}{2} = \frac{\left.\operatorname{arctg}(x)\right]_{-1}^{1}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$\lambda_1 = \dfrac{\langle f(x), p_1(x)\rangle}{\langle p_1(x), p_1(x)\rangle} = \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \dfrac{\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx}{2/3} = 0$ ya que la función $\dfrac{x}{1+x^2}$ es una función impar.

$\lambda_2 = \dfrac{\langle f(x), p_2(x)\rangle}{\langle p_2(x), p_2(x)\rangle} = \dfrac{\langle f(x), x^2 - 1/3\rangle}{\langle x^2 - 1/3, x^2 - 1/3\rangle} = \dfrac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}(x^2-1/3)dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-1/3)^2 dx}$ pero

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}(x^2-1/3)dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}dx - (1/3)\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = 2 - \pi/2 - (1/3)(\pi/2) = 2 - 2\pi/3$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1/3)^2 dx = \int_{-1}^{1}(x^4 + 1/9 - (2/3)x^2)dx = 8/45$$

de donde $\lambda_2 = \dfrac{2-2\pi/3}{8/45} = \dfrac{15(3-\pi)}{4}$

y por tanto, el polinomio de grado 2 que mejor se ajusta en el intervalo [-1,1] a la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es

$$p(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{15}{4}(3-\pi)(x^2 - 1/3) = \frac{15}{4}(3-\pi)x^2 - \frac{15}{4} + \frac{3\pi}{2}$$