Matematika Aplikatua Saila
Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola
Euskal Herriko Unibertsitatea
Rafael Moreno "Pitxitxi" 3 Pasealekua
48013 Bilbao

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

BIGARREN DEIALDIA 2014-2015

***Emaitzen argitalpena**: 2015eko ekainaren 26an 18:00etan.*
***Azterketen berrikuspena**: 2015eko ekainaren 30ean 10:00etan (7 I 1 gela).*

1. ARIKETA

Mikorriza, onddo baten eta landare baten arteko sinbiosi prozesua da. Bertan, mineralak onddotik landarearen sustraietara, eta azukreak landaretik onddora transferitzen dira. Mikorrizen efektua ezagutu nahi da. Horretarako, *Pisolithus tinctorus* onddoaren eraginpean dagoen lurra daukan berotegi batean, haritz gorriaren 20 zuhaitz-landare erein dira, guztiek ur kopuru eta eguzki argi kantitate bera jasoz. Landatzerako momentuan, ordea, erreferentziako lagina ongarritu ez zen bitartean, beste laginak $NaNO_3$ motako 358 ppm nitrogeno ongarria jaso zuen. 140 egun pasa ondoren, zuhaitz-landareen zurtoinen pisuak (g-tan) honakoak izan ziren:

N_2-rekin	0.32	0.53	0.28	0.37	0.47	0.43	0.36	0.42	0.38	0.53
N_2 gabe	0.26	0.43	0.47	0.49	0.52	0.75	0.79	0.66	0.62	0.46

Ariketa ebazteko beharrezkoak diren erdiko kalkuluak:

$$\sum_i x_{NG,i} = 4.09\ g \qquad \sum_i x_{NR,i} = 5.45\ g$$
$$\sum_i x_{NG,i}^2 = 1.7357 g^2 \qquad \sum_i x_{NR,i}^2 = 3.2021 g^2$$
$$n_{NG} = 10 \qquad n_{NR} = 10$$

eta problema estatistikorako nahitaezkoak diren lagineko estatistikoak:

$$\bar{x}_{NG} = 0.409\ g \qquad \bar{x}_{NR} = 0.545\ g \qquad \frac{\hat{s}_{NG}^2}{\hat{s}_{NR}^2} = 0.271252965$$
$$\hat{s}_{NG}^2 = 6.9878\times10^{-3}\ g^2 \qquad \hat{s}_{NR}^2 = 0.02576\ g^2$$
$$\hat{s}_{NG} = 0.08359\ g \qquad \hat{s}_{NR} = 0.1605\ g \qquad \frac{\hat{s}_{NR}^2}{\hat{s}_{NG}^2} = 3.68659564$$

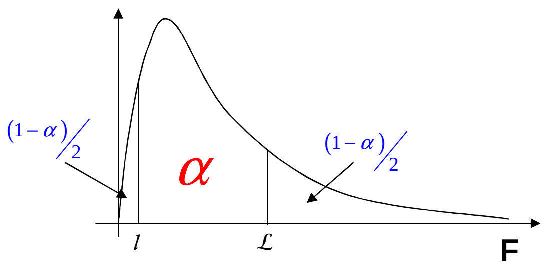
Demagun populazioek banaketa normala jarraitzen dutela:

(1.) % 99-ko konfiantza mailaz, lortu emandako baldintzapean gertatzen diren bi tratamenduen kontrolerako estimazioa (**4 PUNTU**).

Bi lagin ditugunez, bi populazioen bariantzen (edo desbiderazio tipikoen) konfiantza-tarteari (tarte-estimazioari) buruzko ariketa bat da. Arrazoi honengatik, erabili beharreko estimatzailea bariantzen (desbiderazio tipikoen) arteko zatidura da laginketako banaketa (probabilitate eredua) Fischer-Snedecor-en F banaketa izanik.

$$\boxed{F=\frac{\chi^2_{NG}/\nu_{NG}}{\chi^2_{NR}/\nu_{NR}}=\frac{\hat{s}^2_{NG}}{\hat{s}^2_{NR}}\frac{\sigma^2_{NR}}{\sigma^2_{NG}}}\ \textbf{[1]}\ \text{edo}\ F=\frac{\chi^2_{NR}/\nu_{NR}}{\chi^2_{NG}/\nu_{NG}}=\frac{\hat{s}^2_{NR}}{\hat{s}^2_{NG}}\frac{\sigma^2_{NG}}{\sigma^2_{NR}}\ \textbf{[2]}$$

Zenbakitzailean parte hartzen duten bi populazioetatik edozein jarri daitekeela kontuan izanik, ariketa beraren hainbat ebazpen egingo dira. Estimazio problema ondoko eran planteatzen da:



Honako baldintza bete beharko duelarik:

$$\mathbb{P}\left[F_1=F_l=F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}}\le F=\frac{\chi^2_{NG}/\nu_{NG}}{\chi^2_{NR}/\nu_{NR}}=\frac{\hat{s}^2_{NG}}{\hat{s}^2_{NR}}\frac{\sigma^2_{NR}}{\sigma^2_{NG}}\le F_2=F_{\mathcal{L}}=F_{\frac{1+\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}}\right]=\alpha$$

F-en definizioa baldintza honetan ordezkatuz eskatutako tartea lortzen da

$$\mathbb{P}\left[F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}}\le\frac{\hat{s}^2_{NG}}{\hat{s}^2_{NR}}\frac{\sigma^2_{NR}}{\sigma^2_{NG}}\le F_{\frac{1+\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}}\right]=\mathbb{P}\left[\frac{\hat{s}^2_{NR}}{\hat{s}^2_{NG}}F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}}\le\frac{\sigma^2_{NR}}{\sigma^2_{NG}}\le\frac{\hat{s}^2_{NR}}{\hat{s}^2_{NG}}F_{\frac{1+\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}}\right]=\alpha$$

$$\Leftrightarrow[l,\mathcal{L}]=\left[\frac{\hat{s}^2_{NR}}{\hat{s}^2_{NG}}F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}},\quad\frac{\hat{s}^2_{NR}}{\hat{s}^2_{NG}}F_{\frac{1+\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}}\right]$$

Bestalde, ondorengoak kalkulatu

$$F_1 = F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}} = F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG}=n_{NG}-1,\nu_{NR}=n_{NR}-1} = F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG}=n_{NG}-1,\nu_{NR}=n_{NR}-1} = F_{0.005,\nu_{NG}=9,\nu_{NR}=9} = 0.152879728$$

$$F_2 = F_{\frac{1+\alpha}{2},\nu_{NG}=n_{NG}-1,\nu_{NR}=n_{NR}-1} = F_{0.995,\nu_{NG}=9,\nu_{NR}=9} = F^{-1}_{0.005,\nu_{NR}=9,\nu_{NG}=9} = \frac{1}{0.152879728} = 6.541089627$$

eta balio desberdinak ordezkatzen dira:

$$l = \frac{\hat{s}^2_{NR}}{\hat{s}^2_{NG}} F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}} = 3.68659564 \times 0.152879728 = 0.56360574\ g^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{\hat{s}^2_{NR}}{\hat{s}^2_{NG}} F_{\frac{1+\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}} = 3.68659564 \times 6.541089627 = 24.1143525\ g^2$$

Eskatutako tartea $[l,\mathcal{L}]_\alpha = \left[0.56360574\ g^2,\quad 24.1143525\ g^2\right]$ dela ondorioztatzen da.

Era berean, [2] bertsioa erabiliz, $[l,\mathcal{L}]_\alpha = \left[0.04146908\ g^2,\quad 1.77428996\ g^2\right]$ konfiantza-tartea lortzen da, izan ere

$$l = \frac{\hat{s}^2_{NG}}{\hat{s}^2_{NR}} F_{\frac{1-\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}} = 0.271252965 \times 0.152879728 = 0.04146908\ g^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{\hat{s}^2_{NG}}{\hat{s}^2_{NR}} F_{\frac{1+\alpha}{2},\nu_{NG},\nu_{NR}} = 0.271252965 \times 6.54108962 = 1.77428996\ g^2$$

(2.) 0.99-ko probabilitatearekin, lortu populazioen batezbestekoen kenduraren estimazio tartea (**4 PUNTU**).

Bi populazioen batezbestekoen tarte-estimazioari buruzko ariketa bat da. Tamaina txikiko bi lagin ditugu ($n_{NG} = n_{NR} = 10 < 29$). Erabili beharreko estimatzailea batezbestekoen arteko kendura da: $\widehat{\mu_{NG} - \mu_{NR}} = \overline{x}_{NG} - \overline{x}_{NR} = -0.13600\ g$. Bestalde, enuntziatuko informaziotik datu parekatuei buruzko ariketa bat dela ondoriozta daiteke (norbait honetaz konturatu ez bada, laginak independenteak izango balira bezala lan egin dezake, kasu honetan, populazioen bariantzen artean eman daitezkeen kasuak kontuan izanik). Kontuan izan behar den probabilitate eredua Student-en t banaketa da.

Eskatutako konfiantza-tartea ondokoa izango da:

$$[l,\mathcal{L}]_\alpha = \left[\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} - t_1 \sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}}, \widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} + t_2 \sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}} \right]$$

Hiru kasu posible kontsideratuko dira:

A kasua (datu parekatuak, $\sigma_{NG} = \sigma_{NR}$): Eman daitekeen errorea:

$$\sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}} = \frac{\hat{s}_{\bar{d}}}{\sqrt{n}} = \frac{0.179208135}{\sqrt{10}} = 0.05667059\ g$$

$$t_{1,2} = \pm t_{\alpha,\nu} = \pm t_{0.005,\,\nu=n_{NG}-1} = \pm t_{0.995,\,\nu=9\ gdl} = \pm 3.249835541$$

$$[l,\mathcal{L}]_\alpha = \left[\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} - t_1 \sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}}, \widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} + t_2 \sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}} \right] = [-0.320170091\,\mathrm{g},\ 0.048170091\, g]$$

B kasua (lagin independenteak, $\sigma_{NG} = \sigma_{NR}$): **(1.)** atalean populazioen bariantzen arteko berdintza arrazoituz gero kasu hau kontsidera daiteke. Kasu honetan eman daitekeen errorea:

$$\sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}} = \sqrt{\frac{(n_{NG}-1)\hat{s}_{NG}^2 + (n_{NR}-1)\hat{s}_{NR}^2}{n_{NG}+n_{NR}-2}} \sqrt{\frac{1}{n_{NG}} + \frac{1}{n_{NR}}} = \sqrt{\frac{(n_{NG}-1)\left(\hat{s}_{NG}^2 + \hat{s}_{NR}^2\right)}{n_{NG}+n_{NR}-2}} \sqrt{\frac{2}{n_{NG}}} = 0.057226645\ g$$

$$t_{1,2} = \pm t_{\alpha,\nu} = \pm t_{0.005,\,\nu=n_{NG}+n_{NG}-2} = \pm t_{0.995,\,\nu=18\ gdl} = \pm 2.878440471$$

$$[l,\mathcal{L}]_\alpha = \left[\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} - t_1 \sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}}, \widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} + t_2 \sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}} \right] = [-0.300723491\,\mathrm{g},\ 0.028723491\, g]$$

C kasua (lagin independenteak, $\sigma_{NG} \neq \sigma_{NR}$): Kasu honetan ondorengoa daukagu:

$$\sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NG}}} = \sqrt{\frac{1}{n}(\hat{s}_{NG}^2 + \hat{s}_{NR}^2)} = 0.057226645\ g$$

$$t_{1,2} = \pm t_{\alpha,\nu} = \pm t_{0.005,\,\nu=2(n_{NG}-1)} = \pm t_{0.995,\,\nu=18\ gdl} = \pm 2.878440471$$

$$[l,\mathcal{L}]_{\alpha} = \left[\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} - t_1\sigma_{\widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}}}, \widehat{\mu_{NG}-\mu_{NR}} + t_2\sigma_{\widehat{\mu_{GN}-\mu_{NR}}}\right] = [-0.300723491\,\text{g},\ 0.028723491\,g]$$

(3.) 0.01-eko adierazgarritasun mailaz, tratamendu biak baldintza berdinetan kontrolatuak izan al dira? Arrazoitu erantzuna (**2 PUNTU**).

Hipotesi-kontraste honi erantzuteko nahiko da alde biko kontrastea (bi ilara, adimentsionala) dela kontuan izatea, hipotesia hurrengoa izanik:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_{NG}/\sigma_{NR} = 1 \\ H_a: & \sigma_{NG}/\sigma_{NR} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \sigma_{NG} = \sigma_{NR} \\ H_a: & \sigma_{NG} \neq \sigma_{NR} \end{cases}$$

Kontrastearen adierazgarritasun maila dela eta (1.) ataleko konfiantza-tartea erabil daiteke. Beraz,

$$\left(\sigma_{NG,0}/\sigma_{NR,0}\right)^2 = 1 \in [l,\mathcal{L}]_{\alpha} = \left[0.04146908\,g^2,\quad 1.77428996\,g^2\right]$$

betetzen denez, enuntziatuko laginak abiapuntu bezala harturik eta 0.01-eko adierazgarritasun mailaz, tratamendu biak baldintza berdinetan kontrolatuak izan direla suposatzeko ebidentzia estatistikoak daudela ondorioztatzen da.

2. ARIKETA

Ingeniaritzako Metodo Estatistikoak irakasgaiko azterketa honen kalifikazioek 4.8 batezbestekoa eta 1.4 bariantza dituen banaketa normala jarraitzen dute. Ezaguna da baita ere, aurreko urteetako esperientziagatik, berrikuspenera 4 edo kalifikazio baxuagoa lortu dutenen % 5a, 4 eta 5 puntu artean lortu dutenen % 80a, eta irakasgaia gainditzea lortu dutenen % 2a doazela.

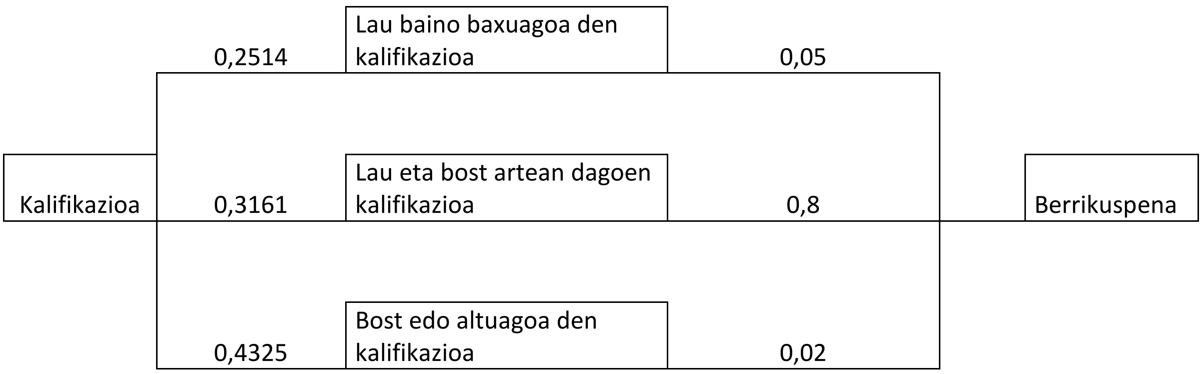
Enuntziatuak adierazten duen bezala azterketako kalifikazioak definitzen dituen aldagaia $X \sim N\left(4{,}8, \sqrt{1{,}4}\right)$ da. Halaber, ondorengo gertaerak definitzen dira:
G$\triangleq$ "***Gainditzea***", S $\triangleq$ "***Suspenditzea***" eta B $\triangleq$ "***Berrikuspenera joatea***".

(1.) Lortu ikasle batek irakasgaia gainditzeko probabilitatea (**3 PUNTU**).

Gainditzeko probabilitatea, edo gauza bera dena, bost edo kalifikazio altuagoa lortzeko probabilitatea kalkulatuko dugu:

$$P(G) = P(X \geq 5) = 1 - F(X = 5) = 1 - \phi\left(\frac{5 - 4{,}8}{\sqrt{1{,}4}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{1{,}4}}\right) 1 - \phi(0{,}17) = 1 - 0{,}5675$$
$$= 0{,}4324 = 43{,}24\%$$

Enuntziatuko informaziotik ondokoa ondorioztatzen da



(2.) Lortu irakasgaia suspenditu badu berrikuspenera joateko probabilitatea (**4 PUNTU**).

Kalifikazioak kontuan izanik, lau baino txikiagoa den edo lau eta bost artean dagoen kontuan izanik, suspenditzeko probabilitatea kalkulatuko dugu. Hau da,

$$P(S) = P_1 + P_2$$

$$P_1 = F(X=4) = \phi\left(\frac{4-4{,}8}{\sqrt{1{,}4}}\right) = \phi\left(\frac{-0{,}8}{\sqrt{1{,}4}}\right) = 1 - \phi(0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$$

$$\begin{aligned} P_2 &= F(X=5) - F(X=4) = \phi\left(\frac{5-4{,}8}{\sqrt{1{,}4}}\right) - \phi\left(\frac{4-4{,}8}{\sqrt{1{,}4}}\right) = \phi\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{1{,}4}}\right) - \phi\left(\frac{-0{,}8}{\sqrt{1{,}4}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{1{,}4}}\right) - 1 + \phi\left(\frac{0{,}8}{\sqrt{1{,}4}}\right) = \phi(0{,}17) - 1 + \phi(0{,}67) = 0{,}5675 - 1 + 0{,}7486 \\ &= 0{,}3161 = \%\ 31{,}61 \end{aligned}$$

Suspenditzeko probabilitatea izanda, azterketan lortutako notaren arabera, "suspenditzeko" **eta** "berrikuspenera joateko" probabilitatea (gertaeren arteko ebakidura) kalkula dezakegu:

$$\begin{aligned} P\left(B \bigcap S\right) &= P(X \le 4) * 0{,}05 + P(4 \le X \le 5) * 0{,}8 = 0{,}2514 * 0{,}05 + 0{,}3161 * 0{,}8 = 0{,}2654 \\ &= \%\ 26{,}54 \end{aligned}$$

Beraz, eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0.2654}{0.5675} = 0.4677$$

(3.) Ikaslea berrikuspenera joan bada, zein da azterketa gainditua izateko probabilitatea? (**3 PUNTU**).

BAYES-en teorema aplikatuz ondokoa daukagu:

$$P\left({}^{G}/_{B}\right) = \frac{0{,}4325 * 0{,}02}{0{,}2514 * 0{,}05 + 0{,}3161 * 0{,}8 + 0{,}4325 * 0{,}02} = 0{,}0315 = \%\ 3{,}15$$

3. ARIKETA

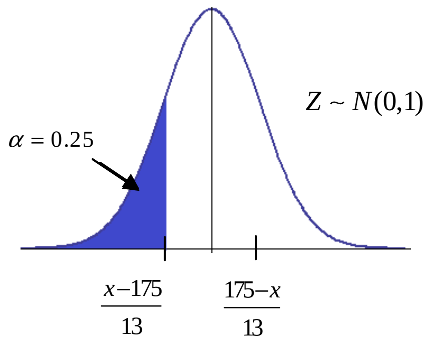
Unibertsitate bateko ikasleen altuerak, 175 cm-ko batezbestekoa eta 13 cm-ko desbiderazio tipikoa dituen banaketa normala jarraitzen du:

Izan bedi X = ***"Ikasleen altuera cm-tan"*** aldagaia, bere probabilitate banaketa $X \sim N(\mu = 175,\ \sigma = 13)$ izanik.

(1.) Populazioaren lehen kuartila kalkulatu. Lortutako emaitza azaldu (**3 PUNTU**).

Lehenengo kuartila, Q1, kalkulatzeko laginaren %25a ezkerrean uzten duen balioa (x_{Q1}) kalkulatu behar da. Probabilitatea banaketa jarraitua denez

$$P(X < x_{Q1}) = P(X \le x_{Q1}) = 0.25$$



$$P(X \le x_{Q1}) = P(Z \le z_{Q1} = \frac{x_{Q1} - 175}{13}) = 0.25 \overset{simetria}{\Rightarrow}$$

$$P(Z \le \frac{175 - x_{Q1}}{13}) = 0.75 \overset{N(0,1)\ taula}{\Rightarrow} \frac{175 - x_{Q1}}{13} = 0.67$$

$$x_{Q1} = 166.29 \text{ cm}$$

Ondorioz, unibertsitateko ikasleen %25ak gehienez 166.29 cm neurtzen du, beraz, beste %75ak gutxienez 166.29 cm neurtzen du.

(2.) 165 cm-ko garaiera duen ikasle bat bere altueragatik arduratuta dago. Ikasle hori, unibertsitateko zein portzentaje baino txikiagoa da? (**3 PUNTU**).

$$P(X > 165) = P(Z > \frac{165 - 175}{13}) = P(Z > -0.77) = P(Z < 0.77) = 0.7794$$

Ikasle hau unibertsitate honetako ikasleen %77.94a baino baxuagoa da.

(3.) 500 ikasleko talde batetik, zein da gutxienez 290 ikaslek 178 cm baino altuera txikiagoa izateko probabilitatea? (**4 PUNTU**).

Ikasle batek 178 cm baino gutxiago neurtzeko probabilitatea:

$$P(X < 178) = P(Z < \frac{178 - 175}{13}) = P(Z < 0.23) = 0.5910$$

Matematika Aplikatua Saila
Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola
Euskal Herriko Unibertsitatea
Rafael Moreno "Pitxitxi" 3 Pasealekua
48013 Bilbao

Y = ***"500 ikasletatik 178 cm baino gutxiago neurtzen duten ikasle kopurua"*** zorizko aldagaia definitzen da, bere probabilitate banaketa ondokoa izanik

$$Y \sim Bin(n=500,\ \ p=0.5910)$$

Banaketa Binomialaren eta Normalaren arteko konbergentzia onargarria den aztertzen da:

$$\left.\begin{array}{l} np = 500 \cdot 0.5910 = 295.5 > 5 \\ nq = 500 \cdot 0.409 = 204.5 > 5 \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim Bin(n,p) \approx N(np, \sqrt{npq})$$

non

$$np = 295.5 \ \ ikasle \ \ \ eta \ \ \ \sqrt{npq} = 10.99 \ \ ikasle \text{ diren.}$$

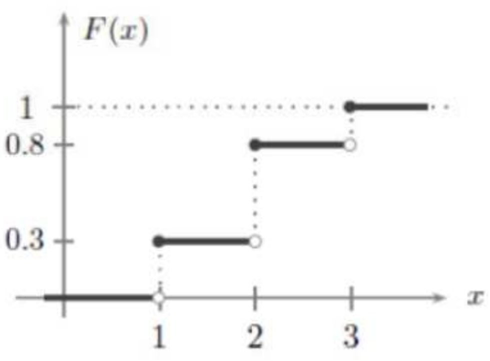
Beraz,

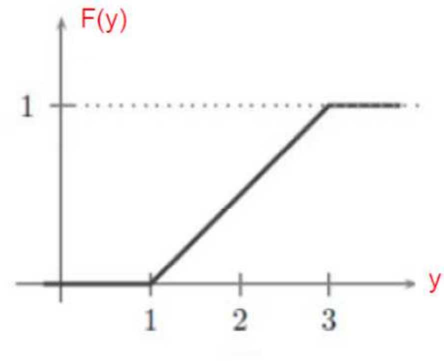
$$P(Y \ge 290) \overset{\text{jarraitutasun zuzenketa}}{=} P(Y \ge 289.5) = 1 - P(Y < 289.5) = 1 - P(Z < \frac{289.5 - 295.5}{10.99}) =$$

$$1 - P(Z < -0.55) = 1 - P(Z \le -0.55) = 1 - P(Z \ge 0.55) = P(Z \le 0.55) \overset{N(0,1)\ taula}{=} 0.7088$$

4. ARIKETA

Izan bitez, X eta Y zorizko aldagaiei dagozkien honako banaketa funtzioak:

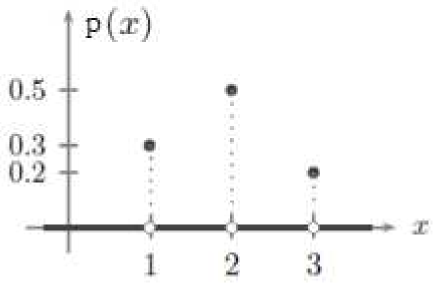




(1.) Lortu, kasuaren arabera, emandako zorizko aldagaien probabilitate funtzioa edo dentsitate funtzioa (**3 PUNTU**).

X zorizko aldagaia diskretua da, beraz, adierazpen grafikoari dagokion probabilitate funtzioa:

x	1	2	3
$p(x)$	0.3	0.5	0.2



Banaketa funtzioa hurrengoa izanik:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} P(X = u) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 0.3 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0.8 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3, \end{cases}$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Matematika Aplikatua Saila
Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola
Euskal Herriko Unibertsitatea
Rafael Moreno “Pitxitxi” 3 Pasealekua
48013 Bilbao

Era berean, Y zorizko aldagaia jarraitua da, bere banaketa funtzioa hurrengo eran definitzen da:

$$F(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} f(\mathrm{z})\,\mathrm{dz} = \begin{cases} 0 & , y \le 1 \\ \dfrac{y-1}{2} & , 1 < y < 3 \\ 1 & , y \ge 3 \end{cases}$$

eta bere dentsitate funtzioa $f(\mathrm{y}) = \dfrac{dF(\mathrm{y})}{dy}$ da. Deribazioak ondorengoa dakar

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & , 1 < y < 3 \\ 0 & , \text{ beste kasuetan} \end{cases}$$

(2.) Kalkulatu zorizko aldagai bakoitzaren itxaropen matematikoa eta bariantza (**4 PUNTU**).

$$\mu_X = E[X] = \sum_{k=1}^{3} k\,\mathbb{P}(X = k) = 1\times 0.3 + 2\times 0.5 + 3\times 0.2 = 0.3 + 1 + 0.6 = 1.9\ unitate$$

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - \mu_X^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2\,\mathbb{P}(X = k) - \mu_X^2 =$$
$$1^2\times 0.3 + 2^2\times 0.5 + 3^2\times 0.2 - 1.9^2 = 0.3 + 2 + 1.8 - 3.61 = 0.49\ unitate^2$$

$$\mu_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z)dz = \int_1^3 \frac{1}{2} z dz = \frac{1}{4}\left(z^2\right|_1^3 = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2\ unitate$$

$$\sigma_Y^2 = E\left[(Y-\mu_Y)^2\right] = E\left[Y^2\right] - \mu_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)dz - \mu_Y^2 = \int_1^3 \frac{1}{2} z^2 dz - 2^2 =$$
$$\frac{1}{6}\left(z^3\right|_1^3 - 4 = \frac{27-1}{6} - 4 = 0.3333\ unitate^2$$

(3.) Kalkulatu $\mathbb{P}(0.73 < X \le 2.1)$ (**2 PUNTU**).

$$\mathbb{P}(0.73 < X \le 2.1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

(4.) Lortu $\mathbb{P}(Y = 2.3)$ (**1 PUNTU**).

Y zorizko aldagaia jarraitua denez, balio zehatz baten probabilitatea kalkulatzeak ez du zentzu askorik, $\mathbb{P}(Y = 2.3) \approx 0$ izanik.