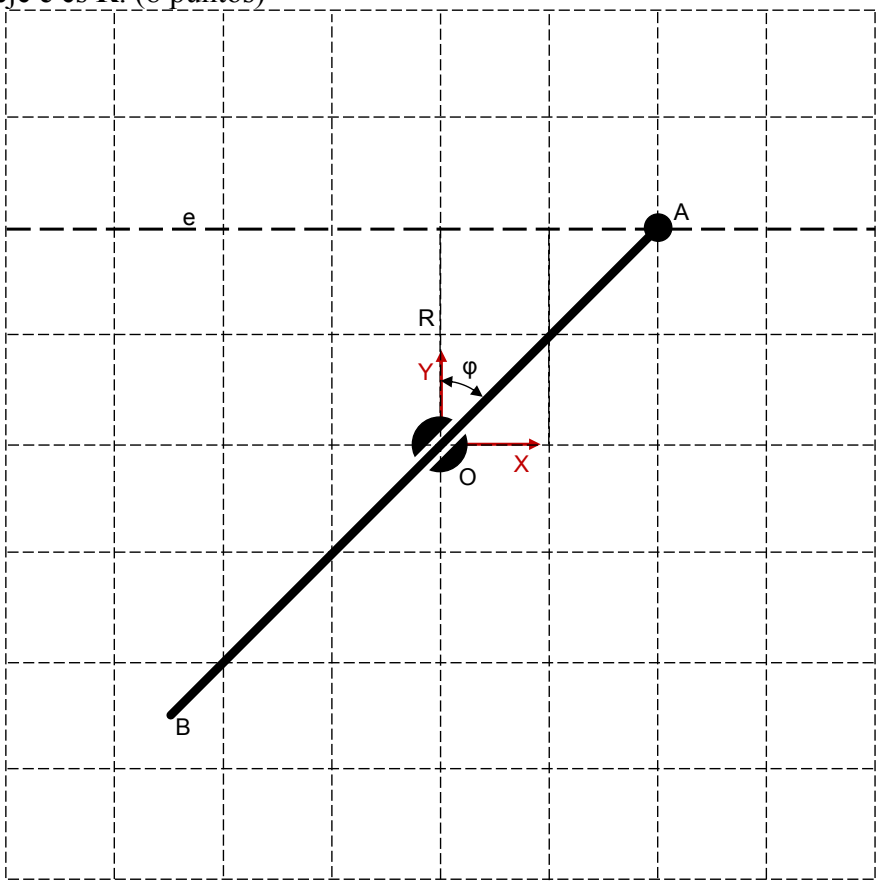
Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. EXAMEN FINAL. 08-01-2016
TEÓRIA. CINEMÁTICA. TIEMPO: 35‘

1. **Cinemática Espacial**: Movimiento relativo del punto material. (10 puntos)
2. **Cinemática Plana** (10 puntos):
   a. Definiciones de centro instantáneo de rotación y base. (2 puntos)
   b. La barra **AB** de la figura pasa permanentemente a través de una rótula fija en **O**. Si se sabe que su punto **A** describe una trayectoria rectilínea sobre el eje horizontal **e**, obtener en los ejes indicados la ecuación de la base de la barra **AB** y representarla sobre la figura. La distancia mínima entre la rótula y el eje **e** es **R**. (8 puntos)



MEJORA ESTÁTICA. TIEMPO: 15‘

3. Cable homogéneo sometido a su propio peso. (10 puntos)

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

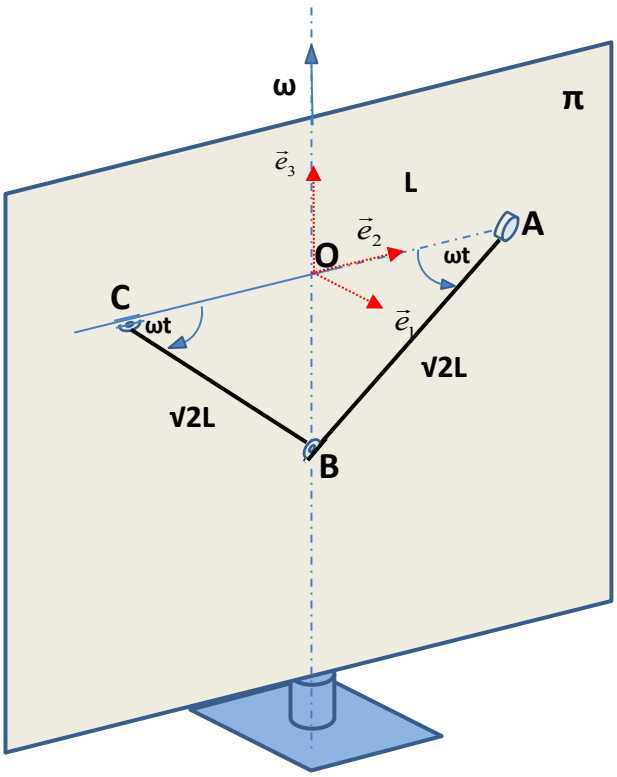
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. EXAMEN FINAL. 08-01-2016
PROBLEMA. CINEMÁTICA. TIEMPO: 45‘

El mecanismo de la figura ABC se encuentra sobre el plano π que se mueve alrededor de su eje vertical con una velocidad angular **ω** constante. Las dos barras AB y BC de longitud √2L forman un ángulo **ωt** con la línea horizontal, tal como se indica en la figura. La barra AB está articulada en A a una distancia L desde O, y la barra BC está articulada en B a AB y en C desliza horizontalmente (COA están sobre la misma línea horizontal). Se pide determinar para el instante en el que **ωt=45º**:

1. Las velocidades angulares de las barras AB y BC. (1 punto)
2. Las velocidades lineales de los puntos A, B y C. (2 puntos)
3. El eje instantáneo de rotación y deslizamiento de la barra BC. (1 punto)
4. Las aceleraciones angulares de AB y de BC. (2 puntos)
5. Las aceleraciones lineales de los puntos A y B. (2 puntos)
6. La aceleración lineal de C. (2 puntos)



Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

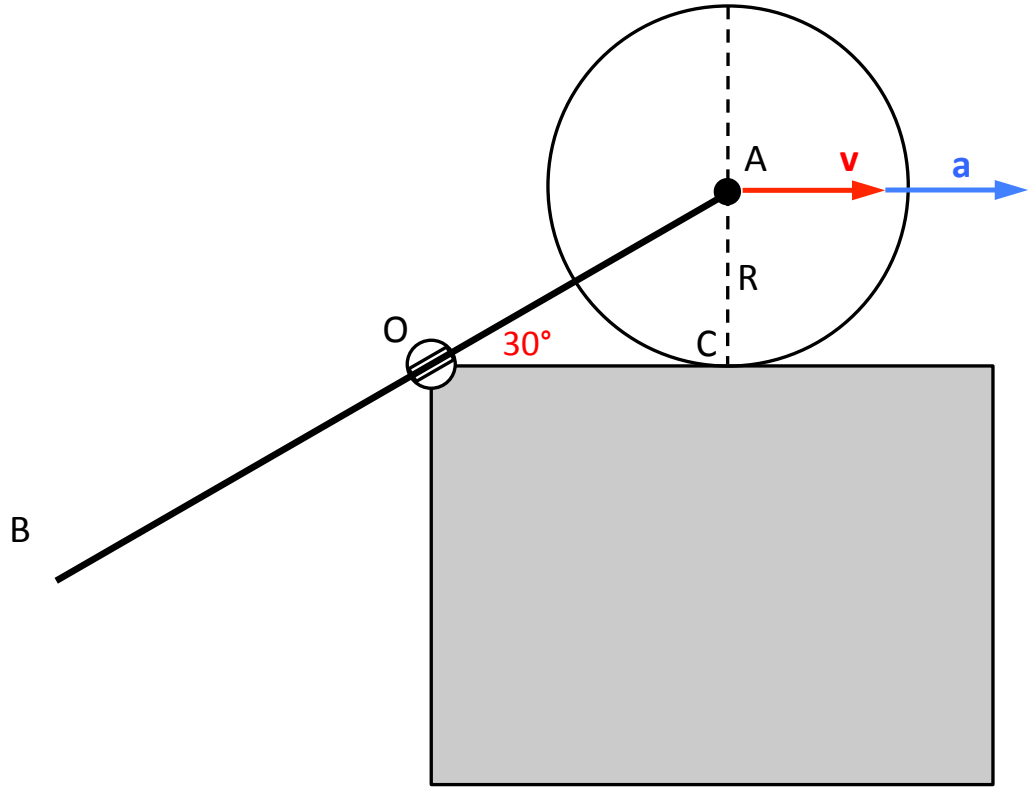
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. EXAMEN FINAL. 08-01-2016
PROBLEMA. CINEMÁTICA. TIEMPO: 45‘

El sistema mecánico de la figura está formado por un disco de radio R que rueda sin deslizar sobre un bloque fijo, y una barra AB articulada al centro del disco en A y apoyada permanentemente en el vértice O del bloque fijo. En el instante representado en la figura la barra forma 30º con la horizontal y el punto A tiene una velocidad instantánea $v = \omega R$ y una aceleración $a = \sqrt{3}\omega^2 R$.

Determinar en ese instante:

1. Posición gráfica de los centros instantáneos de rotación de los sólidos. (1 punto)
2. Velocidad angular de los sólidos. (2 puntos)
3. Velocidad del punto O del bloque relativa a la barra AB. (1 punto)
4. Aceleración del punto C del disco. (2 puntos)
5. Aceleración angular del disco. (1 punto)
6. Aceleración angular de la barra AB (3 puntos)



Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

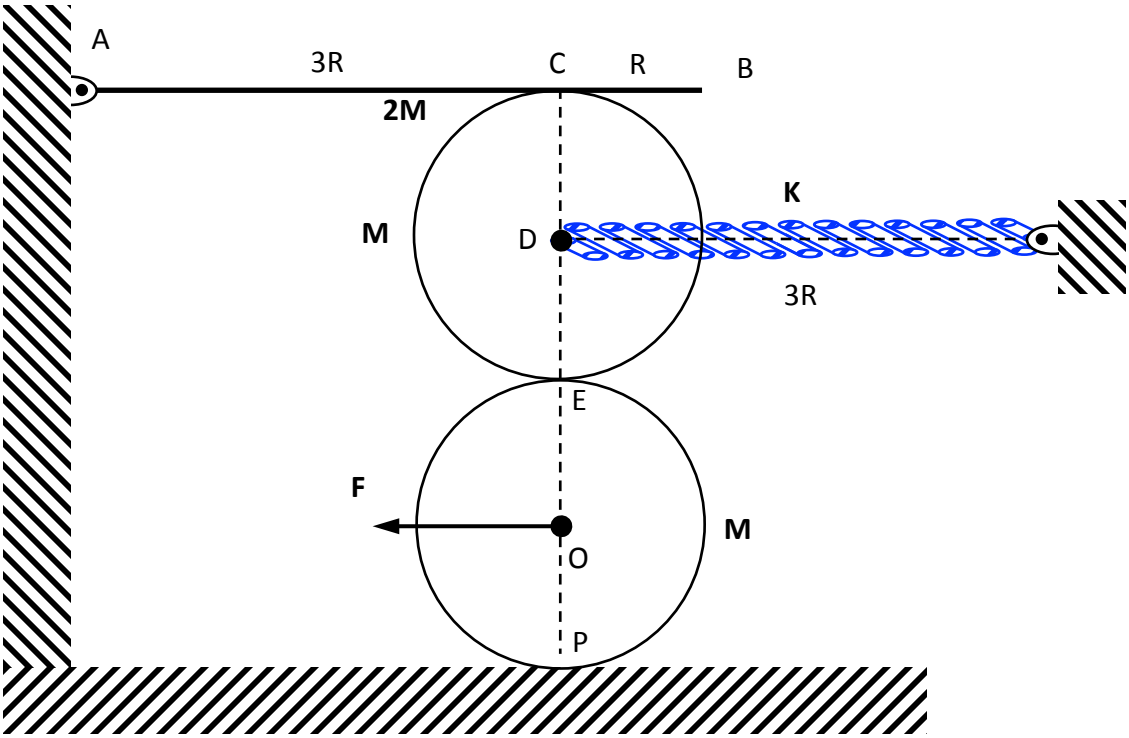
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. EXAMEN FINAL. 08-01-2016
PROBLEMA. ESTÁTICA. TIEMPO: 45‘

La barra AB de la figura, de masa 2M y longitud 4R, se encuentra articulada en el punto fijo A y apoyada en C sobre un disco de centro D, masa M y radio R. Sobre el punto D actúa un resorte ideal de constante elástica K, que se encuentra alargado una longitud 3R. El disco, a su vez, se apoya sobre otro disco igual, apoyado en el suelo y en cuyo centro actúa una fuerza horizontal F. En todas las superficies de contacto existe rozamiento, siendo el coeficiente de rozamiento igual a ¼. Sabiendo que el sistema está en equilibrio, determinar:

1. Diagrama de sólido de los tres sólidos rígidos (3 puntos).
2. Valor máximo de la constante elástica del muelle (4 puntos).
3. Valor de F para la situación de equilibrio estricto (3 puntos).



Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

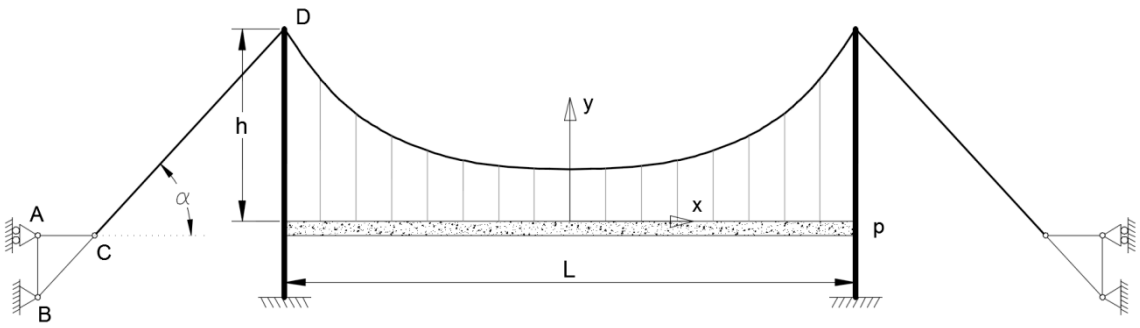
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. EXAMEN FINAL. 08-01-2016
PROBLEMA. ESTÁTICA. TIEMPO: 45‘

El puente colgante de la figura salva una luz **L** entre las orillas de un rio. Para el cálculo se supone que sobre el tablero actúa una carga uniforme de valor **p** N/m. El tablero esta soportado por un cable de masa despreciable, que pasa sobre unas poleas sin rozamiento de radio despreciable situadas en el extremo superior D de sendos pilares, y que en sus extremos C está conectado a unas celosías. Las condiciones de diseño son: que la carga transmitida en D por las poleas a los pilares ha de ser únicamente vertical, y que la tensión máxima en el cable tenga un valor de:

$$T_{max} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot p \cdot L$$



Se pide:

1. Calcular el ángulo α del cable para la situación definida. (2 puntos)
2. Calcular la carga vertical que soporta cada pilar. (1 puntos)
3. Expresar la ecuación de la curva funicular del cable en el sistema definido en la figura. (4 puntos)
4. Si la altura desde el tablero hasta la parte más alta del pilar es de **h** metros, calcular la relación entre la luz L y h para la que el cable llega a tocar el tablero. (3 puntos)

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. 08-01-2016
RESOLUCIÓN PROBLEMA CINEMÁTICA. TIEMPO: 45‘

$$\underline{\vec{\omega}_{AB} = \omega(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)}$$

$$\underline{\vec{\omega}_{BC} = \omega(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3)}$$

$$\underline{\vec{V}_A = -\omega L \vec{e}_1}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB} = -\omega L \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega & 0 & \omega \\ 0 & -L & -L \end{vmatrix} = \underline{\omega L(\vec{e}_2 - \vec{e}_3)}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC} = \omega L(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\omega & 0 & \omega \\ 0 & -L & L \end{vmatrix} = \underline{\omega L(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)}$$

$$\overrightarrow{BI} = \frac{\vec{\omega}_{BC} \times \vec{V}_B}{\vec{\omega}_{BC}^2} + \lambda \vec{\omega}_{BC} \longrightarrow (x-0)\vec{e}_1 + (y-0)\vec{e}_2 + (z-L)\vec{e}_3 = \frac{1}{2\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\omega & 0 & \omega \\ 0 & \omega L & -\omega L \end{vmatrix} + \lambda\omega(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$$

$$\left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{L}{2} - \lambda\omega \\ y = -\dfrac{L}{2} \\ z = \dfrac{L}{2} + \lambda\omega \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \underline{x + z = 0} \\ \underline{y = -\dfrac{L}{2}} \end{array} \right.$$

$$\vec{\alpha}_{AB} = \frac{d\vec{\omega}_{AB}}{dt} + \vec{\omega}_{SM} \times \vec{\omega}_{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega & 0 & \omega \end{vmatrix} = \underline{\omega^2 \vec{e}_2}$$

$$\vec{\alpha}_{BC} = \frac{d\vec{\omega}_{BC}}{dt} + \vec{\omega}_{SM} \times \vec{\omega}_{BC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & \omega \end{vmatrix} = \underline{-\omega^2 \vec{e}_2}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_\pi \times \overrightarrow{OA} - \vec{\omega}_\pi^2 \cdot \overrightarrow{OA} = -\omega^2 L \vec{e}_2$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times \left(\vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}\right) = -\omega^2 L \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & -L & -L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega & 0 & \omega \\ \omega L & \omega L & -\omega L \end{vmatrix} = \underline{\omega^2 L(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)}$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

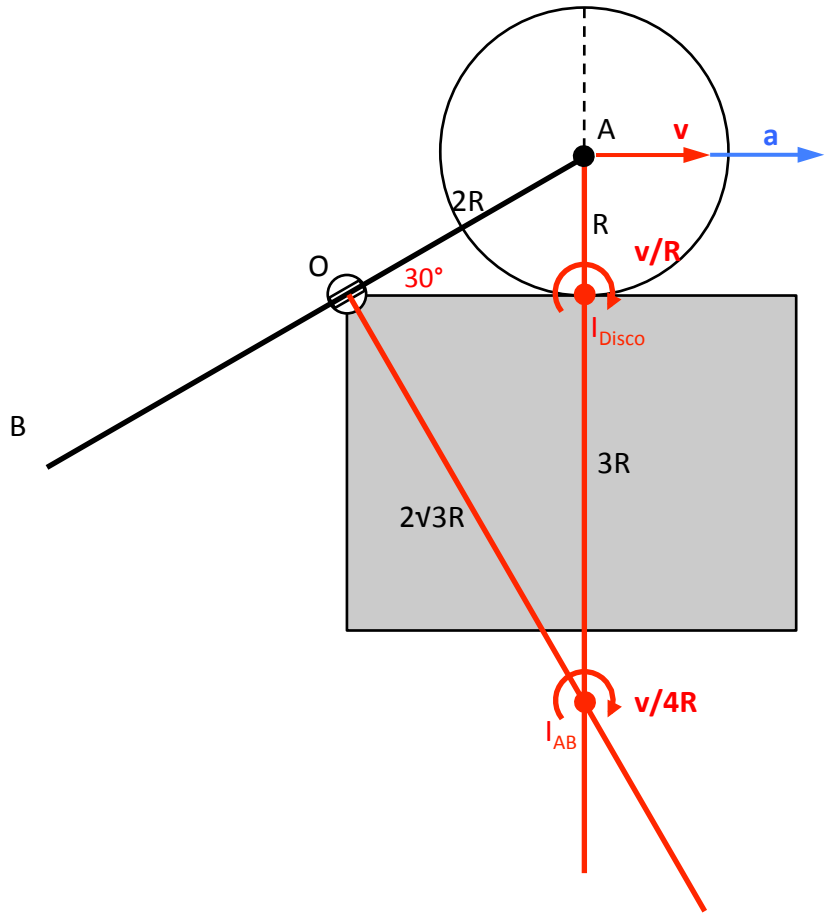
$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \times \overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_{BC} \times \left(\vec{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC}\right) = \omega^2 L(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & -L & L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\omega & 0 & \omega \\ \omega L & \omega L & \omega L \end{vmatrix} = \underline{\omega^2 L\left(-4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2\right)}$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. 08-01-2016
RESOLUCIÓN PROBLEMA CINEMÁTICA. TIEMPO: 45‘



$$\vec{\Omega}_{Disco} = -\omega\,\vec{k}$$

$$\vec{\Omega}_{AB} = -\frac{\omega}{4}\vec{k}$$

$$\vec{V}_O = \vec{V}_{OarrAB} + \vec{V}_{OrelAB}$$

$$\vec{0} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\omega R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)\right] + \vec{V}_{OrelAB}$$

$$\vec{V}_{OrelAB} = -\frac{3}{4}\omega R\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\omega R\vec{j}$$

$$\vec{V}_{suc} = \frac{-\omega}{0-\frac{1}{R}}\vec{i} = \omega R\vec{i}$$

$$\vec{a}_c = \vec{V}_{suc} \times \vec{\Omega}_{Disco} = \omega R\vec{i} \times \left(-\omega\vec{k}\right) = \omega^2 R\vec{j}$$

$$\vec{a}_c = \omega^2 R\vec{j} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{Disco} \times \overrightarrow{AC} - \omega^2 \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}\omega^2 R\vec{i} + \alpha R\vec{i} + \omega^2 R\vec{j}$$

$$\alpha = -\sqrt{3}\omega^2$$

$$\vec{\alpha}_{Disco} = -\sqrt{3}\omega^2\vec{k}$$

$$\vec{a}_O = \vec{0} = \vec{a}_{OarrAB} + \vec{a}_{OrelAB} + \vec{a}_{OCorAB}$$

$$\vec{0} = \left[\vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \overrightarrow{AO} - \frac{\omega^2}{16}\overrightarrow{AO}\right] + a_{rel}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right] + 2\vec{\Omega}_{AB} \times \vec{V}_{OrelAB}$$

$$\vec{0} = \sqrt{3}\omega^2 R\vec{i} + \alpha' R\vec{i} - \alpha' R\sqrt{3}\vec{j} - \frac{\omega^2}{16}\left[-R\sqrt{3}\vec{i} - R\vec{j}\right] + a_{rel}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right] - \frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2 R\vec{i} + \frac{3}{8}\omega^2 R\vec{j}$$

$$\alpha' = -\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2$$

$$\vec{\alpha}_{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2\vec{k}$$

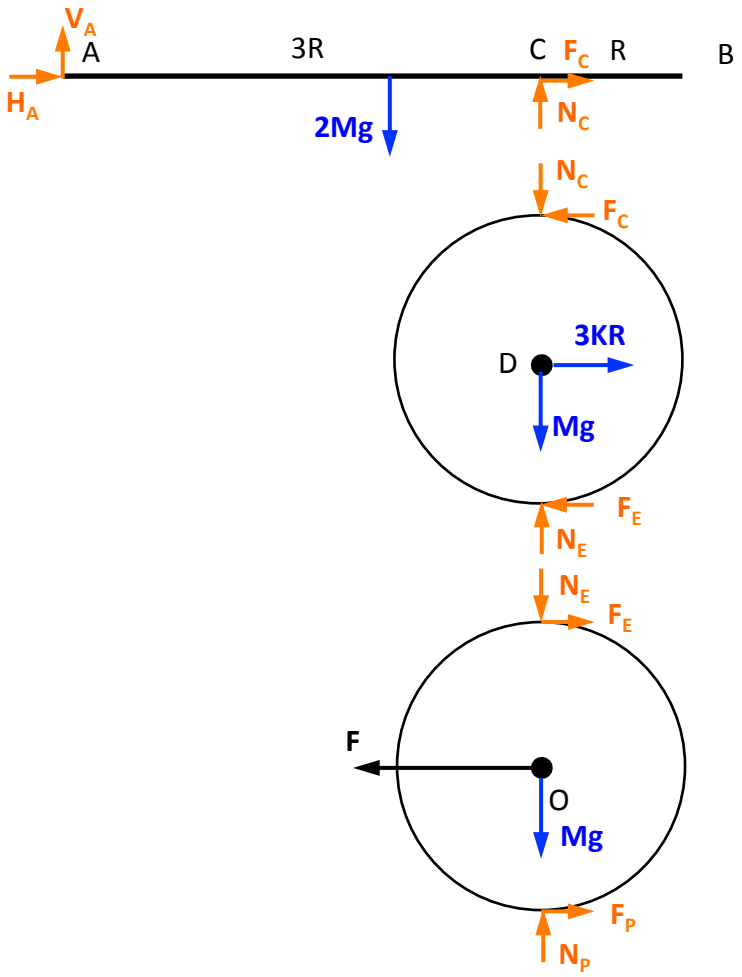
Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. 08-01-2016
RESOLUCIÓN PROBLEMA ESTÁTICA. TIEMPO: 45‘

1. Diagramas de sólido rígido:



2. Planteando las ecuaciones de equilibrio de los 3 sólidos se obtiene:

$$N_c \cdot 3R = 2Mg \cdot 2R \Rightarrow N_c = \frac{4Mg}{3}$$

$$N_E = \frac{4Mg}{3} + Mg = \frac{7Mg}{3}; F_c + F_E = 3KR; F_c = F_E = \frac{3KR}{2}$$

$$N_P = \frac{7Mg}{3} + Mg = \frac{10Mg}{3}; F_P + F_E = F; F_P = F_E = \frac{3KR}{2} = \frac{F}{2}$$

En cada punto de contacto debe verificarse $F_r \leq f \cdot N$. Puesto que todas las fuerzas de rozamiento tienen el mismo valor, la condición vendrá dada por la menor fuerza normal, es decir, N_c. En consecuencia: $\frac{3KR}{2} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{4Mg}{3} \Rightarrow K \leq \frac{2Mg}{9R}$

3. Considerando el valor de F obtenido en el apartado anterior, $F = 3KR = \frac{2Mg}{3}$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA. 08-01-2016
RESOLUCIÓN PROBLEMA ESTÁTICA. TIEMPO: 45‘

La T max está en la parte alta y para que los pilares trabajen a compresión debe tener el mismo ángulo a ambos lados para anular la componente horizontal. Haciendo el diagrama de equilibrio del cable:

$$2 \cdot T_{max} \cdot sen(\alpha) = p \cdot L$$

α = 60º

La carga en los soportes:

$$2 \cdot T_{max} \cdot sen(60º) = \mathrm{p} \cdot L$$

La ecuación del cable:

$$T_o = T_{max} \cdot \cos(60ª) = \frac{\sqrt{3} \cdot p \cdot L}{6}$$

$$\frac{p}{T_0} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{p}{T_0} \cdot x + C_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{p}{2 \cdot T_0} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 = y$$

Las condiciones iniciales:

$$y'(0) = 0$$

$$y(\mathrm{L}/2) = h$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{L} \cdot x^2 + h - \frac{\sqrt{3} \cdot L}{4}$$

Para que el cable toque el tablero en su punto más bajo:

$$y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad L = \frac{4 \cdot h}{\sqrt{3}}$$

La tensión en las barras es:

$$T_{AB} = T_{AC} = 0$$

$$T_{BC} = T_{max} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot p \cdot L \quad \rightarrow \quad Tracción$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

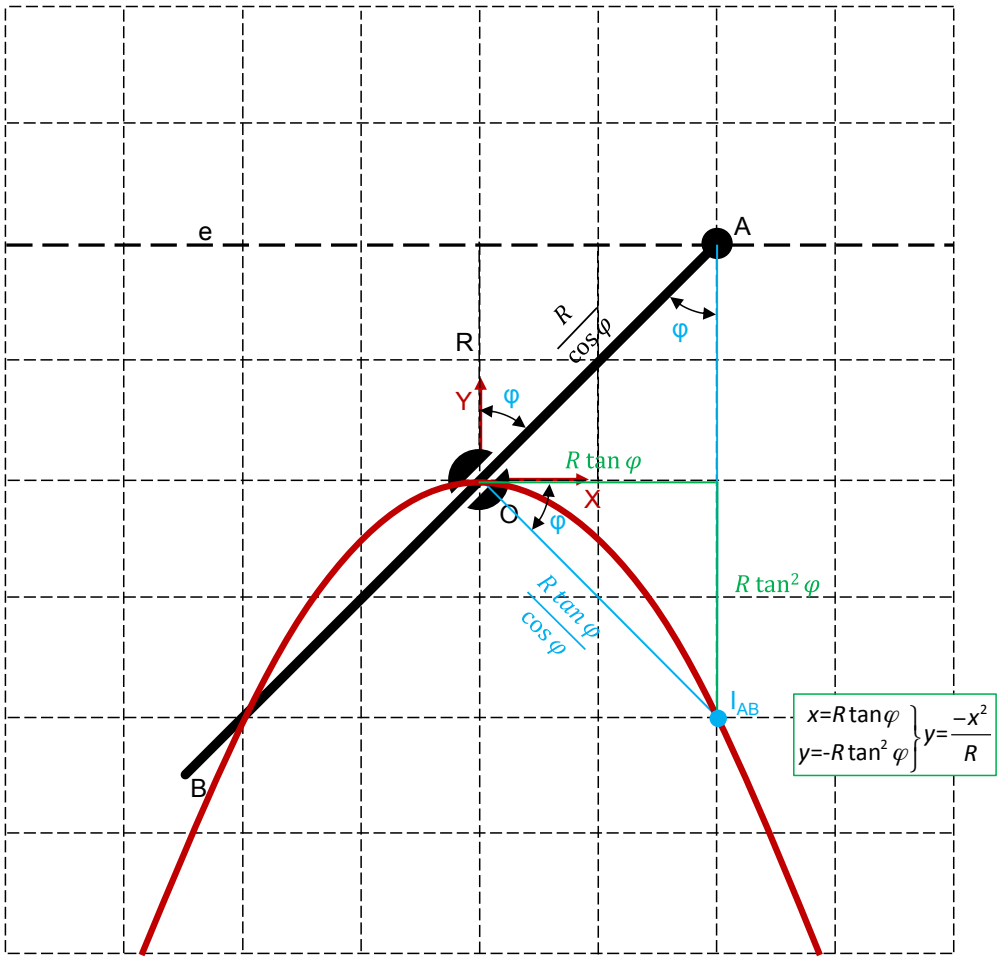
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECÁNICA. 08-01-2016.

RESOLUCIÓN TEORIA CINEMÁTICA. TIEMPO: 30‘

1. Apartado 14.6 del libro “Mecánica Aplicada. Estática y Cinemática”, págs. 316-319.
2.
   a. Apartado 15.3 del libro “Mecánica Aplicada. Estática y Cinemática”, pág. 353.

   b.



RESOLUCIÓN MEJORA ESTÁTICA. TIEMPO: 15‘

3. Apartado 9.7 del libro “Mecánica Aplicada. Estática y Cinemática”, págs. 213-215.