ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

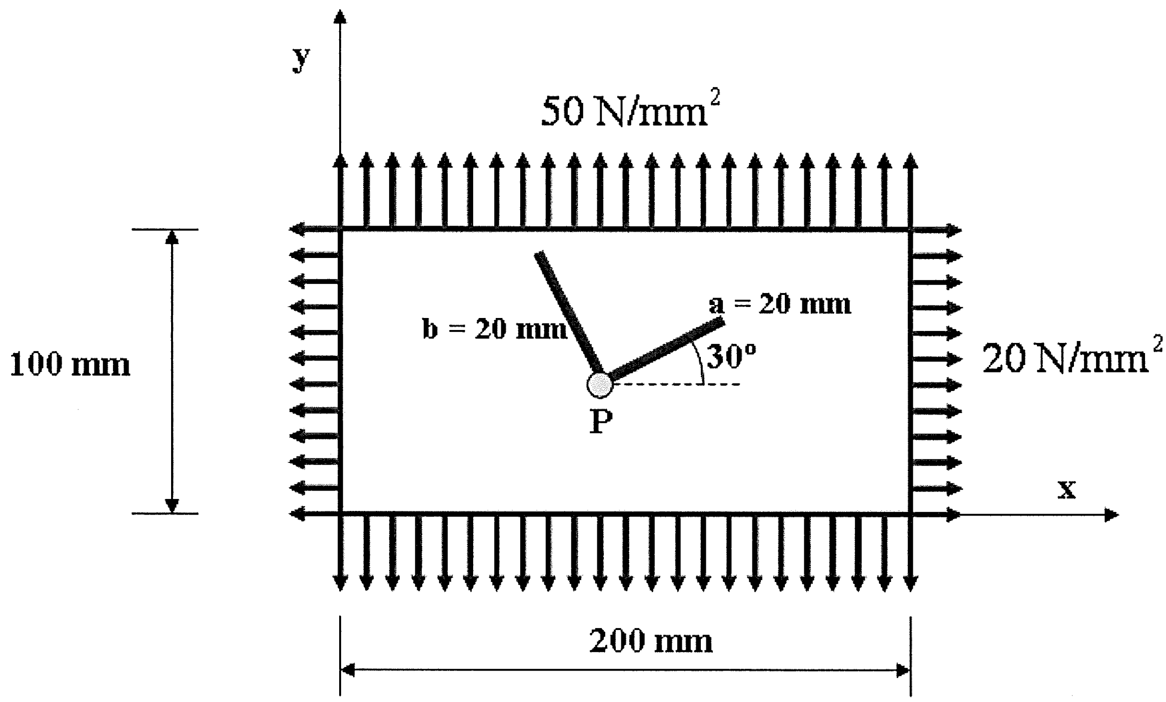
Elasticidad (15/11/14)

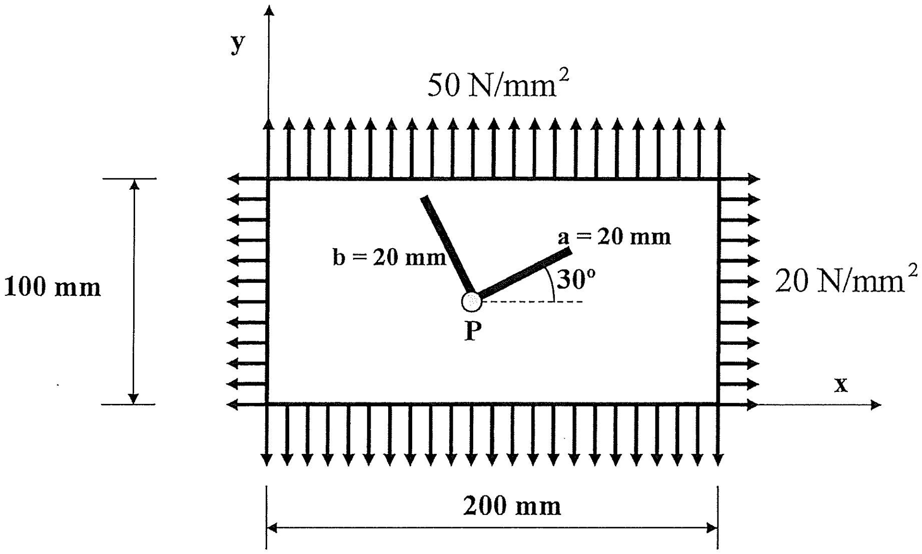
****

Una placa rectangular en equilibrio se encuentra sometida al estado de tensiones plano y uniforme de la figura. Las dimensiones iniciales de la placa se indican en la figura y el espesor de la misma es de 3 mm. Adicionalmente a las tensiones, la placa sufre un incremento de temperatura de 100 ºC. El material de la placa es elástico lineal isótropo con módulo de elasticidad lineal E = 200 GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$ y coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}.

En el punto P se consideran dos segmentos, de longitud a = 20 mm y b = 20 mm, perpendiculares entre sí y dispuestos tal como indica la figura. Determinar:

1) Variación de longitud experimentada por el segmento "a".
2) Variación del ángulo recto inicial entre los segmentos "a" y "b".
3) Máxima deformación transversal en la placa y en qué plano se produce.
4) Variación de volumen en la placa.





$$E = 200000\ \text{N/mm}^2$$
$$\nu = 0{,}25$$
$$\alpha = 10^{-5}\ {}^{\circ}\text{C}^{-1}$$
$$\Delta T = 100\ {}^{\circ}\text{C}$$
$$t = 3\ \text{mm}$$

$$\sigma_{xx} = 20\ \text{N/mm}^2$$
$$\sigma_{yy} = 50\ \text{N/mm}^2$$
$$\sigma_{zz} = 0\ \text{N/mm}^2$$

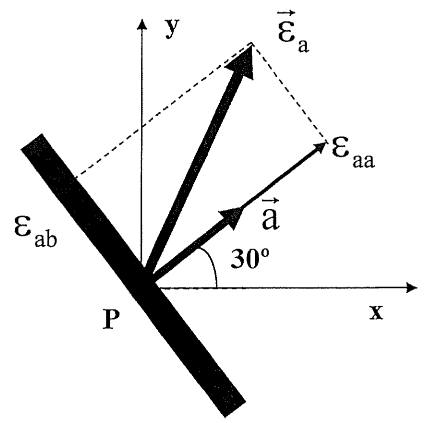
$$\left[T_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_{xx} - \nu\cdot\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right] + \alpha\cdot\Delta T = \frac{1}{200000}\cdot\left[20-0{,}25\cdot(50+0)\right]+10^{-5}\cdot 100 = 1{,}0375\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_{yy} - \nu\cdot\left(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}\right)\right] + \alpha\cdot\Delta T = \frac{1}{200000}\cdot\left[50-0{,}25\cdot(20+0)\right]+10^{-5}\cdot 100 = 1{,}225\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_{zz} - \nu\cdot\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\right] + \alpha\cdot\Delta T = \frac{1}{200000}\cdot\left[0-0{,}25\cdot(20+50)\right]+10^{-5}\cdot 100 = 0{,}9125\cdot 10^{-3}$$

$$\left[D_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0375\cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}225\cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9125\cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$



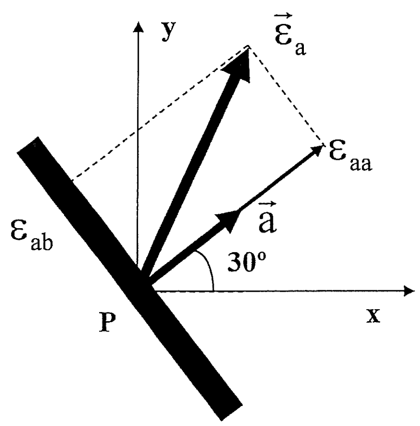
Vector "a" está en la dirección de "a" y define un plano perpendicular a "a".

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} \cos 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,866 \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{\varepsilon}_a\} = [D_{ij}] \cdot \{\vec{a}\} = \begin{bmatrix} 1,0375 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1,225 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0,9125 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,8985 \cdot 10^{-3} \\ 0,6125 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{aa} = \{\vec{\varepsilon}_a\}^T \cdot \{\vec{a}\} = \{0,8985 \cdot 10^{-3} \quad 0,6125 \cdot 10^{-3} \quad 0\} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1,08437 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{\Delta a = \varepsilon_{aa} \cdot a = 1,08437 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 21,687 \cdot 10^{-3}\ \text{mm} = 0,021687\ \text{mm}}$$



Vector "a" está en la dirección de "a" y define un plano perpendicular a "a".

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} \cos 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,866 \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vector "a" y el vector "b" son ortogonales.

$$\vec{b} = \begin{Bmatrix} -\cos 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0,866 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ab} = \{\vec{\varepsilon}_a\}^T \cdot \{\vec{b}\} = \{0,8985 \cdot 10^{-3} \quad 0,6125 \cdot 10^{-3} \quad 0\} \cdot \begin{Bmatrix} -0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0,0812 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{\gamma_{ab} = 2 \cdot \varepsilon_{ab} = 2 \cdot 0,0812 \cdot 10^{-3} = 0,1624 \cdot 10^{-3}}$$

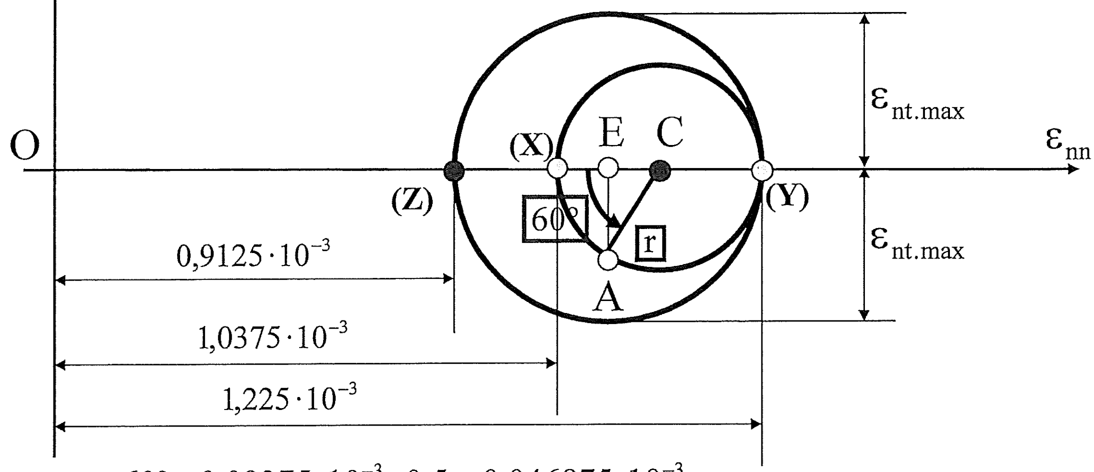
$\varepsilon_{xx} = 1{,}0375 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_{yy} = 1{,}225 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_{zz} = 0{,}9125 \cdot 10^{-3}$

$$OC = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} = \frac{1{,}0375 \cdot 10^{-3} + 1{,}225 \cdot 10^{-3}}{2} = 1{,}13125 \cdot 10^{-3}$$

$$r = \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}}{2} = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-3} - 1{,}0375 \cdot 10^{-3}}{2} = 0{,}09375 \cdot 10^{-3}$$



$$CE = r \cdot \cos 60° = 0{,}09375 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5 = 0{,}046875 \cdot 10^{-3}$$

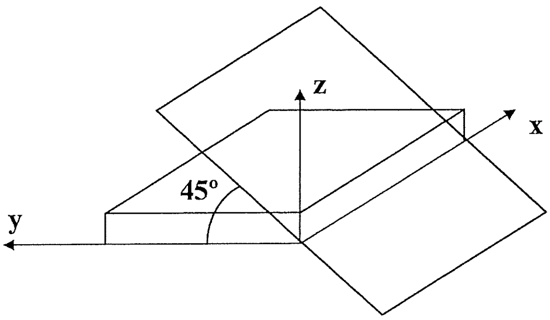
$$\boxed{OE = OC - CE = 1{,}13125 \cdot 10^{-3} - 0{,}046875 \cdot 10^{-3} = 1{,}084375 \cdot 10^{-3}}$$

$$EA = r \cdot \text{sen } 60° = 0{,}09375 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}866 = 0{,}0812 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{\gamma = 2 \cdot EA = 2 \cdot 0{,}0812 \cdot 10^{-3} = 0{,}1624 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{nt.max} = \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}}{2} = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-3} - 0{,}9125 \cdot 10^{-3}}{2} = 0{,}15625 \cdot 10^{-3}}$$

Se produce en el plano $y = z$ o en el plano perpendicular $y + z = 0$



$$V = 100 \cdot 200 \cdot 3 = 60000 \text{ mm}^3$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 1{,}0375 \cdot 10^{-3} + 1{,}225 \cdot 10^{-3} + 0{,}9125 \cdot 10^{-3} = 3{,}175 \cdot 10^{-3}$$

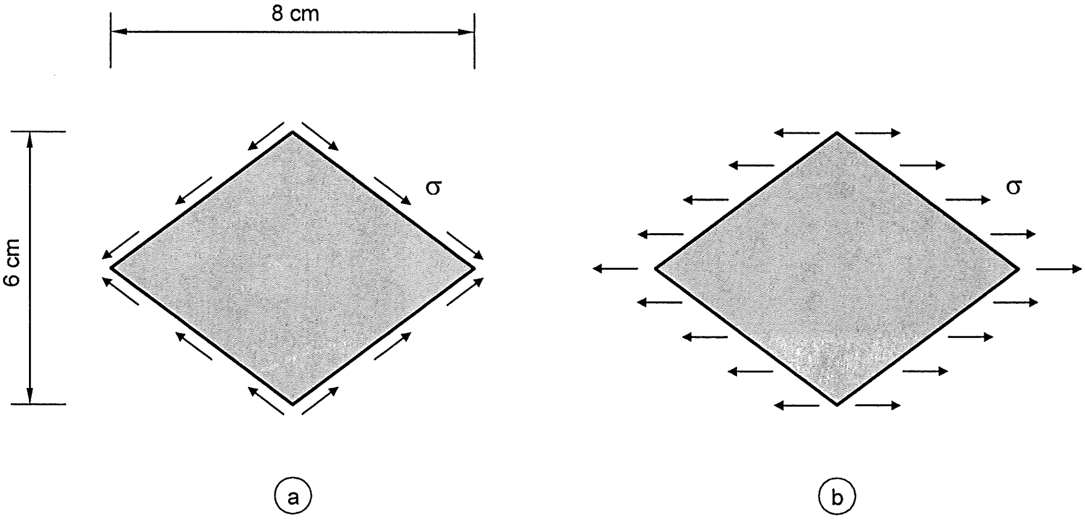
$$\boxed{\Delta V = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \cdot V = 3{,}175 \cdot 10^{-3} \cdot 60000 = 190{,}5 \text{ mm}^3}$$

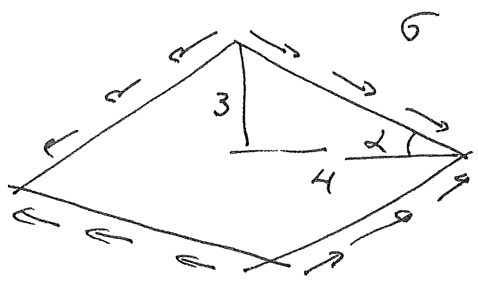
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Elasticidad (15/11/14)

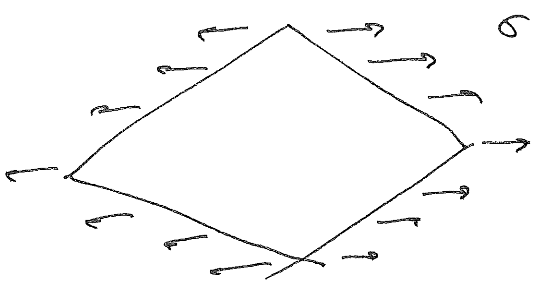
****

Una placa con forma de rombo está sometida a dos estados tensionales diferentes (a) y (b), tal y como se indica en la figura. El eje horizontal de la placa mide 8 cm y el eje vertical 6 cm. Todas las tensiones indicadas tienen el mismo valor σ. La tensión de fluencia del material es $\sigma_f = 300$ MPa. Obtener el máximo valor admisible de σ sin que se alcance la fluencia cuando se superponen en la placa simultáneamente los dos estados tensionales, aplicando el criterio de Tresca.



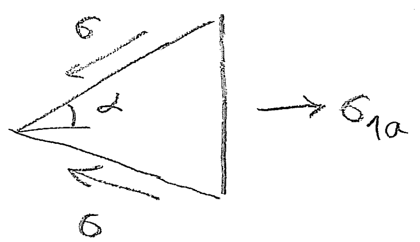


a



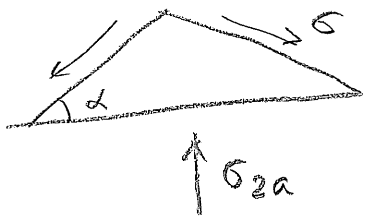
b

Por equilibrio a



$$\sigma_{1a} \cdot 6 = 2 \cdot \sigma \cdot 5 \cos\alpha = 2 \cdot \sigma \cdot \cancel{5} \, \frac{4}{\cancel{5}} \Rightarrow$$

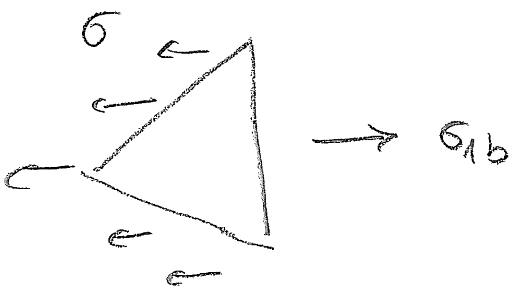
$$\boxed{\sigma_{1a} = \frac{4}{3}\sigma}$$ (tracción)



$$\sigma_{2a} \cdot 8 = 2\,\sigma \cdot 5 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2 \cdot \sigma \cdot \cancel{5} \cdot \frac{3}{\cancel{5}}$$

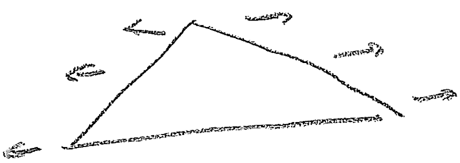
$$\boxed{\sigma_{2a} = +\frac{3}{4}\sigma}$$ (compresión)

Por equilibrio b



$$\sigma_{1b} \cdot 6 = 2 \cdot \sigma \cdot 5 \Rightarrow$$

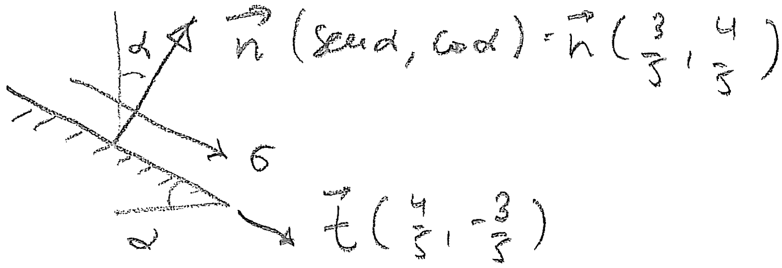
$$\boxed{\sigma_{1b} = \frac{5}{3}\sigma}$$



$$\boxed{\sigma_{2b} = 0}$$

Fórmula de Cauchy

(a)



$$\{\sigma_n\} = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5\\ 4/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\sigma_1\\ 4\sigma_2\end{pmatrix}\frac{1}{5}$$

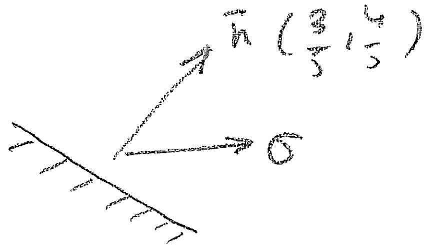
$$\sigma_{nn} = \{\sigma_n\}^T\{n\} = (3\sigma_1, 4\sigma_2)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3/5\\ 4/5\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{9\sigma_1 + 16\sigma_2 = 0}$$

$$\tau_{nt} = \{\sigma_n\}^T\{t\} = (3\sigma_1, 4\sigma_2)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4/5\\ -3/5\end{pmatrix} = \sigma \Rightarrow$$

$$12\sigma_1 - 12\sigma_2 = 25\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{25}{12}\sigma}$$

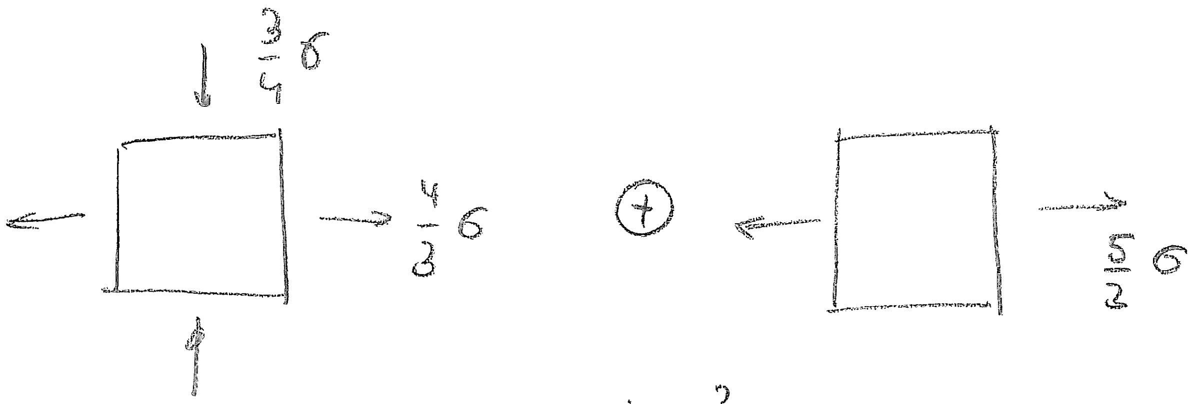
Resolviendo se obtiene $\sigma_{1a} = \frac{4}{3}\sigma$ y $\sigma_{2a} = -\frac{3}{4}\sigma$

(b)

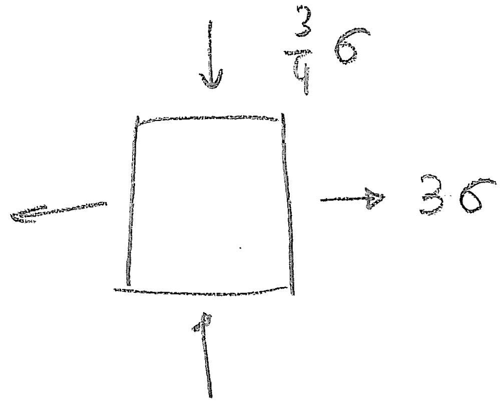


$$\{\sigma_n\} = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5\\ 4/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\sigma_1\\ 4\sigma_2\end{pmatrix}\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases}\frac{3\sigma_1}{5} = \sigma\\ \frac{4}{5}\sigma_2 = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_1 &= 5/3\,\sigma\\ \sigma_2 &= 0\end{aligned}}$$



Superposición



Tensión equivalente de Tresca:

$$\sigma_{eq}: \left|\sigma_{max} - \sigma_{min}\right| = 3\sigma + \frac{3}{4}\sigma = \frac{15}{4}\sigma \le \sigma_f\ (200\ \text{MPa}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma \le 80\ \text{MPa}}$$

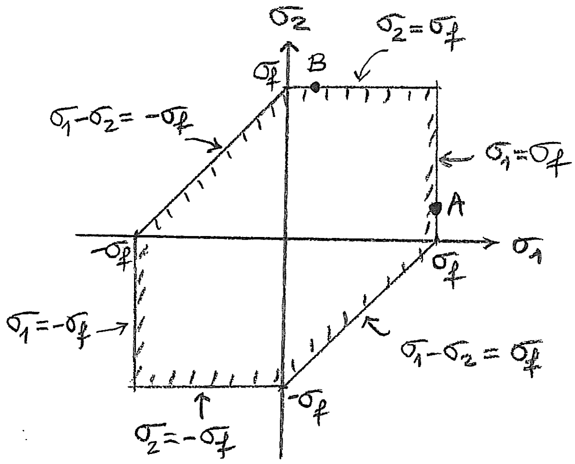
2. a) Representar el criterio de fluencia de Tresca en el caso biaxial de tensiones principales σ_1 y σ_2 (con σ_3=0). Justificar la representación.

b) Se sabe que un estado tensional que produce fluencia en un material es: σ_{xx}=100, σ_{yy}= 40, τ_{xy}=40 (MPa), con el resto de componentes nulas. Situar este punto en la representación del apartado a) y obtener la tensión de fluencia σ_f del material.

a) Criterio de Tresca : $\sigma_{máx} - \sigma_{mín} = \sigma_f$

Según $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ sean σ_1, σ_2 ó 0 tendremos 6 rectas posibles :

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_f \\ \sigma_1 - 0 = \pm\sigma_f \\ \sigma_2 - 0 = \pm\sigma_f \end{array}\right\}$$



b)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & 40 & 0 \\ 40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T. principales : $\left\{\begin{array}{l} \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 70 \pm 50 \begin{array}{l} \nearrow 120 \\ \searrow 20 \end{array} \\ \sigma_3 = 0 \end{array}\right.$

$$\sigma_{máx} - \sigma_{mín} = 120 - 0 = \sigma_f \longrightarrow \boxed{\sigma_f = 120 \text{ MPa}}$$

Se corresponde al punto (120, 20) ó al (20, 120) en el espacio $\sigma_1 - \sigma_2$, señalados como A y B, respectivamente, en la gráfica.