AMPLIACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS

GRADO EN TECNOLOGÍA INDUSTRIAL

5 DE JULIO DE 2014

Nota: el examen se realizará de forma ininterrumpida (sin descanso intermedio), y se valorará sobre 35 puntos.

1.- Los siguientes puntos dato provienen de cierta función $f(x)$:

x_i	x_0 0	x_1 1	x_2 1.5	x_3 11	x_4 11.5	x_5 12.5
y_i	0	1	0	0	1	0

Trabajando con aritmética de 3 dígitos significativos:

a) Calcula la tabla de diferencias. **(1.5p)**

b) Escribe el polinomio de Newton $p_5(x)$, e indica su grado. ¿Existirá algún otro polinomio distinto de éste que también pase por esos puntos? ¿De qué grado? **(1.5p)**

c) ¿En qué sentidos es óptimo el algoritmo de Hörner para evaluar polinomios? **(0.5p)**

d) Evalúa $p_5(6.8)$ óptimamente. **(1p)**

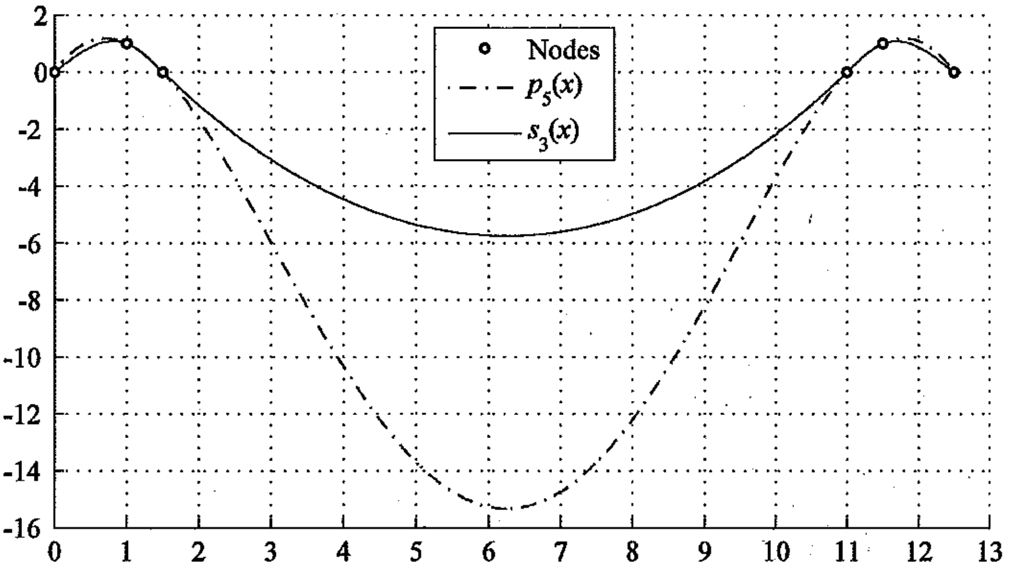
e) Escribe $p_5(x)$ mediante funciones base de Lagrange, y evalúalo en 6.8. Sabiendo que $p_5(6.8) = -15.0052$ ..., ¿te sorprende algo en el resultado obtenido? **(1.5p)**

f) Si tuvieras dos nuevos puntos dato de $f(x)$, describe los cálculos que harías para estimar el error cometido al aproximar $f(6.8)$ mediante $p_5(6.8)$. **(1.5p)**

g) Si $f(6.7) = 0$ y $f(6.9) = 0$, estima dicho error sin hacer ninguna operación. **(0.5p)**

2.- a) Explica con detalle en qué sentido son óptimos los esplines cúbicos naturales. **(2p)**

b) Comenta el resultado anterior en relación a la siguiente figura, que muestra el polinomio de interpolación $p_5(x)$ y el spline cúbico natural $s_3(x)$ por los datos de la tabla inicial del ejercicio anterior: **(1p)**



3.- La *función error de Gauss* (o simplemente *función error*) es una función especial (no elemental) que aparece en probabilidad, estadística, ecuaciones en derivadas parciales, etc., y que se define así:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Se quiere aproximar erf(0.3) usando la regla de Newton-Cotes de dos nodos abierta compuesta.

coeficientes

a) Calcula los pesos de la regla simple en términos de la distancia h entre nodos. **(1p)**

b) Calcula el término de error de la regla simple. **(1p)**

c) Calcula el término de error de la regla compuesta, justificando los pasos dados. **(1p)**

d) Sabiendo que la segunda derivada de $\exp(-t^2)$ es creciente en [0,0.3], ¿cuántos subintervalos N garantizan un error absoluto menor que $5\cdot 10^{-4}$? **(1p)**

e) Calcula con 5 decimales el valor que se obtiene con ese número de subintervalos. **(1p)**

f) Acota el error cometido en el apartado anterior y, sabiendo que el valor exacto es $\text{erf}(0.3) = 0.32862675946...$, comprueba que se cumple dicha acotación. **(1p)**

g) A partir del valor exacto y del orden de convergencia del método, estima el resultado que esperaríamos obtener con $N=4$ subintervalos. **(1p)**

h) El estándar IEEE 754 de aritmética de doble precisión maneja unos 16 dígitos decimales significativos (no exactamente 16 porque las operaciones se hacen en base 2). Calcula cuántos subintervalos N se requerirían para garantizar un error absoluto menor que 10^{-16}, y saca alguna conclusión práctica del resultado. **(1p)**

4.- a) Deducir la expresión del factor de amplificación del error de redondeo de una fórmula de derivación numérica para el cálculo de $f^{k)}(z)$. **(4p)**

b) Obtener una fórmula que aproxime el valor de $f''(z)$ de la forma más precisa posible a partir de la información proporcionada por la función $f(z)$ en los puntos z, $(z+2h)$, y $(z-2h)$. **(2p)**

c) Obtener el término de error. ¿De qué orden es la fórmula obtenida? **(2p)**

d) Determinar el tamaño h óptimo de la fórmula obtenida para la función $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. **(2p)**

5.- a) Comprobar que el siguiente problema tiene solución única en el intervalo [0,0.5]:

$$\begin{cases} y' = (1+x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ **(1p)**

b) Utilizando los valores de la siguiente tabla:

x_i	y_i	f_i
0	1	1
0.1	1.11071	1.22178
0.2	1.24608	1.49530
0.3	1.41199	1.83559

aplicar el método predictor-corrector de Adams para obtener dos puntos más de la solución del problema anterior con $h=0.1$. En cada punto realizar el número de iteraciones necesarias para obtener una precisión de 10^{-4} en el cálculo de la solución usando un esquema $\text{P(EC)}^{\text{S}}\text{E}$. Operar con redondeo a 5 decimales.

Predicciones: Adams-Bashforth de 4 pasos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right]$$

Correcciones: Adams-Moulton de 3 pasos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right]$$ **(5p)**

TIEMPO TOTAL: 3 horas