ÁLGEBRA LINEAL – Examen Final – Convocatoria extraordinaria (25/06/2014)

1. Sean B y C dos matrices cuadradas de orden 4, tales que:

|B|=2, Tr B=1, |C|=3, Tr C = -4.

Dadas las siguientes expresiones:

$|B\cdot C^2|$, $|B+C|$, $|2\cdot B^{-1}|$, Tr (3·B+C), Tr (B·C)

indicar cuáles se pueden calcular directamente a partir de las informaciones dadas sobre B y C, y obtener sus valores. Indicar por qué no se pueden calcular las otras expresiones. (0.5 puntos)

Solución:

Se trata de calcular las expresiones:

- $\left|B\cdot C^2\right| \underset{\text{por ser el det. de un producto de matrices el producto de los det.}}{=} |B|\cdot|C|^2 = 2\cdot 3^2 = 18.$
- $|B+C|$. Esta expresión no la podemos calcular a partir de los valores de los determinantes de las matrices B y C porque no hay ninguna propiedad que relacione el determinante de la suma de dos matrices con los determinantes de cada una de ellas.
- $\left|2\cdot B^{-1}\right| \underset{\text{por ser } |\alpha\cdot A|=\alpha^n\cdot|A| \text{ con } n=\text{orden de A}}{=} 2^4\cdot\left|B^{-1}\right| = 2^4\cdot\dfrac{1}{|B|} = 2^3 = 8.$
- $\mathrm{Tr}(3\cdot B+C) = 3\cdot\mathrm{Tr}(B)+\mathrm{Tr}(C) = 3\cdot 1-4 = -1$. Aquí se ha tenido en cuenta que al ser $\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ / a_{ii} los elementos de la diagonal principal de A, se cumple obviamente, que $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$ y $\mathrm{Tr}(\alpha\cdot A)=\alpha\cdot\mathrm{Tr}(A)\ \forall \text{escalar}\,\alpha.$
- $\mathrm{Tr}(B\cdot C)$. Esta expresión no podemos calcularla con los datos disponibles porque la matriz $B\cdot C$ se obtiene multiplicando las filas de B por las columnas de C, es decir, los elementos de su diagonal principal serán de la forma: $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot c_{ki}$, con lo cual, la suma de estos elementos no podemos obtenerla a partir de la Tr(B) y la Tr(C).

2. Se considera la matriz: $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$**, donde a,b,c y d son números reales. Se pide:**

a) Calcular el producto $A\cdot A^t$. (0.1puntos)

b) Hallar el determinante de $A\cdot A^t$, y a partir de él, obtener el determinante de A. (0.4 puntos)

Solución:

a) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & d & -c\\ c & -d & a & b\\ d & c & -b & a\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2\end{pmatrix}.$$

b) $\left|A\cdot A^t\right| \underset{\text{por ser matriz escalar}}{=} =(a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow$

$\left|A\cdot A^t\right|=|A|\cdot\left|A^t\right|=|A|^2 \Rightarrow |A|=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

3. Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Se considera la base B'= {1, x, x·(x-1), x·(x-1)·(x-2)}. Se pide:

a) Hallar las coordenadas del polinomio p(x)=3x^3+2x-5 en la base anterior B', de las dos formas siguientes:

a.1) Usando la definición de coordenadas de un vector. (0.25 puntos)

a.2) Usando la matriz P de cambio de base a partir de la base canónica de P$_3$. (0.25 puntos)

b) Sea el subespacio vectorial W={$\alpha_1+\alpha_2\cdot x-\alpha_2\cdot x^2+\alpha_1\cdot x^3$ /$\alpha_1,\alpha_2\in$ R}. Hallar las ecuaciones cartesianas de este subespacio en la base B'. (0.5 puntos)

Solución:

a.1) La base B' es $B'=\left\{1,x,x^2-x,(x^2-x)\cdot(x-2)=x^3-3\cdot x^2+2\cdot x\right\}$. Entonces se trata de expresar el polinomio p(x)=3x^3+2x-5 como combinación lineal de los vectores de la base B', esto es:

$$p(x)=3\cdot x^3+2\cdot x-5=b_0\cdot 1+b_1\cdot x+b_2\cdot(x^2-x)+b_3\cdot(x^3-3\cdot x^2+2\cdot x)=$$
$$=b_0\cdot 1+(b_1-b_2+2\cdot b_3)\cdot x+(b_2-3\cdot b_3)\cdot x^2+b_3\cdot x^3 \Rightarrow$$

Igualando los coeficientes correspondientes a las distintas potencias, se llega al sistema:

$$\begin{cases}-5=b_0\\ 2=b_1-b_2+2\cdot b_3\\ 0=b_2-3\cdot b_3\\ 3=b_3\end{cases} \Rightarrow -5=b_0,\ 3=b_3,\ 9=b_2,\ 5=b_1\Rightarrow$$
$$p(x)=-5\cdot 1+5\cdot x+9\cdot(x^2-x)+3\cdot(x^3-3\cdot x^2+2\cdot x).$$

Es decir, las coordenadas de p(x) en la base B' son (-5, 5, 9, 3)^t.

a.2) Sabemos que, cuando en un espacio vectorial pasamos de una base $B=\left\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},...,\mathbf{e_n}\right\}$ a otra $B'=\left\{\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},...,\mathbf{e'_n}\right\}$, se cumple la siguiente relación matricial entre las coordenadas de un vector $\mathbf{x}\in E$: $C_B(\mathbf{x})=P\cdot C_{B'}(\mathbf{x})$, siendo P la matriz de cambio de base, que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B' respecto a los vectores de la base B:

$P=\left(\overset{\uparrow}{C_B(\mathbf{e'_1})}\ \dots\ \overset{\uparrow}{C_B(\mathbf{e'_n})}\right)\Rightarrow$ En este caso, como la base B es la usual, B={1,x,x^2,x^3} y la

$B'=\{1, x, x^2-x, x^3-3\cdot x^2+2\cdot x\}\ \Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$ Para obtener las coordenadas en la nueva base B' del polinomio $p(x)=3\cdot x^3+2\cdot x-5$, que tiene por coordenadas en la base B, $(-5, 2, 0, 3)^t$, hay que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix}-5\\2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-5=b_0\\2=b_1-b_2+2\cdot b_3\\0=b_2-3\cdot b_3\\3=b_3\end{cases}$$ que es el mismo que el del apartado **a.1)**, es decir, obtenemos el mismo vector coordenado que antes: $C_{B'}(p)=(-5, 5, 9, 3)^t$, lo cual es evidente, por ser las coordenadas de un vector en una base únicas.

b) Sea W el subespacio W={$\alpha_1+\alpha_2\cdot x-\alpha_2\cdot x^2+\alpha_1\cdot x^3\ /\alpha_1,\alpha_2\in$ R}, y sea $p(x)\in W$ $\Rightarrow p(x)=\alpha_1+\alpha_2\cdot x-\alpha_2\cdot x^2+\alpha_1\cdot x^3=\alpha_1\cdot(1+x^3)+\alpha_2\cdot(x-x^2)\Rightarrow$ W= Span$\{1+x^3, x-x^2\}$.

Además el conjunto $\{1+x^3, x-x^2\}$ es también base de W porque los dos polinomios son linealmente independiente, como puede demostrarse considerando una relación nula entre ellos: $\alpha_1\cdot(1+x^3)+\alpha_2\cdot(x-x^2)=0=\alpha_1+\alpha_2\cdot x-\alpha_2\cdot x^2+\alpha_1\cdot x^3\ \forall\ x\ \Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$. Entonces W tendrá dos ecuaciones cartesianas.

Empezamos obteniendo tales ecuaciones en la base B={1,x,x^2,x^3}. Para ello, si denotamos por $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3$ un polinomio cualquiera, para que pertenezca a $W=\text{Span}\{1+x^3, x-x^2\}$, se tendrá que cumplir que el rango de la matriz $\begin{pmatrix}1&0&a_0\\0&1&a_1\\0&-1&a_2\\1&0&a_3\end{pmatrix}$ sea 2, es decir, todos sus menores de orden 3 deben ser 0, lo cual conduce a: $0=\begin{vmatrix}1&0&a_0\\0&1&a_1\\0&-1&a_2\end{vmatrix}=a_2+a_1$, $0=\begin{vmatrix}1&0&a_0\\0&1&a_1\\1&0&a_3\end{vmatrix}=a_3-a_0\Rightarrow$ Las ecuaciones cartesianas de W en B son: $\begin{cases}a_2+a_1=0\\a_3-a_0=0\end{cases}$. Pero teniendo en cuenta la relación vista entre las coordenadas en las dos bases B y B':

$$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_0=b_0\\a_1=b_1-b_2+2\cdot b_3\\a_2=b_2-3\cdot b_3\\a_3=b_3\end{cases}$$ $\Rightarrow$ sustituyendo estas relaciones en las dos ecuaciones anteriores, obtenemos las ecuaciones cartesianas de W en la base B': $\begin{cases}b_1-b_2+2\cdot b_3+b_2-3\cdot b_3=0\\b_3-b_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1-b_3=0\\b_3-b_0=0\end{cases}$.

4. Demostrar que si S = {u_1, u_2,…, u_p} es un sistema ortogonal de vectores de un espacio euclídeo, E, entonces S es un sistema libre. (1 punto)

Solución:

Sea S = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$,…, $\mathbf{u_p}$} un sistema ortogonal respecto al producto escalar definido en el espacio vectorial E. Se trata de demostrar que entonces es también un sistema libre.
Para ello, establecemos una relación nula entre tales vectores, es decir, suponemos que existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ escalares de $\mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + ... + \alpha_p \mathbf{u_p} = \mathbf{0}.$$

Si se multiplica escalarmente esta expresión por un vector $\mathbf{u_j}$ de S, se obtiene:
$< \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + ... + \alpha_p \mathbf{u_p} , \mathbf{u_j} > = < \mathbf{0} , \mathbf{u_j} > = \mathbf{0} \Rightarrow$ por la bilinealidad del producto escalar:

$$\alpha_1 < \mathbf{u_1} , \mathbf{u_j} > + \alpha_2 < \mathbf{u_2} , \mathbf{u_j} > + ... + \alpha_p < \mathbf{u_p} , \mathbf{u_j} > = \alpha_j < \mathbf{u_j} , \mathbf{u_j} > = 0,$$

ya que al ser S un sistema ortogonal los productos escalares $< \mathbf{u_i} , \mathbf{u_j} > = 0 \quad \forall\, i \neq j$,
pero entonces, la igualdad anterior implica que $\alpha_j = 0$. Y como esto es cierto para cualquier $j \in \{1,2,...,p\}$, se concluye que: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$.
Es decir, queda probado que los vectores: $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p}$ son linealmente independientes.

5. En $\mathbb{R}^3$ se define un producto escalar cuya matriz en la base canónica B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Obtener una base ortonormal B^* a partir del sistema de vectores S, siendo S=$\left\{(1 \ \ 0 \ \ 0)^t, (0 \ \ 1 \ \ 0)^t, (0 \ \ 0 \ \ 1)^t, (1 \ \ 1 \ \ 1)^t\right\}$ utilizando el método de ortogonalización de Gram- Schmidt. (0.5 puntos)

b) Hallar la matriz de paso de B a B^*. (0.25 puntos)

c) Obtener la expresión matricial del producto escalar en la base B^*. (0.25 puntos)

Solución:

a) S es un sistema ligado porque el vector $(1 \ \ 1 \ \ 1)^t$ es combinación lineal de los tres vectores anteriores de S, por lo que para obtener una base ortonormal, basta ortogonalizar por Gram-Schmidt los tres primeros vectores de S: $\left\{(1 \ \ 0 \ \ 0)^t = \mathbf{e}_1, (0 \ \ 1 \ \ 0)^t = \mathbf{e}_2, (0 \ \ 0 \ \ 1)^t = \mathbf{e}_3\right\}$, para lo cual hacemos:

$B^*=\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ /

- $\mathbf{w_1} = \mathbf{e_1} = (1,0,0)^t$
- $\mathbf{w_2} = \mathbf{e_2} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} \,/ < \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} > = 0 = < \mathbf{w_1}, \mathbf{e_2} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} > = < \mathbf{w_1}, \mathbf{e_2} > + \alpha_1 \cdot < \mathbf{w_1}, \mathbf{w_1} > \rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{-< \mathbf{w_1}, \mathbf{e_2} >}{< \mathbf{w_1}, \mathbf{w_1} >} = \frac{-< \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} >}{< \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} >} \underset{\text{teniendo en cuenta G}}{=} \frac{-0}{2} = 0 \rightarrow \quad \mathbf{w_2} = \mathbf{e_2} = (0,1,0)^t$$

$$\bullet\ \mathbf{w_3} = \mathbf{e_3} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{w_2} \ /$$

$$- \quad <\mathbf{w_1}, \mathbf{w}_3> = 0 = <\mathbf{w_1}, \mathbf{e_3} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{w_2}> = <\mathbf{w_1}, \mathbf{e_3}> + \alpha_1 \cdot <\mathbf{w_1}, \mathbf{w_1}> \rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{-<\mathbf{w_1}, \mathbf{e_3}>}{<\mathbf{w_1}, \mathbf{w_1}>} = \frac{-<\mathbf{e_1}, \mathbf{e_3}>}{<\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}>} \underset{\text{teniendo en cuenta G}}{=} \frac{-1}{2}$$

$$- \quad <\mathbf{w_2}, \mathbf{w}_3> = 0 = <\mathbf{w_2}, \mathbf{e_3} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{w_2}> = <\mathbf{w_2}, \mathbf{e_3}> + \alpha_2 \cdot <\mathbf{w_2}, \mathbf{w_2}> \rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{-<\mathbf{w_2}, \mathbf{e_3}>}{<\mathbf{w_2}, \mathbf{w_2}>} = \frac{-<\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}>}{<\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}>} \underset{\text{teniendo en cuenta G}}{=} \frac{-0}{1} = 0 \rightarrow \ \mathbf{w_3} = \mathbf{e_3} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e_1} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)^t$$

Por tanto, el sistema ortogonal obtenido es $\left\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, \left(\frac{-1}{2}, 0, 1\right)^t\right\}$, pero como nos piden una base ortonormal, calculamos las normas de estos tres vectores y dividimos cada uno de ellos por tales normas:

$$\left\|(1,0,0)^t\right\| = \|\mathbf{e_1}\| \underset{\text{teniendo en cuenta G}}{=} \sqrt{2} \ , \quad \left\|(0,1,0)^t\right\| = \|\mathbf{e_2}\| \underset{\text{teniendo en cuenta G}}{=} \sqrt{1} = 1 \ ,$$

$$\left\|\left(\frac{-1}{2}, 0, 1\right)^t\right\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}, 0, 1\right) . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\left(0, 0, \frac{3}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ \Rightarrow$$

La base ortonormal B^* que nos piden es:

$$B^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,0)^t = \mathbf{e}_1^*, \ (0,1,0)^t = \mathbf{e}_2^*, \ \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{-1}{2}, 0, 1\right)^t = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t = \mathbf{e}_3^* \right\}.$$

b) La matriz de paso entre la base canónica B y esta B^*, es, como ya hemos comentado en problemas anteriores:

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_B(\mathbf{e}_1^*) & C_B(\mathbf{e}_2^*) & C_B(\mathbf{e}_3^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

c) Como la base B^* es ortonormal, la matriz asociada al producto escalar en dicha base, que como sabemos tiene por elementos $G_{B^*} = \left(\langle \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j^* \rangle\right)_{i\,,\,j=1,2,3}$, coincide con la matriz identidad de orden 3.

Por tanto, si consideramos que $C_{B^*}(\mathbf{x}) = (x'_1, x'_2, x'_3)$ y $C_{B^*}(\mathbf{y}) = (y'_1, y'_2, y'_3) \Rightarrow$ la expresión matricial del producto escalar de tales vectores **x** e **y** será: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (x'_1, x'_2, x'_3) \cdot I \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x'_i \cdot y'_i$.

6. **Sea V un subespacio vectorial real de dimensión 3, en el que se considera una base B ={u_1, u_2, u_3}. Se considera el endomorfismo f: V $\longrightarrow$ V del que se sabe que:**
   i) **el vector u_1 + u_2 +2u_3 se transforma en sí mismo.**
   ii) $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t \in V \,/\, x_2 - x_3 = 0\right\}$ **es un subespacio propio de f.**
   iii) **la traza de la matriz A del endomorfismo f en la base B es 5.**

   Se pide:
   a) **Hallar los autovalores de f.** **(0.75 puntos)**
   b) **Obtener la matriz A de f en la base B, obteniendo previamente las imágenes de los vectores de la base B.** **(0.75 puntos)**
   c) **Hallar la matriz más sencilla posible semejante a A así como la matriz de paso P.** **(0.25 puntos)**

<u>Solución:</u>

a) Como nos dicen que el vector **v=u₁ + u₂ +2u₃** se transforma en sí mismo $\Rightarrow f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} = 1\cdot\mathbf{v} \Rightarrow$ **v** es vector propio del endomorfismo f asociado al autovalor λ_1=1.

Como también nos dicen que $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t \in V \,/\, x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_3,\ \forall x_1\right\}$ es un subespacio propio de f y este subespacio tiene dimensión 2, siendo una base de él la formada por los vectores $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$, esto significa que el autovalor correspondiente λ_2 tiene multiplicidad geométrica 2. Pero sabemos que la multiplicidad algebraica es siempre mayor o igual que la geométrica, por lo que tal autovalor λ_2 va a ser doble.

Finalmente, como se sabe que la traza de la matriz A del endomorfismo f en la base B es 5, y sabemos que la suma de todos los autovalores de un endomorfismo coincide con la traza de la matriz asociada al mismo cuando se fija una base en el espacio V $\Rightarrow$ se debe cumplir la relación:

$$5 = \lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 = 1 + 2\cdot\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$

Por tanto, los autovalores de f son λ_1=1 y $\lambda_2 = 2$ (doble).

b) Se trata de hallar $f(\mathbf{u_1}), f(\mathbf{u_2}), f(\mathbf{u_3})$, para lo cual tenemos en cuenta los datos que nos dan:

$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \Rightarrow f(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2\cdot\mathbf{u_3}) = f(\mathbf{u_1}) + f(\mathbf{u_2}) + 2\cdot f(\mathbf{u_3}) = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2\cdot\mathbf{u_3}$.

Y como una base del subespacio propio U, asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$, está formada por los vectores $\{(1,0,0) = \mathbf{u_1}, (0,1,1) = \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}\} \Rightarrow$

$f(\mathbf{u_1}) = 2\cdot\mathbf{u_1}$, $f(\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}) = 2\cdot(\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}) = f(\mathbf{u_2}) + f(\mathbf{u_3}) \Rightarrow$ Se trata de resolver el sistema:

$$\begin{cases} f(\mathbf{u_1}) = 2\cdot\mathbf{u_1} = (2,0,0) \\ f(\mathbf{u_2}) + f(\mathbf{u_3}) = 2\cdot(\mathbf{u_2}+\mathbf{u_3}) = (0,2,2) \\ f(\mathbf{u_1}) + f(\mathbf{u_2}) + 2\cdot f(\mathbf{u_3}) = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2\cdot\mathbf{u_3} = (1,1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f(\mathbf{u_2}) + f(\mathbf{u_3}) = (0,2,2) \\ f(\mathbf{u_2}) + 2\cdot f(\mathbf{u_3}) = (1,1,2) - (2,0,0) = (-1,1,2) \end{matrix}$$

$\xrightarrow{\text{Restando estas 2 ecuaciones}} f(\mathbf{u_3}) = (-1,1,2) - (0,2,2) = (-1,-1,0)$ y despejando $f(\mathbf{u_2}) = (1,3,2) \Rightarrow$

La matriz A asociada al endomorfismo en la base B es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

c) La matriz A es obviamente diagonalizable, por los resultados anteriores, ya que tiene 3 vectores propios linealmente independientes: el vector **v**=**u₁** + **u₂** +2**u₃** asociado al autovalor $\lambda_1=1$ y los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}+\mathbf{u_3}$ asociados al autovalor doble $\lambda_2=2$. Por tanto, la matriz semejante a A más sencilla posible es la matriz diagonal $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ y la matriz de paso $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$, cumpliéndose la relación de semejanza $\mathrm{D}=\mathrm{P}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{P}$, como podría comprobarse fácilmente.

7. a) Estudiar, utilizando un método numérico, si la siguiente matriz es definida positiva o no

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\-1&2&-1&1\\0&-1&2&0\\-1&1&0&5\end{pmatrix}$$ **(0.75 puntos)**

b) Usando el resultado del apartado anterior resolver el sistema

$$\begin{cases}x-y=1\\-x+2y-z=-2\\-y+2z=-1\end{cases}$$ **(0.75 puntos)**

<u>Solución:</u>

a) Una matriz A simétrica es definida positiva, si y solo si dicha matriz se puede factorizar de forma única mediante la factorización de Cholesky, A = L·L^T con los $l_{ii}>0$. Se trata de comprobar entonces si esta factorización es posible:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\-1&2&-1&1\\0&-1&2&0\\-1&1&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}&0&0&0\\l_{21}&l_{22}&0&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}&0\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&l_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11}&l_{21}&l_{31}&l_{41}\\0&l_{22}&l_{32}&l_{42}\\0&0&l_{33}&l_{43}\\0&0&0&l_{44}\end{pmatrix}$$ =Multiplicando las filas de L por las columnas de L^T

$$=\begin{pmatrix}l_{11}^2&l_{21}l_{11}&l_{31}l_{11}&l_{41}l_{11}\\l_{21}l_{11}&l_{21}^2+l_{22}^2&l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32}&l_{41}l_{21}+l_{22}l_{42}\\l_{31}l_{11}&l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32}&l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2&l_{41}l_{31}+l_{42}l_{32}+l_{43}l_{33}\\l_{41}l_{11}&l_{41}l_{21}+l_{42}l_{22}&l_{41}l_{31}+l_{42}l_{32}+l_{43}l_{33}&l_{41}^2+l_{42}^2+l_{43}^2+l_{44}^2\end{pmatrix}$$

El algoritmo que se obtiene multiplicando las filas de L por las columnas de L^T e igualando a los correspondientes elementos $a_{i\,j}$ es el siguiente:

<u>Paso k=1</u>:
$l_{11}^2 = 1 \rightarrow \boxed{l_{11} = 1 > 0}$
A continuación se obtiene la 1ª columna de L
$l_{21}l_{11} = -1 \rightarrow l_{21} = -1$
$l_{31}l_{11} = 0 \rightarrow l_{31} = 0$
$l_{41}l_{11} = -1 \rightarrow l_{41} = -1$

<u>Paso k=2</u>: Se comienza obteniendo el elemento l_{22}
$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 2 \rightarrow \boxed{l_{22} = 1 > 0}$

A continuación se obtiene la 2ª columna de L,
$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = -1 \rightarrow l_{32} = -1$
$l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22} = 1 \rightarrow l_{42} = 0$

<u>Paso k=3</u>: Se obtiene el elemento l_{33}
$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 2 \rightarrow \boxed{l_{33} = 1 > 0}$

Obtenemos ahora la 3ª columna de L
$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = 0 \rightarrow l_{43} = 0$

<u>Paso k=4</u>: Por último obtenemos el elemento l_{44}, en el
$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = 5 \rightarrow \boxed{l_{44} = 2 > 0}$
Como se han podido obtener todos los elementos de la diagonal principal de L, la matriz A admite la factorización de Cholesky y por lo tanto dicha matriz A es definida positiva.

b) Se trata de resolver usando el resultado anterior el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = -2 \\ -y + 2z = -1 \end{cases}$$

Como la matriz de los coeficientes de este sistema coincide con el menor principal A_{33} de orden 3 del apartado a, la matriz L que nos permite factorizarla sería $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Es decir, la factorización por Cholesky de la matriz del sistema será $A_{33} = L \cdot L^T$, por lo que el sistema podemos expresarlo en la forma:

$A_{33} \cdot \vec{x} = \vec{b} \rightarrow L \cdot L^T \cdot \vec{x} = \vec{b}$ y para resolverlo basta resolver los dos sistemas triangulares siguientes:

1. $L \cdot \vec{y} = \vec{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{progresiva}]{\text{Sustitución}} \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $L^T \cdot \vec{x} = \vec{y} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{regresiva}]{\text{Sustitución}} \begin{matrix} x = -2 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv \text{Solución del sistema.}$

8. Estudiar la convergencia o divergencia del método iterativo de Gauss-Seidel para la resolución del sistema

$$\begin{cases} x + t = 2 \\ x + 5y - t = 5 \\ x + z = 1 \\ 2z + t = 5 \end{cases}$$

(1.5 puntos)

<u>Solución:</u>

La matriz de los coeficientes de este sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ no es estrictamente diagonal dominante, ni puede serlo mediante ninguna reordenación y tampoco es simétrica por lo que no puede ser definida positiva, por tanto, para estudiar la convergencia o divergencia del método de Gauss-Seidel hay que estudiar el radio espectral de la matriz T_G asociada al método es decir, de la matriz $T_G = -(L+D)^{-1} \cdot U$, siendo las matrices L, D y U tales que $A = L + D + U \Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular $(L+D)^{-1}$ resolvemos los 4 sistemas $(L+D) \cdot \mathbf{x_j} = \mathbf{e_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $j = 1, 2, \ldots, 4 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & & & & & = & \\ x_1 & + & 5x_2 & & & = & \\ x_1 & & & + & x_3 & = & \\ & & & 2x_3 & + \; x_4 & = & \end{array}\right. \quad \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Sistemas que tienen por solución:

$$\left\{\begin{array}{cccc} \overset{(1)}{x_1 = 1} & \overset{(2)}{x_1 = 0} & \overset{(3)}{x_1 = 0} & \overset{(4)}{x_1 = 0} \\ x_2 = -1/5 & x_2 = 1/5 & x_2 = 0 & x_2 = 0 \\ x_3 = -1 & x_3 = 0 & x_3 = 1 & x_3 = 0 \\ x_4 = 2 & x_4 = 0 & x_4 = -2 & x_4 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow (L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T_G = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Sus autovalores son:}$$

$$|T_G - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 \cdot (2+\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ (triple) } \lambda_2 = -2 \Rightarrow$$

$$\rho(T_G) = \max\{|\lambda| / \lambda \text{ autovalor}\} = 2 > 1 \Rightarrow \text{ El método de Gauss} - \text{Seidel para el sistema diverge.}$$

9. Calcular mediante mínimos-cuadrados el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a $f(x) = x \cdot |x|$ **en el intervalo [-2, 2] utilizando polinomios ortogonales y considerando como función de peso** $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $t \in [-1,1]$ **.**

<u>**Notas:**</u> **La relación de recurrencia para los polinomios de Chebyshev es:** $T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$**, con** $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Las normas son: $\| T_n(x) \|^2 = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } n \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = 0 \end{cases}$

En los cálculos utilizar: $\int_0^{\pi/2} \cos^3 z \, dz = 2/3$ **.** **(1.25 puntos)**

<u>**Solución:**</u>

Primeramente se debe efectuar el siguiente cambio de variable:

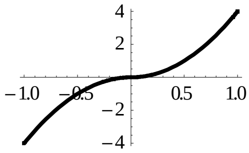
$$t \in [-1,1] \Rightarrow x \in [-2,2]$$

$$t = cx + d \quad / \quad \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x = -2 \\ t = 1 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 = -2c + d \\ 1 = 2c + d \end{cases} \Rightarrow d = 0, c = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cdot t$$

Así, la función a considerar será:

si $f(x) = x\cdot|x| \Rightarrow f(t) = 2\cdot t\cdot|2\cdot t| = 4\cdot t\cdot|t| \quad \forall t \in [-1, 1]$



Si queremos aproximar la función mediante un polinomio de grado 2, utilizando los polinomios ortogonales de Chebyshev, debemos considerar como base del subespacio aproximante:

$B = \{T_0(t)=1,\ T_1(t)=t,\ T_2(t)=2t^2-1\}$ que se ha obtenido a partir de la relación de recurrencia dada en el enunciado. Así, el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a la función es:

$$q(t)=\lambda_0\cdot T_0(t)+1+\lambda_1\cdot T_1(t)+\lambda_2\cdot T_2(t)$$

con

$$\lambda_j=\frac{\int_a^b w(t)\cdot f(t)\cdot T_j(t)dt}{\int_a^b w(t)T_j^2(t)dt}=\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}4t\cdot|t|\cdot T_j(t)dt}{\|T_j(t)\|^2}\quad \forall\, j=0,1,2 \ \Rightarrow$$

$$\lambda_0=\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot 4t\cdot|t|\,dt}{\|T_0(t)\|^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}_{\text{par}}\cdot 4\underbrace{t}_{\text{impar}}\cdot\underbrace{|t|}_{\text{par}}}_{\text{impar}}dt=0$$

$$\lambda_1=\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}4t\cdot|t|\cdot t\,dt}{\|T_1(t)\|^2}=\frac{\int_{-1}^{1}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,4t\cdot|t|\cdot t}^{\text{par}}\,dt}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,4t\cdot|t|\cdot t}^{\text{par}}\,dt=$$

$$=\frac{16}{\pi}\cdot\int_0^1\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt\ \left\{\begin{array}{l}\text{cambio}: t=\cos z\\ \text{si } t=0\Rightarrow z=\pi/2\\ \text{si } t=1\Rightarrow z=0\end{array}\right.\ \Rightarrow=\frac{16}{\pi}\cdot\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^3 z}{\text{sen } z}(-\text{sen } z)dz=$$

$$=\frac{16}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^3 z\,dz=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{3\pi}$$

$$\lambda_2 = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} 4t\cdot|t|\cdot(2t^2-1)dt}{\|T_2(t)\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} 4t\cdot|t|\cdot(2t^2-1)dt}{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}_{\text{par}} 4\cdot \underbrace{t}_{\text{impar}} \cdot \underbrace{|t|}_{\text{par}} \cdot \underbrace{(2t^2-1)}_{\text{par}}}_{\text{impar}} dt = 0$$

Luego, el polinomio mejor aproximación será: $q(t)= \frac{32}{3\pi}\cdot t$.

Deshaciendo el cambio de variable: $t=\frac{x}{2}$, nos queda: $q(x)= \frac{32}{3\pi}\cdot\frac{x}{2}=\frac{16}{3\pi}\cdot x$.