eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Matematika Aplikatua Saila
Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola
Euskal Herriko Unibertsitatea
Rafael Moreno “Pitxitxi” 3 Pasealekua
48013 Bilbao

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

BIGARREN DEIALDIA 2013-2014

***Emaitzen argitalpena**: 2014ko ekainaren 30an 18:00etan.*
***Azterketen berrikuspena**: 2014ko uztailaren 4an 11:00etan (7 I 1 gela).*

---

1. ARIKETA

A ATALA. Enpresa batek ikasketa maila ezberdina duten 30 eta 50 urte arteko emakume langileentzat produktu-gama berri baten salmenta bideratu nahi du. Horretarako merkatu-ikerketa bat eskatu du, eta aukeratutako emakumeen laginetik honako emaitzak lortu dira:

- %30.25ak lehen hezkuntza du eta hauetatik %40.25a lanean dago.
- %34.90ak bigarren hezkuntza bukatua du eta hauetatik %62.12a lanean dago.
- Unibertsitate ikasketak dituen %30.10etik %80.15a lanean dago.
- %4.75ak doktoregoren bat lortu du, eta hauen okupazio tasa %94.60koa da.

(1.) Emandako informazioa taula batean antolatu eta lanean dauden emakumeen ehuneko totala lortu (3 puntu).

Ondorengo oinarrizko gertaerak definitzen dira:

- $\boxed{H_1}$: Lehen hezkuntza duen pertsona
- $\boxed{H_2}$: Bigarren hezkuntza duen pertsona
- $\boxed{H_3}$: Unibertsitate ikasketak dituen pertsona
- $\boxed{H_4}$: Doktoregoa duen pertsona
- $\boxed{L}$: Lanean dagoen pertsona

Enuntziatuan emandako datuak interpretatuz, informazioa taula batean hurrengo eran antola daiteke:

	Hezkuntza	Langilea	$P(H_i)\cdot P(L\mid H_i)$
Lehen: H_1	%30,25	%40,25	0,1218
Bigarren: H_2	%34,90	%62,12	0,2168
Unibertsitate: H_3	%30,10	%80,15	0,2413
Doktoregoa: H_4	%4,75	%94,60	0,0449
	%100,00		%62,47

Probabilitate osoaren teorema aplikatuz:

$$\boxed{P(L)=\sum_{i=1}^{i=4} P(H_i)\cdot P(L\mid H_i)=0,6247 \longrightarrow 62,47\%}$$

(2.) Zoriz lagin horretako norbanako bat aukeratuz gero eta lanean dagoela betetzen bada, doktoregoren bat izateko probabilitatea lortu (2 puntu).

Bayes-en teorema aplikatuz:

$$\boxed{P\left(H_4 \mid L\right) = \frac{P\left(H_4\right) \cdot P\left(L \mid H_4\right)}{P\left(L\right)} = 0.0719}$$

B ATALA. *r* zuzenaren gainean bost puntu marrazten dira, eta *r*-rekiko paraleloa den *s* zuzenaren gainean zortzi puntu. Bere erpinak marraztutako hamahiru puntuetatik hiru puntutan dituzten zenbat triangelu marraz daitezke? (5 puntu)

Triangelu bat zehazteko ***r*** zuzeneko puntu bat eta ***s*** zuzeneko bi puntu edota ***r*** zuzeneko puntu bat eta ***s*** zuzeneko bi puntu hartu behar dira.

- 1 Kasua (***r*** zuzeneko puntu bat eta ***s*** zuzeneko bi puntu). Triangelu kopurua:

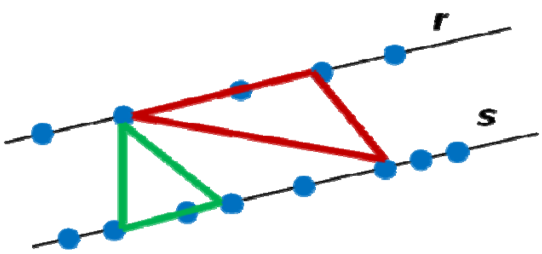
$$\boxed{K_1 = 5\binom{8}{2} = 5 \cdot \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 140}$$

- 2 Kasua (***s*** zuzeneko puntu bat eta ***r*** zuzeneko bi puntu). Triangelu kopurua:

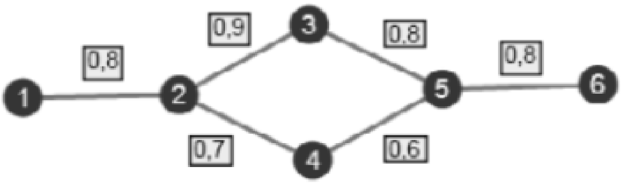
$$\boxed{K_2 = 8\binom{5}{2} = 8 \cdot \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 80}$$

Hortaz, planteatutako galderaren erantzuna:

$$\boxed{K = K_1 + K_2 = 220 \;\; \textit{triangelu}}$$ da



2. ARIKETA



A ATALA. Goiko irudiak 1. Nodoa eta 6. Nodoa konektatzen dituen ordenagailu sare bat adierazten du. Bi nodo batzen dituen bide bakoitzaren gainean nodo horiek komunikatuta egoteko probabilitatea agertzen da. Elkarren ondoan dauden bi nodoen konexioa beste konexioen egoerarekiko independentea dela suposatzen da.

(1.) 2. eta 5. Nodoak konektatuta egoteko probabilitatea lortu (2^5 puntu).

Hurrengo oinarrizko gertaera definitzen da $\boxed{K_{ij} : \text{"}i \text{ eta } j \text{ nodoak konektatuta daude"}}$.

Adibidez, K_{25}-ek 2. eta 5. nodoak konektatuta daudela adierazten du.

2. eta 5. nodoak konektatuta egongo dira 2. eta 3. eta 3. eta 5. nodoak aldi berean konektatuta badaude edota 2. eta 4. eta 4. eta 5. nodoak aldi berean konektatuta badaude, hau da:

$$\boxed{K_{25} \Leftrightarrow (K_{23} \wedge K_{35}) \vee (K_{24} \wedge K_{45})}$$

Ondorioz, eskatutako probabilitatea hurrengo eran kalkula daiteke:

$$\boxed{\mathbb{P}(K_{25}) = \mathbb{P}\left[(K_{23} \cap K_{35}) \cup (K_{24} \cap K_{45})\right]}$$

Kalkuluak sinplifikatzeko hurrengo notazioa erabiliko da: $\begin{cases} U = K_{23} \cap K_{35} \\ V = K_{24} \cap K_{45} \end{cases}$

Gertaerak independenteak direla kontuan izanik, ondorengoa dugu:

$$\mathbb{P}(K_{25}) = \mathbb{P}(U \cup V) = \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(U \cap V)$$

- $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(K_{23} \cap K_{35}) = \mathbb{P}(K_{23}) \cdot \mathbb{P}(K_{35}) = 0.9 \times 0.8 = 0.72$
- $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(K_{24} \cap K_{45}) = \mathbb{P}(K_{24}) \cdot \mathbb{P}(K_{45}) = 0.7 \times 0.6 = 0.42$
- $\mathbb{P}(U \cap V) = \mathbb{P}(U) \cdot \mathbb{P}(V) = 0.72 \times 0.42 = 0.3024$

Hortaz, 2. eta 5. nodoak konektatuta egoteko probabilitatea honakoa da:

$$\boxed{\mathbb{P}(K_{25}) = 0.8376}$$

Ondoren, ariketa beste era batera ebatziko da.

Izan bitez $\boxed{X_{ij} : \text{"}i \text{ eta } j \text{ nodoen arteko konekzioaren egoera"}}$ zorizko aldagaiak. Aldagai hauek bitarrak dira, hau da, 0 edo 1 balioa har ditzakete, hau da:

- $\boxed{X_{ij} = 0}$ berdintzak *i* eta *j* nodoak deskonektatuta daudela adierazten du.
- $\boxed{X_{ij} = 1}$ berdintzak *i* eta *j* nodoak konektatuta daudela adierazten du.

Adibidez, $X_{25}=0$ berdintzak 2. eta 5. nodoak deskonektatuta daudela adierazten du eta $X_{25}=1$-k berriz konektatuta daudela.

2. eta 5. nodoen arteko konexioa 3. eta 4. nodoetan zehar komunikatzen diren lau konexioen menpekoa da.

Hortaz, aipatutako konexioen arteko $2^4=16$ egoera posible guztiak aztertu behar dira, egoera hauek ekiprobableak (probabilitate berekoak) direla kontuan izanik.

Enuntziatuan emandako grafoa abiapuntu bezala harturik hurrengo taula ondoriozta daiteke, non:

- $X_{ij}^{n)}$ -k aztertutako n. kasuan i eta j nodoen arteko egoera adierazten duen
- $\mathbb{P}\left(X_{ij}^{n)}=0\right)=1-\mathbb{P}\left(X_{ij}^{n)}=1\right)$ den

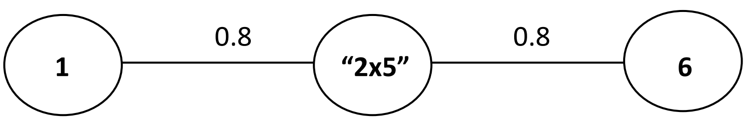
Kasua	$X_{23}^{n)}$	$X_{35}^{n)}$	$X_{24}^{n)}$	$X_{45}^{n)}$	$X_{25}^{n)}$	Probabilitatea: $X_{25}^{n)}=1$
n=0	0	0	0	0	0	0
n=1	0	0	0	1	0	0
n=2	0	0	1	0	0	0
n=3	0	0	1	1	1	0,1x0,2x0,7x0,6 = 0,0084
n=4	0	1	0	0	0	0
n=5	0	1	0	1	0	0
n=6	0	1	1	0	0	0
n=7	0	1	1	1	1	0,1x0,8x0,7x0,6 = 0,0336
n=8	1	0	0	0	0	0
n=9	1	0	0	1	0	0
n=10	1	0	1	0	0	0
n=11	1	0	1	1	1	0,9x0,2x0,7x0,6 = 0,0756
n=12	1	1	0	0	1	0,9x0,8x0,3x0,4 = 0,0864
n=13	1	1	0	1	1	0,9x0,8x0,3x0,6 = 0,1296
n=14	1	1	1	0	1	0,9x0,8x0,7x0,4 = 0,2016
n=15	1	1	1	1	1	0,9x0,8x0,7x0,6 = 0,3024
						0,8376

Beraz, lortu beharreko probabilitatea ondorengoa da:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_{25}=1\right)=\sum_{n=0}^{15}X_{25}^{n)}=0.8376}$$

(2.) 2. eta 5. Nodoak konektatuta daudela jakinda, 1. eta 6. Nodoak konektatuta egoteko probabilitatea lortu (2⁵ puntu).

Kasu honetan sarea hurrengoaren baliokidea da



Beraz, $\boxed{\mathbb{P}\left(X_{25}=1\right)=0.8\times0.8=0.64}$

Matematika Aplikatua Saila
Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola
Euskal Herriko Unibertsitatea
Rafael Moreno "Pitxitxi" 3 Pasealekua
48013 Bilbao

B ATALA. Izan bedi ondorengo funtzioa

$$f(x)=\begin{cases} 2x+k & x\in(1,2) \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

(1.) *k* konstante errealaren balioa lortu f(x) X zorizko aldagai jarraitu baten dentsitate funtzioa izateko (2 puntu).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_1^2 (2x+k)\,dx=\left(x^2+kx\right)\Big|_1^2=(4+2k)-(1+k)=1 \Leftrightarrow k=-2$$

(2.) X-en banaketa funtzioa lortu eta grafikoki adierazi (2 puntu).

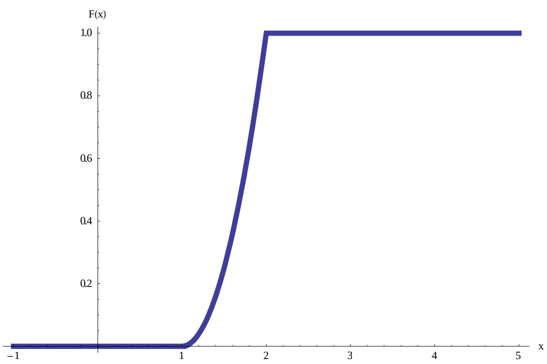
Izan bedi $X\in(1,2)$ zorizko aldagaia

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_1^x (2t-2)\,dt=\left(t^2-2t\right)\Big|_1^x=\left(x^2-2x\right)-(1-2)=x^2-2x+1$$

Hau da:

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0 & baldin & x\le 1 \\ x^2-2x+1 & baldin & 1<x<2 \\ 1 & baldin & x\ge 2 \end{cases}}$$

Adierazpen grafikoa



(3.) $E\left[X^3\right]$ kalkulatu (1 puntu).

$$E\left(X^3\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx=\int_1^2 x^3(2x-2)\,dx=\left(\frac{2x^5}{5}-\frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{64}{5}-8\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{4}\right)=\frac{49}{10}=4.9$$

unitate egokiak erabiliz.

3. ARIKETA

1999ko apirilaren 22ko Europar Kontseiluko 1999/30/EE Zuzentarauak, giroko airean dauden sufre dioxidoaren, nitrogeno dioxidoaren eta nitrogeno oxidoen, partikulen eta berunaren muga-balioei buruzkoak, IV Eranskineko 1. Atalean giza osasuna babesteko urteko muga-balioak ezartzen ditu. Hain zuzen ere, berunaren limitea 0.5 μg/m^3-koa da. Hiri bateko eskualde konkretu bateko 18 kontrol guneetan laginketa bat egiten da, ondorengo neurketak lortuz:

0.59	0.51	0.49	0.66	0.48	0.49	0.48	0.53	0.49
0.60	0.48	0.52	0.52	0.44	0.49	0.57	0.49	0.53

Izan bedi, X: “airean dagoen berun kantitatea (μg/m^3-tan neurtua)” zorizko aldagaia. Lagineko estatistikoak hurrengoak dira:

- Laginaren tamaina: $n = 18$
- Batezbestekoa: $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=18} x_i = 0.5200 \ {}^{\mu g}\!/\!{}_{m^3}$
- Bariantza: $s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=18} (x_i - \bar{x})^2 = 0.002744 \ \left({}^{\mu g}\!/\!{}_{m^3}\right)^2$
- Desbiderazio tipikoa: $s = 0.05239 \ {}^{\mu g}\!/\!{}_{m^3}$
- Kuasibariantza: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{i=18} (x_i - \bar{x})^2 = 0.002906 \ \left({}^{\mu g}\!/\!{}_{m^3}\right)^2$
- Kuasidesbiderazioa: $S = 0.05391 \ {}^{\mu g}\!/\!{}_{m^3}$

(1.) Emaitza teknikoak aztertu ondoren eta herritarren osasunerako egon daitekeen arriskuagatik, Ingurumen Zinegotzigoak %95eko konfiantza-mailaz airearen kalitateari buruzko Europar Zuzentarauak ezarritako muga gainditu den jakiteko ikerketa bat eskatu du. Zein da lortutako ondorioa? (3 puntu).

Populazioaren banaketa normala dela suposatuz, batezbesteko aritmetikoei buruzko kontraste bat egin behar da. Kontrastea alde bakarrekoa da, eskuinekoa, lagina txikia izanik, hortaz erabili beharreko probabilitate eredua Student-en t banaketa da:

- Planteatutako hipotesia: $\boxed{\begin{cases} H_0 : \mu = 0.5 \ {}^{\mu g}\!/\!{}_{m^3} \\ H_a : \mu > 0.5 \ {}^{\mu g}\!/\!{}_{m^3} \end{cases}}$
- Askatasun graduak: $\nu = 18 - 1 = 17$
- Konfiantza-maila: $1 - \alpha = 0.95$
- Adierazgarritasun maila: $\alpha = 0.05$

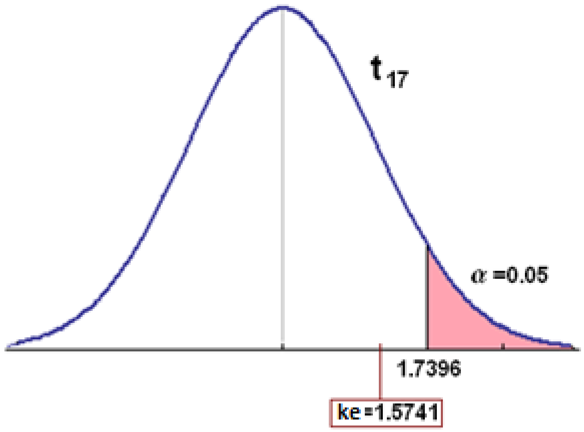
Kontrasterako estatistikoa, *KE*: $KE = t = \dfrac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma_{\hat{\mu}}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{0.52 - 0.5}{0.012705822} = 1.574081571$

Eskualde kritikoaren muga, *EK*: $t_1 = t_{\upsilon = n-1;\ \alpha} = t_{\upsilon = 17;\ \%5} = 1.739606716$

Eskualde kritikoa: $\boxed{EK = \left\{\ KE > t_1 = 1.739606716 \mid KE \sim t_{17}\ \right\}}$

$KE = t < t_1$ denez, %5 adierazgarritasun mailaz ez da hipotesi nulua errefusatzeko ebidentzia estatistiko nahikoa existitzen. Beraz, berunaren kontzentrazioak Europar Zuzentarauak ezarritako muga gainditzen ez duela ondorioztatzen da.

Matematika Aplikatua Saila
Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola
Euskal Herriko Unibertsitatea
Rafael Moreno "Pitxitxi" 3 Pasealekua
48013 Bilbao



(2.) Egindako kontrastearen I. eta II. motako erroreak zehaztu eta populazioaren gainean izan ditzaketen ondorio posibleak azaldu (2 puntu).

Planteatutako alde bakarreko kontrastean egindako erroreak hurrengoak dira:

- I. motako errorea: $\boxed{P(H_0 \ errefusatu \mid H_0 \ egia) = 0.05 = \alpha}$. Berunaren kontzentrazioak Europar Zuzentarauak ezarritako muga gainditzen duela ondorioztatzen da, nahiz eta errealitatean muga gainditzen ez duen. Hau larria da, ikerketaren emaitzak ezagutzera ematen direnean, hiritarren artean komunikabideek "alarma soziala" bezala izendatzen dutena sortzen baita.
- II. motako errorea: Berunaren kontzentrazioak Europar Zuzentarauak ezarritako arautegia betetzen duela ondorioztatzen da, nahiz eta errealitatean betetzen ez duen. Hau populazioaren osasunerako oso larria da, iritzi publikoak ezagutzen ez duen arren.

(3.) Zein da aurreko kontrastearen p-balioa? Lortutako emaitza azaldu (2 puntu).

Alde bakarreko, eskuineko, kontraste bat denez:

$$\boxed{t_{\upsilon=17;\ p-balioa} = t_1 \Leftrightarrow p-balioa = \mathbb{P}(KE > ke \mid H_0)}$$

$$p-balioa = \mathbb{P}\left(KE = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > 1.5741 \mid KE \approx t_{17} \right) = 0.06694705$$

$$\boxed{p-balioa = 0.06694705}$$

Hau da, lortutako balio kritikoak hipotesi nulua ez errefusatzeko erabakia sendotzen du (*H_0* errefusatzeko ebidentzia gutxi daude). Hipotesi nulua %6.69 adierazgarritasun mailaz onar daiteke, hau da, %93.31 konfiantza mailaz.

(4.) Aurreko ataletan planteatutakoaren arabera, eskatutako alde bakarreko kontrastea egokiena dela uste al duzu edo aurkako kontrastea planteatu beharko litzateke? (puntu 1).

Eskatutako ikerketan berunaren kontzentrazioak Europar Zuzentarauak ezarritako mugak gainditzen dituen ikertzea eskatzen da, beraz $H_a : \mu > 0.5 \ {}^{\mu g}/_{m^3}$ hipotesi alternatiboa planteatu da. Era zuzena, berunaren kontzentrazioa araudiak jarritako muga maximoaren azpitik dagoen planteatzea izango litzateke, hau da, hipotesi alternatiboa $H_a : \mu < 0.5 \ {}^{\mu g}/_{m^3}$ izan beharko litzateke.

(5.) 18 behaketa zituzten lagin ezberdinak erabiliz egindako kontrasteetan ezin izan da baieztatu arautegia betetzen ez dela, nahiz eta berunaren kontzentrazioak finkatutako muga gehienetan arinki gainditu duen. Airean dagoen berunaren kontzentrazioak Europar arautegia betetzen ez duelako susmoa dagoenez, 30 behaketa gainditzen dituen lagin handiago bat erabiliz kontrastea errepikatzea erabaki da. Zein da lagin tamaina minimoa susmoa baieztatzeko %99ko konfiantza-mailarekin? **Oharra**: Aurretik kalkulatutako lagin estatistikoak onartu (2 puntu).

- Laginaren tamaina: $n = ??$
- Konfiantza maila: $1-\alpha = 0.99$
- Adierazgarritasun maila: $\alpha = 0.01$

Planteatu beharrezko kontrastea ondorengoa da:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0.5 \ {}^{\mu g}/_{m^3} \\ H_a : \mu > 0.5 \ {}^{\mu g}/_{m^3} \end{cases}$$

Enuntziatuan ezarritako baldintzak erabiliz banaketa normala erabili behar da:

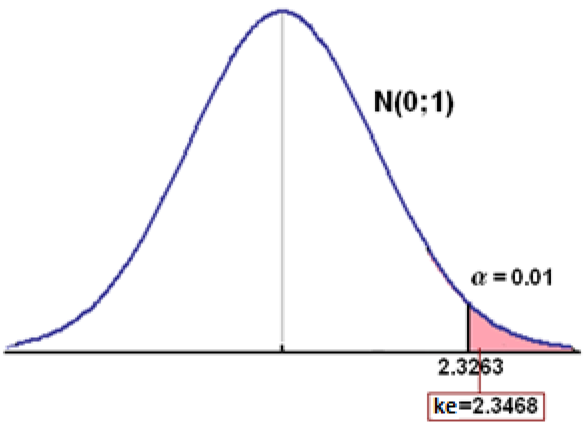
- Kontrasterako estatistikoa, *KE*: $ke = z = \dfrac{\hat{\mu}-\mu_0}{\sigma_{\hat{\mu}}} = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{0.52-0.5}{0.0539/\sqrt{n}}$
- Eskualde kritikoaren muga, *EK*: $z_1 = z_\alpha = z_{\%1} = 2.326347874$
- Eskualde kritikoa: $\boxed{EK = \left\{ KE > z_1 = 2.326347874 \mid KE \sim N(0;1) \right\}}$

(1.) ataleko baldintza berberak erabiliz, n-ren balio minimoa $z \geq z_1 = 2.326347874$ betetzen denean izango genuke, hau da, limitean: $z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{0.52-0.50}{0.0539}\cdot\sqrt{n} \geq 2.3263$

$$0.3711\cdot\sqrt{n} \geq 2.3263 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \geq 6.2695 \quad \Rightarrow \quad n \geq 39.3067$$

$$\boxed{n = 40}$$

Kontrasteko erabakia.Kasu honetan hipotesi nulua errefusa daiteke, izan ere $\boxed{KE = z \in EK}$ betetzen baita. Hortaz, berunaren kontzentrazioak Airearen Kalitateko Europar Zuzentarauak ezarritako mugak gainditzen dituela onar daiteke $(z = ke = 2.3468 \in EK)$.



Matematika Aplikatua Saila
Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola
Euskal Herriko Unibertsitatea
Rafael Moreno "Pitxitxi" 3 Pasealekua
48013 Bilbao

4. ARIKETA

Irudien konpresore baten eraginkortasuna aztertzeko, 6 irudi konprimitu gabeko fitxategietan gorde ziren eta beste bost irudi gorde ondoren konprimitu egin ziren. Fitxategien tamaina, Kb-tan, honakoa izan zen:

KONPRIMITU GABE	20.4	62.5	61.3	44.2	11.1	23.7
KONPRIMITUTA	1.2	6.9	38.7	20.4	17.2	

Irudien tamainak parametro ezezagunen banaketa normala jarraitzen duela suposatuz: (1.) %5eko adierazgarritasun mailaz populazioen bariantzak bat datozen zehazteko hipotesi kontraste bat egin (4 puntu).

Hipotesi kontrastea alde bikoa da: $\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_a: & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

Hurrengo baldintzak izanik

$$\left.\begin{array}{l}\text{Banaketa normala} \\ \mu_1, \mu_2 \text{ ezezagunak}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\left\{ S_1^2 / S_2^2 \notin \left[F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}, F_{n-1,m-1;\alpha/2} \right] \right\}}^{\text{Eskualde kritikoa}}$$

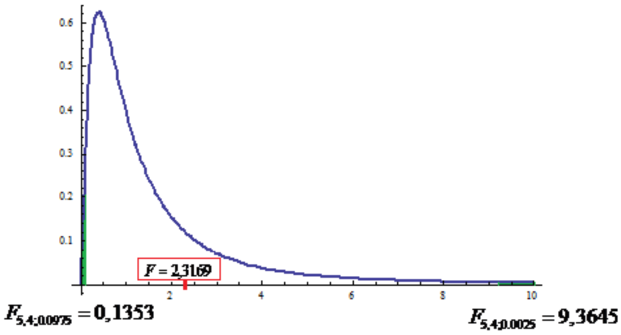
Kontrasterako estatistikoa ondorengo da:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{483,12}{208,517} = 2.316933392$$

Eskualde kritikoaren mugak:

$$F_1 = F_{n-1,m-1;1-\alpha/2} = F_{5,4;0.975} = 0.13535672$$

$$F_2 = F_{n-1,m-1;\alpha/2} = F_{5,4;0.025} = 9.36447082$$

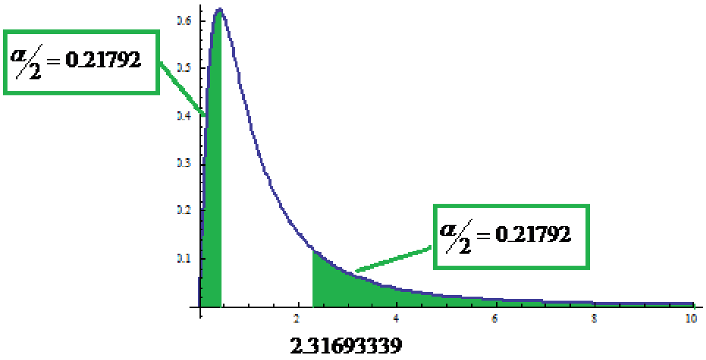


Hortaz: $EK = \left\{ S_1^2 / S_2^2 \notin [0.1354,\ 9.3645] \right\}$. $F = 2.317 \notin EK$ betetzen denez $\Rightarrow$ %5 adierazgarritasun mailaz H_0 hipotesi nulua onar daiteke, beraz, %5 adierazgarritasun mailaz populazioko bariantzak bat datozela onar daiteke.

(2.) Aurreko kontrastearen p-balioa kalkulatu. Lortutako emaitza azaldu (2 puntu).

$$F_{5,4;\,\alpha/2} = 2.31693339 \Rightarrow \alpha/2 \approx 0.21792692 \Leftrightarrow \alpha = p-balioa \approx 2 \times 0.21792692 = 0.43585384$$

Beraz, ondorengo irudian ikus daitekeenez kontrastearen konfiantza maila $\%43.59$ izango da.



(3.) %95eko konfiantza-mailaz, populazioen batezbestekoen arteko diferentziaren konfiantza-tartea kalkulatu. Lortutako emaitza parametroen estimazioaren ikuspuntutik eta hipotesi kontrastearen ikuspuntutik interpretatu (4 puntu).

Bi populazioen (lagin bi daudelako) batezbesteko aritmetikoen tarte-estimazio bat da (laginak independenteak dira, gainera n = 6 $\neq$ m = 5). Laginen tamaina txikia da eta bariantzak ezezagunak baina berdinak dira (ariketa honetako (1.) atalean frogatu den bezala). Hortaz, probabilitate eredua Student-en t banaketa izango da:

$$t_1 = \pm t_{\upsilon=n+m-2=9\,;\,\alpha=\%95} \equiv \pm t_{\upsilon=9;\alpha=\%97.5} = \pm 2.262157158$$

eta gerta daitekeen errorea (edo estimazioaren errorea) ondorengoa da

$$\sigma_{\widehat{\mu_1-\mu_2}} = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = 19.0095312\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}} = 19.0095312\times 0.6055 = 11.50625402$$

Hortaz, konfiantza tartea hurrengo eran adieraz daiteke

$$[l_-,\mathcal{L}_+]_\alpha = \widehat{\mu_1-\mu_2} \pm t_1\sigma_{\widehat{\mu_1-\mu_2}} = 20.32 \pm 2.2622\times 11.50625402 = [-5.7089549,\, 46.3489549]$$

Estimazio honen interpretazioa honakoa da

$$\mathbb{P}\left(l_- = -5.7089549 \le \widehat{\mu_1-\mu_2} \le \mathcal{L}_+ = 46.3489549\right) = 0.95$$

bi aldeko kontrastearen baliokidea dena.

Teoriari buruzko oharra: bariantza minimoa duen eta alboragabea den populazioko bariantzaren estimatzailea lagineko kuasibariantza da.